การปรับปรุงระบบแทนจำนวนฐานคู่โดยใช้ฐานมีเครื่องหมาย

นายศักดิ์ระพี  ลีลาธรรม



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์  ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์  จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

AN IMPROVEMENT OF DOUBLE BASE REPRESENTATION NUMBER SYSTEM
BY USING SIGNED-BASE

Mr.Sakrapee Leelatham



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computer Science
Department of Computer Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การปรับปรุงระบบแทนจำนวนฐานคู่โดยใช้ฐานมีเครื่องหมาย
โดย นายศักดิ์ระพี ลีลาธรรม
สาขาวิชา วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.................................................... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.................................................... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.................................................... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.................................................... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.................................................... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

นายศักดิ์ระพี ลีลาธรรม : การปรับปรุงระบบแทนจำนวนฐานคู่โดยใช้ฐานมีเครื่องหมาย (AN IMPROVEMENT OF DOUBLE BASE REPRESENTATION NUMBER SYSTEM BY USING SIGNED-BASE) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 43 หน้า

การดำเนินการทางเลขคณิตจัดเป็นสิ่งสำคัญที่มีผลต่อความเร็วในเชิงการคำนวณ ระบบจำนวนฐานคู่เป็นระบบจำนวนที่มีบทบาทสำคัญต่อความเร็วในการคำนวณทางเลขคณิต รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ใช้ฐาน 2 และ 3 ซึ่งมีคุณสมบัติที่โดดเด่นคือมีความซ้ำซ้อนสูง และมีปริมาณตัวเลขน้อย การดำเนินการทางเลขคณิตของระบบจำนวนฐานคู่สามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็วด้วยลักษณะแบบขนานเพราะว่าการคำนวณบนระบบสามารถจำกัดสายการทดได้ นอกจากนั้นระบบจำนวนได้ถูกเสนอในการใช้งานด้านโปรแกรมประยุกต์เกี่ยวกับการเข้ารหัสลับและการประมวลผลสัญญาณเชิงดิจิทัล อย่างไรก็ตามในระบบจำนวนฐานคู่นั้นสามารถแสดงจำนวนได้เพียงแค่จำนวนเต็มบวกเท่านั้น ในงานวิจัยนี้จึงนำเสนอระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเพื่อให้สามารถแสดงจำนวนเต็มได้ทุกชนิด พร้อมทั้งเสนอบทพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนที่นำเสนอ เสนอวิธีการทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยการลดรูปตัวเลขหนึ่งที่ชนกัน นอกจากนั้นยังเสนออัลกอริทึมการแปลงจำนวนต่างๆ ไปเป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย พร้อมทั้งเสนอกฎทางพีชคณิตที่สำคัญสำหรับการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต ได้แก่ การบวก การลบ และการคูณ

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ศักดิ์ระพี ลีลาธรรม

สาขาวิชา วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Atthasit Surarerks

ปีการศึกษา 2549

# # 4770472821 : MAJOR COMPUTER SCIENCE
KEY WORD : DOUBLE BASE NUMBER SYSTEM / ARITHMETIC OPERATIONS / REDUNDANT NUMBER SYSTEM / COMPUTER ARITHMETIC

SAKRAPEE LEELATHAM : AN IMPROVEMENT OF DOUBLE BASE REPRESENTATION NUMBER SYSTEM BY USING SIGNED-BASE
THESIS ADVISOR : ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 43 pp.

Among several arithmetic operations that effect in the speed of computation, the double base number system (DBNS) plays a significant role. The double base number representation, with the orthogonal bases 2 and 3, is highly redundant and also provides much sparse representations. DBNS arithmetic operations could be fast when performed in parallel manner, because carry propagation chain is limited. This system has been proved to be effective for applications in cryptography and digital signal processing. Nevertheless, only positive integers can be represented. In our work, we focus on the double signed-base number system (DSBNS) which can represent all integers. We prove the completeness of this number system. We also introduce a normalization approach for reducing the collision of 1's. Moreover, we propose a number conversion algorithm into the DSBNS, and also demonstrate some useful algebra rules of arithmetic operations: addition, subtraction and multiplication.



Department ....Computer Engineering.... Student's signature ..........
Field of study ....Computer Science.... Advisor's signature ..........
Academic year ....2006....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้คำปรึกษา ให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการวิจัย และช่วยตรวจแก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่างๆ จนกระทั่งบรรลุผลสำเร็จเป็นอย่างดี โดยเฉพาะอย่างยิ่งขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ช่วยติดตามดูแลงานวิจัยอย่างใกล้ชิดมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณในความเอื้อเฟื้อของ รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

กราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่มีความเมตตา กรุณา และเป็นผู้คอยให้กำลังใจตลอดมา ขอขอบคุณ พี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆ ทุกคน โดยเฉพาะสมาชิกห้องปฏิบัติการ ELITE ที่ได้ให้ความช่วยเหลือและแก้ไขเอกสาร จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จเป็นรูปเล่ม และขอขอบคุณแรงสนับสนุนและกำลังใจทุกท่านที่มิได้กล่าวนามไว้ ณ ที่นี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจหรือผู้ที่เกี่ยวข้องทั่วไป และหากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้วิจัยขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

# สารบัญ

# สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

# สารบัญภาพ

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันวงการคอมพิวเตอร์เชิงเลขคณิต (computer arithmetic) เป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อออกแบบระบบแทนจำนวนและตัวดำเนินการทางเลขคณิตของเครื่องจักร ซึ่งมีความสำคัญต่อระบบประมวลผลสัญญาณ (signal processing system) [1] ระบบแทนจำนวนที่สำคัญๆมีหลายระบบจำนวน ได้แก่ ระบบเลขฐานสอง (binary number system) ระบบจำนวนเชิงซ้อน (complex number system) ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) ฯลฯ แต่ละระบบจำนวนถูกนำไปใช้ประโยชน์ในแต่ละงานที่เหมาะสม ได้แก่ ระบบเลขฐานสองเป็นระบบพื้นฐานที่ถูกนำไปใช้เป็นตัวดำเนินการบนวงจรและอิเล็กทรอนิกส์ ระบบจำนวนเชิงซ้อนถูกนำไปใช้ในการแทนค่าในระบบที่ไม่สามารถแทนค่าได้ด้วยเพียงจำนวนจริง ซึ่งค่าที่ไม่อยู่ในระบบจำนวนจริงนั้นเรียกกว่า จำนวนจินตภาพ (imaginary number) ต่อมาได้มีการปรับปรุงประสิทธิภาพการทำงานของระบบจำนวน ด้วยการแปลงระบบเดิมเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ด้วยการเพิ่มตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit) ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายนี้ถูกนำเสนอครั้งแรกในปี ค.ศ. 1961 โดยอเวเซียนีส (Avizienis) [2] ทำให้จำนวนสามารถแสดงแทนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ช่วยให้จำนวนตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ (non-zero digit) ลดลง และช่วยในการจำกัดการแพร่กระจายของตัวทดที่เกิดขึ้นในระหว่างการคำนวณ จึงส่งผลให้ความเร็วในการคำนวณเพิ่มขึ้น

ในปี ค.ศ. 1996 ดิมิทรอฟ (Dimitrov) และ จูเลี่ยน (Jullien) [3] ได้นำเสนอระบบจำนวนที่น่าสนใจ ซึ่งใช้ชุดตัวเลขเดียวกันกับระบบเลขฐานสองที่เป็นมาตรฐาน แต่ในระบบแทนจำนวนแบบใหม่นี้มีความซ้ำซ้อนสูงขึ้น และเก็บจำนวนตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์น้อย (sparseness) เรียกว่า ระบบจำนวนฐานคู่ (double base number system: DBNS) โดยใช้จำนวนเต็มสองและสามเป็นฐานคู่ ซึ่งระบบนี้สามารถคำนวณได้ด้วยความเร็วสูงด้วยการเก็บจำนวนตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์น้อยและการขจัดการแพร่กระจายของตัวทดในการคำนวณ นอกจากนั้นมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับระบบจำนวนฐานคู่ในด้านโปรแกรมประยุกต์ต่างๆ เช่น มีการใช้แนวคิดของระบบจำนวนฐานคู่เพื่อลดความซับซ้อนของการคูณเชิงสเกลาร์ในการเข้ารหัสลับแบบเส้นโค้งอิลลิปติก (elliptic curve cryptography) [4] การใช้เครื่องจักรของมัวร์เป็นเครื่องแปลงสัญญาณในการติดตั้งวงจรสำหรับการบวกบนจำนวนฐานคู่ [5] การเพิ่มประสิทธิภาพและสภาพความทนทานของอาร์เรย์ที่ใช้ในการคำนวณเชิงดิจิทัลบนระบบจำนวนฐานคู่โดยใช้เซลลูล่าร์ออโตมาตา (cellular automata) [6] อย่างไรก็ตามระบบจำนวนฐานคู่ไม่สามารถแทนจำนวนเต็มลบได้ วิธีการที่น่าสนใจในการแก้ปัญหาดังกล่าว ได้แก่ การใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย เพื่อให้ระบบ

จำนวนสามารถแทนจำนวนเต็มลบได้ แต่ในระบบจำนวนจะต้องเพิ่มขนาดของชุดตัวเลขจากเดิมคือหนึ่งบิตเป็นสองบิตด้วย วิธีการดังกล่าวจึงไม่มีประสิทธิภาพที่ดีเพียงพอ

วิทยานิพนธ์นี้ จะทำการปรับปรุงระบบแทนจำนวนฐานคู่โดยใช้เลขฐานเป็นจำนวนเต็มลบ เพื่อขยายให้ระบบสามารถแทนจำนวนเต็มได้ทุกจำนวน โดยใช้ขนาดของชุดตัวเลขเป็นหนึ่งบิต พร้อมทั้งได้เสนอบทพิสูจน์ความสมบูรณ์ (completeness) ของระบบแทนจำนวนแบบใหม่ นอกจากนั้นจะนำเสนออัลกอริทึมการแปลง (conversion algorithm) จากระบบจำนวนเลขต่างๆ เป็นจำนวนบนระบบแทนจำนวนฐานคู่ที่นำเสนอ รวมถึงการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (fundamental arithmetic operations) ได้แก่ การบวก การลบ และการคูณ โดยแสดงในรูปของกฎทางพีชคณิต (algebra rules)

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อสร้างระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเพื่อให้สามารถแทนจำนวนเต็มได้ทุกชนิด โดยไม่ต้องเพิ่มขนาดของชุดตัวเลข เสนออัลกอริทึมในการแปลงจำนวนต่างๆเป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย พร้อมทั้งเสนอตัวดำเนินการพื้นฐานเชิงเลขคณิตรวมทั้งกฎทางพีชคณิตที่จำเป็นสำหรับการดำเนินการทางเลขคณิต

## 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 เสนอระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย โดยใช้พื้นที่เพียงบิตเดียวสำหรับชุดตัวเลข

1.3.2 เสนออัลกอริทึมในการแปลงจำนวนเลขฐานสิบเป็นจำนวนบนระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

1.3.3 เสนอตัวดำเนินการพื้นฐานเชิงเลขคณิตบนระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย เฉพาะการบวก ลบ และคูณเท่านั้น

## 1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษาและทำความเข้าใจงานวิจัยเกี่ยวกับระบบจำนวนฐานคู่

1.4.2 วิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัย

1.4.3 กำหนดขอบเขตงานวิจัย

1.4.4 ออกแบบระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใหม่

1.4.5 ออกแบบอัลกอริทึมในการแปลงจำนวนต่างๆ ไปเป็นจำนวนบนระบบใหม่

1.4.6 พิสูจน์ทฤษฎีและอัลกอริทึมที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.4.7 วิเคราะห์ สรุปผล และจัดทำวิทยานิพนธ์

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.5.1 ได้ระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใหม่ที่สามารถแทนจำนวนเต็มได้ทุกจำนวน

1.5.2 อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์พื้นฐานได้แก่ การบวก ลบ และคูณ สำหรับระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใหม่

### 1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นบทความทางวิชาการในหัวเรื่องดังต่อไปนี้

1.6.1 “An Extended Double Base Number System Using Different Digit Sets” โดย ศักดิ์ระพี ลีลาธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ $10^{th}$ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2006) ณ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จ.ขอนแก่น ประเทศไทย ระหว่างวันที่ 25-27 ตุลาคม พ.ศ. 2549

1.6.2 “An outline of double negative-base number system” โดย ศักดิ์ระพี ลีลาธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ $11^{th}$ Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE11) ณ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตภูเก็ต จ.ภูเก็ต ประเทศไทย ระหว่างวันที่ 28-30 มีนาคม พ.ศ.2550

1.6.3 “A double negative-base number representation system and arithmetic operation” โดย ศักดิ์ระพี ลีลาธรรม และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ $11^{th}$ Panhellenic Conference on Informatics (PCI2007) ณ เมืองพาทราส ประเทศกรีซ ระหว่างวันที่ 18-20 พฤษภาคม พ.ศ.2550

# บทที่ 2

## ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 ระบบจำนวนฐานคู่ (double base number system)

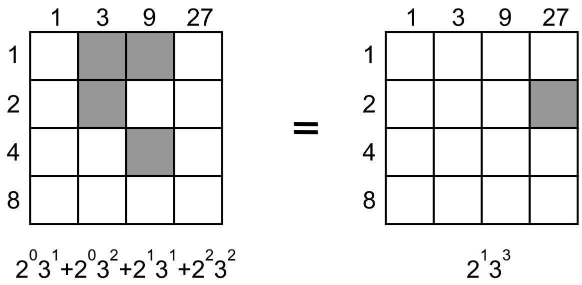
ปัจจุบันมีนักวิจัยจำนวนมากสนใจการพัฒนาให้หน่วยประมวลผลทางคอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้เร็วเพิ่มขึ้น จึงมีงานวิจัยต่างๆ ทางด้านระบบจำนวนและการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของหน่วยประมวลผลเพื่อให้คอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้เร็วขึ้น ในปี ค.ศ. 1996 ดิมิทรอฟ และ จูเลี่ยน [7] ได้เสนอระบบจำนวนฐานคู่ ซึ่งมีความซ้ำซ้อนสูงและสามารถแสดงค่าจำนวนเต็มโดยใช้ตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์จำนวนน้อย ระบบจำนวนฐานคู่ประกอบด้วยฐานสองและฐานสาม สามารถเขียนแทนจำนวนเต็มได้ในรูปผลรวมของกำลังของฐานสองคูณกับกำลังของฐานสาม รูปแบบการแทนค่าของจำนวนเต็ม $x$ ในระบบจำนวนฐานคู่สามารถเขียนออกมาในรูปของ

$$x = \sum_{all\, i,j} d_{i,j} 2^i 3^j , d_{i,j} \in \{0,1\} \tag{2.1}$$

โดยที่ค่า $i$ และ $j$ มีค่าเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก (non-negative integers) และ $d_{i,j}$ เป็นชุดตัวเลข (digit set) ที่มีสมาชิกเป็นศูนย์และหนึ่ง จากสมการ (2.1) ถ้าค่า $j$ มีค่าเป็นศูนย์เสมอแล้วจะได้รูปแบบจำนวนฐานคู่ (double base number representation) เป็นระบบจำนวนเลขฐานสอง แต่ถ้าค่า $i$ มีค่าเป็นศูนย์เสมอแล้วจะได้รูปแบบจำนวนฐานคู่เป็นระบบจำนวนเลขฐานสาม การแทนค่าของจำนวนเต็มในระบบจำนวนฐานคู่สามารถแสดงเป็นตารางสองมิติได้ โดยที่ค่าของ $i$ และ $j$ เป็นอิสระต่อกัน โดยที่แต่ละแถวเป็นเลขชี้กำลังของฐานสองและแต่ละคอลัมน์เป็นเลขชี้กำลังของฐานสาม ในแต่ละช่องของตารางแทนค่าด้วยผลคูณของค่ายกกำลังของฐานสองและค่ายกกำลังของฐานสามตามตำแหน่งของเลขชี้กำลัง โดยแต่ละช่องที่มีค่าเป็นหนึ่งจะแทนช่องนั้นด้วยช่องสีเทา (gray cell) เรียกว่า *แอ็กทิฟเซลล์* (active cell) ส่วนช่องที่มีค่าเป็นศูนย์ (zero digit) จะแทนช่องนั้นด้วยช่องสีขาว (white cell)

