บทที่ 3

ทฤษฎี

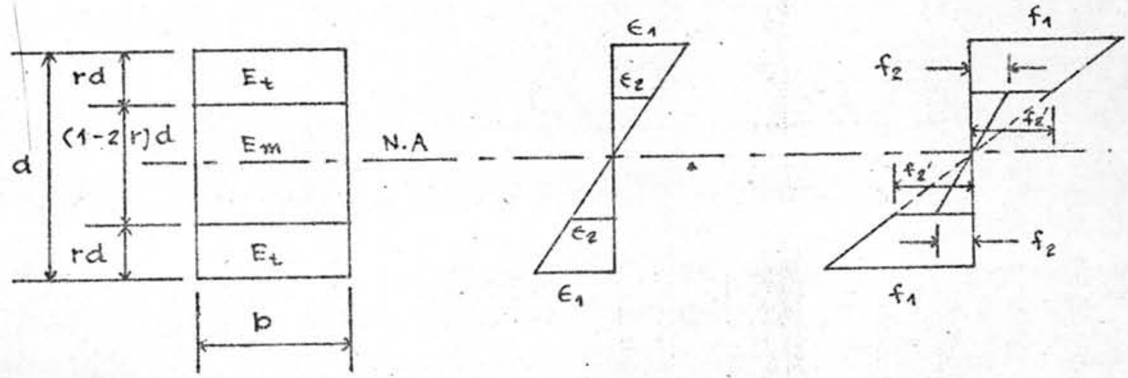
3.1 สมมุติฐานเบื้องต้น

การวิเคราะห์คานไม้ประกับของไม้ต่างชนิดนั้น ก็ใช้หลักการคล้าย ๆ กับการวิเคราะห์คานไม้ตันของไม้ชนิดเดียว โดยที่สูตรต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหน่วยแรงดัดและหน่วยแรงเฉือนซึ่งมีสมมุติฐานต่าง ๆ นั้น ก็ยังคงใช้อยู่โดยมีการเปลี่ยนแปลงค่าบางอย่างให้ถูกต้องตามความเป็นจริง การวิเคราะห์โมดูลัสแตกหักและหน่วยแรงเฉือนประลัยของคานไม้ประกับของไม้สองชนิดนั้น มีปัญหายุ่งยากมากเนื่องจากการกระจายหน่วยแรงที่เลยช่วงพิกัดยืดของไม้ไปนั้น ไม่สามารถกำหนดได้แน่ชัดโดยทางทฤษฎี และอีกอย่างหนึ่งก็คือการกระจายของหน่วยแรงดึง และหน่วยแรงอัดมีค่าต่างกัน ถึงอย่างไรก็ดี ค่าแรงประลัยของคานไม้ประกับนี้ ก็ยังสามารถคำนวณได้จากสูตรของแรงดัดโดยขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของเนื้อไม้ที่อยู่ในหน้าตัดที่ประกอบขึ้น

3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงดัดและโมเมนต์ ภายในพิกัดสัดส่วน (Proportional Limit)

จากสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์หน่วยแรงดัดของคานนั้น ได้สมมุติว่าการกระจายของหน่วยการยืดหดตัวตลอดความลึกของหน้าตัดคานให้เป็นเส้นตรง แต่โดยความเป็นจริงแล้ว การกระจายของหน่วยการยืดหดตัวนี้ไม่เป็นเส้นตรงนัก

เนื่องจากหน้าตัดของคานประกอบด้วยสารที่ไม่เป็นเนื้อชนิดเดียวกัน อย่างไรก็ดีค่าที่แตกต่างออกไปนั้นมีค่าเพียงเล็กน้อย จึงถือว่าละทิ้งได้โดยไม่มีผลกระทบกระเทือนเท่าใดนัก และถึงแม้ว่าโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ทางด้านแรงดึงจะมากกว่าแรงอัดก็ตาม ก็ยังสมมุติให้ค่าทั้งสองนี้มีค่าเท่ากันในช่วงพิกัดสัดส่วน



หน้าตัดคาน การกระจายของหน่วยยืดหดตัว การกระจายของหน่วยแรง

รูปที่ 8 การกระจายของหน่วยแรงและหน่วยการยืดหดตัวของคานของไม้สองชนิด เนื่องจากโมเมนต์ดัดภายในพิกัดสัดส่วน

ในรูปที่ 8 แสดงการกระจายของหน่วยแรงและหน่วยการยืดหดตัวของคานไม้ประกับของไม้สองชนิด โดยที่ความหนาของชั้นไม้ประกับด้านบนและด้านล่างมีค่าเท่ากัน ดังนั้น แกนสะเทินจึงอยู่ตรงอยู่ที่กึ่งกลางความลึกของหน้าตัดคาน

