บทที่ 3

ทฤษฎี แนวความคิดและแบบจำลอง

ในการศึกษาพฤติกรรมการผลิตของเกษตรกรในการผลิต ข้าว ข้าวโพดและถั่วเหลือง ต้องการที่จะศึกษา 3 ส่วนด้วยกันคือ *ส่วนแรก* เป็นการวิเคราะห์การตอบสนองอุปทานของข้าว ข้าวโพดและถั่วเหลืองต่อราคาที่เกษตรกรขายได้ ซึ่งได้ใช้ Dynamic Supply Response Model ของ Marc Nerlove ในการวิเคราะห์ *ส่วนที่สอง* จะเป็นการพยากรณ์ราคาที่เกษตรขายได้ของข้าว ข้าวโพดและถั่วเหลือง โดยใช้ Transfer Function Model ของ Box และ Jenkins ในการพยากรณ์ และใน *ส่วนที่สาม* จะเป็นการนำผลที่ได้จากส่วนแรกและส่วนที่สอง มาคาดคะเนพื้นที่เพาะปลูก เพื่อที่จะนำไปใช้ในการพิจารณาการวางแผนการผลิตข้าว ข้าวโพดและถั่วเหลือง ซึ่งรายละเอียดของแบบจำลองที่ใช้ในการศึกษาสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้คือ

3.1 <u>แบบจำลองการตอบสนองอุปทานต่อราคา (Supply Response to Price Model)</u>

Marc Nerlove[1] ได้ทำการศึกษาการตอบสนองอุปทานสินค้าเกษตรต่อราคา โดยได้ใช้แบบจำลองในการศึกษาด้วยกัน 2 แบบจำลองคือ แบบจำลองการคาดคะเนการปรับตัว (Adaptive Expectation Model) ใช้สำหรับคาดคะเนราคากับแบบจำลองการปรับตัวเชิงส่วน (Partial Adjustment Model) ซึ่งใช้สำหรับการคาดคะเนผลผลิต ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ คือ

การคาดคะเนราคาได้ใช้แบบจำลองการคาดคะเนการปรับตัว (Adaptive Expectation Model) มาอธิบาย ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$P^*_t = P^*_{t-1} + \beta\,[\,P_{t-1} - P^*_{t-1}\,]\;, \qquad 0 < \beta \le 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

โดยที่ค่า β เป็นค่าคงที่ ถ้า β เท่ากับศูนย์ ราคาจริงจะไม่มีผลต่อราคาคาดคะเน แต่ถ้าค่า β มีค่าเท่ากับหนึ่ง ราคาที่คาดคะเนจะเท่ากับราคาในปีที่ผ่านมา ซึ่งจะเหมือนกับ naive model จึงเรียกค่า β ว่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการคาดคะเน*

---

[1] Marc Nerlove, The Dynamic of Supply : Estimate of Farmer' Response to Price, (1961), p. 53 - 65

*ถ้า P^*_t และ P_t แสดงอยู่ในรูป logarithms ทั้งราคาที่คาดคะเนและราคาจริง ดังนั้น ค่า β จะเป็น Hick's elasticity of expectation เพราะว่า $\dfrac{\partial P^*_t}{\partial P_{t-1}} = \beta$

จากสมการที่ (1) สามารถ derived ได้เป็น

$$P^*_t = \beta P_{t-1} + (1-\beta) P^*_{t-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

หา first order difference ของสมการที่ (2) เพื่อหาค่า P^*_t ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับ t จะได้เท่ากับ

$$P^*_t = H(1-\beta)^t + \sum_{\lambda=0}^{t} \beta(1-\beta)^{t-\lambda} P_{\lambda-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_(3)}$$

ค่า H เป็นค่าคงที่ซึ่งจะขึ้นอยู่กับ initial conditions สมมุติว่าถ้าอยู่ในดุลยภาพ ก่อนที่เวลา t= 0 และสมมุติต่อไปในอนาคตว่า ราคาจะ deviations เข้าสู่จุดดุลยภาพ เวลา t=0 ดังนั้น ค่า H จะเท่ากับศูนย์ สมการที่ (3) ก็จะเปลี่ยนมาเป็น

$$P^*_t = \sum_{\lambda=0}^{t} \beta(1-\beta)^{t-\lambda} P_{\lambda-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_(4)}$$

จะเห็นว่าราคาที่คาดคะเนจะถูกถ่วงน้ำหนัก (weighted) จากราคาเฉลี่ยของปีที่ผ่านมา เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับค่าของ β และจะลดลงเมื่อย้อนเวลาถอยหลังไปเรื่อยๆ เพราะว่าค่า β จะอยู่ระหว่างศูนย์กับหนึ่ง

สำหรับการคาดคะเนผลผลิต ได้ใช้แบบจำลองการปรับตัวเชิงส่วน (Partial Adjustment model) ในการวิเคราะห์ โดยดูสัดส่วนของความแตกต่างระหว่างผลผลิตที่ต้องการ (X^*_t) กับผลผลิตจริง (X_t) แสดงด้วยสมการ ดังนี้

$$X_t - X_{t-1} = \gamma [X^*_t - X_{t-1}], \qquad 0 < \gamma \leq 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(5)}$$

โดยสมมุติค่า γ เป็นค่าคงที่ และหมายถึงค่าความยืดหยุ่นหรือค่าสัมประสิทธิ์แห่งการปรับตัว ซึ่งจะต้องเขียนอยู่ในรูปของ logarithmic terms หรือ absolute terms

จากสมการที่ (5) หา first-order difference ของ X_t วิธีการก็เหมือนกับกรณีการคาดคะเนราคา สามารถ solved หา X_t ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับ X^* ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป deviation from ได้ดังนี้

$$X_t = \sum_{\lambda=0}^{t} \gamma(1-\gamma)^{t-\lambda} X^*_\lambda \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(6)}$$

สมมุติ ความสัมพันธ์ระหว่างการคาดคะเนราคาในอนาคตกับระดับผลผลิต สามารถเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$X^*_t = a\,P^*_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(7)}$$

นำสมการที่ (7) ไปแทนในสมการที่ (6) และแทนค่า P^*_t ที่ได้จากสมการที่ (4) ด้วย ผลที่ได้ดังสมการต่อไปนี้ คือ

$$X_t = a\beta\gamma \sum_{\mu=0}^{t} (1-\gamma)^{t-\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} (1-\beta)^{\mu-\lambda} P_{\lambda-1}$$

$$= a\beta\gamma\{ P_{t-1} + [(1-\beta) + (1-\gamma)] P_{t-2} + [(1-\beta)^2 + (1-\beta)(1-\gamma) + (1-\gamma)^2] P_{t-3} + [(1-\beta)^3 + (1-\beta)^2(1-\gamma) + (1-\beta)(1-\gamma)^2 + (1-\gamma)^3] P_{t-4} + \ldots \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(8)}$$

จากสมการที่ (8) จะเห็นว่าค่าพารามิเตอร์ β,γ มีลักษณะที่เป็น symmetrically ที่แสดงในเทอมของ X_t ซึ่งไม่สามารถแยกผลกระทบของค่า β,γ ได้ชัดเจน แต่อย่างก็ตาม Nerlove ได้เสนอว่าจากความสัมพันธ์ระหว่าง X^*_t กับ P^*_t ในสมการที่ (7) สามารถที่จะหาค่า P^*_t โดยการแทนค่าด้วย lagged 1 period ของ P^*_t แล้วนำไปแทนในสมการที่ (2) ซึ่งจะได้ผลดังนี้

$$P^*_t = \beta P_{t-1} + (1-\beta)\frac{X_{t-1}}{a} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(9)}$$

จากนั้นนำสมการ (9) ไปแทนในสมการ (7) ได้ผลดังนี้

$$X^*_t = a\beta P_{t-1} + (1-\beta) X_{t-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(10)}$$

นำสมการ (10) ไปแทนในสมการ (5) ได้ผลดังนี้

$$X_t = a\beta P_{t-1} + [(1-\beta) + (1-\gamma)] X_{t-1} - (1-\beta)(1-\gamma) X_{t-2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(11)}$$