**ตัวอย่างที่ 2.1** *แสดงตัวอย่างของรูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม 54*

**วิธีทำ** การแสดงค่าของจำนวนเต็ม 54 มีรูปแบบที่เป็นไปได้หลายแบบ แสดงให้ดูสองรูปแบบดังรูปที่ 2.1




รูปที่ 2.1 การแทนจำนวนเต็ม 54 ของระบบจำนวนฐานคู่

จากตัวอย่างที่กล่าวมาแสดงให้เห็นได้ว่าระบบแทนจำนวนฐานคู่เป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) และระบบแทนจำนวนฐานคู่มีจำนวนตัวเลขหนึ่งหรือจำนวนแอ็กทิฟเซลล์จำนวนเบาบาง จึงมีประสิทธิภาพต่อความเร็วในการคำนวณของระบบ

**2.2 อัลกอริทึมในการหารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่เชิงละโมบ (greedy algorithm)**

ในรูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม $x$ ของระบบจำนวนฐานคู่ หากมีปริมาณของจำนวนตัวเลขหนึ่งหรือแอ็กทิฟเซลล์น้อยที่สุด แล้วจะเรียกรูปแบบแทนจำนวนนั้นว่ารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบคาโนนิค (canonic DBNR:CDBNR) ดังรูปที่ 2.1 ตัวอย่างรูปแบบแทนจำนวนเต็ม 54 ทางด้านขวาเป็นรูปแบบคาโนนิค ซึ่งข้อดีของรูปแบบคาโนนิคคือช่วยให้การคำนวณเร็วขึ้นเนื่องจากมีจำนวนแอ็กทิฟเซลล์ที่ใช้ในการคำนวณน้อยที่สุด ถึงแม้ว่าแต่ละจำนวนจะมีรูปแบบคาโนนิคได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ แต่ทว่าปัญหาในการหารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบคาโนนิคของจำนวนเต็มขนาดใหญ่ๆ เป็นปัญหาที่แก้ได้ยาก (NP-complete) [8, 9] ในปี ค.ศ. 2005 กิลเบิร์ต (Gilbert) และ ปีแอร์ (Pierre) [10] ได้เสนออัลกอริทึมในการสร้างรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ที่เป็นคาโนนิคได้ แต่ว่าการทำงานของอัลกอริทึมนั้นใช้เวลาสูงเนื่องจากเป็นการทำงานแบบกำหนดการพลวัต (dynamic programming) ถึงแม้ว่าจะไม่มีวิธีการเหมาะสมในการหารูปแบบคาโนนิค แต่ ดิมิทรอฟ และ จูเลี่ยน ได้เสนออัลกอริทึมเชิงละโมบแบบง่ายๆ ที่ช่วยในการสร้างรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใกล้คาโนนิค (near canonic DBNR:NCDBNR) ด้วยความซับซ้อนระดับลอการิทึม [11] โดยขั้นตอนเป็นดังนี้

**อัลกอริทึมที่ 2.1** อัลกอริทึมในการหารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่เชิงละโมบ

**Input** : ($x$) จำนวนเต็มบวก

**Output** : ($R$) ลำดับของเลขชี้กำลังในระบบแทนจำนวนแบบฐานคู่ของจำนวนเต็ม $x$

**begin**

$R \leftarrow \varnothing$

**while** ($x > 0$) **do**

Find $s = 2^a3^b$, the largest number less than or equal to $x$

$R \leftarrow R \cup \{a,b\}$

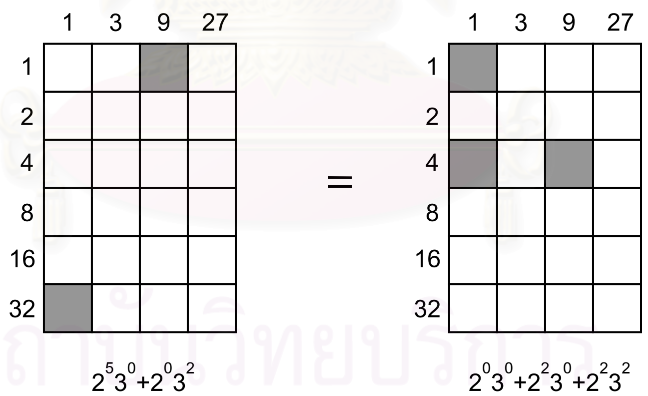
$x \leftarrow x - s$

**enddo**

**end**

**ตัวอย่างที่ 2.2** *หารูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม 41 ทั้งรูปแบบคาโนนิคและแบบใกล้คาโนนิค*

**วิธีทำ** แสดงให้ดูดังรูปที่ 2.2




รูปที่ 2.2 รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม 41 ของระบบจำนวนฐานคู่

□

จากรูปที่ 2.2 แสดงให้เห็นได้ว่ารูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม 41 ทางด้านซ้ายเป็นแบบคาโนนิคซึ่งมีแอ็กทิฟเซลล์เพียงสองเซลล์นั่นคือ $2^5 3^0$ และ $2^0 3^2$ แต่รูปแบบแทนจำนวนทางด้านขวาเป็นรูปแบบที่หาด้วยอัลกอริทึมเชิงละโมบ รูปแบบจำนวนที่ได้จะเป็นแบบใกล้คาโนนิคซึ่งมีแอ็กทิฟเซลล์สามเซลล์นั่นคือ $2^2 3^2$ $2^2 3^0$ และ $2^0 3^0$ เนื่องด้วยอัลกอริทึมเชิงละโมบจะให้ค่าในรอบแรกเป็น $2^2 3^2$ ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกินจำนวนเต็ม 41 รูปแบบแทนจำนวนจึงมีค่าของ $2^2 3^2$ อยู่ด้วย และนำค่าผลต่างของข้อมูลนำเข้า 41 กับค่าที่หา

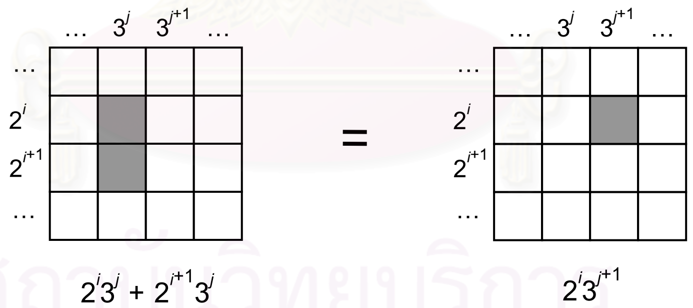
ได้ในรอบแรกคือ $2^2 3^2$ เป็นค่าเริ่มต้นในการหาค่าที่มากที่สุดที่ไม่เกินค่าผลต่างที่หาได้ในรอบต่อไป ต่อจากนั้นอัลกอริทึมให้ค่า $2^2 3^0$ ในรอบที่สองและค่า $2^0 3^0$ ในรอบที่สาม รูปแบบแทนจำนวนจึงเป็น $41 = 2^2 3^2 + 2^2 3^0 + 2^0 3^0$

บทบาทที่สำคัญในการหารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใกล้คาโนนิค คือ รูปแบบที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวหรือคอลัมน์เดียวกัน เพื่อช่วยให้รูปแบบแทนจำนวนมีการแทนจำนวนด้วยเลขหนึ่งน้อยลง รูปแบบดังกล่าวมีนิยามดังต่อไปนี้

**นิยามที่ 2.1** *รูปแบบแทนจำนวนแบบฐานคู่ซึ่งไม่มีตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกันนั้นถูกให้คำจำกัดความว่าเป็น* รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่พร้อมบวก (addition ready DBNR: ARDBNR)

ลักษณะของรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่พร้อมบวก สามารถคำนวณได้โดยการใช้กฎทางพีชคณิตสองกฎ เพื่อลดการแทนแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวหรือคอลัมน์เดียวกัน ได้แก่ กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในคอลัมน์เดียวกัน (column reduction) และกฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกัน (row reduction) เนื่องด้วยค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของสองแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวหรือคอลัมน์เดียวกันนั้นมีค่าเท่ากับค่าเชิงตัวเลขของแอ็กทิฟเซลล์ตำแหน่งใหม่เพียงตัวเดียว จึงสามารถทำการลดสองแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันนั้นได้

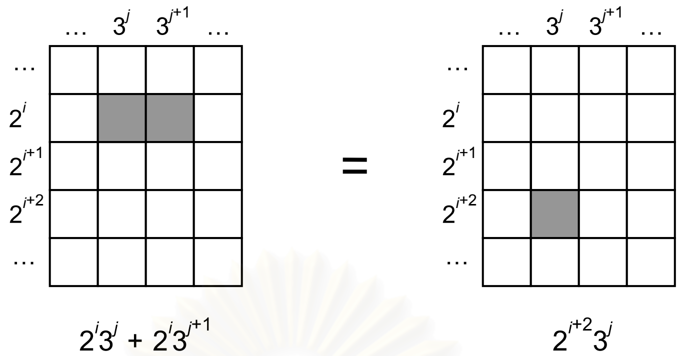
**กฎทางพีชคณิตที่ 2.1** กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในคอลัมน์เดียวกัน แสดงดังรูปที่ 2.3




รูปที่ 2.3 แสดงกฎการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในคอลัมน์เดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$2^i 3^j + 2^{i+1} 3^j = 2^i 3^{j+1}$$

**กฎทางพีชคณิตที่ 2.2** กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกัน แสดงดังรูปที่ 2.4




รูปที่ 2.4 แสดงกฎการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$2^i 3^j + 2^i 3^{j+1} = 2^{i+2} 3^j$$

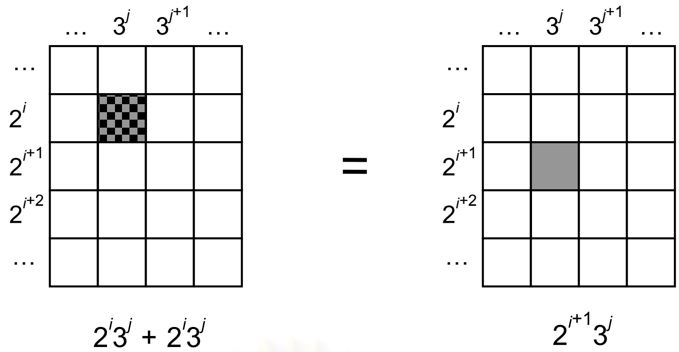
## 2.3 การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (fundamental arithmetic operations)

ระบบจำนวนฐานคู่สามารถแสดงค่าของจำนวนเต็มบวกได้ และมีคุณสมบัติการแทนตัวเลขหนึ่งในปริมาณน้อย มีความซ้ำซ้อนสูง และสามารถจำกัดสายการทดในการคำนวณได้ ซึ่งประหยัดพื้นที่ในการเก็บและมีความเร็วในการคำนวณสูงกว่าระบบจำนวนทั่วๆ ไป นอกจากนั้น ดิมิทรอฟและจูเลี่ยนได้เสนอการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตที่สำคัญสำหรับระบบจำนวนฐานคู่ได้แก่ การบวก และ การคูณ

### 2.3.1 การบวก (addition)

การบวกของระบบจำนวนฐานคู่สามารถทำได้ด้วยการซ้อนตารางสองตารางของตัวตั้งและตัวบวก ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตารางใหม่ที่มีแอ็กทิฟเซลล์รวมกันระหว่างสองตาราง แต่ในการบวกกันของระบบแทนจำนวนฐานคู่อาจเกิดการชนกัน (collision) ของตำแหน่งเซลล์เดียวกัน จึงมีกฎทางพีชคณิตเพื่อลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ ด้วยเหตุผลเดียวกันกับการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ติดกันในแถวหรือคอลัมน์เดียวกัน คือ ค่าเชิงตัวเลขของแอ็คทิฟเซลล์ที่ชนกันมีค่าเท่ากับค่าเชิงตัวเลขของแอ็กทิฟเซลล์ตัวใหม่เพียงตำแหน่งเดียว จึงสามารถทำการลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ได้ ตัวอย่างกฎแสดงดังต่อไปนี้

**กฎทางพีชคณิตที่ 2.3** กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกัน โดยให้เซลล์ที่เกิดการชนกันเป็นช่องตารางหมากรุกสีเทาดำ (checker board cell) แสดงดังรูปที่ 2.5




รูปที่ 2.5 แสดงกฎการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$2^i3^j + 2^i3^j = 2^{i+1}3^j$$

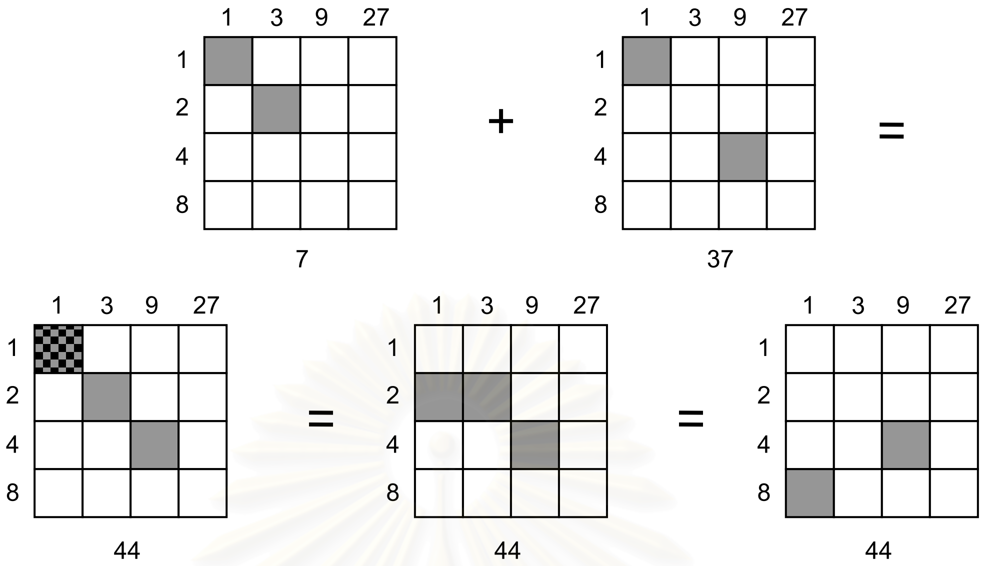
ผลลัพธ์ที่ได้จากการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกัน จะถูกนำไปใช้งานด้วยกฎทางพีชคณิตต่อ เพื่อทำการลดแอ็กทีฟเซลล์ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกันหรือคอลัมน์เดียวกันด้วย ทำให้คำตอบสุดท้ายที่ได้จากการบวกเป็นรูปแบบพร้อมบวก ส่งผลให้จำนวนการแทนของเลขหนึ่งถูกลดจำนวนลง และง่ายต่อการพร้อมคำนวณต่อในรอบถัดไป