สมการของโมเมนต์ สมดุลย์รอบแกนสะเทินเขียนได้ ดังนี้

$$M = \int_0^A fY \partial A \qquad (1)$$

โดยการรวมโมเมนต์

$$M = M_1 - M_2 \qquad (2)$$

โดยที่ $$M_1 = \frac{1}{6} f_1 bd^2 \tag{3}$$

และ $$M_2 = \frac{1}{6} (f_{2'} - f_2)(1 - 2r)^2 bd^2 \tag{4}$$

ที่ระยะ Y จากแกนสะเทินสมการของหน่วยการยืดหดตัวที่ระยะ Y ใด ๆ

$$\epsilon = \frac{2 \epsilon_1 Y}{d} \tag{5}$$

ดังนั้น $$\epsilon_2 = \epsilon_1(1 - 2r)$$

และหน่วยแรงที่จุดใด ๆ มีค่าดังนี้

$$f = \epsilon E \tag{6}$$

ดังนั้น หน่วยแรงที่ต่างกันตรงรอยต่อระหว่างไม้สองชนิดหาได้ ดังนี้

$$f_{2'} - f_2 = \epsilon_1(1 - 2r)(E_t - E_m) \tag{7}$$

ให้ $g = E_t/E_m$, หรือ $E_t = g\,E_m$, ดังนั้น สมการ (7) จึงกลายเป็น

$$f_{2'} - f_2 = \frac{f_1 (1 - 2r)(g - 1)}{g}$$

ดังนั้นสมการ (4) จึงเขียนได้เป็น

$$M_2 = \frac{1}{6} f_1 \left(\frac{(1 - 2r)^3 (g - 1)}{g}\right) bd^2 \tag{8}$$

โดยการแทนค่า M_1 และ M_2 ลงในสมการ (2), ดังนั้นโมเมนต์ต้านทานทั้งหมดของหน้าตัดคานมีค่าดังนี้

$$M = \frac{1}{6} f_1 bd^2 \left[1 - \frac{(1-2r)^3 (g-1)}{g} \right] \tag{9}$$

หรือ $$M = \frac{1}{6} f_1 bd^2 K_1 \tag{10}$$

โดยที่ $$K_1 = 1 - \frac{(1 - 2r)^3 (g - 1)}{g} \tag{11}$$

จากสมการ (9) จะเห็นได้ว่า ถ้า $r = 0$ จะเป็นสมการของคานไส้กลางของไม้ชนิดเดียว และถ้า $r = 0.5$ จะเป็นสมการของคานของไม้ผิวนอกชนิดเดียว

ดังนั้นสมการ (9) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อค่า f_1 หน่วยแรงของไม้ผิวนอกและค่า f_2 หน่วยแรงของไม้ไส้กลางอยู่ในช่วงพิกัดสัดส่วน จึงเห็นได้ว่าสมการของโมเมนต์ต้านทาน สมการ (9) ใช้ได้กับคานไม้ประกับของไม้แดงและไม้ยางที่อยู่ในช่วงพิกัดสัดส่วน

3.3 โมดูลัสยืดหยุ่น

ในคานไม้ประกับของไม้สองชนิด ค่า Equivalent Flexural Rigidity ของหน้าตัดคานหาได้ดังนี้

$$E_e I = \sum (E_i I_i) \qquad (12)$$

โดยที่ E_e = โมดูลัสยืดหยุ่นเสมือนของหน้าตัดประกอบ

I = โมเมนต์อินเนอร์เชียทั้งหมด

$= \frac{1}{12} bd^3$ สำหรับหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม

E_i = โมดูลัสยืดหยุ่นของไม้แต่ละชนิด

I_i = โมเมนต์อินเนอร์เชียของไม้แต่ละชนิดรอบแกนสะเทิน

$E_e I$ = Equivalent Flexural Rigidity

จากรูปที่ 8 สมการ (12) จะหาได้ดังนี้

$$\frac{1}{12}\,bd^3\,E_e = \frac{1}{12}\,bd^3\,(1-2r)^3\,E_m + 2E_t\left[\frac{1}{12}\,bd^3r^3 + \frac{1}{4}\,bd^3r\,(1-r)^2\right]$$