จากสมการที่ (11) ค่า β และ γ จะเป็นตัวกำหนดรูปแบบของสมการ โดยที่ค่าความยืดหยุ่นของการคาดคะเน (β) กับค่าความยืดหยุ่นของการปรับตัว (γ) มีค่าได้สองกรณีคือ กรณีแรก ค่า β และ γ มีค่าไม่เท่ากับหนึ่ง และกรณีที่สองคือ ค่า β และ γ มีค่าเท่ากับหนึ่งหรือค่าใดค่าหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง ซึ่งจะทำให้เทอมของ X_{t-2} เท่ากับศูนย์ นอกจากนั้น Nerlove ยังได้นำตัวแปรนอกระบบเพิ่มขึ้นมาอีกคือ Z_t ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$X^*_t = a_1 P^*_t + a_2 Z_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(12)}$$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถทำการเปลี่ยนแปลงสมการให้อยู่ในรูปที่สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X_t &= a_1\beta\gamma P_{t-1} + [\,(1-\beta) + (1-\gamma)\,]\, X_{t-1} \\ &\quad - (1-\beta)(1-\gamma)\, X_{t-2} + a_2\gamma Z_t - a_2(1-\beta)\gamma Z_{t-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(13)} \end{aligned}$$

แบบจำลองการศึกษาการตอบสนองอุปทานแบบ Nerlovian Dynamic Supply Response ที่กล่าวมาเป็นลำดับ สามารถสรุปได้เป็นสมการหลัก 3 สมการดังนี้

$$X^*_t = \alpha_0 + \alpha_1 P^*_t + \alpha_2 Z_t + u_t$$

$$P^*_t = P^*_{t-1} + \beta\,(\,P_{t-1} - P^*_{t-1}\,) \qquad \text{(Adaptive Expectation Model)}$$

$$X_t = X_{t-1} + \gamma\,(\,X^*_t - X_{t-1}\,) \qquad \text{(Partial Adjustment Model)}$$

โดยกำหนดให้

X_t = ผลผลิตจริง ณ เวลา t

X^*_t = ผลผลิตที่คาดคะเน ณ เวลา t

P_t = ราคาจริง ณ เวลา t

P^*_t = ราคาที่คาดคะเน ณ เวลา t

Z_t = ปัจจัยภายนอกระบบสมการอื่น ๆ ที่กระทบต่ออุปทาน ณ เวลา t

β = สัมประสิทธิ์แห่งการคาดคะเนราคา

γ = สัมประสิทธิ์แห่งการปรับตัวผลผลิต

3.1.1 <u>แบบจำลองที่ใช้ในการประมาณค่า</u>

จากสมการของ Nerlove ทั้ง 3 สมการดังนี้คือ

$$A^*_t = \alpha_0 + \alpha_1 P^*_t + \alpha_2 Z_t + u_t \qquad (1)$$

$$P^*_t - P^*_{t-1} = \beta (P_{t-1} - P^*_{t-1}) \qquad (2)$$

$$A_t - A_{t-1} = \gamma (A^*_t - A_{t-1}) \qquad (3)$$

(เปลี่ยนตัวแปรจาก $X_t \Longrightarrow A_t$)

สำหรับตัวแปรต่างๆที่ใช้ในการประมาณค่าจะเหมือนกับตัวแปรในสมการของ Nerlove ยกเว้นตัวแปรผลผลิต (X^*_t) จะใช้ตัวแปรพื้นที่เพาะปลูกแทน (A^*_t)

จากนั้นนำสมการที่ (1) - (3) มาเขียนให้อยู่ในรูปของ logarithms ได้ดังนี้ *

$$\log A^*_t = \log \alpha_0 + \alpha_1 \log P^*_t + \log u_t \qquad (4)$$

$$\log P^*_t - \log P^*_{t-1} = \beta (\log P_{t-1} - \log P^*_{t-1}) \qquad (5)$$

$$\log A_t - \log A_{t-1} = \gamma (\log A^*_t - \log A_{t-1}) \qquad (6)$$

จากสมการที่ (1) $\Longrightarrow$ (4) จะเห็นว่าตัวแปร Z_t ถูกตัดออกไป ก็เพราะว่ายังไม่ทราบว่าจำเป็นต้องนำมาใส่ไว้หรือไม่ ต้องทำการประมวลผลก่อนจึงจะสามารถทราบได้ ซึ่งตัวแปร Z_t เป็นตัวปรับทำให้สมการสมบูรณ์มากขึ้น เช่น ตัวแปรแนวโน้มเวลา (Time Trend) เป็นต้น

ในการศึกษาครั้งนี้ สมมติให้พื้นที่การเพาะปลูกที่คาดคะเนเท่ากับพื้นที่เพาะปลูกจริง (หรือสมมติให้ค่า γ =1) ซึ่งจะทำให้ $A^*_t = A_t$ และนำไปแทนในสมการที่ (4) ได้ผลดังนี้คือ

$$\log A_t = \log \alpha_0 + \alpha_1 \log P^*_t + \log u_t \qquad (7)$$

$$\log P^*_t = \beta \log P_{t-1} + (1 - \beta) \log P^*_{t-1} \qquad (8)$$

จะเห็นว่าจากสมการที่ (4) $\Rightarrow$ (7) ตัวแปร A^*_t เปลี่ยนเป็น A_t และจากสมการที่ (5) $\Rightarrow$ (8) เพียงแต่เขียนรูปแบบของสมการใหม่

---

*จากสมการที่ (1) เขียนให้อยู่ในรูปของ Cobb-Douglas ส่วนสมการที่ (2) & (3) เขียนให้อยู่ในรูปของ Ratio ได้ผลดังนี้

$$A^*_t = \alpha_0 (P^*_t)^{\alpha_1} u_t$$

$$[P^*_t / P^*_{t-1}] = [P_{t-1} / P^*_{t-1}]^{\beta}$$

$$[A_t / A_{t-1}] = [A^*_t / A_{t-1}]^{\gamma}$$

จากนั้น take log ทั้ง 3 สมการเพื่อให้อยู่ในรูปของ linear ได้ผลดังสมการที่ (4) , (5) & (6)

จากการที่กำหนดให้ค่า $\gamma = 1$ เพื่อที่จะทำการศึกษาเฉพาะในกรณีของ Adaptive Expectation Model เท่านั้น ($\beta \neq 1$)

จากนั้นนำสมการที่ (7) มาเขียนเป็น lagged 1 period ได้ผลดังนี้คือ

$$\log A_{t-1} = \log \alpha_0 + \alpha_1 \log P^*_{t-1} + \log u_{t-1} \qquad \text{(9)}$$

จากสมการที่ (9) ย้ายข้างสมการเพื่อหาค่าของ $\log P^*_{t-1}$ ได้ผลดังนี้

$$\log P^*_{t-1} = \frac{1}{\alpha_1}\left[\log A_{t-1} - \log \alpha_0 - \log u_{t-1}\right] \qquad \text{(10)}$$

นำสมการที่ (10) ไปแทนในสมการที่ (8) ได้ผลดังนี้คือ

$$\log P^*_t = \beta \log P_{t-1} + \frac{(1-\beta)}{\alpha_1}\left[\log A_{t-1} - \log \alpha_0 - \log u_{t-1}\right] \qquad \text{(11)}$$

นำสมการที่ (11) ไปแทนในสมการที่ (7) ได้ผลดังนี้คือ

$$\log A_t = \log \alpha_0 + \alpha_1 \left\{ \beta \log P_{t-1} + \frac{(1-\beta)}{\alpha_1}\left[\log A_{t-1} - \log \alpha_0 - \log u_{t-1}\right] \right\} + \log u_t \qquad \text{(12)}$$

$$\log A_t = \log \alpha_0 + \alpha_1\beta \log P_{t-1} + (1-\beta) \log A_{t-1} - (1-\beta) \log \alpha_0 - (1-\beta)\log u_{t-1} + \log u_t \qquad \text{(13)}$$

$$\log A_t = \log \alpha_0 - (1-\beta) \log \alpha_0 + \alpha_1\beta \log P_{t-1} + (1-\beta) \log A_{t-1} + (\log u_t - (1-\beta)\log u_{t-1}) \qquad \text{(14)}$$

$$\log A_t = \beta \log \alpha_0 + \alpha_1\beta \log P_{t-1} + (1-\beta) \log A_{t-1} + v_t \qquad \text{(15)}$$

$$\boxed{\log A_t = a_0 + a_1 \log P_{t-1} + a_2 \log A_{t-1} + v_t}$$

โดยกำหนดให้ $a_0 = \beta \log \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1\beta$, $a_2 = (1-\beta)$