**ตัวอย่างที่ 2.3** *หาผลบวกระหว่างเลข 7 และ 37 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่*

**วิธีทำ** พิจารณาจำนวน 7 ถ้าใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบ จะได้รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใกล้คาโนนิค คือ $7 = 6 + 1 = 2^1 3^1 + 2^0 3^0$ และจำนวน 37 จะได้รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ คือ $37 = 36 + 1 = 2^0 3^0 + 2^2 3^2$ ซึ่งทั้งสองจำนวนนั้นอยู่ในรูปแบบพร้อมบวกแล้ว เมื่อทำการบวกกันจะได้ผลดังนี้

$$\begin{array}{rl}
2^1 3^1 + 2^0 3^0 \quad + & \rightarrow \quad \mathbf{7} \\
\underline{2^0 3^0 + 2^2 3^2} & \rightarrow \quad \mathbf{37} \\
2^1 3^1 + (2^0 3^0 + 2^0 3^0) + 2^2 3^2 & \\
\Downarrow & \text{จากกฎ 2.3: } [2^0 3^0 + 2^0 3^0 = 2^1 3^0] \\
2^1 3^1 + 2^1 3^0 + 2^2 3^2 & \\
\Downarrow & \text{จากกฎ 2.2: } [2^1 3^0 + 2^1 3^1 = 2^3 3^0] \\
\underline{\underline{2^3 3^0 + 2^2 3^2}} & \rightarrow \quad \mathbf{44}
\end{array}$$

คำตอบสุดท้ายที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องและอยู่ในรูปแบบพร้อมบวกด้วย เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย จึงแสดงตัวอย่างการบวก ดังรูปที่ 2.6




รูปที่ 2.6 แสดงผลบวกของจำนวนเต็ม 7 และ 44 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่

### 2.3.2 การคูณ (multiplication)

การดำเนินการคูณของระบบจำนวนฐานคู่สามารถทำได้ด้วยการนำแอ็กทิฟเซลล์ในตารางของค่าตัวตั้งเลื่อน (shift) ตามตำแหน่งแอ็กทิฟเซลล์แต่ละตัวของตัวคูณในตาราง แล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมารวมกันด้วยวิธีเดียวกันกับกระบวนการบวก ซึ่งคำตอบสุดท้ายที่ได้จะต้องอยู่ในรูปแบบพร้อมบวกด้วย

**ตัวอย่างที่ 2.4** *หาผลคูณระหว่างเลข 5 และ 11 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่*

**วิธีทำ** พิจารณาจำนวน 5 จะใช้รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ คือ $5 = 3 + 2 = 2^0 3^1 + 2^1 3^0$ และจำนวน 11 จะใช้รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ คือ $11 = 9 + 2 = 2^0 3^2 + 2^1 3^0$ ซึ่งทั้งสองจำนวนนั้นอยู่ในรูปแบบพร้อมบวกแล้ว เมื่อทำการคูณจะได้ดังนี้

$$2^0 3^1 + 2^1 3^0 \quad \times \qquad \rightarrow \quad \mathbf{5}$$

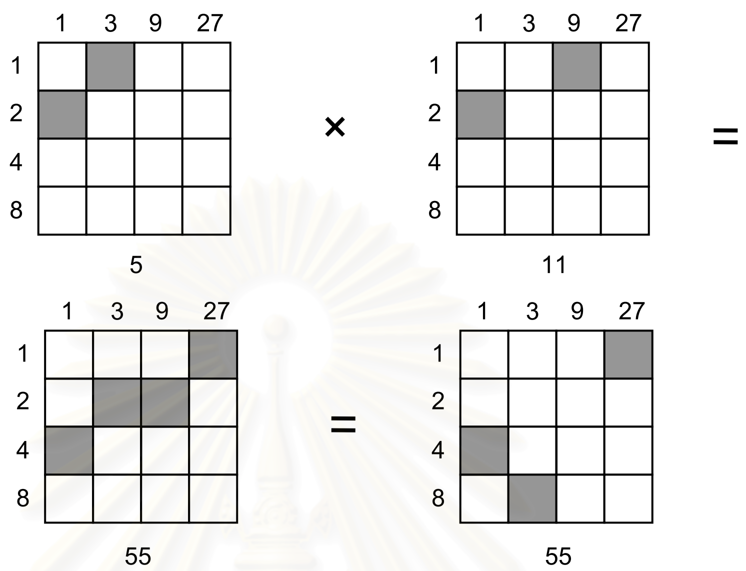
$$\underline{2^0 3^2 + 2^1 3^0} \qquad \rightarrow \quad \mathbf{11}$$

$$2^0 3^3 + (2^1 3^1 + 2^1 3^2) + 2^2 3^0$$

$$\Downarrow \qquad \text{จากกฎ 2.2: } [2^1 3^1 + 2^1 3^2 = 2^3 3^1]$$

$$\underline{\underline{2^0 3^3 + 2^3 3^1 + 2^2 3^0}} \qquad \rightarrow \quad \mathbf{55}$$

คำตอบสุดท้ายที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องและอยู่ในรูปแบบพร้อมบวกด้วย เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย จึงแสดงตัวอย่างการคูณ ดังรูปที่ 2.7




รูปที่ 2.7 แสดงผลคูณของจำนวนเต็ม 5 และ 11 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่

# บทที่ 3

## ระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

ระบบจำนวนฐานคู่มีความซ้ำซ้อนในการแทนรูปแบบจำนวนเต็มบวกต่างๆ และมีการกระจายตัวของตัวเลขสูง จึงส่งผลให้มีความเร็วในการคำนวณสูง โดยระบบจำนวนฐานคู่ใช้ฐานเป็นเลข 2 และ 3 นอกจากนั้นยังมีคุณสมบัติของรูปแบบพร้อมบวกหรือรูปแบบที่ไม่มีจำนวนสองจำนวนที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกันและคอลัมน์เดียวกัน ซึ่งส่งผลให้ตัวเลขลดน้อยลงและช่วยลดโอกาสการเกิดการแพร่กระจายของตัวทดให้น้อยลง แต่จำนวนเต็มทั้งหมดที่สามารถแทนได้ด้วยระบบจำนวนฐานคู่นั้นเป็นเพียงแค่จำนวนเต็มบวกเท่านั้น ดังนั้น ประเด็นสำคัญในงานวิจัยที่ต้องการทำคือการปรับปรุงและขยายระบบจำนวนฐานคู่เดิมนั้นให้เป็นระบบฐานคู่ที่สามารถแทนจำนวนเต็มลบได้ วิธีการง่ายๆ ที่สามารถใช้งานได้คือการใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมายเพิ่มเข้าไปในชุดตัวเลข [12] ดังนั้นในแต่ละตำแหน่งของระบบจำนวนฐานคู่นั้นจะสามารถมีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่จำนวนบิตในแต่ละตำแหน่งของระบบจำนวนจะต้องใช้ถึงสองบิตเพื่อเก็บชุดตัวเลข $\{0,1,\bar{1}\}$ ซึ่งยังไม่มีประสิทธิภาพที่ดีเพียงพอ ต่อมามีรูปแบบแทนจำนวนที่สามารถแทนจำนวนเต็มลบได้โดยที่ใช้บิตเดียวในแต่ละตำแหน่ง ซึ่งใช้ชุดตัวเลขสองชุดตัวเลขในการแทนจำนวนของระบบ [13] โดยให้ชุดตัวเลขที่หนึ่งเป็น $\{0,1\}$ และชุดตัวเลขที่สองเป็น $\{0,\bar{1}\}$ ซึ่งแต่ละตำแหน่งจะใช้เพียงชุดตัวเลขเดียวทำให้ไม่เกินหนึ่งบิต แต่การขยายระบบเช่นนี้อาจมีความยุ่งยากในเรื่องการจัดการชุดตัวเลข

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราจึงสนใจวิธีการที่ทำให้ระบบแบบใหม่สามารถแทนจำนวนเต็มลบได้และใช้พื้นที่เพียงแค่บิตเดียวในแต่ละตำแหน่งบนรูปแบบแทนจำนวน ด้วยการปรับเปลี่ยนเลขฐานคู่จากจำนวนเต็มบวกให้เป็นเลขฐานแบบมีเครื่องหมาย (signed-base) เพื่อให้ในบางตำแหน่งของระบบจำนวนสามารถเกิดค่าจำนวนเต็มลบได้ โดยใช้พื้นที่เพียงบิตเดียวเหมือนเดิมเพื่อเก็บชุดตัวเลข $\{0,1\}$ ดังนั้นจุดประสงค์หลักในงานวิจัยนี้ คือ การขยายระบบจำนวนฐานคู่เดิม เรียกว่าระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (double signed-base number system : DSBNS) ซึ่งระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายสามารถแทนจำนวนเต็มได้ทุกจำนวนเต็ม โดยใช้ฐานเป็น -2 และ -3 และนอกจากนั้นยังมีขนาดของชุดตัวเลขเป็น $\{0,1\}$ ด้วย พร้อมทั้งได้เสนอบทพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย การทำให้เป็นบรรทัดฐานเพื่อลดตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ที่อยู่ชนกัน อัลกอริทึมในการแปลงจำนวนเต็มต่างๆ ไปเป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย และการดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย ได้แก่ การบวก การลบ และการคูณ

### 3.1 รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (double signed-base number representation)

รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (double signed-base number representation : DSBNR) จะปรับเปลี่ยนเลขฐานจากระบบจำนวนฐานคู่เดิมคือ 2 และ 3 เป็น -2 และ -3 ตามลำดับ รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเป็นดังนิยามต่อไปนี้

**นิยามที่ 3.1** ระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (double signed-base number representation system) *หมายถึง ระบบจำนวนที่มีฐาน* $\beta_1 = -2$ *และ* $\beta_2 = -3$ *และให้* $d_{i,j}$ *เป็นชุดตัวเลข {0, 1} ซึ่งรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายของจำนวนเต็ม* $x$ *สามารถเขียนได้ในรูปของ*

$$x = \sum_{alli,j} d_{i,j}(\beta_1)^i(\beta_2)^j, d_{i,j} \in \{0,1\} \qquad (3.1)$$

*โดยที่ i และ j มีค่าเป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก*

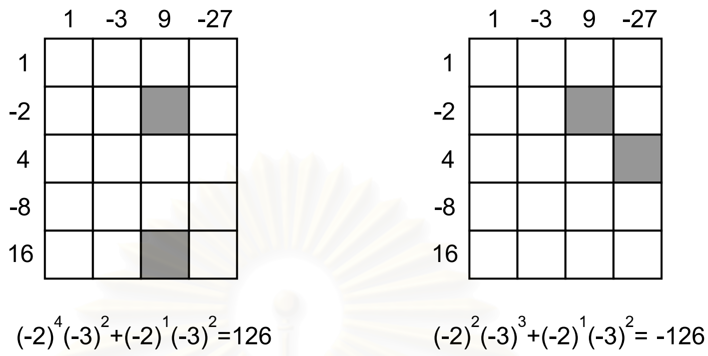
ระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายมีความสามารถในการระบุเครื่องหมายให้กับตำแหน่งต่างๆ ของรูปแบบแทนจำนวน ดังแสดงได้ตามตารางที่ 3.1 ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนี้ระดับความซ้ำซ้อนของรูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มบวกจะลดลง แต่จะไปเพิ่มระดับความซ้ำซ้อนของรูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มลบแทน ซึ่งเห็นได้ชัดว่าพื้นที่ของตัวเลขในแต่ละตำแหน่งในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นต้องการเพียงแค่บิตเดียวเมื่อเทียบกับการใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมายซึ่งต้องใช้ถึงสองบิตสำหรับรูปแบบแทนจำนวน

ตารางที่ 3.1 แสดงลักษณะเครื่องหมายของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

| **-2/-3** | **$(-3)^0$** | **$(-3)^1$** | **$(-3)^2$** | **$(-3)^3$** | … |
|---|---|---|---|---|---|
| **$(-2)^0$** | **+** | **-** | **+** | **-** | … |
| **$(-2)^1$** | **-** | **+** | **-** | **+** | … |
| **$(-2)^2$** | **+** | **-** | **+** | **-** | … |
| **$(-2)^3$** | **-** | **+** | **-** | **+** | … |
| : | : | : | : | : | … |

**ตัวอย่างที่ 3.1** *แสดงค่าจำนวนเต็ม 126 และ -126 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**วิธีทำ** สามารถแสดงค่าจำนวนเต็มทั้งสองค่าได้ดังรูปที่ 3.1




รูปที่ 3.1 แสดงจำนวนเต็มบวก 126 และจำนวนเต็มลบ -126
บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

□

## 3.2 ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (completeness)

ในการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับรูปแบบแทนจำนวน สิ่งที่สำคัญยิ่งคือความสมบูรณ์ของระบบจำนวน ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึงบทพิสูจน์ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

**ทฤษฎีบทที่ 3.1** *ทุก ๆ จำนวนเต็มสามารถมีรูปแบบแทนจำนวนได้บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**พิสูจน์** เพื่อทำการพิสูจน์ว่าทุก ๆ จำนวนเต็มสามารถแทนจำนวนได้บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย การพิสูจน์จะแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่ ๆ คือ กรณีของจำนวนเต็มบวกและกรณีของจำนวนเต็มลบ

**กรณีที่ 1** รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มบวก เราทำการพิสูจน์ด้วยการเสนออัลกอริทึมการแปลงจำนวนเต็มบวก $N$ จากรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบดั้งเดิมไปเป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย โดยจำนวนเต็มบวก $N$ แสดงรูปแบบแทนจำนวนในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N = \sum_{i=0}^{m} d_{i,0}(2)^i(3)^0 \qquad (3.2)$$

โดยที่ $i$ เป็นจำนวนเต็มศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก และ $d_{i,0} \in \{0,1\}$ จำนวนเต็ม $N$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่สองตัวคือ $N = X + Y$

$$X = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(-2)^{2i}(3)^0 \text{ , } Y = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(3)^0 \tag{3.3}$$

โดยที่

$$d'_{k,0} = \begin{cases} d_{k,0} : k = even \\ 0 : k = odd \end{cases} \text{ , } d''_{k,0} = \begin{cases} 0 : k = even \\ d_{k,0} : k = odd \end{cases}$$

ค่าของ $d'_{2i,0}$ และ $d''_{2i-1,0}$ มีค่าเพียงแค่ 0 หรือ 1 เท่านั้น วัตถุประสงค์หลักคือการปรับรูปแบบแทนจำนวนให้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม $N$ ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของ

$$N = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} e_{i,j}(-2)^i(-3)^j \tag{3.4}$$