โดยการแทนที่ $E_m = E_{t/g}$

$$E_e = E_t\left[(1-2r)^3 + 2\,(3r - 6r^2 + 4r^3)\right] \qquad (13)$$

หรือ $$\frac{E_e}{E_t} = \frac{(1-2r)^3}{g} + 2\,(3r - 6r^2 + 4r^3) \qquad (14)$$

สมการ (14) จะให้ค่าอัตราส่วนระหว่างค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเสมือนกับโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ผิวนอก จะเห็นได้ว่า ถ้า $r = 0$, ค่า $E_e = E_{t/g} = E_m$ ซึ่งจะเป็นค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ไส้กลาง และถ้า $r = 0.5$, ค่า $E_e = E_t$ ซึ่งจะเป็นค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ผิวนอก

3.4 หน่วยแรงดัด และโมดูลัสแตกหัก

ในคานไม้ประกับของไม้สองชนิด, หน่วยแรงดัดที่ระยะห่าง Y จากแกนสะเทิน สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$f = \frac{MY}{I} \qquad (15)$$

โดยที่ Y = ระยะจากแกนสะเทินถึงจุดที่ต้องการหาหน่วยแรงดัด

M = โมเมนต์ต้านทาน จากสมการ (9)

I = โมเมนต์อินเนอร์เชียทั้งหมด

โมดูลัสแตกหักของหน้าตัดประกอบสามารถคำนวณได้จาก ความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสยืดหยุ่นเสมือนกับโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ผิวนอก

$$f_e = f_t \frac{(E_e)}{E_t} \tag{16}$$

โดยที่ f_e = โมดูลัสแตกหักเสมือน

f_t = โมดูลัสแตกหักของไม้ผิวนอก

E_e = โมดูลัสยืดหยุ่นเสมือนของหน้าตัดประกอบ

E_t = โมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ผิวนอก

3.5 แรงประลัย

โมเมนต์ประลัยของคานไม้ประกับของไม้สองชนิดสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$M_u = \frac{f_t I}{c} \frac{(E_e)}{E_t} \tag{17}$$

โดยที่ M_u = โมเมนต์ประลัย

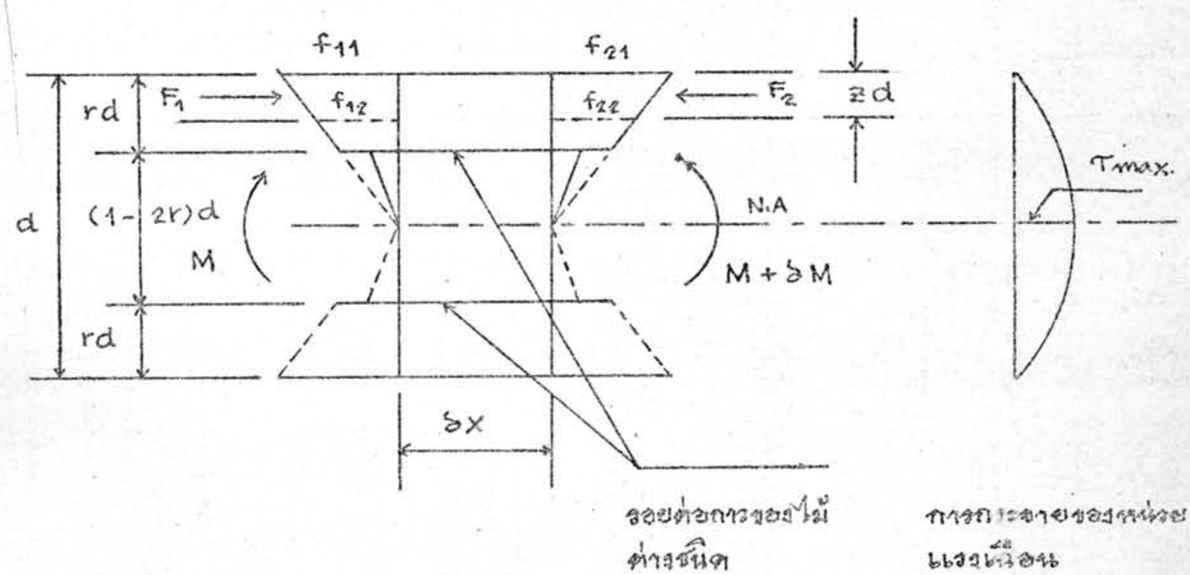
f_t = โมดูลัสแตกหักของไม้ผิวนอก

c = ระยะห่างจากแกนสะเทินถึงผิวนอกสุดของหน้าตัด

3.6 แรงเฉือน

แรงเฉือนในแนวราบของคานไม้ประกับ มีความสำคัญในการคำนวณอย่างหนึ่งเหมือนกัน เพราะว่าไม้ประกับอาจชำรุดโดยแรงเฉือนขนานกับเสี้ยน ฉะนั้น จึงต้องตรวจสอบหน่วยแรงเฉือนในแนวราบตรงรอยต่อกาวในคานไม้ประกับด้วย