และ $v_t = \log u_t - (1-\beta)\log u_{t-1}$

<u>โดยกำหนดให้</u>

A_t = พื้นที่เพาะปลูก ณ เวลา t

A_{t-1} = พื้นที่เพาะปลูก ณ เวลา t-1

P_{t-1} = ราคาที่เกษตรกรขายได้ ณ เวลา t-1

สำหรับตัวแปรราคาที่เกษตรกรขายได้มีอยู่ 2 ราคาด้วยกัน คือ

1. ราคาที่เกษตรกรขายได้จริงๆ ในปีนั้น (P_t)
2. ราคาที่เกษตรกรขายได้ปรับด้วยดัชนีราคาผู้บริโภค (P_{it})

สูตรที่ใช้ในการปรับ คือ $P_{it} = \dfrac{P_t \times 100}{CPI_t}$

โดยที่

CPI_t = ดัชนีราคาผู้บริโภค (Consumer Price Index) ณ เวลา t

สาเหตุที่นำดัชนีราคาผู้บริโภคมาปรับ ก็เพื่อที่จะพิจารณาราคาในลักษณะ Real terms จึงขจัดอิทธิพลของปัญหาเงินเฟ้อ (Inflation) ออกไป

<u>ค่าสัมประสิทธิ์</u>

a_0 = ค่า intercept

a_1 = ค่าความยืดหยุ่นระหว่างราคาในปีที่ผ่านมาต่อพื้นที่เพาะปลูกในปีปัจจุบัน

a_2 = ค่าความยืดหยุ่นระหว่างพื้นที่เพาะปลูกในปีที่ผ่านมาต่อพื้นที่เพาะปลูกในปีปัจจุบัน

v_t = ค่า error term

3.1.2 <u>วิธีการประมาณค่า</u>

จากแบบจำลอง Adaptive Expectation Model จะเห็นว่าในส่วนของค่า error term ซึ่งเท่ากับ $v_t = \log u_t - (1 - \beta)\log u_{t-1}$ อาจจะทำให้เกิดปัญหา serial correlation คือเกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่า u_t กับ u_{t-1} ซึ่งมีค่าความสัมพันธ์เท่ากับ $(1- \beta)$ โดยที่ $0<\beta\leq1$ ดังนั้น ในการประมาณค่าโดยใช้วิธี OLS จะต้องทำการตรวจสอบแบบจำลองที่ได้ว่าเกิดปัญหา serial correlation หรือไม่ ในกรณีที่เกิดปัญหา serial correlation จะต้องทำการแก้ไข แต่ถ้าไม่เกิดปัญหา serial correlation ก็สามารถใช้วิธี OLS ในการประมาณค่าได้

3.2 แบบจำลองการพยากรณ์ (Model Forecasting)

แบบจำลองที่ใช้สำหรับการพยากรณ์ราคาที่เกษตรกรขายได้ คือ Transfer Function Model ของ Box และ Jenkins[2] มีลักษณะเป็น Dynamic Model จึงมีความเหมาะสมสำหรับการศึกษาในครั้งนี้ เพราะว่าผลกระทบของตัวแปรมีลักษณะของความล่าช้าทางด้านเวลา (Time lag) เกิดขึ้น คือ ตัวแปรยังไม่ส่งผลกระทบต่อกันในทันที ต้องอาศัยช่วงระยะเวลาหนึ่งในการปรับตัว โดยกำหนดความสัมพันธ์เป็นดังนี้ คือ ราคาที่เกษตรขายได้เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับราคาขายส่ง ณ ตลาดกรุงเทพฯ และสามารถเขียนเป็นแบบจำลอง ได้ดังนี้

$$\boxed{Y_t = \nu(B)X_t + N_t}$$

โดยกำหนดให้

Y_t = the ouput series (ราคาที่เกษตรกรขายได้)

X_t = the input series (ราคาขายส่ง ณ ตลาดกรุงเทพฯ)

N_t = noise series

$\nu(B)$ = $(\nu_0 + \nu_1 B^1 + \cdots + \nu_k B^k)$

transfer function ระหว่าง Y_t กับ X_t

$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ = impluse response function

B = backword shift operator

k = order ของการ Transfer Function

เนื่องจากอาจต้องมีการปรับข้อมูล ถ้าข้อมูลเป็น nonstationary ต้องปรับให้เป็น stationary จึงทำให้สามารถเขียนแบบจำลองได้ใหม่หลังจากการปรับข้อมูลแล้ว ดังนี้

$$\boxed{y_t = \delta^{-1}(B)\omega(B)x_{t-b} + n_t}$$

โดยที่ $n_t = \dfrac{\theta(B)a_t}{\phi(B)} = \phi^{-1}(B)\theta(B)a_t$

$\nu(B) = \dfrac{\omega(B)}{\delta(B)} = \delta^{-1}(B)\omega(B)$

---

[2] Makridakis Wheelwright and Mcgee, **Forecasting Methods and Application**, (United of States of America, 1978), p. 485 - 488

โดยกำหนดให้

$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \cdots - \omega_s B^s$

$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \cdots - \delta_r B^r$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$

y_t = the transformed and differenced Y_t value

x_t = the transformed and differenced X_t value

a_t = a random noise value

b = ค่า delay ก่อนที่ x_t จะไปมีผลกระทบต่อ y_t

r,s,p,q และ b เป็นค่าคงที่

ค่า $\theta(B)$ และ $\phi(B)$ แสดงถึง moving average operaters และ autoregressive operraters ตามลำดับ ในส่วนของ noise term (n_t) ส่วนค่า $\omega(B)$ และ $\delta(B)$ แสดงถึง $\nu(B)$ สำหรับค่า r,s,p,q,b แบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือ (r,s,b) เป็นค่าพารามิเตอร์ใน transfer function model และค่า (p,q) เป็นค่าพารามิเตอร์ใน noise model ซึ่งบางครั้งอาจมี subscripts เป็น (p_n,q_n)

ต่อไปจะอธิบายถึงขั้นตอนการทำ transfer function model สำหรับการศึกษาในครั้งนี้จะใช้ input series 1 ตัว (หรือที่เรียกว่า bivariate) ซึ่งมีรายละเอียดต่างๆ ดังต่อไปนี้คือ

ขั้นตอนในการทำ Tranfer Function Model

สามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดรูปแบบ (Identification of the Model Form)

1.1 การเตรียมข้อมูล (Preparation of the Input and Output Series)

ในขัtation Model จะเห็นว่าในส่วนของค่า error term ซึ่งเท่ากับnput และ output sereis มาพิจารณาว่าข้อมูลเป็น stationary หรือ nonstationary ถ้าข้อมูลเป็น nonstationary คือมีค่า mean และหรือ variance ไม่คงที่เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป จะต้องทำให้ข้อมูลเป็น stationary ก่อนที่จะนำไปใช้ในขั้นตอนต่อไป ซึ่งในการทำให้ข้อมูลเป็น stationary คือมีค่า mean และ variance คงที่นั้น จะใช้ด้วยวิธีการ take difference และหรืออาจจะใช้วิธีการ transform ด้วยการ take logarithms ก็ได้ ซึ่งทั้ง 2 วิธี มีรายละเอียดดังต่อไปนี้ คือ

1.1.1 การ take difference

$$x_t = (1-B^0)^d X_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

โดยกำหนดให้

0 = order ของการ difference

d = degree ของการ difference

B (backword shift operater) จะแสดงถึง lag value

เช่น $(B^1)X_t = X_{t-1}$

$(B^2)X_t = X_{t-2}$

$(B^q)X_t = X_{t-q}$

การใช้ backword shift operator ก็เพื่อที่จะอธิบายรายละเอียดของการ difference เช่น การ difference order 1 degree 1 สามารถเขียนได้ดังนี้ คือ

$$x_t = X_t - X_{t-1}$$
$$= X_t - BX_t$$
$$= (1-B)X_t$$

การ take difference จะทำให้ข้อมูลมีค่า mean คงที่และยังสามารถช่วยแก้ปัญหาข้อมูลที่เกิด Seasonal ได้อีกด้วย เช่น ถ้าข้อมูลเป็นรายเดือนและเกิดปัญหา Seasonal ทุกเดือนธันวาคม สูตรการ difference ก็จะเป็น $(1-B^{12})X_t$ เป็นต้น

ดังนั้นการ difference ข้อมูลจะประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ การ difference เพื่อทำให้ข้อมูลมีค่า mean คงที่และการ difference เพื่อแก้ปัญหา Seasonal เช่น จากตัวอย่างข้างต้นสามารถเขียน backword shift operator ได้ดังนี้ คือ $(1-B)(1-B^{12})X_t$

1.1.2 การ take logarithms

$X_t = (X_t + m)^{\lambda}$ ถ้า $\lambda \neq 0$ ___________(2)