ซึ่ง $e_{i,j} \in \{0,1\}$ จากสมการ (3.3) ถ้าค่า $Y$ เป็น 0 แล้ว $N$ สามารถแทนจำนวนในระบบใหม่นี้ได้ แต่ถ้าค่า $Y$ ไม่เป็น 0 แล้วจะต้องทำการพิจารณาค่า $Y$ ดังต่อไปนี้

$$Y = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(3)^0$$

$$Y = \text{-}(\text{-}Y)$$

$$Y = ((\bar{1})(2)^1 + (1)(2)^0)(\text{-}Y)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(2)^{2i}(3)^0 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} - d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(3)^0 \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.3) และ (3.5) จะได้ว่า $N = X \text{ - } (\text{-}Y)$ พิจารณาค่า $N$ ดังต่อไปนี้

$$N = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(2)^{2i}(3)^0 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(2)^{2i}(3)^0 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} - d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(3)^0$$

$$N=\sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}(d'_{2i,0}+d''_{2i-1,0})(2)^{2i}(3)^{0}+\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}-d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(3)^{0}$$

$$N=\sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}(d'_{2i,0}+d''_{2i-1,0})(-2)^{2i}(3)^{0}+\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}d''_{2i-1,0}(-2)^{2i-1}(3)^{0}$$

โดยที่ $d'_{2\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil,0}=0$ ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil=\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor$ และ $d''_{-1,0}=0$

ค่าของ $(d'_{2i,0}+d''_{2i\text{-}1,0})$ จะเป็นสมาชิกของ {0, 1, 2} เนื่องจากค่าของ $d'_{2i,0}$ และ $d''_{2i\text{-}1,0}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ดังนั้นในการพิสูจน์จะแบ่งเป็นสองกรณีย่อย

**กรณีที่ 1.1** $(d'_{2i,0}+d''_{2i\text{-}1,0})$ = 0 หรือ 1 นั่นหมายความว่ารูปแบบแทนจำนวนของ $N$ สามารถแสดงให้อยู่บนรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายได้ ดังสมการ (3.4) โดยที่ $e_{2i,0}=(d'_{2i,0}+d''_{2i\text{-}1,0})$ และ $e_{2i\text{-}1,0}=d''_{2i\text{-}1,0}$

**กรณีที่ 1.2** $(d'_{2i,0}+d''_{2i\text{-}1,0})$ = 2 นั่นหมายความว่า $d'_{2i,0}=1$ และ $d''_{2i\text{-}1,0}=1$ และสามารถใช้กฎทางพีชคณิตเพื่อลดตัวเลขสองตัวที่อยู่ติดกันได้ดังนี้

$$1\times(2)^{2i}(3)^{0}+1\times(2)^{2i-1}(3)^{0}=1\times(2)^{2i-1}(3)^{1}$$

ดังนั้นรูปแบบแทนจำนวนของ $N$ สามารถแสดงให้อยู่บนรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายได้ ดังสมการ (3.4) โดยที่ $e_{2i,0}=0$ $e_{2i\text{-}1,0}=d''_{2i\text{-}1,0}$ และ $e_{2i\text{-}1,1}=1$

**กรณีที่ 2** รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มลบ เราทำการพิสูจน์ด้วยวิธีการเดียวกับการพิสูจน์กรณีของจำนวนเต็มบวก โดยจำนวนเต็มลบ $N$ แสดงรูปแบบแทนจำนวนในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N=\sum_{i=0}^{m}-d_{i,0}(2)^{i}(3)^{0} \qquad (3.6)$$

เมื่อ $i$ เป็นจำนวนเต็มศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก และ $d_{i,0}\in\{0,1\}$ จำนวนเต็ม $N$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่สองตัวคือ $N=Y-X$ ได้ดังนี้

$$X=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor}d'_{2i,0}(2)^{2i}(3)^{0}\ ,\ Y=\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}d''_{2i+1,0}(-2)^{2i+1}(3)^{0} \qquad (3.7)$$

โดยที่

$$d'_{k,0} = \begin{cases} d_{k,0} : k = even \\ \\ 0 : k = odd \end{cases} \quad , \; d''_{k,0} = \begin{cases} 0 : k = even \\ \\ d_{k,0} : k = odd \end{cases}$$

จากสมการ (3.7) ถ้าค่า $X$ เป็น 0 แล้ว $N$ สามารถแทนจำนวนในระบบใหม่นี้ได้ แต่ถ้าค่า $X$ ไม่เป็น 0 แล้วจะต้องทำการพิจารณาค่า $X$ ได้ดังนี้

$$-X = -\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(2)^{2i}(3)^0$$

$$-X = ((\bar{1})(2)^1 + (1)(2)^0)(\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(2)^{2i}(3)^0)$$

$$-X = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(-2)^{2i+1}(3)^0 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d''_{2i,0}(-2)^{2i}(3)^0 \qquad (3.8)$$

จากสมการ (3.7) และ (3.8) จะได้ว่า $N = Y + (-X)$ พิจารณาค่า $N$ ดังต่อไปนี้

$$N = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} - d''_{2i+1,0}(2)^{2i+1}(3)^0 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} - d'_{2i+1,0}(2)^{2i+1}(3)^0 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} - d''_{2i,0}(2)^{2i}(3)^0$$

$$N = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} -(d''_{2i+1,0} + d'_{2i+1,0})(2)^{2i+1}(3)^0 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} - d''_{2i,0}(2)^{2i}(3)^0$$

$$N = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} (d''_{2i+1,0} + d'_{2i+1,0})(-2)^{2i+1}(3)^0 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d''_{2i,0}(-2)^{2i}(3)^0$$

โดยที่ $d'_{2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,0} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ และ $d''_{-1,0} = 0$

ในส่วนของกระบวนการพิสูจน์ถัดมาสามารถทำได้เช่นเดียวกันกับการพิสูจน์ในกรณีที่ 1 ■

**ตัวอย่างที่ 3.2** *กำหนดให้จำนวนเต็ม $N$ มีค่า 24 บนระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิม จงหาค่า $N$ บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**วิธีทำ** ค่า $N$ บนระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$N = X + Y = d'_{4,0}(-2)^4(3)^0 + d''_{3,0}(2)^3(3)^0$$

โดยที่ $d'_{4,0} = 1$ และ $d''_{3,0} = 1$ ซึ่งในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายรูปแบบแทนจำนวนของ $N$ อยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} e_{i,j}(-2)^i(-3)^j$$

พิจารณาค่า $Y$

$$Y = d''_{3,0}(2)^3(3)^0$$

$$Y = ((-2)^1(3)^0 + (-2)^0(3)^0)(-d''_{3,0}(2)^3(3)^0)$$

$$Y = d''_{3,0}(2)^4(3)^0 + (-d''_{3,0}(2)^3(3)^0)$$

ดังนั้น สามารถหาค่า $N$ ได้ดังต่อไปนี้

$$N = d'_{4,0}(-2)^4(3)^0 + d''_{3,0}(2)^4(3)^0 + (-d''_{3,0}(2)^3(3)^0)$$

$$N = (d'_{4,0} + d''_{3,0})((-2)^4(3)^0) + (d''_{3,0}(-2)^3(3)^0)$$

ถ้า $d'_{4,0} + d''_{3,0} = 2$ แล้วสามารถใช้กฎทางพีชคณิต

$$(2)^4(3)^0 + (2)^3(3)^0 = (2)^3(3)^1$$

เพราะฉะนั้นค่า $N$ สามารถแทนจำนวนให้อยู่ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายได้ โดยที่ $e_{4,0} = 0$ $e_{3,0} = d''_{3,0}$ และ $e_{3,1} = 1$

□

## 3.3 การแปลงจำนวนไปเป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (conversion algorithm)

ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย ระดับความซ้ำซ้อนของจำนวนเต็มบวกจะถูกลดลงจากระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิมให้เท่าเทียมกับจำนวนเต็มลบ นั่นคือ ผลลัพธ์จากการแปลงจำนวนเต็มบวกไปเป็นระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายอาจจะมีจำนวนของตัวเลขมากกว่าระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิมได้ ซึ่งวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1 เป็นวิธีการแปลงจาก

ระบบจำนวนฐานคู่แบบดั้งเดิมไปเป็นระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย แต่ในส่วนนี้เรานำเสนออัลกอริทึมเชิงละโมบสำหรับการแปลงจำนวนต่างๆ ไปเป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

**อัลกอริทึมที่ 3.1** อัลกอริทึมในการแปลงจำนวนไปเป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเชิงละโมบ

**Input** : ( $x$ ) จำนวนเต็ม

**Output** : ( $R$ ) ลำดับของเลขชี้กำลังในระบบแทนจำนวนแบบฐานคู่แบบมีเครื่องหมายของจำนวนเต็ม $x$

**begin**

$R \leftarrow \varnothing$

**while** ( $x \neq 0$ ) **do**

Find $s = (-2)^a(-3)^b$ , the nearest number to $x$

$R \leftarrow R \cup \{a,b\}$

$x \leftarrow x - s$

**enddo**

**end**

***พิสูจน์*** จากอัลกอริทึมเป็นการทำงานแบบเวียนเกิด ด้วยการหาค่าที่ใกล้เคียงกับจำนวนเต็มที่เป็นข้อมูลนำเข้ามากที่สุดในแต่ละรอบ แล้วหาผลต่างระหว่างค่าที่หาได้กับจำนวนเต็มที่เป็นข้อมูลนำเข้าเพื่อใช้ในการหาค่าที่ใกล้เคียงในรอบถัดๆ ไป ค่าผลต่างที่ได้จะมีค่าเข้าใกล้ 0 เรื่อยๆ และจะจบการทำงานเมื่อมีค่าผลต่างเป็น 0 ซึ่งเห็นได้ชัดว่าผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมมีค่าเท่ากับข้อมูลนำเข้าจำนวนเต็ม $x$ ส่วนความซับซ้อนเชิงเวลานั้น เนื่องจากตัวเลขในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายอยู่ในรูปของ $(-2)^i(-3)^j$ ค่าปริมาณของตัวเลขที่มากที่สุดนั้นถูกจำกัดอยู่ที่ $\log_2 x$ ดังนั้นความซับซ้อนเชิงเวลาของอัลกอริทึมนี้เป็น $O(\log\log x)$ ■

ถึงแม้ว่าอัลกอริทึมนี้จะมีการทำงานที่ง่ายไม่ซับซ้อนและได้ผลรวดเร็ว แต่ว่าอัลกอริทึมนี้ไม่สามารถรับรองได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปแบบคาโนนิคเสมอไป

**ตัวอย่างที่ 3.3** *แปลงจำนวนเต็ม 15 ให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายด้วยอัลกอริทึมเชิงละโมบ*

**วิธีทำ** การทำงานรอบแรกของอัลกอริทึมเชิงละโมบจะทำการหาค่าที่ใกล้ที่สุดของ 15 นั่นคือ $(-2)^4 (-3)^0$ จากนั้นหาผลต่างของ 15 กับ $(-2)^4(-3)^0$ ได้เป็น -1 แล้วนำค่า -1 ที่ได้ไปหาค่าที่ใกล้ที่สุดในรอบที่สองได้เป็น $(-2)^1(-3)^0$ และผลต่างของ -1 กับ $(-2)^1(-3)^0$ คือ 1 จากนั้นหาค่าใกล้ที่สุดในรอบที่สามได้เป็น $(-2)^0(-3)^0$ ซึ่งผลต่างของ 1 กับ $(-2)^0(-3)^0$ เป็น 0 อัลกอริทึมจึงจะจบการทำงานและให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้เป็น $15 = (-2)^4(-3)^0 + (-2)^1(-3)^0 + (-2)^0(-3)^0$ นั่นเอง สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 แสดงการแปลงจำนวนเต็ม 15
ให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

| iteration | $x$ (input) | $s$ (nearest number) | $x = x - s$ (difference) |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | $(-2)^4(-3)^0$ | -1 |
| 2 | -1 | $(-2)^1(-3)^0$ | 1 |
| 3 | 1 | $(-2)^0(-3)^0$ | 0 |

**ตัวอย่างที่ 3.4** *แปลงจำนวนเต็ม -15 ให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายด้วยอัลกอริทึมเชิงละโมบ*

**วิธีทำ** การทำงานรอบแรกของอัลกอริทึมเชิงละโมบจะทำการหาค่าที่ใกล้ที่สุดของ -15 นั่นคือ $(-2)^2 (-3)^1$ หาผลต่างของ -15 กับ $(-2)^2(-3)^1$ ได้เป็น -3 นำค่า -3 ที่ได้ไปหาค่าที่ใกล้ที่สุดในรอบถัดไปได้เป็น $(-2)^0(-3)^1$ ซึ่งผลต่างของ -3 กับ $(-2)^0(-3)^1$ คือ 0 อัลกอริทึมจึงจบการทำงานและให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้เป็น $-15 = (-2)^2(-3)^1 + (-2)^0(-3)^1$ นั่นเอง สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 แสดงการแปลงจำนวนเต็ม -15
ให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

| iteration | $x$ (input) | $s$ (nearest number) | $x = x - s$ (difference) |
|---|---|---|---|
| 1 | -15 | $(-2)^2(-3)^1$ | -3 |
| 2 | -3 | $(-2)^0(-3)^1$ | 0 |

จากตัวอย่างที่ 3.3 การใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบในการแปลงจำนวนเต็ม 15 นั้นจะได้จำนวน 3 จำนวน แต่รูปแบบคาโนนิคของจำนวนเต็ม 15 นั้นเป็น $15 = (-2)^0 (-3)^2 + (-2)^1(-3)^1$ ซึ่งมีแค่ 2 จำนวน ในขณะที่จากตัวอย่างที่ 3.4 แปลงจำนวนเต็ม -15 ด้วยอัลกอริทึมเชิงละโมบได้ $-15 = (-2)^2(-3)^1 + (-2)^0(-3)^1$ มี 2 จำนวน ซึ่งเป็นรูปแบบคาโนนิคด้วย ในการหารูปแบบคา

โนนิคนั้นอาจต้องใช้เวลานานเนื่องจากจำเป็นต้องใช้กระบวนการหาคำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) ถึงจะตอบได้ว่าใช้จำนวนน้อยที่สุด งานวิจัยนี้ไม่ได้สนใจในการหารูปแบบคาโนนิคบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

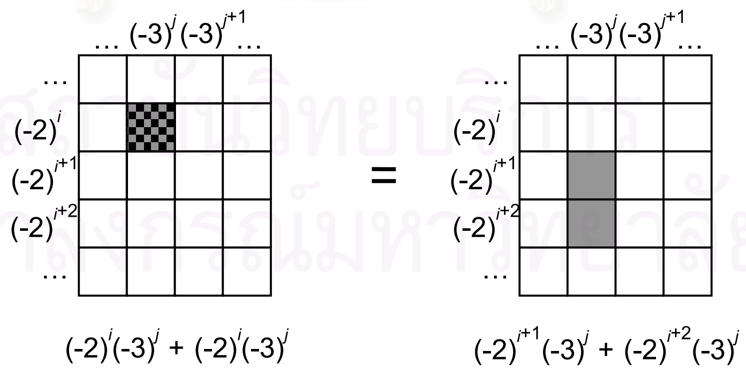
### 3.4 การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (arithmetic operations)