การคำนวณหน่วยแรงเฉือนในแนวรวม คำนวณได้จากผลต่างของแรงเฉือนที่กระทำต่อหน้าตัดสองแห่งที่อยู่ห่างกันเล็กน้อย โดยการคิดหน้าตัดส่วนบนของคานไม้ประกับของไม้สองชนิด ดังรูปที่ 9 ค่าหน่วยแรงอัดที่ผิวนอกสุดหาได้จากความสัมพันธ์ของโมเมนต์ต้านทาน จากสมการ (9)



รูปที่ 9 หน่วยแรงเฉือนของคานไม้ประกับของไม้สองชนิดในไม้ชั้นนอก

$$f_{11} = \frac{6M}{bd^2 K_1}$$

และ $$f_{21} = \frac{6(M + \delta M)}{bd^2 K_1}$$

โดย $$K_1 = 1 - \frac{(1 - 2r)^3 (g - 1)}{g}$$

ที่ระยะ zd ใด ๆ จากผิวนอกสุดของหน้าตัดคาน ($zd \leq rd$)

จะได้

$$f_{12} = f_{11}(1 - 2Z)$$

และ $f_{22} = f_{21}(1 - 2Z)$

ดังนั้น $F_1 = \frac{1}{2} Zdb (f_{11} + f_{12})$

$$= f_{11} Zbd (1 - Z)$$

โดยการแทนค่า $f_{11} = \frac{6M}{bd^2 K_1}$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{6 MZ}{K_1 d} (1 - Z) \tag{18}$$

และทำนองเดียวกัน

$$\therefore \quad F_2 = 6 \frac{(M + \partial M)}{K_1 d} Z (1 - Z) \tag{19}$$

ดังนั้นแรงเฉือนในแนวราบ $= F_2 - F_1 = \tau b \partial x$ (20)

$$\therefore \quad \tau b \partial x = \frac{6 Z}{K_1 d} (1 - Z) \partial M$$

โดยที่ τ = หน่วยแรงเฉือนบนผิว $b \partial x$

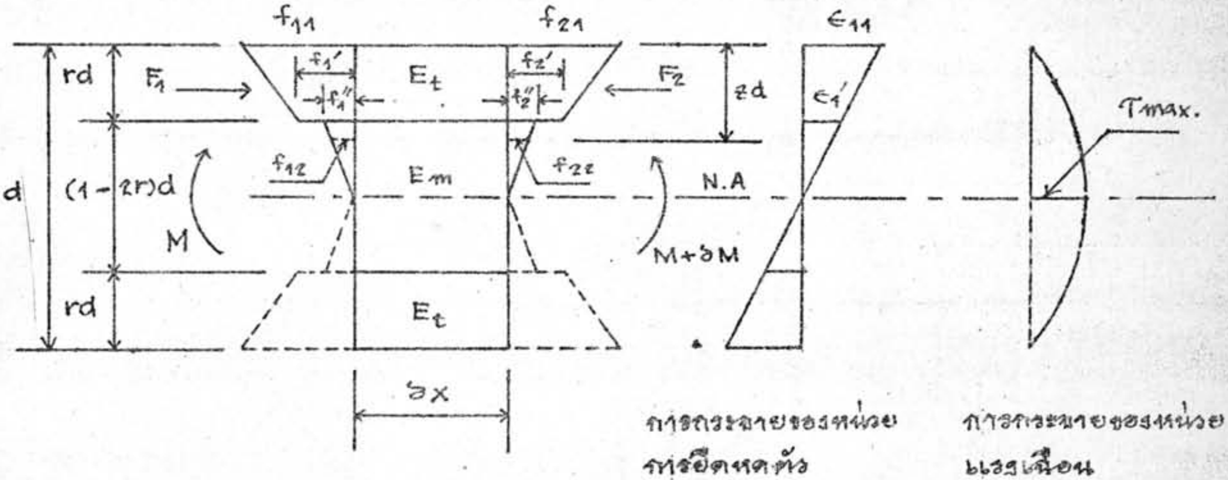
$$\therefore \quad \tau = \frac{6Z}{bd K_1} (1 - Z) \frac{\partial M}{\partial x} \tag{21}$$