และ $X_t = \log(X_t + m)$ ถ้า $\lambda = 0$ ___________(3)

โดยที่ค่า m เป็นค่าคงที่และ $-1<\lambda<1$

ถ้า $\lambda = 1$ แสดงว่าไม่มีการ transformed ข้อมูล

ถ้า $\lambda = 0$ แสดงว่าข้อมูลอยู่ในรูป logarithms

ถ้า $\lambda = -1$ แสดงว่าเป็น inverse ข้อมูลตัวเอง

สำหรับวิธีการหาค่า λ ที่เหมาะสมนั้น จะใช้วิธีการของ BOX-COX ซึ่งประโยชน์ที่ได้จากค่า λ ก็คือทำให้ข้อมูลมีค่า variance คงที่

1.2 <u>การหารูปแบบของ input series (Prewhitenting the Input Series (X_t))</u>

ในการทำ transfer function model บางครั้งไม่สามารถที่จะควบคุม input series ได้โดยเฉพาะทางด้านธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ จึงต้องใช้วิธีการทำ Prewhitened เพื่อที่จะทำให้ควบคุม input series ได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะต้องอาศัยขบวนการของ ARIMA model เพื่อหารูปแบบของ input series สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\phi_x(B)\, x_t = \theta_x(B)\, \alpha_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(4)}$$

โดยกำหนดให้

$\phi_x(B)$ = autoregessive operator

$\theta_x(B)$ = moving average operator

α_t = random shock term

จากสมการที่ (4) สามารถที่จะหาค่า α_t ได้ดังนี้คือ

$$\frac{\phi_x(B)\, x_t}{\theta_x(B)} = \alpha_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(5)}$$

1.3 การหารูปแบบของ output series (Prewhitenting the Output Series (Y_t))

การทำ Prewhitened ของ output series ก็ใช้หลักการณ์เดียวกันกับกรณีของ input series ซึ่งสามารถเขียนสมการได้ดังนี้คือ

$$\phi_x(B)\, y_t = \theta_x(B)\, \beta_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(6)}$$

หรือสามารถเขียนสมการที่ (6) ได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้คือ

$$\frac{\phi_x(B)\, y_t}{\theta_x(B)} = \beta_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(7)}$$

1.4 การคำนวณค่า Cross- and Autocorrelations (Computing Cross- and Autocorrelations for the Prewhiting Input and Output Series)

ใน univariate ARIMA model การกำหนดรูปแบบของ model จะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ของ autocorrelation ส่วนใน bivariate MARIMA model (transfer function model) จะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ของ autocorrelation กับ cross-correlation โดยปกติแล้วค่า cross-correlation ก็มีความหมายใกล้เคียงกับค่า correlation แต่ที่เรียกว่า cross-correlation ก็เพราะว่าการทำ Prewhitened แยกกันระหว่าง input และ output series ซึ่งมีขั้นตอนในการคำนวณดังต่อไปนี้

ในขั้นแรกจะต้องคำนวณหาค่า covariance ระหว่างตัวแปร X และ Y (เขียนโดยปราศจาก supsripts) โดยใช้สูตรดังนี้คือ

$$C_{XY} = \mathbf{E}\{ (X - \overline{X}) (Y - \overline{Y}) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(8)}$$

จากนั้นก็สามารถหาค่า variances ของ C_{XY} กับ C_{YY} โดยเขียน supsripts ของตัวแปร X กับ Y และเขียนค่า k ซึ่งแสดงถึง time lag ดังนั้น ก็สามารถกำหนดค่า crosscovariances ของ $C_{XY}(k)$ กับ $C_{YX}(k)$ ได้ดังนี้คือ

$$C_{XY}(k) = \mathbf{E}\{ (X_t - \mu_x) (Y_{t+k} - \mu_y) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(9)}$$

$$C_{YX}(k) = \mathbf{E}\{ (Y_t - \mu_y) (X_{t+k} - \mu_x) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(10)}$$

โดยกำหนดให้

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ในสมการที่ (9) X leads Y by k periods

ในสมการที่ (10) Y leads X by k periods

การประมาณค่า crosscovariances จากสมการที่ (9) และ (10) มีสูตรในการประมาณค่าดังนี้คือ

$$C_{XY}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \{ (X_t - \overline{X}) (Y_{t+k} - \overline{Y}) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(11)}$$

โดยกำหนดให้ค่า $\overline{X}$ และ $\overline{Y}$ เป็นค่า means ของ X และ Y

$$C_{XY}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \{ (Y_t - \overline{Y}) (X_{t+k} - \overline{X}) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(12)}$$

โดยกำหนดให้

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(โดยปกติค่า $C_{XY}(k) \neq C_{YX}(k)$ แต่ค่า $C_{XY}(k) = C_{YX}(-k)$)

(ในการคำนวณสามารถที่จะกำหนดให้ค่า autocovariances แทนด้วย X for Y หรือ Y for X และค่า simple variances แทนด้วย X for Y หรือ Y for X และกำหนดให้ค่า $k = 0$)

ผลที่ได้จากการประมาณค่า crosscovariances ก็สามารถที่จะ convert ไปคำนวณค่า cross-correlations ได้ดังนี้คือ

$$r_{xy}(k) = \hat{\rho}_{XY}(k) = \frac{C_{XY}(k)}{\sqrt{C_{XX}(0)\, C_{YY}(0)}} = \frac{C_{XY}(k)}{S_X\, S_Y} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(13)}$$

โดยที่ค่า $k = \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$

S^2_X (standard deviations ของ X) = $C_{XX}(0)$

S^2_Y (standard deviations ของ Y) = $C_{YY}(0)$

ค่า cross-correlation ระหว่าง X และ Y ถูกกำหนดลำดับความสัมพันธ์ระหว่างค่า X ณ เวลา t กับค่า Y ณ เวลา t+k ($k = \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$) ถ้าค่า X เป็นตัวนำที่บ่งชี้ถึงค่า Y แล้ว X ณ เวลา t จะมีค่าเป็นบวกที่เกี่ยวข้องกับ Y ณ เวลา t+k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) และถ้าค่า X เป็นตัวบ่งชี้ Y ไปพร้อมกัน แล้ว X ณ เวลา t และ Y ณ เวลา t จะมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญ และถ้า X lags Y แล้ว Y ณ เวลา t จะมีความสัมพันธ์ที่มีค่าเป็นบวกกับ X ณ เวลา t+k โดยที่ค่า $k > 0$

ในการคำนวณค่า cross-correlations ในช่วงเวลาต่างๆ จะใช้สมการที่ (13) เป็นสมการหลักในการคำนวณ สามารถแสดงได้ด้วยสูตรดังนี้คือ

$$r_{XY}(0) = \frac{C_{XY}(0)}{S_x\, S_y} \quad , (k=0) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(14)}$$

$$r_{XY}(1) = \frac{C_{XY}(1)}{S_x\, S_y} \quad , (k=1) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(15)}$$

$$r_{XY}(2) = \frac{C_{XY}(2)}{S_x\, S_y} \quad , (k=2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(16)}$$

การคำนวณในกรณีที่ค่า k > 2 ก็จะใช้สูตรการคำนวณที่เหมือนกัน จะต่างกันตรงที่ใช้ time lag (k) ห่างกันออกไปเรื่อยๆ ส่วนจะใช้ค่า k ไปจนถึงค่าที่เท่าไรจึงจะมีความเหมาะสม ก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลชนิดนั้นๆว่าจะมีความสัมพันธ์ต่อกันยาวนานแค่ไหน

และในการคำนวณค่า cross-correlations ที่ค่า k เป็นลบนั้น ก็จะอาศัยคุณสมบัติของค่า crosscovariances ดังนี้คือ $C_{XY}(-k) = C_{YX}(k)$ เช่น ในกรณที่ค่า k=(-1) สูตรในการคำนวณก็จะแสดงได้ดังนี้คือ

$$r_{XY}(-1) = \frac{C_{YX}(1)}{S_x\, S_y} \quad , \{ k=(-1) \} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_(17)}$$

สำหรับในกรณีที่ค่า k < -1 ก็อาศัยสูตรในการคำนวณเช่นเดียวกับสมการที่ (17)