ในงานวิจัยเกี่ยวกับระบบแทนจำนวน สิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณาคือเรื่องการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตของระบบแทนจำนวน ในส่วนของระบบจำนวนฐานคู่แบบดั้งเดิมนั้นสามารถแทนจำนวนได้แค่จำนวนเต็มบวก ซึ่งการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตนั้นมีกระบวนการบวกและการคูณ แต่ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นเป็นระบบจำนวนที่สามารถแทนจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงนำเสนอการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตสำหรับระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายที่สำคัญ ได้แก่ การบวก การลบ และการคูณ

#### 3.4.1 การบวก (addition)

การบวกของจำนวนสองจำนวนสามารถทำได้ด้วยการซ้อนตารางสองตารางระหว่างตัวตั้งและตัวบวกเหมือนกับระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิม ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตารางใหม่ที่มีแอ็กทิฟเซลล์รวมกันระหว่างสองตาราง ซึ่งในการบวกกันของระบบสามารถเกิดการชนกันของตำแหน่งเซลล์เดียวกันได้ จึงมีกฎทางพีชคณิตสำหรับแปลงการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ ดังต่อไปนี้

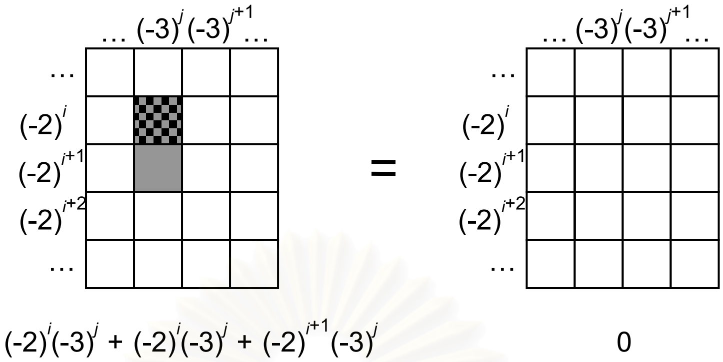
**กฎทางพีชคณิตที่ 3.1** กฎในการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกัน โดยให้เซลล์ที่เกิดการชนกันเป็นช่องตารางหมากรุกสีเทาดำ แสดงดังรูปที่ 3.2




รูปที่ 3.2 แสดงกฎการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$(-2)^i(-3)^j + (-2)^i(-3)^j = (-2)^{i+1}(-3)^j + (-2)^{i+2}(-3)^j$$

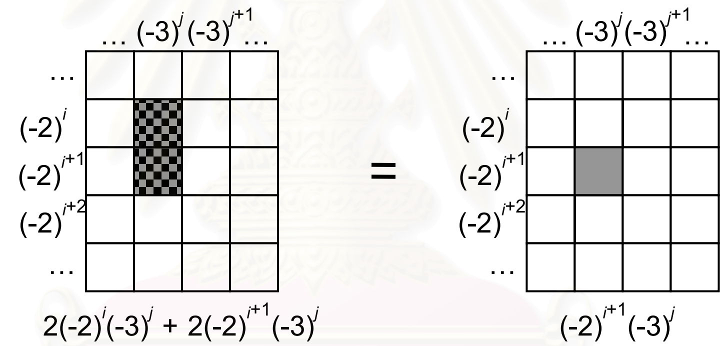
**กฎทางพีชคณิตที่ 3.2** กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกันให้เป็นศูนย์ แสดงดังรูปที่ 3.3




รูปที่ 3.3 แสดงกฎการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$(-2)^{i}(-3)^{j} + (-2)^{i}(-3)^{j} + (-2)^{i+1}(-3)^{j} = 0$$

**กฎทางพีชคณิตที่ 3.3** กฎในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกัน แสดงดังรูปที่ 3.4

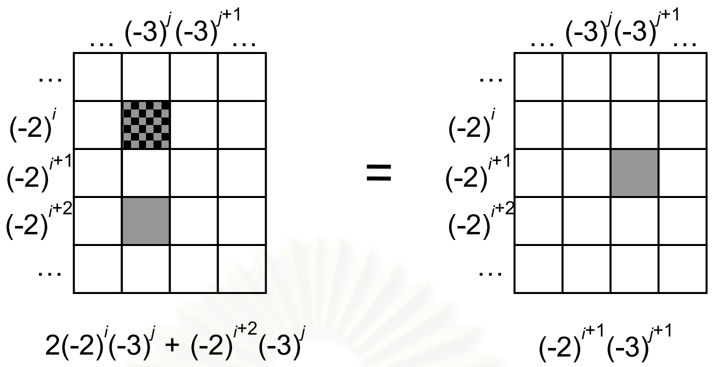



รูปที่ 3.4 แสดงกฎการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันในเซลล์เดียวกันด้วยกฎทางพีชคณิต

$$2(-2)^{i}(-3)^{j} + 2(-2)^{i+1}(-3)^{j} = (-2)^{i+1}(-3)^{j}$$

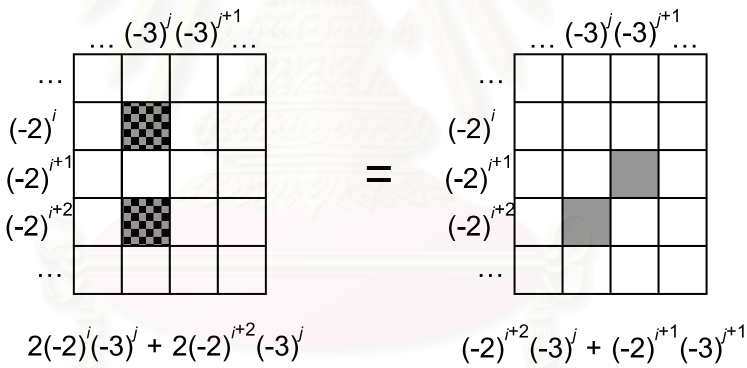
จากกฎทางพีชคณิตที่ 3.2 และ 3.3 เห็นได้ชัดว่าการบวกสามารถทำได้ในสองเซลล์ที่ติดกันในคอลัมน์เดียวกัน แต่กฎทางพีชคณิตที่ 3.1 สามารถทำการบวกได้แต่ถ้าในสองเซลล์ถัดลงมาภายในคอลัมน์เดียวกันเกิดมีแอ็กทิฟเซลล์อื่นอยู่ จะส่งผลให้สายการทดเกินหนึ่งขั้น ดังนั้นเราจึงเสนอกฎทางพีชคณิตอีกสองข้อเพื่อแก้ไขกรณีที่มีปัญหาจากกฎทางพีชคณิตที่ 3.1

**กฎทางพีชคณิตที่ 3.4** กฎในการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ในรูปของ $2(-2)^i(-3)^j + (-2)^{i+2}(-3)^j$ แสดงดังรูปที่ 3.5




รูปที่ 3.5 แสดงกฎการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ในรูปของ $2(-2)^i(-3)^j + (-2)^{i+2}(-3)^j$ ด้วยกฎทางพีชคณิต $2(-2)^i(-3)^j + (-2)^{i+2}(-3)^j = (-2)^{i+1}(-3)^{j+1}$

**กฎทางพีชคณิตที่ 3.5** กฎในการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ในรูปของ $2(-2)^i(-3)^j + (-2)^{i+2}(-3)^j$ แสดงดังรูปที่ 3.6




รูปที่ 3.6 แสดงกฎการแปลงแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ในรูปของ $2(-2)^i(-3)^j + 2(-2)^{i+2}(-3)^j$ ด้วยกฎทางพีชคณิต $2(-2)^i(-3)^j + 2(-2)^{i+2}(-3)^j = (-2)^{i+2}(-3)^j + (-2)^{i+1}(-3)^{j+1}$

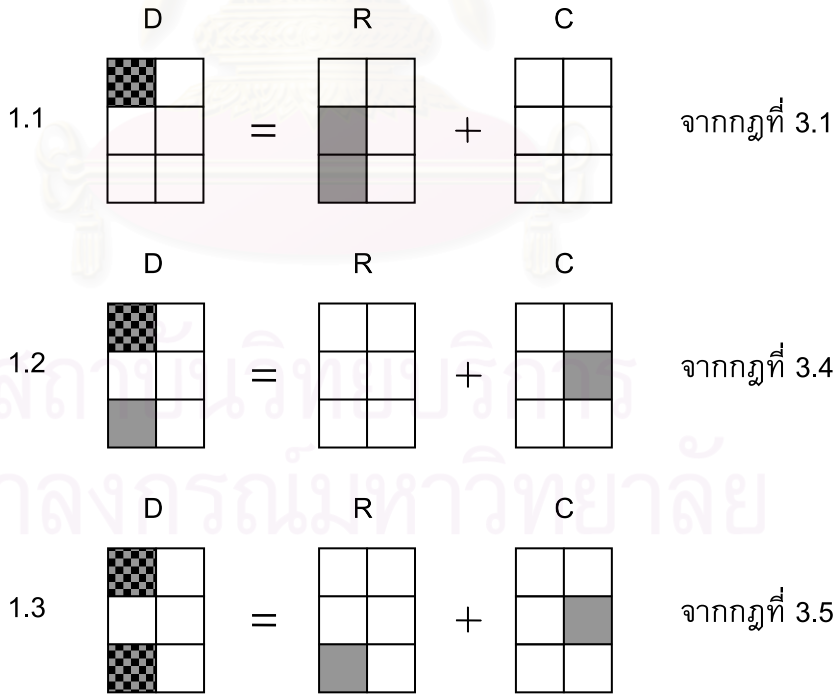
จากกฎทางพีชคณิตที่ 3.4 และ 3.5 จะทำการลดรูปของกรณีที่มีปัญหาจากกฎทางพีชคณิตที่ 3.1 ได้ ซึ่งตัวทดที่เกิดขึ้นจะไม่เกิดในแถวใหม่ของคอลัมน์เดียวกัน แต่จะเกิดแอ็กทิฟเซลล์ใหม่ในคอลัมน์ถัดไป ดังนั้นเราจะนำเสนอการบวกเชิงกำหนด โดยการบวกสามารถทำได้ด้วยการซ้อนตารางสองตารางระหว่างตัวตั้งและตัวบวกซึ่งเวลาที่ใช้เป็นค่าคงที่ แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตารางใหม่ที่อาจเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์อยู่ จึงต้องทำการลดรูปด้วยกฎทางพีชคณิต ทำการพิจารณาลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ในคอลัมน์เดียวกันเป็นหลัก โดยแปลงให้เป็นรูปแบบแทนจำนวนที่ไม่เหลือการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์

การลดรูปอันเนื่องมาจากแอ็กทิฟเซลล์ชนกันเพื่อให้รูปแบบแทนจำนวนอยู่ในรูปแบบที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกันได้ สามารถใช้กฎทางพีชคณิตที่เสนอไปห้ากฎ โดยตัวทดที่เกิดขึ้นจากการลดรูปนั้นเราจะนำไปเก็บในตารางใหม่ที่มีชื่อว่าตารางตัวทด ดังบทตั้งที่ 3.1

**บทตั้งที่ 3.1** *กำหนดให้ D คือ ตารางรูปแบบแทนจำนวนใดๆ ที่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกันในคอลัมน์เดียวกันบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย สามารถถูกแบ่งตารางออกเป็นสองตาราง คือ ตารางจำนวนเหลือ (remaining table) R และ ตารางจำนวนทด (carry table) C ด้วยกฎที่ลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ในคอลัมน์เดียวกันเพียงห้ากฎเท่านั้น โดยที่ทั้งตารางจำนวนเหลือและตารางจำนวนทด จะต้องอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน*

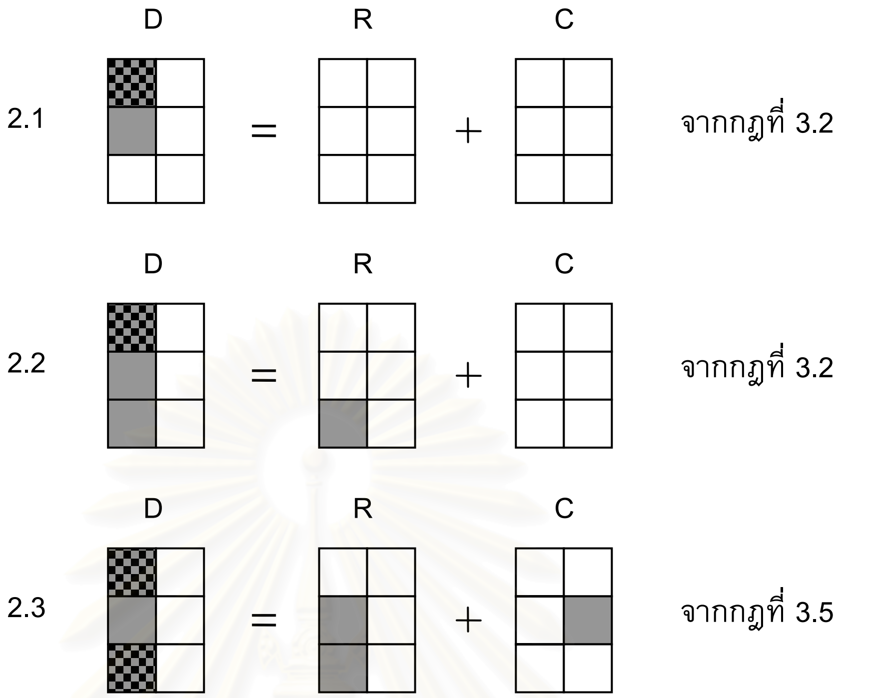
**พิสูจน์** จะทำการพิสูจน์ว่า รูปแบบแทนจำนวนทั้งหมดที่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์นั้นสามารถเขียนให้เห็นได้ว่าตารางจำนวนเหลือและตารางจำนวนทดต่างก็ไม่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์และผลรวมของตารางจำนวนเหลือกับตารางจำนวนทดต้องมีค่าเท่ากับตารางรูปแบบแทนจำนวนของผลบวก ซึ่งรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ในคอลัมน์เดียวกันมีรูปแบบเป็นไปได้อยู่ 3 กรณีหลักๆ ได้แก่