เพราะว่า $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ คือแรงเฉือนในระนาบคิ่งของหน้าตัดคาน

ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนเหนือรายต่อกาวของไม้สองชนิดหาได้ดังนี้

$$\tau = \frac{6VZ}{bd K_1} (1 - Z) \; ; \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < Z < r \tag{22}$$

ในทำนองเดียวกัน หน่วยแรงเฉือนใต้รอยต่อกาวของไม้สองชนิด หาได้จากรูปที่ 10



รูปที่ 10 หน่วยแรงเฉือนของคานไม้ประกับของไม้สองชนิดในไม้ชั้นใน

จากสมการ (10) จะได้

$$f_{11} = \frac{6\,M}{bd^2\,K_1}$$

และ $$f_{21} = \frac{6\,(M + \partial M)}{bd^2\,K_1}$$

โดยที่ $$K_1 = 1 - \frac{(1 - 2r)^3\,(g - 1)}{g}$$

จากรูป (10) จะได้

$$\frac{f1'}{f_{11}} = (1 - 2r)$$

$$\therefore \quad f1' = (1 - 2r)\,f_{11}$$

และ $$f2' = (1 - 2r)\,f_{21}$$

จากรูป (10) สมการของหน่วยการยืดหดตัวที่ระยะ Y ใด ๆ

$$\epsilon = \frac{2\,\epsilon_{11}\,Y}{d}$$

$$\therefore \quad \epsilon_{1'} = (1-2r)\,\epsilon_{11}$$

โดยที่ $f = \epsilon E$

$$\therefore \quad f_{1'} = (1-2r)\,\epsilon_{11}\,E_t \qquad (23)$$

และ $f_{1''} = (1-2r)\,\epsilon_{11}\,E_m \qquad (24)$

จากรูป (10) จะได้

$$\frac{f_{12}}{f_{1''}} = \frac{(1-2Z)}{(1-2r)}$$

จากสมการ (23) หารด้วย สมการ (24) จะได้

$$\frac{f_{1'}}{f_{1''}} = \frac{(1-2r)\,\epsilon_{11}\,E_t}{(1-2r)\,\epsilon_{11}\,E_m}$$

$$= \frac{E_t}{E_m} = g$$

$$f_{1''} = \frac{f_{1'}}{g} = \frac{(1-2r)\,f_{11}}{g}$$

จากรูป (10) จะได้

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(f_{11}+f_{1'})brd + \tfrac{1}{2}(f_{1''}+f_{12})(Zd-rd)b$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[f_{11}+(1-2r)f_{11}\right]brd + \tfrac{1}{2}\left[f_{1''}+\frac{(1-2Z)}{(1-2r)}f_{1''}\right](Z-r)bd$$

$$= \tfrac{1}{2}f_{11}\,2(1-r)brd + \tfrac{1}{2}f_{1''}\,2\frac{(1-r-Z)}{(1-2r)}(Z-r)bd$$

$$= f_{11}(1-r)brd + \left(\frac{1-2r}{g}\right)f_{11}\frac{(1-r-Z)}{(1-2r)}(Z-r)bd$$

$$= f_{11}(1-r)brd + \left(\frac{1-2r}{g}\right)f_{11}\frac{(1-r-Z)}{(1-2r)}(Z-r)bd$$

$$= f_{11}(1-r)brd + \left(\frac{1-2r}{g}\right)f_{11}\frac{(1-r-Z)}{(1-2r)}(Z-r)bd$$

$$= f_{11}bd\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r)\right]$$

$$= \frac{6M}{bd^2K_1}\,bd\left[r(r-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r)\right]$$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{6M}{K_1 d}\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r)\right] \qquad (25)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$F_2 = 6\frac{(M+\partial M)}{K_1 d}\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r) \right] \quad (26)$$

ดังนั้น แรงเฉือนในแนวราบ $= F_2 - F_1 = \tau b \partial x$ (27)

$$\tau b \partial x = \frac{6\partial M}{K_1 d}\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1 - r - Z)(Z - r) \right]$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{6\partial M}{\partial x \ bd \ K_1}\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r) \right] \quad (28)$$

โดยที่ $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ = แรงเฉือนทั้งหมดบนแนวดิ่งของหน้าตัดคาน

ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนใต้รอยต่อกาวของไม้ต่างชนิดเป็น

$$\tau = \frac{6V}{bd \ K_1}\left[r(1-r) + \frac{1}{g}(1-r-Z)(Z-r) \right] \quad (29)$$

โดยที่ $r < Z < 0.5$