หลังจากที่คำนวณค่า cross-correlations ได้แล้ว อาจจะนำเสนอด้วยการทำ diagram เพื่อทดสอบดูก็ได้ โดยกำหนดช่วงเชื่อมั่นไว้เท่ากับ 95%แต่เมื่อลองพิจารณาการกระจายของค่า cross-correlations แล้วพบว่าใช้ในการพิจารณายาก Bartlett ได้เสนอว่าน่าจะพิจารณาจากตัวแปร 2 ตัว ใน white noise series ก็อาจที่จะใช้ทดสอบได้ว่าค่า cross-corelations ใดบ้างที่มีนัยสำคัญ และใช้ค่า standard error โดยประมาณเท่ากับ $\sqrt{1/n}$ และ Bartlett ยังได้เสนอแนวความคิดในกรณีที่ series ทั้ง 2 ไม่มีความสัมพันธ์กัน การทดสอบค่า cross-correlations ที่ lag k จะใช้ค่า standard error ในการทดสอบโดยมีดังนี้คือ

$$\text{std. error of } r_{xy}(k) = \sqrt{\frac{1}{n-k}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(18)}$$

(ในกรณีที่ค่า k มีค่าเป็นลบ จะใช้ค่า absolute แทน)

จะเห็นว่าค่า cross-correlation จะมีส่วนสำคัญในการกำหนดรูปแบบของ MARIMA model ที่เหมาะสม และค่า standard error จะเป็นค่าที่ใช้ทดสอบว่าค่าใดบ้างของ cross-correlations ที่มีนัยสำคัญทางสถิติ

สำหรับการคำนวณค่า autocorrelation ก็สามารถใช้สูตรในการคำนวณคล้ายๆกับในกรณีของ cross-correlation เพียงแต่เปลี่ยนตัวแปรให้เป็นตัวเดียวกันเท่านั้น ในกรณีที่ทำการ prewhitened input และ output series ซึ่งจะถูกกำหนดให้เป็น α_t และ β_t ตามลำดับนั้น ในการคำนวณค่า cross correlations ($r_{\alpha\beta}$) และ autocorrelations ($r_{\alpha\alpha}$,$r_{\beta\beta}$) สัญญลักษณ์จะเปลี่ยนจาก X กับ Y เป็น α กับ β ตามลำดับ แต่วิธีการคำนวณนั้นเหมือนเดิม

ประโยชน์ที่ได้จากการคำนวณค่า cross-correlations และค่า autocorrelations ก็เพื่อที่จะนำมาใช้ในการกำหนดรูปแบบที่เหมาะสมของ MARIMA models

1.5 <u>การประมาณค่า impulse response weights (Direct Estimation of the Impulse Response Weights)</u>

จากการทำ Prewhitned ของ input series ในขั้นตอนที่ 1.2 และการทำ Prdwhitened ของ output series ในขั้นตอนที่ 1.3 และการคำนวณค่า cross-correlations ระหว่าง Prewhitend series ทั้งสอง ในขั้นตอนที่ 1.4 จากนั้นก็นำผลที่ได้จากขั้นตอนที่ผ่านมาเหล่านี้ไปคำนวณค่า impulse response weights โดยใช้สูตรการคำนวณดังนี้คือ

$$\upsilon_k = \frac{r_{\alpha\beta}(k)\, S_\beta}{S_\alpha} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(19)}$$

โดยกำหนดให้

υ = impulse response weights

$r_{\alpha\beta}$ = cross-correlation ระหว่าง α และ β

S_β = standard devation ของ β

S_α = standard devation ของ α

จาก transfer function model สามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้คือ

$$y_t = \upsilon(B)\, x_t + n_t \qquad \text{(สมมติค่า b=0)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(20)}$$

จากการทำ Prewhitened ข้อมูล y_t และ x_t สามารถเขียนสมการที่ (20) ได้ใหม่ดังนี้คือ

$$\frac{\phi_x(B)\, y_t}{\theta_x(B)} = \upsilon(B)\frac{\phi_x(B)\, x_t}{\theta_x(B)} + \frac{\phi_x(B)\, n_t}{\theta_x(B)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(21)}$$

หรือ

$$\beta_t = \upsilon(B)\, \alpha_t + \varepsilon_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(22)}$$

โดยที่ ε_t เป็นค่าที่ transformation จาก noise series โดยมีสมมติฐานที่ว่าไม่มีความสัมพันธ์กับค่า α_t series จากนั้นนำค่า α_{t-k} คูณทั้งสองข้างของสมการที่ (22) แล้วจึง take expectation ได้ผลดังนี้คือ

$$E[\alpha_{t-k}\ \beta_t] = \upsilon_0 E(\alpha_{t-k}\alpha_t) + \upsilon_1 E(\alpha_{t-k}\alpha_{t-1})$$
$$+ \ldots + E(\alpha_{t-k}\varepsilon_t)$$
$$C_{\alpha\beta}(k) = \upsilon_k C_{\alpha\alpha}(t\text{-}k) + 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(23)}$$

(เพราะว่าค่า α และ ε สมมติว่าเป็นอิสระต่อกัน)

จะเห็นว่าเทอมของ υ_k ที่ยังปรากฏอยู่ในสมการที่ (23) ก็เพราะว่า α_{t-k} เป็นอิสระกับ α_t ทั้งหมด และสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้ คือ

$$\upsilon_k = \frac{C_{\alpha\beta}(k)}{S^2_\alpha} = \frac{r_{\alpha\beta}(k)\, S_\beta}{S_\alpha} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(24)}$$

1.6 <u>การกำหนดค่า r,s,b (Specifying (r,s,b) for the Transfer Function Model)</u>

ค่าพารามิเตอร์ในส่วนของ transfer function model ประกอบไปด้วยค่าของ (r,s,b) โดยที่ค่า r จะอ้างถึง degree ของ $\delta(B)$, s จะอ้างถึง degree ของ $\omega(B)$ และ b จะแสดงถึงค่า delay ที่เขียนเป็น subsript ของ x_{t-b} ซึ่งในการพยากรณ์ในขั้นสุดท้าย จะต้องถูกกำหนดจากค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 นี้ สำหรับวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 จะกล่าวถึงดังต่อไปนี้คือ

ในส่วนของค่าพารามิเตอร์ b อาจจะพิจารณาได้จากค่า cross-correlations ได้ดังนี้ เช่น $r_{\alpha\beta}(0) = r_{\alpha\beta}(1) = 0$ แต่ $r_{\alpha\beta}(3) \neq 0$ แสดงว่าค่า b จะเท่ากับ 2 ซึ่งหมายความว่าค่า absolute lag 2 ที่ input series α เริ่มมีผลกระทบต่อ output series β ต่อไปพิจารณาสมการทั้ง 2 ดังนี้ คือ

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$
$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + n_t$$

กำหนดให้สมการทั้ง 2 เท่ากัน และสามารถเขียนสมการได้ใหม่ ดังนี้คือ

$$\nu(B)x_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(25)}$$

จากสมการที่ (25) แสดงความสัมพันธ์ของค่า $\nu(B)$, $\omega(B)$ และ $\delta(B)$ ซึ่งสามารถทำการกระจายสัมประสิทธิ์ของความสัมพันธ์ได้ดังนี้ คือ

$$\nu_j = 0 \quad \text{for} \quad j < b \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(26)}$$

$$\nu_j = \delta_1\nu_{j-1} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} + \omega_0 \quad \text{for} \quad j = b \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(27)}$$

$$\nu_j = \delta_1\nu_{j-1} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} - \omega_{j-b} \quad \text{for} \quad j = b + 1, \ldots, b + s \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(28)}$$

$$\nu_j = \delta_1\nu_{j-1} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} \quad \text{for} \quad j > b + s \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(29)}$$

ถ้าค่า b=0 ก็จะไม่มี ν_j=0 ในสมการที่ (26) และถ้าค่า s=0 ก็จะไม่มีสมการที่ (28) และถ้าค่า subsript ของ ν มีค่าเป็นลบ ค่า ν จะกำหนดให้เท่ากับศูนย์ และสามารถแสดงค่า (r,s,b) ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้คือ

ค่า b จะแสดงถึงค่า x_t ที่ไม่มีผลกระทบต่อ y_t จนกระทั่งถึง period ที่ t+b ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$y_t = 0x_t + 0x_{t-1} + 0x_{t-2} + \ldots + \omega_0 x_{t-b}$$

ค่า s จะแสดงถึงระยะเวลาการส่งผลกระทบของ x_t ที่ไปมีผลกระทบต่อ y_t ซึ่งแสดงได้ดังนี้

y_t influenced by (x_{t-b} , x_{t-b-1} , x_{t-b-2} , . . . , x_{t-b-s})

และค่า r จะแสดงถึงความสัมพันธ์ของตัวเองใน period ที่ผ่านมา ซึ่งแสดงได้ดังนี้

y influenced by (y_{t-1} , y_{t-2} , y_{t-3} , . . . , y_{t-r})