กรณีที่ 1



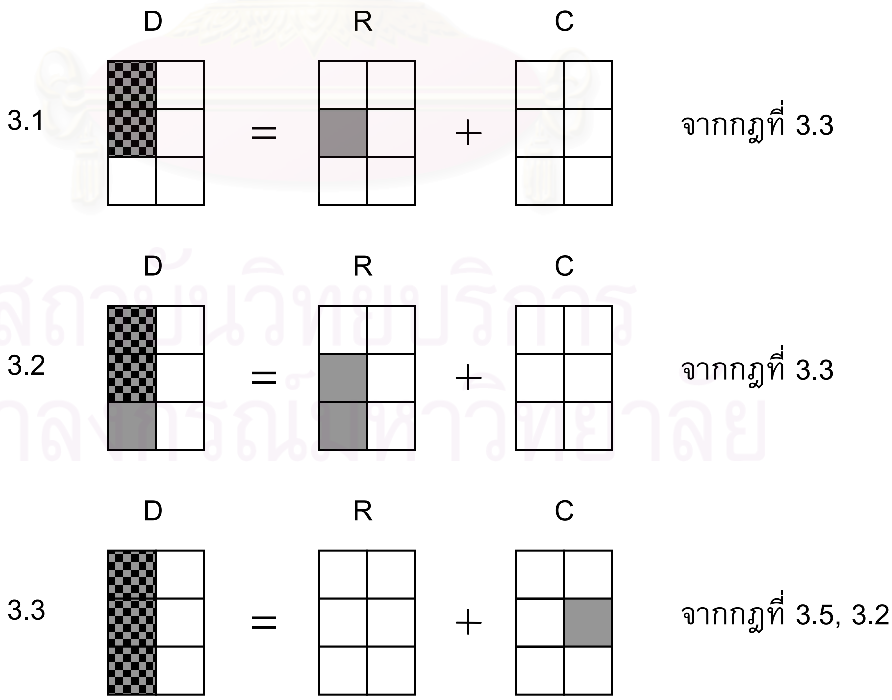

รูปที่ 3.7 แสดงการแบ่งตารางกรณีเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์
เมื่อเซลล์ในแถวถัดไปในคอลัมน์เดียวกันไม่แอ็กทิฟ

กรณีที่ 2




รูปที่ 3.8 แสดงการแบ่งตารางกรณีเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์
เมื่อเซลล์ในแถวถัดไปในคอลัมน์เดียวกันแอ็กทิฟ

กรณีที่ 3




รูปที่ 3.9 แสดงการแบ่งตารางกรณีเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์
เมื่อเซลล์ในแถวถัดไปในคอลัมน์เดียวกันแอ็กทิฟและเกิดการชนกัน

จากการพิสูจน์เห็นได้ชัดว่า ทุกๆ กรณีที่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์สามารถแบ่งตารางเป็นตารางจำนวนเหลือและตารางจำนวนทดได้โดยไม่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์และได้ค่าผลรวมที่ถูกต้องโดยใช้กฎทางพีชคณิตเพียงห้ากฎที่ได้นำเสนอ ■

จากบทตั้งที่ 3.1 เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบแทนจำนวนที่ได้จากการบวกให้อยู่ในรูปที่ไม่เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ได้ด้วยกฎทางพีชคณิตเพียงห้ากฎ ถ้ารูปแบบแทนจำนวนอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกันแล้วการทดระหว่างคอลัมน์จะไม่สามารถเกิดขึ้นอีก อย่างไรก็ตามจากกรณีที่ 1.2 1.3 2.3 และ 3.3 มีการใช้กฎทางพีชคณิตที่ 3.4 และ 3.5 ทำให้มีตัวทดระหว่างคอลัมน์เกิดขึ้นจากการลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ในคอลัมน์ โดยทิศทางของตัวทดเป็นทิศทางการส่งค่าจากคอลัมน์ด้านซ้ายไปทางด้านขวา นั่นแสดงว่าในตารางจำนวนทดนั้นจะไม่มีการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์เกิดขึ้น นอกจากนี้ยังสรุปได้อีกว่าจะไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ติดกัน หรือห่างกันหนึ่งเซลล์ภายในคอลัมน์เดียวกัน ดังนั้นเมื่อตารางจำนวนเหลือรวมกับตารางจำนวนทดแล้วค่าผลลัพธ์ที่ได้ย่อมจะไม่เกิดกรณีที่มีแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันอยู่ติดกันหรือห่างกันหนึ่งเซลล์ภายในคอลัมน์เดียวกันแน่นอน แสดงว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมหลังจากแบ่งตารางแล้วจะเกิดรูปแบบที่เป็นไปได้เพียงแค่สี่รูปแบบ คือ กรณีที่ 1.1 1.2 2.1 และ 2.2 ซึ่งทั้งสี่กรณีนี้มีเพียงกรณีที่ 1.2 เท่านั้นที่สามารถก่อให้เกิดการทดไปยังคอลัมน์ถัดไปได้อีก เพราะมีการใช้กฎทางพีชคณิตที่ 3.4 จึงสรุปได้ว่ามีเพียงกรณีที่ 1.2 กรณีเดียวที่อาจจะทำให้เกิดการทดต่อเนื่องไปเรื่อยๆ ภายในจำนวนจำกัดของคอลัมน์ ซึ่งเมื่อทำการลดรูปครบทุกคอลัมน์แล้วรูปแบบที่มีการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ก็จะไม่เกิดขึ้น

กระบวนการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย สามารถทำได้ด้วยการซ้อนตารางสองตารางระหว่างตัวตั้งและตัวบวก และทำการลดรูปแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันด้วยกฎเพียงห้ากฎ ดังทฤษฎีบทที่ 3.2

**ทฤษฎีบทที่ 3.2** *กระบวนการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย สามารถทำได้ภายในเวลาเชิงเส้นตามจำนวนคอลัมน์ ด้วยอัลกอริทึมการบวก*

**อัลกอริทึมที่ 3.2** อัลกอริทึมการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

**Input** : $X = \sum_{all i,j} x_{i,j}(-2)^i(-3)^j$ และ $Y = \sum_{all i,j} y_{i,j}(-2)^i(-3)^j$

**Output** : $Z = \sum_{all i,j} z_{i,j}(-2)^i(-3)^j$ ซึ่ง $Z = X + Y = \sum_{all i,j}(x_{i,j} + y_{i,j})(-2)^i(-3)^j$

**begin**

$Z \leftarrow X + Y$

**while** (*Z* contains some collisions) do

$R, C \leftarrow split(Z)$

$Z \leftarrow R + C$

**enddo**

**end**

**พิสูจน์** ต้องพิสูจน์ว่า ผลลัพธ์จากการบวกนั้นให้ค่าที่ถูกต้องและอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน และสามารถทำได้ภายในเวลาเชิงเส้นตามจำนวนคอลัมน์

ผลลัพธ์จากการบวกนั้นเป็นค่าที่ถูกต้องแล้ว แต่จะเกิดรูปแบบที่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน จึงทำการลดรูปด้วยการแบ่งแยกตาราง ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการแบ่งแยกตารางและเมื่อนำกลับมารวมกันแล้วจะได้ค่าถูกต้องตามบทตั้งที่ 3.1

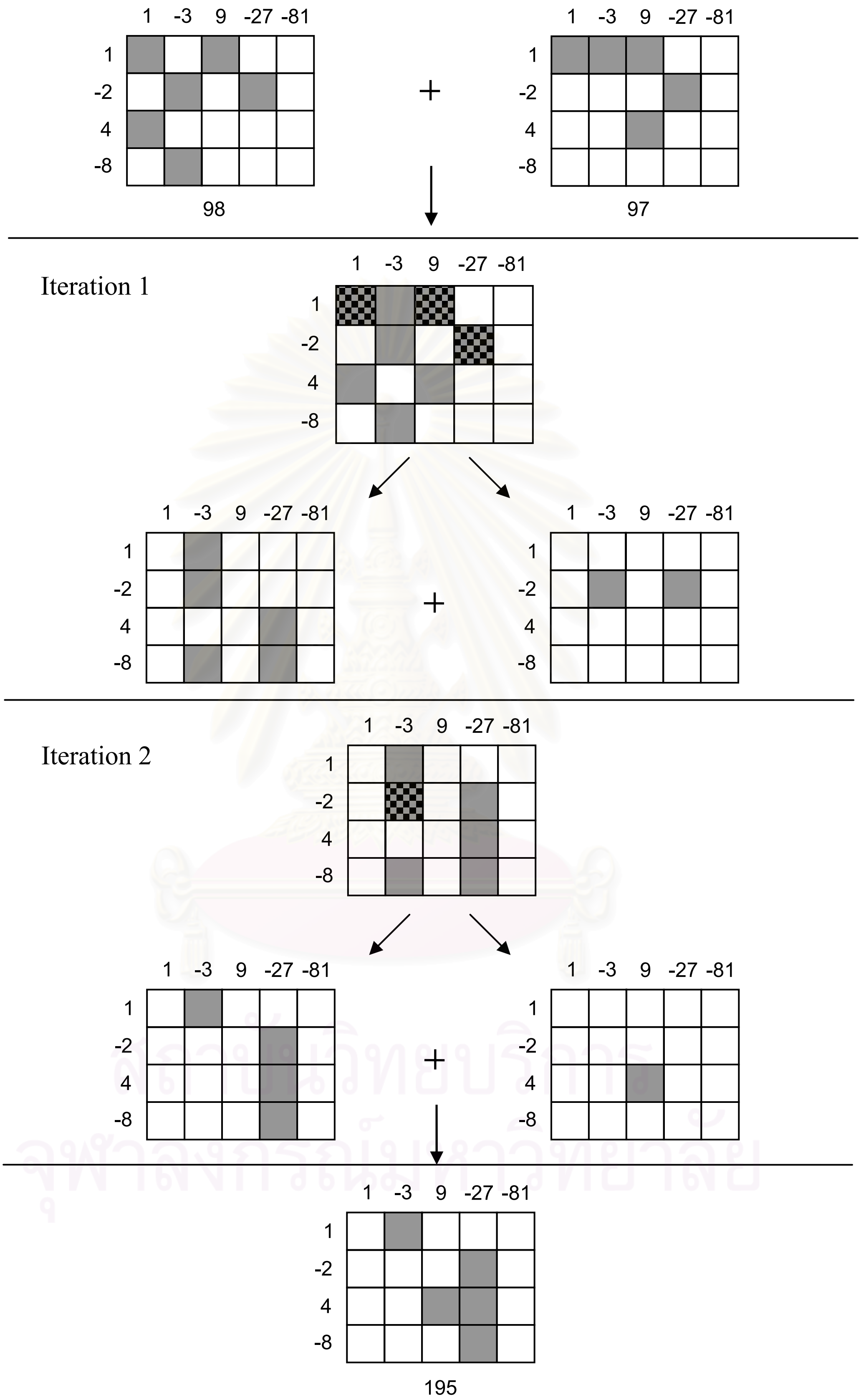
ผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้จากการบวกจะเป็นรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกันด้วย เนื่องจากตารางจำนวนเหลือและตารางจำนวนทดเมื่อรวมกันแล้วอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันนั้นอยู่ติดกันหรือห่างกันหนึ่งเซลล์ภายในคอลัมน์เดียวกัน ซึ่งมีเพียงกรณีที่ 1.2 เพียงกรณีเดียวจากบทตั้งที่ 3.1 ที่จะส่งผลให้เกิดการทดต่อเนื่องไปเรื่อยๆ ได้ แต่จำนวนของรูปแบบแทนจำนวนมีคอลัมน์จำนวนจำกัด จึงสรุปได้ว่ารูปแบบแทนจำนวนที่เป็นผลลัพธ์สุดท้ายย่อมไม่เกิดรูปแบบที่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกันแน่นอน

ในแต่ละขั้นตอนจะใช้เวลาคงที่และมีจำนวนรอบสูงสุดไม่เกิน *n* รอบ ซึ่ง *n* เป็นจำนวนคอลัมน์ของรูปแบบแทนจำนวน ทำให้อัลกอริทึมการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทำได้ภายในเวลาเชิงเส้นตามจำนวนคอลัมน์

■

**ตัวอย่างที่ 3.5** *หาผลบวกระหว่างเลข 98 และ 97 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายด้วยอัลกอริทึมการบวก*

**วิธีทำ** แสดงดังรูปที่ 3.10

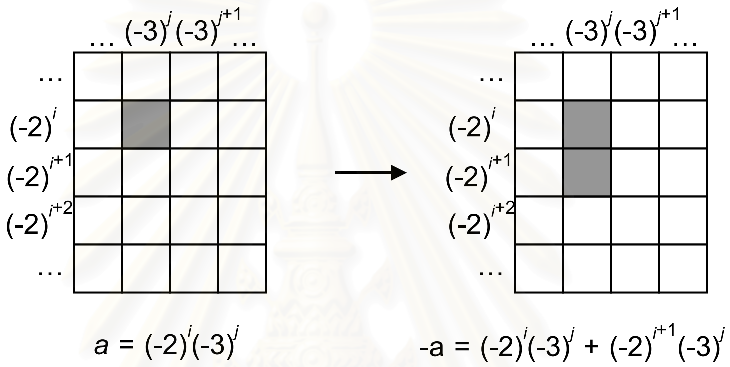



รูปที่ 3.10 แสดงผลบวกจำนวนเต็ม 98 และ 97 บนระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

### 3.4.2 การลบ (subtraction)

จากคุณสมบัติที่เพิ่มขึ้นมาของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย คือสามารถแทนจำนวนเต็มลบได้ ช่วยให้การลบจำนวนเต็มสามารถใช้งานได้ด้วยวิธีการบวกกับตัวลบที่เปลี่ยนเป็นตัวตรงข้ามโดยเพิ่มเครื่องหมายลบเข้าไป เราจึงเสนอกฎทางพีชคณิตในการแปลงแอ็กทิฟเซลล์เพื่อหาตัวผกผันของการบวก ดังต่อไปนี้

**กฎทางพีชคณิตที่ 3.6** กฎในการแปลงแอ็กทิฟเซลล์เพื่อหาตัวผกผันของการบวก แสดงดังรูปที่ 3.11




รูปที่ 3.11 แสดงกฎการแปลงแอ็กทิฟเซลล์เพื่อหาตัวผกผันของการบวก

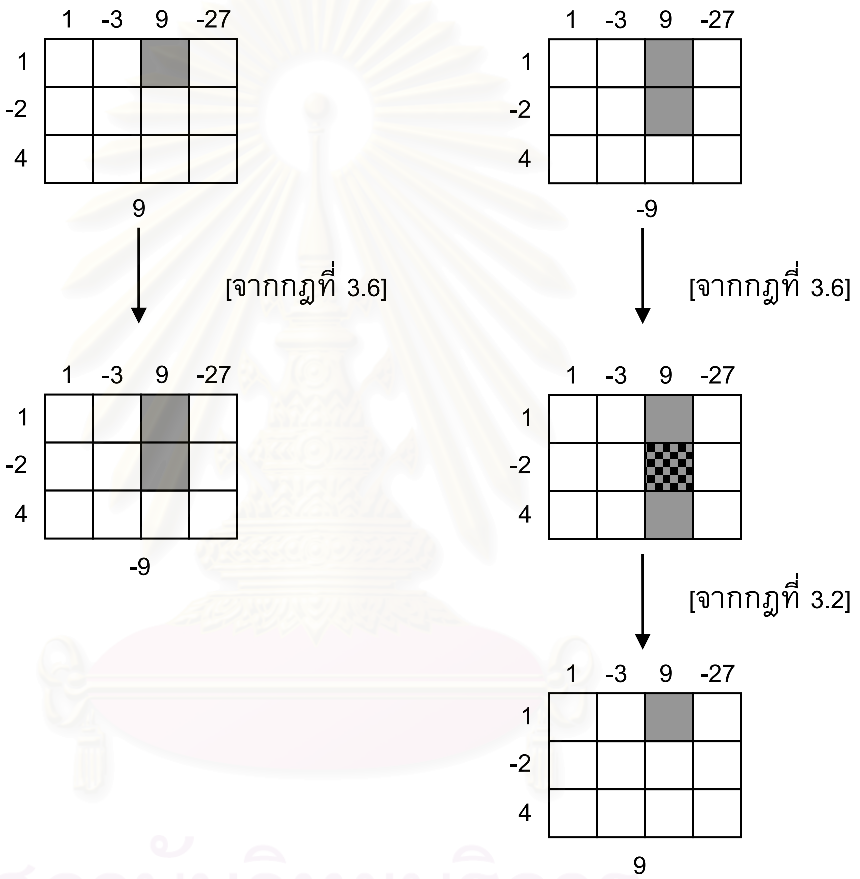
**ทฤษฎีบทที่ 3.3** *ตัวผกผันการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายสามารถหาได้โดยกฎทางพีชคณิตที่ 3.6 ภายในเวลาไม่เกินจำนวนคอลัมน์*