โดยสรุปแล้วค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ที่กำหนดด้วยค่าที่เหมาะสม จะมีส่วนช่วยในการพยากรณ์ที่ถูกต้องยิ่งขึ้น ซึ่งการพิจารณาค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 นี้ สามารถพิจารณาจากค่า cross-correlations ได้ดังนี้ คือ

1. ค่า b เป็นค่าเริ่มแรกที่ time lag ของ cross-correlations มีค่าไม่เท่ากับศูนย์
2. ค่า s เป็นค่า further time lag ของ cross-correlations ที่แสดงรูปแบบได้ไม่ชัดเจน
3. ค่า r เป็นค่า further time lag ของ cross-correlations ที่สามารถแสดงรูปแบบได้ชัดเจน

1.7 <u>การประมาณค่าเบื้องต้นของ noise series (Preliminary Examination of the Noise Series)</u>

จากขั้นที่ 1.5 ได้ประมาณค่า ν - weights จึงทำให้สามารถประมาณค่า Preliminary ของ noise series ได้ดังนี้ คือ

$$y_t = \nu(B)x_t + n_t$$

จากสมการข้างต้น ก็สามารถหาค่า n_t ได้ดังนี้คือ

$$n_t = y_t - \nu_0 x_t - \nu_1 x_{t-1} - \nu_2 x_{t-2} - \ldots - \nu_g x_{t-g} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(30)}$$

โดยที่ค่า g เป็นค่าที่กำหนดขึ้นเองตามความเหมาะสม

1.8 การกำหนดรูปแบบของ noise series (Specifying (p_n,q_n) for the ARIMA (p_n,d,q_n) Model of the Noise Series)

หลังจากที่ใช้สมการที่ (30) ในการประมาณค่า n_t แล้ว จะนำค่าที่ได้มาวิเคราะห์หารูปแบบของ ARIMA เพื่อที่จะหาค่าที่เหมาะสมของ ARIMA (p_n,d,q_n) โดยที่ค่า autocorrelations และ partial autocrrelations จะเป็นตัวกำหนดค่า p_n และ q_n ซึ่งแสดงถึงค่า autoregressive และ moving average ตามลำดับ และสมการของ noise series n_t สามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\phi_n(B)\, n_t = \theta_n(B)\, a_t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(31)}$$

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง (Estimation of the Paramiters of the Transfer Function Model)

จากขั้นตอนที่ 1 เป็นการกำหนดรูปแบบของที่เหมาะสมของ transfer function model ซึ่งได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้คือ (r,s,b) = (2,0,2) และ (p_n,q_n) = (1,0)* และจากค่าพารามิเตอร์ที่ได้นั้น สามารถนำมาเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ คือ

$$y_t = \frac{\omega_0 \quad x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} + \frac{a_t}{(1 - \phi_1 B)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(32)}$$

จากสมการที่ (32) จะต้องทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้คือ ω_0 , δ_1 , δ_2 ,และ ϕ_1 สำหรับวิธีการประมาณค่าจะใช้วิธีของ Marquardt algorithm ซึ่งจะเป็นการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุด

2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์เบื้องต้น (Preliminary Estimates of the Parameters)

จากสมการที่ (25) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง impulse function $\upsilon(B)$ และค่าสัมประสิทธิ์ของ function $\delta(B)$ และ $\omega(B)$ ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ยิ่งขึ้นจากสมการที่ (26) - (29) และเมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ของ (r,s,b) = (2,0,2) ก็สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ เพื่อที่จะนำไปคำนวณค่าพารามิเตอร์เบื้องต้นได้ดังนี้ คือ

---

* สามารถดูรายละเอียดได้จากภาคผนวก ก.

$v_0 = 0$ ______(1)

$v_1 = 0$ ______(2)

$v_2 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_0 + \omega_0$ ______(3) ________(33)

$v_4 = \delta_1 v_3 + \delta_2 v_2$ ______(4)

$v_5 = \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3$ ______(5)

จากขั้นตอนที่ 1.5 ได้คำนวณค่า impulse response weights ไว้เรียบร้อยแล้ว จึงนำค่าเหล่านั้นเข้ามาแทนในสมการที่ (33) เพื่อ solve หาค่าพารามิเตอร์ที่ยังไม่ทราบคือ ω_0 , δ_1 และ δ_2

สำหรับค่าพารามิเตอร์ของ noise คือ ϕ_1 ก็ใช้สูตรในการคำนวณดังนี้ คือ

$$\phi_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r^2_1}$$

โดยกำหนดให้

r_1 , r_2 = ค่า first two autocorrelation ของ noise series

เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ต่างๆได้ครบหมดแล้ว จึงนำค่าพารามิเตอร์เข้าไปแทนในสมการที่ (32) ได้ผลดังนี้ คือ

$$y_t = \frac{0.252 \ x_{t-2}}{(1 - 0.592B + 0.504B^2)} + \frac{a_t}{(1 - 0.826B)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(34)}$$

2.2 <u>การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุด (Final Estimation of the Parameters)</u>

การคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุดจะใช้วิธีการของ Marquart alogrihm เพื่อทำการ solve หาค่าพารามิเตอร์ไปเรื่อยๆ (หรือที่เรียกว่า iterations process) จนกว่าจะได้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม พร้อมกันนั้นจะทำการตรวจสอบความมีนัยสำคัญทางสถิติของค่าพารามิเตอร์ที่ได้แต่ละตัว ซึ่งผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม* สามารถแสดงได้ดังนี้ คือ

Left-Hand Side Paramiters

Delta (1):	0.575	t-ratio : 2.74
Delta (2):	- 0.484	t-ratio : -2.27

---

* สามารถดูรายละเอียดได้จากภาคผนวก ก.

Right-Hand Side Paramiters

Omega (0): 0.257 t-ratio : 2.73

AR Paramiters for Noise

Phi (1): 0.826 t-ratio : 11.82

MA Paramiters for Noise

Theta ไม่มี

จากนั้นนำค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมแล้ว ไปแทนค่าใน transfer function model (สมการที่ 32) ได้ดังนี้ คือ

$$y_t = \frac{0.257 \quad x_{t-2}}{(1 - 0.575B + 0.484B^2)} + \frac{a_t}{(1 - 0.826B)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(35)}$$

3. การทดสอบแบบจำลอง (Diagnostic Testing of the Transfer Function Model)

ผลที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 และ 2 ก็คือได้รูปแบบของแบบจำลองและค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เหมาะสม ตามลำดับนั้น ซึ่งรูปแบบของแบบจำลองและค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่ได้มานั้น ได้คัดเลือกมาจากหลายๆแบบและหลายๆค่า ดังนั้นในขั้นตอนนี้จึงเป็นการตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ออกมาเป็นแบบจำลองสุดท้ายแล้ว ซึ่งการตรวจสอบความเหมาะสมของ transfer function model มีสิ่งที่น่าสนใจอยู่ 2 อย่างด้วยกันก็คือ

1. final residual series ที่เรียกว่า a_t
2. ความสัมพันธ์ระหว่าง a_t series กับการ prewhitened input series หรือที่เรียกว่า α_t

สำหรับค่า α_t series สามารถการคำนวณได้จากขั้นตอนที่ 1.2 ส่วนค่าของ a_t series สามารถคำนวณได้ดังต่อไปนี้คือ

จาก transfer function model

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

นำค่า $\delta(B)\phi(B)$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ได้ผลดังนี้

$$\delta(B)\phi(B)y_t = \phi(B)\omega(B)\, x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)\, a_t$$

จากนั้นเขียน a_t ให้เป็น function ขึ้นอยู่กับค่าของ y , x และ a ในช่วง period ต่างๆ ซึ่งก็คือการนำสมการที่ (32) มาเขียนใหม่โดยให้ค่าของ a_t อยู่ทางซ้ายมือของสมการนั้นเอง และสามารถแสดงได้ดังนี้ คือ

$$y_t = \frac{\omega_0 \; x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} + \frac{a_t}{(1 - \phi_1 B)}$$

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)(1 - \phi_1 B)\, y_t = \omega_0 (1 - \phi_1 B)\, x_{t-2} + (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)\, a_t$$

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \phi_1 B + \phi_1 \delta_1 B^2 + \phi_1 \delta_2 B^3)\; y_t = (\omega_0 - \omega_0 \phi_1 B)\, x_{t-2} + (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)\, a_t$$

$$y_t - \delta_1 y_{t-1} - \delta_2 y_{t-2} - \phi_1 y_{t-1} + \phi_1 \delta_1 y_{t-2} + \phi_1 \delta_2 y_{t-3} = \omega_0 x_{t-2} - \omega_0 \phi_1 x_{t-3} + a_t - \delta_1 a_{t-1} - \delta_2 a_{t-2}$$

$$\begin{aligned} a_t &= y_t + (\delta_1 + \phi_1)\, y_{t-1} + (-\delta_2 + \phi_1 \delta_1)\, y_{t-2} + (\phi_1 \delta_1)\, y_{t-3} \\ &\quad - \omega_0 x_{t-2} + (\omega_0 \phi_1)\, x_{t-3} + (\delta_1)\, a_{t-1} + (\delta_2) a_{t-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_t &= y_t + d_1 y_{t-1} + d_2 y_{t-2} + d_3 y_{t-3} - e_0 x_{t-2} - e_1 x_{t-3} \\ &\quad - f_1 a_{t-1} - f_2 a_{t-2} \end{aligned} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_(36)}$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} d_1 &= -\delta_1 - \phi_1 \\ d_2 &= -\delta_2 + \phi_1 \delta_1 \\ d_3 &= \phi_1 \delta_1 \\ e_0 &= \omega_0 \\ e_1 &= -\omega_0 \phi_1 \\ f_1 &= -\delta_1 \\ f_2 &= -\delta_2 \end{aligned} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(37)}$$

จากสมการที่ (35) สามารถนำไปคำนวณค่า residuals ของ a_t ในช่วง periods ต่างๆได้ โดยคำนวณค่าตั้งแต่ a_4 เป็นต้นไป เพราะว่าในสมการที่ (36) มีค่า time lag สูงสุดเท่ากับ 4 และกำหนดค่า (a_1, a_2, a_3) เท่ากับศูนย์ ส่วนค่าอื่นๆในสมการก็ทราบจากขั้นตอนที่ผ่านมาแล้ว ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้ คือ

$$a_4 = y_4 + d_1 y_3 + d_2 y_2 + d_3 y_1 + d_4 y_3 - e_0 x_2 - e_1 x_1 - f_1 a_3 - f_2 a_2$$

การคำนวณค่าของ residuals ของ a_t ในช่วง periods ถัดไปจาก a_4 เช่น a_5 , a_6 , ... ก็ใช้วิธีการคำนวณเช่นเดียวกัน

3.1 การวิเคราะห์ค่า residuals autocorrelations (Analysis of the Residuals: Autocorrelations)

หลังจากที่ได้ค่าของ a_t แล้ว ก็อาจจะนำมา plot รูปภาพเพื่อที่จะดูรูปแบบของ residuals ส่วนการนำค่า autocorrelations มา plot รูปภาพก็อาจจะพิจารณาจากรูปแบบได้เพียงเล็กน้อยเท่านั้น และค่าของ partials ก็จะเป็นตัวที่ยืนยันอีกอย่างหนึ่งว่าค่า residuals ของ a_t series เป็น random noise หรือไม่

สำหรับวิธีการตรวจสอบค่า residuals autocorrelations ใช้ค่า Q-statistic ในการตรวจสอบ ซึ่งจะทำการตรวจสอบค่า residuals autocorrelations ณ time lag ต่างๆ และมีสูตรในการคำนวณดังนี้ คือ

$$Q = n \sum_{k=1}^{m} r^2(k) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(38)}$$

นอกจากใช้ค่า Q-statistic ในการตรวจสอบแล้ว ยังสามารถใช้วิธีการตรวจสอบของ Box-Pierce χ^2 test อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งจะทำการตรวจสอบค่า residuals autocorrelations โดยรวมว่ามีนัยสำคัญทางสถิติที่แตกต่างจากค่าศูนย์หรือไม่ และมีสูตรในการคำนวณดังนี้ คือ

$$\chi^2_{(df)} = n \sum_{k-1}^{m} r^2(k) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(39)}$$

โดยกำหนดให้

n = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

m = ค่าของ time lag ที่ใหญ่ที่สุดในการพิจารณา

r(k) = ค่าของ autocorretions ที่ time lag k

df = degree of freedom = m - p - q

ถ้าทำการทดสอบแล้วพบว่าค่า residuals autocorrelations มีนัยสำคัญทางสถิติ ก็สามารถสรุปได้ว่า a_t series เป็น random series

3.2 การวิเคราะห์ residuals cross-correlations (Analysis of the Residuals: Cross-correlations)

จากขั้นตอนที่ 1.5 ในการประมาณค่า impulse response weights ของ transfer function model มีสมมติฐานว่าการทำ prewhitened input series (α_t) เป็นอิสระกับส่วนของ random noise (a_t) สำหรับขั้นตอนนี้จึงเป็นการพิสูจน์ว่าค่า cross-correlations ของ α_t series กับ a_t series มีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่

สำหรับวิธีการตรวจสอบค่า residuals cross-correlations ใช้ค่า Q-statistic ในการตรวจสอบ ซึ่งจะทำการตรวจสอบค่า residuals cross-correlations ณ time lag ต่างๆ และมีสูตรในการคำนวณดังนี้ คือ

$$S = n \sum_{k=0}^{m} r^2_{a(k)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(40)}$$

นอกจากใช้ค่า Q-statistic ในการตรวจสอบแล้ว ยังสามารถใช้วิธีการตรวจสอบของ Box-Pierce χ^2 test ซึ่งจะทำการตรวจสอบค่า residuals cross-correlations โดยรวมว่ามีนัยสำคัญที่แตกต่างจากค่าศูนย์หรือไม่ และมีสูตรในการคำนวณดังนี้ คือ

$$\chi^2_{(m-r-s)} = (n - n^*) \sum_{k-1}^{m} r^2_{a(k)} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(41)}$$

โดยกำหนดให้

(r,s) = ค่าพารามิเตอร์ใน transfer function model

m = ค่าสูงสุดของจำนวน lag ที่ใช้ในการพิจารณา

n^* = ค่าสูงสุดของ ($s + b + p_n$) และ p_x โดยที่ p_x เป็นจำนวนพารามิเตอร์ของ AR ใน ARIMA model สำหรับ input series (x_t)

ถ้าทำการตรวจสอบแล้วพบว่าค่า cross-correlations ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ก็สามารถทำการสรุปได้ว่าสมมติฐานเป็นจริงคือ ค่า α_t series กับ a_t series เป็นอิสระต่อกัน

4. การใช้แบบจำลองในการพยากรณ์ (Usting the Transfer Function Model for Forecasting)

4.1 การนำ transfer function model ไปใช้ในการพยากรณ์ (The Forecasting Version of the Transfer Function Model)

จากขั้นตอนที่ 2.2 ได้ประมาณค่า transfer function model ได้เป็นสมการที่ (35) จากนั้นทำการเขียนสมการใหม่โดยให้ y_t เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับ x , a และ y ในช่วง periods ต่างๆ สามารถเขียนได้ในลักษณะเช่นเดียวกับการเขียน a_t ในสมการที่ (36) ดังนั้นจึงนำสมการที่ (36) มาเขียนใหม่ให้ y_t เป็นตัวที่อยู่ทางด้านซ้ายมือ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้คือ

$$y_t = a_t - d_1y_{t-1} - d_2y_{t-2} - d_3y_{t-3} + e_0x_{t-2} + e_1x_{t-3} + f_1a_{t-1} + f_2a_{t-2}$$

_________(42)

สำหรับค่าพารามิเตอร์ d , e และ f สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (37)

จากจำนวนข้อมูลทั้งหมด 72 observations* ถ้าต้องการที่จะทำการพยากรณ์ค่า Y ที่ 73 (Y_{73}) สามารถทำการพยากรณ์โดยใช้สมการที่ (40) ได้ดังนี้ คือ

$$\hat{y}_{73} = -d_1y_{72} - d_2y_{71} - d_3y_{70} + e_0x_{71} + e_1x_{70} + a_{73} + f_1a_{72} + f_2a_{71} \qquad (43)$$

จากสมการที่ (43) จะต้องกำหนดให้ $a_{73} = 0$

จากการขั้นตอนที่ 1.1 output series (Y) มีการ take difference order 1 degree 1 ดังนั้น ผลการพยากรณ์ที่ได้จากสมการที่ (43) จะต้องทำการ converted เพื่อที่จะหาค่า Y ณ เวลาที่ต้องการพยากรณ์ ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้ คือ

$$\hat{Y}_{73} = Y_{72} + \hat{y}_{73}$$

โดยที่ $\hat{Y}_{73}$ = output series ที่ได้จากการพยากรณ์ ณ periods ที่ 73

Y_{72} = output series ที่แท้จริง ณ periods ที่ 72

$\hat{y}_{73}$ = output series ที่ได้จากการพยากรณ์ ณ periods ที่ 73 แต่เกิดจากการ take difference