**พิสูจน์** ต้องพิสูจน์ว่า จากกฎทางพีชคณิตที่ 3.6 สามารถใช้หาตัวผกผันการบวกภายในเวลาไม่เกินจำนวนคอลัมน์ เนื่องจากการหาตัวผกผันการบวกสามารถทำได้ด้วยการเพิ่มแอ็กทิฟเซลล์ให้ติดกับแอ็กทิฟเซลล์ทุกตัวที่มีอยู่แล้วในแถวถัดไปภายในคอลัมน์เดียวกัน จะต้องแสดงให้เห็นเวลาในการทำงานขึ้นกับจำนวนคอลัมน์ เนื่องจากไม่มีการส่งตัวทดระหว่างคอลัมน์เกิดขึ้น แต่ถ้าในการเพิ่มแอ็กทิฟเซลล์ที่อยู่ในแถวถัดลงไปในคอลัมน์เดียวกันเกิดมีแอ็กทิฟเซลล์อยู่ด้วย จะทำให้เกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ใหม่ขึ้น เราสามารถลดรูปการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ที่เกิดขึ้นได้ด้วยกฎเพียงห้าข้อ จากบทตั้งที่ 3.1 และหาผลรวมจากการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันด้วยทฤษฎีบทที่ 3.2 ซึ่งการทำงานสามารถทำได้ภายในเวลาเชิงเส้นตามจำนวนคอลัมน์ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการหาตัวผกผันการบวกนั้นสามารถทำงานได้ภายในเวลาไม่เกินจำนวนคอลัมน์ ■

จากทฤษฎีบทที่ 3.3 การหาตัวผกผันการบวกกฎทางพีชคณิตที่ 3.6 นั้น จะเพิ่มแอ็กทิฟเซลล์เพิ่มขึ้นมาในแถวถัดไปหนึ่งเซลล์ ดังนั้นถ้าเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ก็สามารถใช้กฎการลดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ที่ได้เสนอไปแล้วได้ ซึ่งแสดงการหาตัวผกผันการบวกได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 3.6** *หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเต็ม 9 และ -9*

**วิธีทำ** แสดงดังรูปที่ 3.12




รูปที่ 3.12 แสดงการหาตัวผกผันการบวกของ 9 และ -9
บนระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

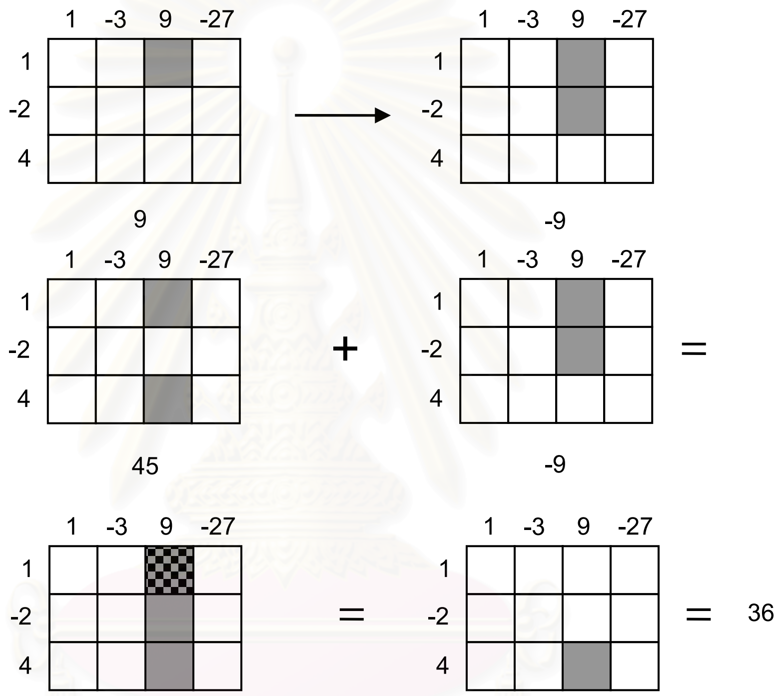
**ทฤษฎีบทที่ 3.4** *กระบวนการลบบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย สามารถทำได้ด้วยวิธีการเดียวกับการบวก โดยที่ตัวลบจะถูกแปลงรูปแบบแทนจำนวนเป็นตัวผกผันการบวกก่อน*

**พิสูจน์** ต้องพิสูจน์ว่า ผลลัพธ์จากการลบนั้นให้ค่าที่ถูกต้องและอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน เนื่องจากกระบวนการลบคือการบวกที่ตัวลบถูกแปลงรูปแบบแทนจำนวนเป็นตัวผกผันการ

บวก ซึ่งการบวกนั้นได้พิสูจน์ไว้แล้วว่าได้ผลลัพธ์ที่ได้ถูกต้อง และด้วยกฎการลดรูปหลังจากการบวกทำให้ผลลัพธ์ที่ได้อยู่จึงอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ที่ชนกันด้วย ■

**ตัวอย่างที่ 3.7** *หาผลลบระหว่างเลข 45 และ 9 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**วิธีทำ** การทำงานเริ่มจากการหารูปแบบแทนจำนวนของ 45 และ 9 โดยใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบในการแปลง จะได้ $45 = (-2)^2(-3)^2 + (-2)^0(-3)^2$ และ $9 = (-2)^0(-3)^2$ จากนั้นจึงเริ่มกระบวนการลบ แสดงดังรูปที่ 3.13




รูปที่ 3.13 แสดงผลลบของจำนวนเต็ม 45 และ 9
บนระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

□

### 3.4.3 การคูณ (multiplication)

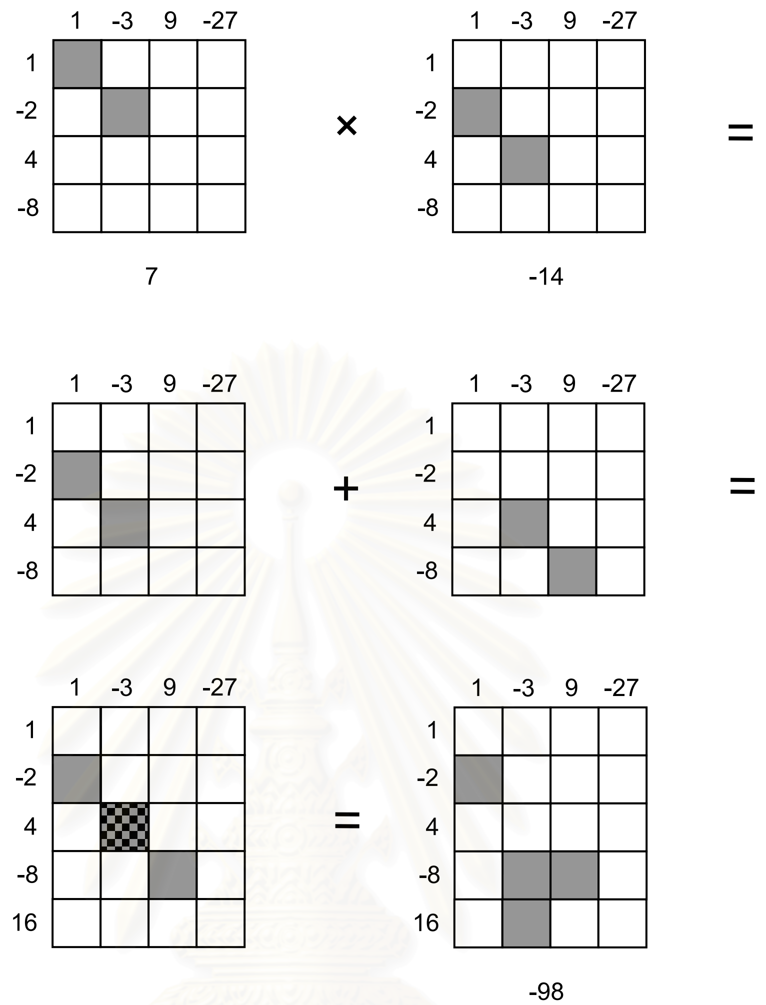
การคูณของจำนวนสองจำนวนสามารถทำได้ด้วยวิธีเดียวกับระบบจำนวนฐานคู่ดั้งเดิม ด้วยการนำแอ็กทิฟเซลล์ในตารางของค่าตัวตั้งเลื่อนตามตำแหน่งแอ็กทิฟเซลล์แต่ละตัวของตัวคูณในตาราง แล้วนำผลที่ได้มารวมกันด้วยวิธีการบวก ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณจะต้องอยู่ในรูปปกติด้วย

**ทฤษฎีบทที่ 3.5** *กระบวนการคูณบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย สามารถทำได้ด้วยวิธีการนำแอ็กทิฟเซลล์ในตารางของค่าตัวตั้งเลื่อนตามตำแหน่งแอ็กทิฟเซลล์แต่ละตัวของตัวคูณในตาราง แล้วนำผลที่ได้ทำการบวกด้วยอัลกอริทึมการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**พิสูจน์** ต้องพิสูจน์ว่า ผลลัพธ์จากการคูณนั้นให้ค่าที่ถูกต้องและอยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน เนื่องจากกระบวนการคูณใช้หลักการเดียวกับระบบจำนวนฐานคู่แบบดั้งเดิม ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เมื่อทำการเลื่อนค่าตัวตั้งตามตัวคูณและทำการบวกแล้ว การลดรูปหลังการบวกจะให้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปที่ไม่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน ■

**ตัวอย่างที่ 3.8** *หาผลคูณระหว่างเลข 7 และ -14 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย*

**วิธีทำ** เริ่มจากการหารูปแบบแทนจำนวนของ 7 และ -14 โดยใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบในการแปลง จะได้ $7 = (-2)^1(-3)^1 + (-2)^0(-3)^0$ และ $-14 = (-2)^2(-3)^1 + (-2)^1(-3)^0$ จากนั้นจึงเริ่มกระบวนการลบ แสดงดังรูปที่ 3.14




รูปที่ 3.14 แสดงผลคูณของจำนวนเต็ม 7 และ -14 ในระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

□

# บทที่ 4

## รูปแบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทั่วไป

จากที่ได้นำเสนอในบทที่ผ่านมา ระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นใช้ฐาน $\beta_1$ เป็น -2 และ $\beta_2$ เป็น -3 เพื่อขยายระบบจำนวนฐานคู่เดิมให้สามารถแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายได้และมีความสมบูรณ์ในการแทนจำนวนเต็มทุกชนิด แต่ในกรณีที่มีความต้องการใช้ระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย โดยใช้ฐานเป็นจำนวนเต็มอื่นๆ จะมีผลแตกต่างออกไป ซึ่งในส่วนนี้จะนำเสนอรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทั่วไป เพื่อพิจารณาถึงผลกระทบต่างๆ ที่เกิดขึ้น

### 4.1 ความสมบูรณ์ของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทั่วไป

เดิมระบบจำนวนฐานคู่มีความซ้ำซ้อนและการกระจายตัวเลขสูง ซึ่งมีฐานคู่เป็น 2 และ 3 แต่ในระบบจำนวนฐานคู่ไม่สามารถแทนจำนวนเต็มลบได้ ในงานวิจัยได้เสนอระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเพื่อให้ค่าบางค่าในระบบสามารถมีการแทนจำนวนเต็มลบได้พร้อมทั้งมีความสมบูรณ์ในการแทนจำนวนเต็มทุกชนิด ในการพิจารณาฐานแบบมีเครื่องหมายนั้น ไม่ได้หมายความว่าจะมีแค่ $\beta_1 = -2$ และ $\beta_2 = -3$ เท่านั้น แต่อาจมีกรณีอื่นๆ เช่น $\beta_1 = -2$ และ $\beta_2 = 3$ หรือ $\beta_1 = 2$ และ $\beta_2 = -3$ ซึ่งในกรณีที่ $\beta_1 = 2$ นั้นเห็นได้ชัดว่ารูปแบบแทนจำนวนมีความสมบูรณ์ด้วยคุณสมบัติของเลขฐานสอง ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $\beta_1 = -2$ และ $\beta_2$ เป็นจำนวนเต็ม

**ทฤษฎีบทที่ 4.1** *กำหนดให้ $x$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ $x$ สามารถแทนจำนวนได้บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายที่มี $\beta_1 = -2$ และ $\beta_2$ เป็นจำนวนเต็ม*

**พิสูจน์** เพื่อทำการพิสูจน์ว่าทุกๆ จำนวนเต็มสามารถแทนจำนวนได้บนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทั่วไป การพิสูจน์จะแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่ๆ คือ กรณีของจำนวนเต็มบวกและกรณีของจำนวนเต็มลบ

**กรณีที่ 1** รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มบวก เราทำการพิสูจน์ด้วยการเสนออัลกอริทึมการแปลงจำนวนเต็มบวก $N$ จากรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบดั้งเดิมไปเป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย โดยจำนวนเต็มบวก $N$ แสดงรูปแบบแทนจำนวนในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N = \sum_{i=0}^{m} d_{i,0}(2)^{i}(\beta_2)^{0} \tag{4.1}$$

โดยที่ $i$ เป็นจำนวนเต็มศูนย์หรือจำนวนเต็มบวก และ $d_{i,0} \in \{0,1\}$ จำนวนเต็ม $N$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่สองตัวคือ $N = X + Y$

$$X = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d'_{2i,0}(-2)^{2i}(\beta_2)^{0} \ , \ Y = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(2)^{2i-1}(\beta_2)^{0} \tag{4.2}$$

โดยที่

$$d'_{k,0} = \begin{cases} d_{k,0} : k = even \\ 0 : k = odd \end{cases} , \ d''_{k,0} = \begin{cases} 0 : k = even \\ d_{k,0} : k = odd \end{cases}$$

ค่าของ $d'_{2i,0}$ และ $d''_{2i-1,0}$ มีค่าเพียงแค่ 0 หรือ 1 เท่านั้น วัตถุประสงค์หลักคือการปรับรูปแบบแทนจำนวนให้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม $N$ ในระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของ

$$N = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} e_{i,j}(-2)^{i}(\beta_2)^{j} \tag{4.3}$$