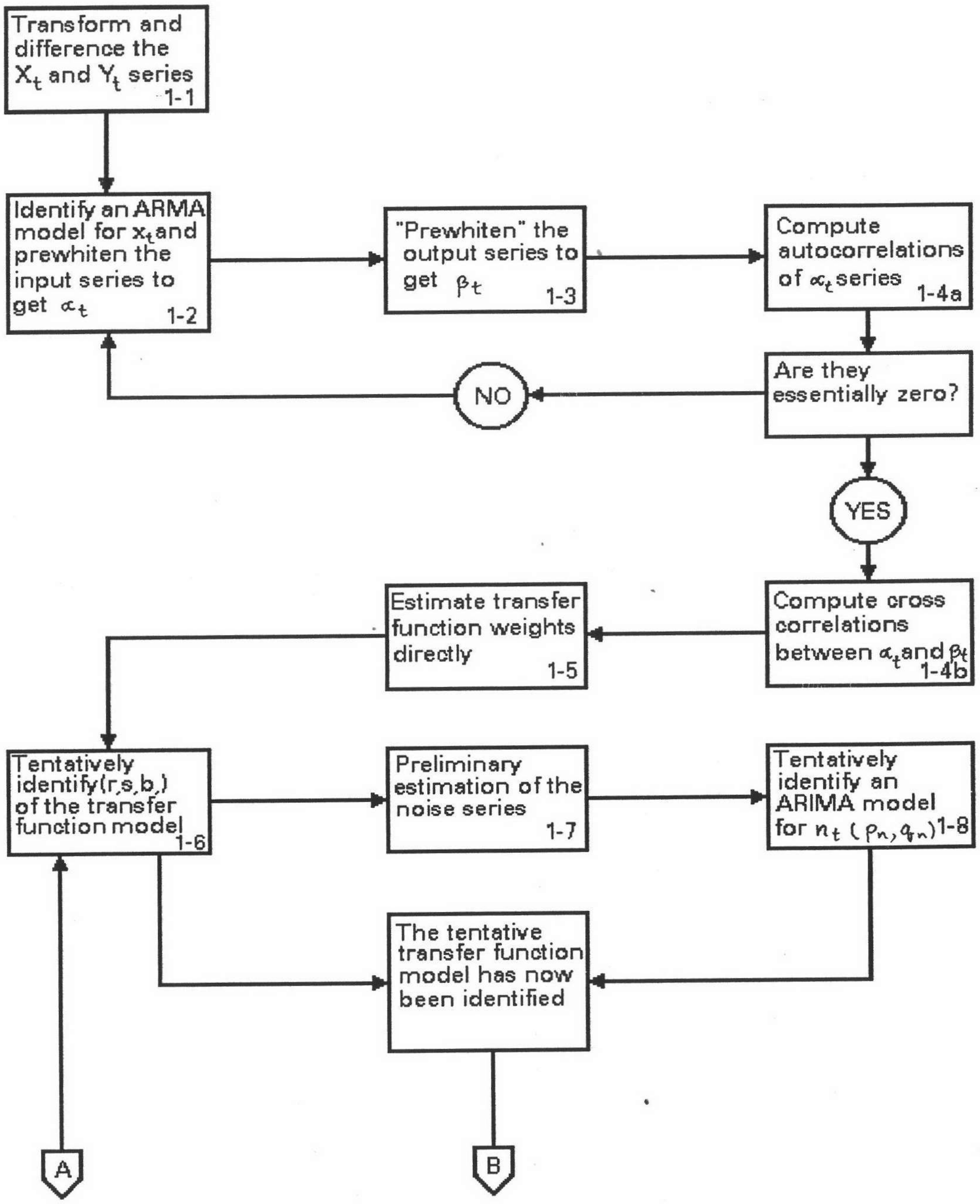
สำหรับการพยากรณ์ Y ใน periods ถัดไป เช่น $\hat{Y}_{74}$, $\hat{Y}_{75}$, . . . ก็สามารถทำได้ในทำนองเช่นเดียวกัน

จากขั้นตอนที่ผ่านมาทั้งหมดในการทำ Transfer Function Model สามารถทำการสรุปได้โดยแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้ คือ

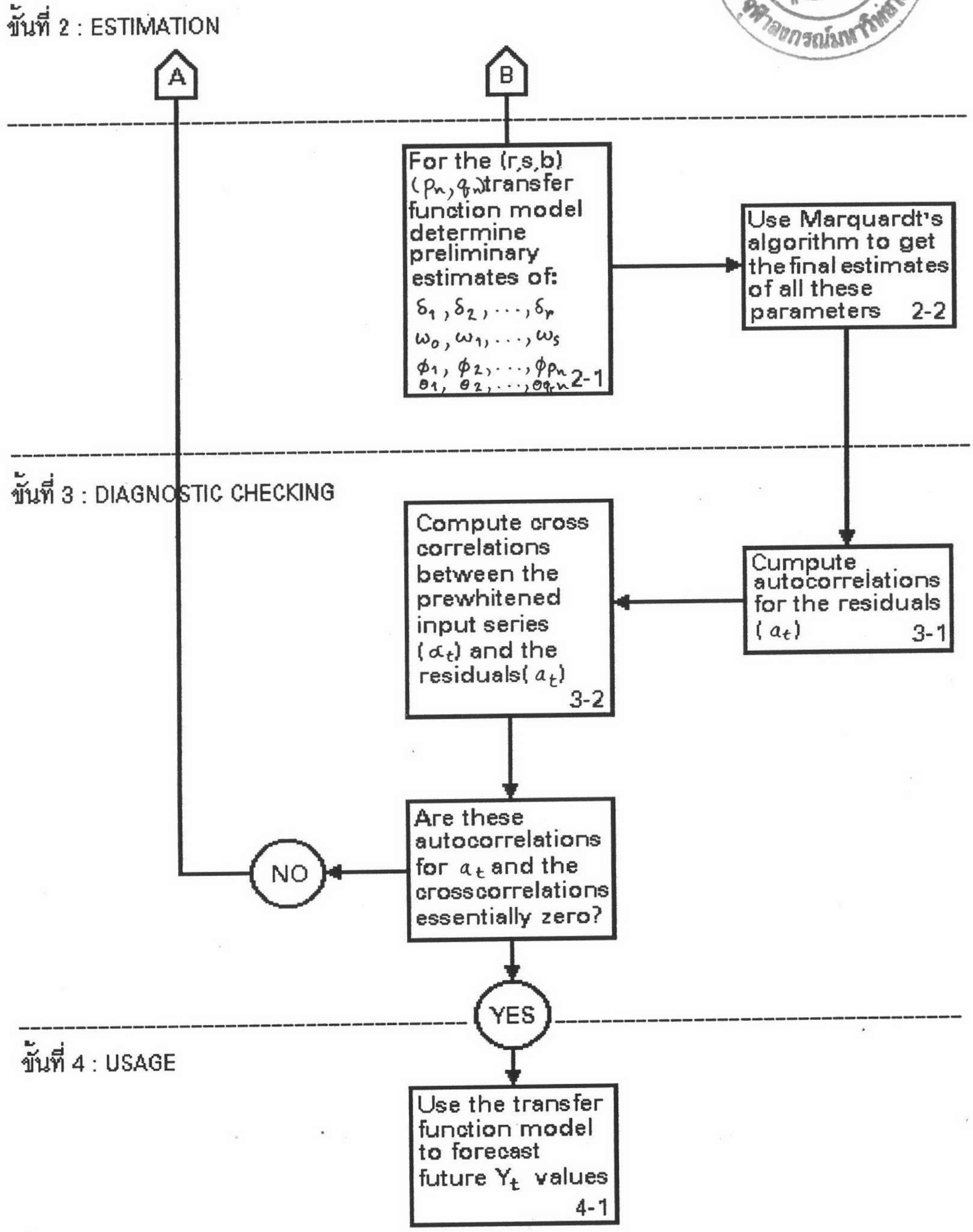
---

* สามารถดูรายละเอียดได้จากภาคผนวก ก.

ขั้นที่ 1 : IDENTIFICATION



แผนภาพที่ 3.1 แสดงขั้นตอนการประมาณค่า Transfer Function Model



แผนภาพที่ 3.1 (ต่อ)