ซึ่ง $e_{i,j} \in \{0,1\}$ ขั้นตอนการพิสูจน์สามารถทำตามจากทฤษฎีบทที่ 3.1 ค่า $N$ แสดงได้ดังนี้

$$N = \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}(d'_{2i,0} + d''_{2i-1,0})(-2)^{2i}(\beta_2)^{0} + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} d''_{2i-1,0}(-2)^{2i-1}(\beta_2)^{0}$$

โดยที่ $d'_{2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,0} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ และ $d''_{-1,0} = 0$

ดังนั้นรูปแบบแทนจำนวนของ $N$ ที่เป็นจำนวนเต็มบวกสามารถแสดงให้อยู่บนรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายโดยฐาน $\beta_1 = -2$ และฐาน $\beta_2$ ได้ ดังสมการ (4.3)

**กรณีที่ 2** รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็มลบ เราทำการพิสูจน์ด้วยวิธีการเดียวกับการพิสูจน์กรณีของจำนวนเต็มบวก

ค่า $N$ แสดงได้ดังนี้

$$N = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} (d''_{2i+1,0} + d'_{2i+1,0})(-2)^{2i+1}(\beta_2)^0 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} d''_{2i,0}(-2)^{2i}(\beta_2)^0$$

โดยที่ $d'_{2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,0} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ และ $d''_{-1,0} = 0$

ดังนั้นรูปแบบแทนจำนวนของ $N$ ที่เป็นจำนวนเต็มลบสามารถแสดงให้อยู่บนรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายโดยฐาน $\beta_1 = -2$ และฐาน $\beta_2$ ได้ ดังสมการ (4.3)

■

จึงสรุปได้ว่าระบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายใดๆ ที่มีฐาน $\beta_1 = -2$ และ $\beta_2$ สามารถแทนจำนวนเต็มได้ทุกจำนวนเต็ม

## 4.2 จำนวนแอ็กทิฟเซลล์ของจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย

นอกเหนือจากคุณสมบัติความซ้ำซ้อนสูงแล้วความโดดเด่นของระบบจำนวนฐานคู่อีกประการหนึ่งก็คือใช้จำนวนตัวเลขน้อยในการแทนค่าจำนวนสูงๆ ได้ ซึ่งช่วยให้การดำเนินการทางเลขคณิตสามารถคำนวณได้รวดเร็ว ความซ้ำซ้อนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายทั่วไปจะลดลงเมื่อขยายขนาดของ $\beta_2$ ให้มีค่ามากขึ้นแต่ว่าระบบแทนจำนวนจะสามารถแสดงค่าจำนวนที่ใหญ่ๆ ได้มากขึ้นเช่นกัน นั่นคือการใช้ฐานที่แตกต่างกันย่อมส่งผลต่อจำนวนตัวเลขที่ใช้แทนจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายด้วย ในการเปรียบเทียบจำนวนตัวเลขที่ใช้แทนจำนวนบนระบบจำนวนที่ใช้ฐานต่างกันนั้น จะทำการเปรียบเทียบในช่วงเดียวกัน เช่น กำหนดให้ระบบจำนวนฐานคู่ $-2\ ,\beta_a$ และ $-2\ ,\ \beta_b$ โดยที่ $\beta_a < \beta_b$ แทนจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วงจำนวนเต็มตั้งแต่ $-n$ ถึง $n$ ซึ่งขนาดของตารางรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ $-2\ ,\beta_a$ จะต้องใช้พื้นที่ขนาดใหญ่กว่าตารางรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ $-2\ ,\beta_b$ แสดงว่าจำนวนที่สามารถแทนได้ด้วยแอ็กทิฟเซลล์เดียวของฐาน $-2\ ,\beta_a$ จะมีมากกว่าระบบจำนวนฐานคู่ $-2\ ,\beta_b$ แน่นอน และอีกประการหนึ่งจากช่วงของจำนวนเต็ม $-n$ ถึง $n$ นั้น รูปแบบแทนจำนวนเมื่อฐาน $-2\ ,\beta_a$ จะมีโอกาสที่จะได้รูปแบบแทนจำนวนที่มีจำนวนแอ็กทิฟเซลล์น้อยกว่า เนื่องจากมีจำนวนตัวเลขภายในช่วง $-n$ ถึง $n$ ซึ่งเป็นพหุคูณ (multiple) ของ $(\beta_a)^j$ มากกว่า $(\beta_b)^j$ ดังนั้นในการหารูปแบบจำนวนในช่วงจำนวนเต็มที่จำกัดนั้น จำนวนของแอ็กทิฟเซลล์จะมีโอกาสน้อยกว่าเมื่อใช้ขนาดของฐาน $\beta_2$ ที่เล็กกว่า แต่ถ้าพิจารณาในขนาด

ของตารางที่มีขนาด $m \times n$ เท่ากัน รูปแบบแทนจำนวนที่มีขนาดของฐาน $\beta_2$ ที่ใหญ่กว่าสามารถแสดงค่าจำนวนเต็มที่ใหญ่กว่าได้

# บทที่ 5

## สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 5.1 สรุปผลการวิจัย

ระบบจำนวนฐานคู่มีคุณสมบัติที่สำคัญคือ มีความซ้ำซ้อนสูง ใช้พื้นที่ในการเก็บตัวเลขน้อย และจำกัดการแพร่กระจายของตัวทด ส่งผลให้ความสามารถในการคำนวณเร็วกว่าระบบจำนวนซ้ำซ้อน และมีตัวปฏิบัติการพื้นฐานทางเลขคณิตที่สำคัญคือ การบวก และการคูณ แต่รูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฐานคู่นั้นไม่สามารถแสดงจำนวนเต็มลบได้ การใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมายเพิ่มเข้าไปในชุดตัวเลขนั้นจะช่วยเพิ่มความสามารถในการแสดงค่าของจำนวนเต็มลบได้ แต่จำเป็นต้องเพิ่มขนาดของบิตเดิมจากหนึ่งบิตเป็นสองบิตในแต่ละตำแหน่งบนระบบจำนวนด้วย

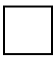
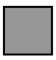
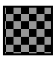
ในงานวิจัยนี้นำเสนอ การขยายรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฐานคู่โดยใช้ฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพแก่รูปแบบแทนจำนวนให้สามารถแสดงค่าของจำนวนเต็มได้ทุกชนิด โดยที่จำนวนบิตในแต่ละตำแหน่งบนระบบจำนวนนั้นใช้เพียงแค่หนึ่งบิต ในแต่ละตำแหน่งบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายจะมีทั้งเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบในปริมาณอย่างละครึ่งของตารางแทนจำนวน นั่นหมายความว่าระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นจะถูกลดความสามารถในการแสดงของจำนวนเต็มบวกลงเพื่อเพิ่มความสามารถในการแสดงของจำนวนเต็มลบให้มากขึ้น โดยที่ยังคงมีความสมบูรณ์ในการแทนจำนวนเต็มได้ทุกตัวทั้งจำนวนเต็มบวกเดิมและจำนวนเต็มลบที่เพิ่มขึ้นมาด้วย ซึ่งมีบทพิสูจน์ในทฤษฎีบทแล้ว นอกจากนั้นมีการนำเสนออัลกอริทึมเชิงละโมบสำหรับการแปลงจำนวนเต็มต่างๆ เป็นจำนวนบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย ซึ่งมีความซับซ้อนเชิงเวลาเป็นลอการิทึม เสนออัลกอริทึมการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตที่สำคัญ ได้แก่ การบวก การลบและการคูณ และเสนอกฎทางพีชคณิตสำหรับการลดรูปของแอ็กทิฟเซลล์ต่างๆ ที่ช่วยในการบวกได้ ทำให้จำกัดการแพร่กระจายของตัวทด ซึ่งบรรลุตามวัตถุประสงค์ เสนอกระบวนการบวกบนระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายเป็นแบบเชิงกำหนด โดยมีจำนวนรอบสูงสุดในการลดแอ็กทิฟเซลล์ที่ไม่ชนกันไม่เกินจำนวนคอลัมน์ ในส่วนสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์ถึงรูปแบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายใดๆ โดยการพิจารณาถึงความสมบูรณ์ในการแสดงค่าของจำนวนเต็ม จำนวนแอ็กทิฟเซลล์ที่ใช้ในการแทนจำนวนเมื่อขนาดของฐาน $\beta_2$ มีขนาดใหญ่ขึ้น

### 5.2 ปัญหาและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยเกี่ยวกับระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายยังมีปัญหาที่ต้องแก้ได้อีกหลายๆ ส่วน เช่น ระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นเป็นระบบจำนวนที่มีความซ้ำซ้อนสูงและมีค่าในแต่ละตำแหน่งเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบอยู่รวมกัน ดังนั้นปัญหาที่เห็นได้ชัดคือ โอกาสในการเกิดรูปแบบซ้ำซ้อนศูนย์ ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณในทางวงจรนั้นช้าลง ในกฎทางพีชคณิตที่ได้เสนอไปนั้นสามารถกำจัดรูปแบบซ้ำซ้อนศูนย์ได้บางรูปแบบ แต่ในระบบแทนจำนวนนี้ยังมีรูปแบบที่ซ้ำซ้อนศูนย์อีกหลายรูปแบบที่ยังไม่ได้สนใจ อีกปัญหาของรูปแบบแสดงค่าของระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย คือ การบ่งบอกให้สามารถเห็นได้ชัดเจนว่าจำนวนเต็มที่แสดงบนระบบจำนวนนี้มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบ เนื่องจากระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายนั้นจะต้องทำการคำนวณค่าเลขหนึ่งที่เกิดขึ้นทั้งหมดในรูปแบบแทนจำนวนก่อนถึงจะรู้ได้ว่าจำนวนนั้นมีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบ และมีส่วนของปัญหาดั้งเดิมที่มาจากระบบจำนวนฐานคู่คือ การเปรียบเทียบค่าของจำนวนสองจำนวนซึ่งทำได้ยากอยู่ โดยการคำนวณจำนวนเลขหนึ่งที่เกิดขึ้นทั้งหมดของแต่ละจำนวนเพื่อเอาผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้มาเปรียบเทียบกันระหว่างสองจำนวน นอกจากนั้นระบบจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมายสามารถนำกระบวนการบวกไปพัฒนาเป็นกระบวนการบวกแบบสายท่อ เพื่อให้สามารถนำผลลัพธ์ที่หาได้จากส่วนก่อนหน้าไปคำนวณต่อไปได้อย่างอิสระ

# อภิธานศัพท์

## สัญกรณ์ทางคณิตศาสตร์

| | |
|---|---|
| $i$ | เลขดัชนีของแถว (row index) |
| $j$ | เลขดัชนีของคอลัมน์ (column index) |
| $d_{i,j}$ | ดิจิตในตำแหน่งแถวที่ $i$ คอลัมน์ที่ $j$ (digit in the $i^{th}$ row and $j^{th}$ column) |
| $\sum_{all\, i,j} d_{i,j} 2^i 3^j$ | รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่ (double base number representation) |
| $\sum_{all\, i,j} d_{i,j} (-2)^i (-3)^j$ | รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบมีเครื่องหมาย (double signed-base number representation) |
| D | ตารางรูปแบบแทนจำนวนที่มีแอ็กทิฟเซลล์ชนกัน (table representation containing some collision of active cells) |
| R | ตารางจำนวนเหลือ (remaining table) |
| C | ตารางจำนวนทด (carry table) |
| -*a* | ตัวผกผันการบวกของ *a* (additive inverse of *a*) |
| $\beta$ | ฐาน (base) |
| $m \times n$ | ขนาดของตารางแทนจำนวน (size of table representation) |
|  | เซลล์ไม่แอ็กทิฟ ดิจิตศูนย์ (non-active cell, zero digit) |
|  | แอ็กทิฟเซลล์ ดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์ (active cell, non-zero digit) |
|  | แอ็กทิฟเซลล์ที่มีการชนกัน (collision of active cells) |

## ตัวย่อ

| | |
|---|---|
| DBNS | double base number system |
| DBNR | double base number representation |
| DSBNS | double signed-base number system |
| DSBNR | double signed-base number representation |
| CDBNR | canonic double base number representation |
| NCDBNR | near canonic double base number representation |
| ARDBNR | addition ready double base number representation |
| NP Complete | non-deterministic polynomial-time complete |

# รายการอ้างอิง


[1] M. Benini, D. Nowotka, C. Pulley. “Computer Arithmetic: Logic, Calculation and Rewriting.”, *Intl. Conf. FroCos '98 -Frontiers of Combining Systems*, (1998).

[2] A. Avizienis. “Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic.”, *IRE Trans. Electronic Computers*, 10 (1961): 389-400.

[3] V.S. Dimitrov, S. Sadeghi-Emamchaie, G.A. Jullien, W.C. Miller. “A Near Canonic Double-Based Number System with Applications in DSP.”, *SPIE Conference on Signal Processing Algorithms*, 2846 (1996): 14-25.

[4] V.S. Dimitrov, G.A. Jullien, and W.C. Miller. “An Algorithm for Modular Exponentiation.”, *Information Processing Letters*, 66, 3 (May 1998): 155-159.

[5] K. Wangjitman, A. Surarerks. “Addition transducer for double base number system.”, *The 6th IEEE International Symposium on Communications and Information Technologies 2006 (ISCIT)*, (October 2006).

[6] S. Sadeghi-Emamchaie, G.A. Jullien, V.S. Dimitrov, W.C. Miller. “Digital Arithmetic Using Analog Arrays.”, *Proc. Eighth Great Lakes Symp. VLSI, Lafayette, La.*, (February 1998): 202-207.

[7] V.S. Dimitrov, G.A. Jullien, and W.C. Miller. “Theory and Applications of the Double-Base Number System.”, *IEEE Transactions on Computers*, 48, 10 (October 1999): 1098-1106.

[8] V.S. Dimitrov, G.A. Jullien. “Loading the Bases: A New Number Representation with Applications.”, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 3 (2003): 6-23.

[9] V. Berth, L. Imbert, G.A. Jullien. “More on Converting Numbers to the Double-Base Number System.”, *Research Report LIRMIM-04031*, (October 2004).

[10] G. Gilbert, J.M.P. Langlois. “Multipath Greedy Algorithm for Canonical Representation of Numbers in the Double Base Number System.”, *The 3rd International IEEE-NEWCAS Conference,* (June 2005): 39-42.

[11] V.S. Dimitrov, L. Imbert, P.K. Mishra. “Fast Elliptic Curve Point Multiplication using Double-Base Chains.”, *Laboratoire d'Informatique, Robotique et Microelectronique de Montpellier*, (2005).

[12] R. Muscedere, G. A. Jullien, V. S. Dimitrov and W. C. Miller. “Non-linear signal processing using index calculus DBNS arithmetic.”, *Proceedings SPIE Advanced Signal Processing Algorithms*, Architectures and Implementations X, (2001).

[13] S. Leelatham, A. Surarerks. “An extended double base number system using different digit sets.”, *Proceedings of 10th National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC)*, (October 2006): 140-145.

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายศักดิ์ระพี ลีลาธรรม เกิดเมื่อวันที่ 14 มีนาคม พ.ศ. 2525 ที่จังหวัดภูเก็ต สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนภูเก็ตวิทยาลัย อำเภอเมือง จังหวัดภูเก็ต เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จนสำเร็จการศึกษาในปี พ.ศ. 2547 และศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย