บทที่ 3

วิธีการแก้ปัญหา

การตั้งสมมติฐาน

ในการเปรียบเทียบความแตกต่างของประชากรสองกลุ่มนั้น โดยทั่วไปมีวิธีการวิเคราะห์ปัญหาได้หลายวิธี แต่ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะใช้วิธีการเปรียบเทียบ ค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขและค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข มาใช้ในการวิเคราะห์ โดยที่ประชากรแต่ละกลุ่มนั้นประกอบด้วยตัวแปรสองตัว คือ ตัวแปร X และตัวแปร Y ซึ่งมีการกระจายแบบปกติ แต่ถ้าประชากรที่ต้องการจะศึกษานั้นมีขนาดใหญ่แล้ว การที่จะศึกษาประชากรให้หมดทุก ๆ หน่วยของประชากร อาจทำให้เสียเวลาและค่าใช้จ่ายมากโดยไม่จำเป็น ดังนั้นจึงใช้วิธีการศึกษาอีกอย่างหนึ่งโดยเลือกตัวอย่างเพียงบางหน่วยซึ่งสามารถใช้เป็นตัวแทนที่ดีของหน่วยต่าง ๆ ที่มีอยู่ในประชากรมาใช้ในการวิเคราะห์ก็ควรมีความเชื่อถือได้พอสมควรนั่นคือ

สมมติว่า $\{(X_{1j}, Y_{1j}),\ j = 1,2,3,\ldots,n_1\}$ และ $\{(X_{2j}, Y_{2j}),\ j = 1,2,3,\ldots,n_2\}$ เป็นค่าที่วัดได้จากตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรสองกลุ่มที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรกลุ่มละ 2 ตัว คือ X และY

เมื่อ X_{ij} เป็นตัวแปรอิสระ(Independent Variables)

และ Y_{ij} เป็นตัวแปรตาม (Dependent Variables) $i = 1,2$

n_1 และ n_2 เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ซึ่งยังไม่ทราบค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าความแปรปรวนร่วมกันของตัวแปรทั้งสองนั้น โดยที่

X_{1j} และ Y_{1j} เป็นค่าที่วัดได้ จากการวัดครั้งแรก และครั้งที่สองของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่หนึ่ง เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots,n_1$

X_{2j} และ Y_{2j} เป็นค่าที่วัดได้ จากการวัดครั้งแรก และครั้งที่สองของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่สอง เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots,n_2$

เนื่องจากการวัดโดยทั่วไปมักมีความคลาดเคลื่อนหรือผิดพลาดอยู่ด้วยเสมอ ดังนั้น จะกำหนดความสัมพันธ์ของค่าที่วัดได้ และความคลาดเคลื่อนในการวัดได้ดังนี้

$$X_{1j} = X^{+}_{1j} + U_{1j} \quad , \qquad Y_{1j} = Y^{+}_{1j} + V_{1j}$$ [6]

$$X_{2j} = X^{+}_{2j} + U_{2j} \quad , \qquad Y_{2j} = Y^{+}_{2j} + V_{2j}$$

เมื่อ X^{+}_{ij}, Y^{+}_{ij} , $i = 1,2$ เป็นค่าที่แท้จริงของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่ i

และ U_{ij}, V_{ij} , $i = 1,2$ เป็นความคลาดเคลื่อนในการวัดของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่ i โดยที่ U_{ij}, V_{ij} ต่างเป็นอิสระต่อกัน[7] และเป็นอิสระกับ X^{+}_{ij}, Y^{+}_{ij} และ U_{ij}, V_{ij} มีการกระจายแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมีค่าความแปรปรวนเท่ากัน เมื่อ $i = 1$ และ $i = 2$

เมื่อต้องการเปรียบเทียบความแตกต่างของประชากรทั้งสองกลุ่มนั้น จะใช้ตัวแปร Y เป็นตัวแปรที่จะนำมาทดสอบความแตกต่าง โดยให้ตัวแปร X เป็นตัวแปรอิสระ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่กำหนดให้ และเป็นตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว นั่นคือจะใช้ค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข และค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขมาใช้ในการทดสอบความแตกต่างของประชากรทั้งสองกลุ่ม ซึ่งตั้งสมมติฐานเป็น

ก $H_0 : E(Y^{+}_{1j}/X^{+}_{1j} = x) = E(Y^{+}_{2j}/X^{+}_{2j} = x)$ สำหรับทุกค่าของ x

ข $H_0 : Var(Y^{+}_{1j}/X^{+}_{1j} = x) = Var(Y^{+}_{2j}/X^{+}_{2j} = x)$ สำหรับทุกค่าของ x

---

[6] Franklin, A. Graybill., <u>An Introduction to Linear Statistical Models</u> Vol. 1, (New York ; McGraw-Hill Book Co. Inc., 1961), p. 104.

[7] Stroud, Thomas W.F., "Comparing Conditional Means and Variances in a Regression Model With Measurement Errors of Known Variances" <u>Journal of the American Statistical Association</u> (June 1972 Vol. 67), p. 408.

สำหรับในกลุ่มตัวอย่างที่หนึ่งนั้น พารามิเตอร์ของค่าที่แท้จริงนั้นคือ

$$E\begin{bmatrix} X^{+}_{1j} \\ Y^{+}_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{+}_{X_1} \\ \mu^{+}_{Y_1} \end{bmatrix}, \quad Cov\begin{bmatrix} X^{+}_{1j} \\ Y^{+}_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{+2}_{X_1} & \sigma^{+}_{X_1Y_1} \\ \sigma^{+}_{X_1Y_1} & \sigma^{+2}_{Y_1} \end{bmatrix}$$

และพารามิเตอร์ของค่าที่วัดได้นั้นคือ

$$E\begin{bmatrix} X_{1j} \\ Y_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{Y_1} \end{bmatrix}, \quad Cov\begin{bmatrix} X_{1j} \\ Y_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{2}_{X_1} & \sigma_{X_1Y_1} \\ \sigma_{X_1Y_1} & \sigma^{2}_{Y_1} \end{bmatrix}$$

และถ้าสมมติว่าความคลาดเคลื่อนมีการกระจายแบบปกติ[8] นั่นคือ

$E(U_{ij}) = E(V_{ij}) = 0$ และ

$Var(U_{ij}) = Var(V_{ij}) = 1$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{bmatrix} \mu^{+}_{X_1} \\ \mu^{+}_{Y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{Y_2} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} \sigma^{+2}_{X_1} & \sigma^{+}_{X_1Y_1} \\ \sigma^{+}_{X_1Y_1} & \sigma^{+2}_{Y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{2}_{X_1}-1 & \sigma_{X_1Y_1} \\ \sigma_{X_1Y_1} & \sigma^{2}_{Y_1}-1 \end{bmatrix}$$

ทำนองเดียวกันในกลุ่มตัวอย่างที่สองจะได้

$$\begin{bmatrix} \mu^{+}_{X_2} \\ \mu^{+}_{Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X_2} \\ \mu_{Y_2} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} \sigma^{+2}_{X_2} & \sigma^{+}_{X_2Y_2} \\ \sigma^{+}_{X_2Y_2} & \sigma^{+2}_{Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{2}_{X_2}-1 & \sigma_{X_2Y_2} \\ \sigma_{X_2Y_2} & \sigma^{2}_{Y_2}-1 \end{bmatrix}$$

และถ้า Covariance Matrices เหล่านี้เป็น Non - Singular Matrices

---

[8] Ibid

จากการสมมติว่าประชากรมีการกระจายแบบปกติ จึงสามารถกำหนดค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข และค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขในโมเดลการถดถอยแบบเส้นตรง ซึ่งเป็นโมเดลที่ง่ายในการคำนวณ และมีความเชื่อถือได้พอสมควร นอกจากนี้ยังเป็นโมเดลของความสัมพันธ์ที่พบอยู่เสมอ ๆ จากข้อมูลโดยทั่ว ๆ ไปด้วย นั่นคือ

$$E(Y^+_{1j}/X^+_{1j} = x) = \mu^+_{Y_1} + (x - \mu^+_{X_1})\frac{\sigma^+_{X_1 Y_1}}{\sigma^{+2}_{X_1}}$$ [9]

$$Var(Y^+_{1j}/X^+_{1j} = x) = \sigma^{+2}_{Y_1} - \frac{(\sigma^+_{X_1 Y_1})^2}{\sigma^{+2}_{X_1}}$$ [10]

ทำนองเดียวกันในตัวอย่างที่สอง ก็จะได้

$$E(Y^+_{2j}/X^+_{2j} = x) = \mu^+_{Y_2} + (x - \mu^+_{X_2})\frac{\sigma^+_{X_2 Y_2}}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

$$Var(Y^+_{2j}/X^+_{2j} = x) = \sigma^{+2}_{Y_2} - \frac{(\sigma^+_{X_2 Y_2})^2}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

ต่อไปแทนค่าเหล่านี้ลงในสมมติฐาน ใน ข้อ ก และ ข้อ ข ตามลำดับ

---

[9] Graybill, <u>op. cit.</u>, p. 198.

[10] Graybill, <u>op. cit.</u>, p. 220.

ก) $$H_o : \mu^+_{Y_1} + (x - \mu^+_{X_1})\frac{\sigma^+_{X_1Y_1}}{\sigma^{+2}_{X_1}} = \mu^+_{Y_2} + (x - \mu^+_{X_2})\frac{\sigma^+_{X_2Y_2}}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\sigma^+_{X_1Y_1}}{\sigma^{+2}_{X_1}} = \frac{\sigma^+_{X_2Y_2}}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

และ $$\mu^+_{Y_1} - \mu^+_{X_1}\frac{\sigma^+_{X_1Y_1}}{\sigma^{+2}_{X_1}} = \mu^+_{Y_2} - \mu^+_{X_2}\frac{\sigma^+_{X_2Y_2}}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

หรือเขียนในพจน์ของค่าที่วัดได้คือ

$$\frac{\sigma_{X_1Y_1}}{\sigma^2_{X_1} - 1} = \frac{\sigma_{X_2Y_2}}{\sigma^2_{X_2} - 1}$$

และ $$\mu_{Y_1} - \mu_{X_1}\frac{\sigma_{X_1Y_1}}{\sigma^2_{X_1} - 1} = \mu_{Y_2} - \mu_{X_2}\frac{\sigma_{X_2Y_2}}{\sigma^2_{X_2} - 1}$$

ข) $$H_o : \sigma^{+2}_{Y_1} - \frac{(\sigma^+_{X_1Y_1})^2}{\sigma^{+2}_{X_1}} = \sigma^{+2}_{Y_2} - \frac{(\sigma^+_{X_2Y_2})^2}{\sigma^{+2}_{X_2}}$$

หรือเขียนในพจน์ของค่าที่วัดได้คือ

$$\sigma^2_{Y_1} - \frac{(\sigma_{X_1Y_1})^2}{\sigma^2_{X_1} - 1} = \sigma^2_{Y_2} - \frac{(\sigma_{X_2Y_2})^2}{\sigma^2_{X_2} - 1}$$

เนื่องจากในการทดสอบสมมติฐานส่วนใหญ่ไม่ได้ทำการทดสอบจากทุกหน่วยของประชากรที่ทำการศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากประชากรที่ต้องการศึกษามักจะมีขนาดใหญ่ การที่จะทำการศึกษาหมดทุกหน่วย อาจทำให้เสียเวลาและค่าใช้จ่ายมากโดยไม่จำเป็น ดังนั้นถ้าตัวอย่างที่เลือกมานี้เป็นตัวแทนบางหน่วยของประชากร สามารถใช้เป็นตัวแทนที่ดีของหน่วยต่าง ๆ ที่มีอยู่ในประชากรแล้ว ผลสรุปจากการศึกษาเพียงบางหน่วยก็ควรจะมีความเชื่อถือได้พอสมควร นั่นคือในที่นี้จะใช้ค่าประมาณจากตัวอย่างแทนพารามิเตอร์ (Parameters) หรือสิ่งที่สนใจศึกษาในประชากรนั้น โดยกำหนดให้ $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_X^2 , S_Y^2 , S_{XY} เป็นค่าประมาณของ μ_X , μ_Y , σ_X^2 , σ_Y^2 , σ_{XY} ตามลำดับ

สำหรับวิธีการทดสอบสมมติฐานนั้น จะทำการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขก่อนแล้วจึงทำการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข และตัวสถิติที่นำมาใช้ในการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขและค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข โดยใช้ค่าที่แท้จริง ซึ่งเป็นวิธีการทดสอบความแตกต่างของประชากรสองกลุ่ม ซึ่งผู้วิจัยคาดว่าเป็นวิธีการทดสอบที่จะให้ผลที่น่าเชื่อถือได้มาก แต่ยังมีผู้นำไปศึกษาค้นคว้ากันน้อย อีกทั้งยังไม่เป็นที่นิยมแพร่หลาย ดังนั้นจึงนำตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข และค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข มาแสดงไว้ดังต่อไปนี้

การทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่แท้จริง

ในการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่แท้จริง เพื่อเปรียบเทียบประชากรสองกลุ่มนั้นจะใช้วิธีการของ Wald's Asymptotic เพื่อทดสอบสมมติฐาน โดยกำหนดตัวแปรที่จะใช้ในการวิเคราะห์ดังนี้

X_{1j} , Y_{1j} เป็นค่าที่วัดได้จากการวัดครั้งแรกและการวัดครั้งที่สองของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่หนึ่ง $j = 1,2,3,\ldots,n_1$

X_{2j} , Y_{2j} เป็นค่าที่วัดได้จากการวัดครั้งแรกและการวัดครั้งที่สองของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรกลุ่มที่สอง $j = 1,2,3,\ldots,n_2$

ถ้า M_1 , M_2 เป็น Vector ของค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่หนึ่ง และกลุ่มที่สองตามลำดับ

Σ_1 , Σ_2 เป็น Matrix ของค่าความแปรปรวนร่วม ของประชากรกลุ่มที่หนึ่งและกลุ่มที่สองตามลำดับ

สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

H_o : $f(\Sigma_1,\Sigma_2) = 0$ ...(3.1)

H_1 : $f(\Sigma_1,\Sigma_2) \neq 0$

โดยที่ f เป็นฟังชั่นอนุพันธ์ (Differentiable Scalar Function) ของพารามิเตอร์ที่ยังไม่ทราบค่า

และสมมติให้ $n_1 = K_1 n$, $n_2 = K_2 n$ เมื่อ K_1 , K_2 เป็นค่าคงที่และมีค่ามากน้อยขนาดใดก็ได้ การจะยอมรับ หรือไม่ยอมรับสมมติฐาน ที่กำหนดตามฟังชั่นอนุพันธ์ (f) ใน (3.1) จะพิจารณาจากตัวสถิติ W ซึ่งกำหนดเป็น

$$W = \frac{nZ^2}{\hat{\omega}^2} \quad \text{[11]} \qquad ...(3.2)$$

เมื่อ $Z = f(\hat{\Sigma}_1,\hat{\Sigma}_2)$

$\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{\Sigma}_1$, $\hat{\Sigma}_2$ แทนค่าประมาณของ M_1 , M_2 , Σ_1 , Σ_2 ตามลำดับ

ω^2 เป็น Asymptotic Variance ของ $n^{\frac{1}{2}}(Z - f(\Sigma_1,\Sigma_2))$

$\hat{\omega}^2$ เป็นค่าประมาณของ ω^2

ขณะที่ n มีขนาดใหญ่ขึ้น การกระจายของ W ใน (3.2) จะมีการกระจายแบบ Chi - Square ที่มี ชั้นแห่งความอิสระ (Degree of Freedom) เป็น 1 เมื่อสมมติฐานเป็นจริง

ในที่นี้จะกำหนด $f(\Sigma_1,\Sigma_2)$ เป็น

---

[11] Stroud, Op. cit., p. 409.

$$f(\Sigma_1,\Sigma_2) = \sigma^2_{Y_1} - \sigma^2_{X_1Y_1}(\sigma^2_{X_1} - 1)^{-1} - \sigma^2_{Y_2} + \sigma^2_{X_2Y_2}(\sigma^2_{X_2} - 1)^{-1}$$

และแทนค่าประมาณของ σ^2_X , σ^2_Y , σ_{XY} ด้วย S^2_X , S^2_Y , S_{XY} ตามลำดับ

ดังนั้น $f(\hat{\Sigma}_1,\hat{\Sigma}_2) = S^2_{Y_1} - S^2_{X_1Y_1}(S^2_{X_1} - 1)^{-1} - S^2_{Y_2} + S^2_{X_2Y_2}(S^2_{X_2} - 1)^{-1}$

ให้ $Z = f(\hat{\Sigma}_1,\hat{\Sigma}_2)$

เมื่อกำหนด Θ เป็น Column Vector ซึ่งมี Transpose เป็น

$$\Theta' = (\sigma^2_{X_1} , \sigma^2_{Y_1} , \sigma_{X_1Y_1} , \sigma^2_{X_2} , \sigma^2_{Y_2} , \sigma_{X_2Y_2})$$

$\hat{\Theta}$ เป็นค่าประมาณของ Θ

ดังนั้น $\hat{\Theta}' = (S^2_{X_1} , S^2_{Y_1} , S_{X_1Y_1} , S^2_{X_2} , S^2_{Y_2} , S_{X_2Y_2})$

สำหรับ ω^2 นั้นจากความจริงที่ว่าการกระจาย แบบ Asymptotic ของ $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\Theta} - \Theta)$ มีการกระจายแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมี Covariance Matrix Γ ซึ่งสามารถกำหนด ω^2 เป็น

$$\omega^2 = (\partial f/\partial\Theta)'\Gamma(\partial f/\partial\Theta) \quad \text{[12]} \qquad \ldots(3.3)$$

โดยที่ $\partial f/\partial\Theta$ เป็นเวคเตอร์ของอนุพันธ์ส่วนย่อย (Partial Derivative) ของ $f(\Theta)$ ซึ่งกระทำตามแต่ละ Component ของ Θ และ Γ หมายถึง Block Diagonal Matrix Γ [13] $= \text{diag}(\Gamma_1,\Gamma_2)$

---

[12] Rao, C. Radhakrishna, Linear Statistical Inference and It Applications, (New York : John Willy & Sons, Inc., 1965.) p. 322.

[13] Anderson, Theodore W., An Introduction to Mulltivariate Statistical Analysis, (New York : John Willy & Sons, Inc., 1958) p. 75.

เมื่อกำหนดว่า

$$\Gamma_1 = \frac{1}{K_1}\begin{bmatrix} 2(\sigma^2_{X_1})^2 & 2(\sigma_{X_1Y_1})^2 & 2\sigma^2_{X_1}\sigma_{X_1Y_1} \\ 2(\sigma_{X_1Y_1})^2 & 2(\sigma^2_{Y_1})^2 & 2\sigma_{X_1Y_1}\sigma^2_{Y_1} \\ 2\sigma^2_{X_1}\sigma_{X_1Y_1} & 2\sigma_{X_1Y_1}\sigma^2_{Y_1} & (\sigma_{X_1Y_1})^2 + \sigma^2_{X_1}\sigma^2_{Y_1} \end{bmatrix} \quad \ldots(3.4)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\Gamma_2 = \frac{1}{K_2}\begin{bmatrix} 2(\sigma^2_{X_2})^2 & 2(\sigma_{X_2Y_2})^2 & 2\sigma^2_{X_2}\sigma_{X_2Y_2} \\ 2(\sigma_{X_1Y_1})^2 & 2(\sigma^2_{Y_2})^2 & 2\sigma_{X_2Y_2}\sigma^2_{Y_1} \\ 2\sigma^2_{X_2}\sigma_{X_2Y_2} & 2\sigma_{X_2Y_2}\sigma^2_{Y_2} & (\sigma_{X_2Y_2})^2 + \sigma^2_{X_2}\sigma^2_{Y_2} \end{bmatrix} \quad \ldots(3.5)$$

และ Γ เป็น Asymptotic Covariance ของ $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\Theta} - \Theta)$ โดย $n = \frac{n_1}{K_1} = \frac{n_2}{K_2}$

และสูตรสำหรับตัวสถิติใน (3.2) ที่จะนำมาใช้ทดสอบสมมติฐาน ในการทดสอบค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขนั้น จะกำหนดตามวิธีการของ Stroud [14] ซึ่งกำหนดตัวสถิติเป็น W_2

$$W_2 = \frac{\left[S^2_{Y_1} - S^2_{X_1Y_1}(S^2_{X_1} - 1)^{-1} - S^2_{Y_2} + S^2_{X_2Y_2}(S^2_{X_2} - 1)^{-1}\right]^2}{2(g_1^2/n_1 + g_2^2/n_2)} \quad \ldots(3.6)$$

$$g_1 = S^2_{Y_1} - S^2_{X_1Y_1}(S^2_{X_1} - 1)^{-1} + S^2_{X_1Y_1}(S^2_{X_1} - 1)^{-2} \quad \ldots(3.7)$$

$$g_2 = S^2_{Y_2} - S^2_{X_2Y_2}(S^2_{X_2} - 1)^{-1} + S^2_{X_2Y_2}(S^2_{X_2} - 1)^{-2}$$

---

[14] Stroud, op.cit., p. 409.

นั่นคือในการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข โดยใช้ค่าที่แท้จริงนั้น จะใช้ตัวสถิติ W_2 ที่กำหนดใน (3.6) เป็นตัวทดสอบ เมื่อ n มีขนาดใหญ่จะมีการกระจายแบบ Chi – Square และมีชั้นแห่งความอิสระ เป็น 1

การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข โดยใช้ค่าที่แท้จริง

ในการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่แท้จริง เพื่อเปรียบเทียบประชากรสองกลุ่มนั้น จะใช้วิธีการของ Wald's Asymptotic เพื่อที่จะทดสอบสมมติฐาน ซึ่งกำหนดโดยสมการเวคเตอร์

$$H_0 : f_p(M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2) = 0 , \qquad p = 1,2,3,\ldots,r$$

$$H_1 : f_p(M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2) \neq 0 \qquad \ldots(3.8)$$

ซึ่งจะยอมรับหรือไม่ยอมรับสมมติฐานที่กำหนดใน (3.8) นั้น พิจารณาจากตัวสถิติ W

$$W = n Z' \hat{\Omega}^{-1} Z \text{ [15]} \qquad \ldots(3.9)$$

เมื่อ Z เป็นเวคเตอร์ซึ่ง Component ที่ $Z_p = f_p(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2)$

Ω เป็น Asymptotic Covariance Matrix ของ $n^{\frac{1}{2}}(Z - \phi)$

ϕ_p เป็นเวคเตอร์ซึ่ง Component ที่ p ก็คือ $f_p(M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2)$

ในการทดสอบค่าสถิติของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขนี้ ก็ใช้วิธีทำนองเดียวกันกับการทดสอบค่าสถิติของความแตกต่างของความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข ซึ่งกำหนดว่า

$$\theta' = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \mu_{Y_1}, \mu_{Y_2}, \sigma^2_{X_1}, \sigma^2_{Y_1}, \sigma_{X_1Y_1}, \sigma^2_{X_2}, \sigma^2_{Y_2}, \sigma_{X_2Y_2})$$

และจะตั้งสมมติฐานซึ่งกำหนดโดย สมการเวคเตอร์ $\phi_p = 0 \quad , \quad p = 1,2$

เมื่อ $\phi_1 \equiv f_1(\theta) = \sigma_{X_1Y_1}(\sigma^2_{X_1} - 1)^{-1} - \sigma_{X_2Y_2}(\sigma^2_{X_2} - 1)^{-1}$

$$\phi_2 \equiv f_2(\theta) = \mu_{Y_1} - \mu_{Y_2} - \mu_{X_1}\sigma_{X_1Y_1}(\sigma^2_{X_1} - 1)^{-1} + \mu_{X_2}\sigma_{X_2Y_2}(\sigma^2_{X_2} - 1)^{-1}$$

สำหรับ Z ในสูตร (3.9) นี้จะแทนค่าของ $\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}, \mu_{X_2}, \mu_{Y_2}$

---

[15] Stroud loc. cit

ด้วย $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$; $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_2$ และแทนค่าของ σ_1^2 , σ_2^2 ด้วย s_1^2 , s_2^2 ตามลำดับ

Matrix Ω [16] กำหนดโดย

$$\Omega = (\partial\phi/\partial\theta)' \Gamma (\partial\phi/\partial\theta)$$

เมื่อ $\partial\phi/\partial\theta$ เป็น Matrix ของ Partial Derivative ของ ϕ w.r.t. θ

Γ เป็น 10x10 Block Diagonal $(K_1^{-1}\Sigma_1, K_2^{-1}\Sigma_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$

โดยที่ Γ_1 , Γ_2 ได้นิยามไว้แล้วใน (3.4) และ (3.5)

สำหรับตัวสถิติของ Wald ซึ่งกำหนดใน (3.9) นั้น Stroud [17] ได้กำหนดไว้ดังนี้

$$W_1 = \frac{(g_1'+g_2')(b_1-b_2)^2 + h_1'\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - b_2(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\right]^2 + h_2'\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - b_1(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\right]^2}{(g_1'+g_2')(h_1'+h_2') + (\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2 h_1' h_2'} \qquad \ldots(3.10)$$

เมื่อ $b_1 = \dfrac{S_{X_1Y_1}}{S_{X_1}^2 - 1}$

$$b_2 = S_{X_2Y_2}/(S_{X_2}^2 - 1)$$

$$h_1 = \left[g_1 S_{X_1}^2 + (b_1)^2\right]/(S_{X_1}^2 - 1)^2$$

$$h_2 = \left[g_2 S_{X_2}^2 + (b_2)^2\right]/(S_{X_2}^2 - 1)^2$$

---

[16] Rao, loc. cit.

[17] Stroud, op. cit., p. 410.

$$g_i' = g_i/n_i$$

$$h_i' = h_i/n_i \quad , \quad i = 1,2$$

นั่นคือในการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่แท้จริงนั้น จะใช้ตัวสถิติ W_1 ที่กำหนดใน (3.10) เป็นตัวทดสอบ เมื่อ n มีขนาดใหญ่ จะมีการกระจายแบบ Chi - Square และมี ชั้นแห่งความอิสระเป็น 1

<u>การทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่วัดได้</u>

การเปรียบเทียบประชากรสองกลุ่ม โดยการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข โดยใช้ค่าที่วัดได้นั้น ตัวสถิติที่นำมาใช้ในการทดสอบ คือ F_2 [18] เมื่อ

$$F_2 = \frac{\dfrac{n_1 - 1}{n_1 - 2}\left[S_{Y_1}^2 - \dfrac{(S_{X_1Y_1})^2}{S_{X_1}^2}\right]}{\dfrac{n_2 - 1}{n_2 - 2}\left[S_{Y_2}^2 - \dfrac{(S_{X_2Y_2})^2}{S_{X_2}^2}\right]} \qquad \ldots(3.11)$$

เมื่อสมมติฐานเป็นจริง F_2 จะมีการกระจายแบบ $F(n_1 - 2 , n_2 - 2)$

<u>การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขโดยใช้ค่าที่วัดได้</u>

การเปรียบเทียบประชากรสองกลุ่ม โดยการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข โดยใช้ค่าที่วัดได้นั้น ตัวสถิติที่นำมาใช้ในการทดสอบคือ F_1 [19] เมื่อ

$$F_1 = \frac{(R_1^2 - R_0^2)/2}{R_0^2/(n_1 + n_2 - 4)} \qquad \ldots(3.12)$$

---

[18] Stroud, <u>op. cit.</u> p 411

[19] Rao, op. cit. p. 237 - 238.

เมื่อสมมติฐานเป็นจริง F_1 จะมีการกระจายแบบ $F(2\ ,\ n_1 + n_2 - 4)$
เมื่อ

$$R_0^2 = (n_1 - 1)S_{Y_1}^2 - \frac{\left[(n_1 - 1)S_{X_1Y_1}\right]^2}{(n_1 - 1)S_{X_1}^2} + (n_2 - 1)S_{Y_2}^2 - \frac{\left[(n_2 - 1)S_{X_2Y_2}\right]^2}{(n_2 - 1)S_{X_2}^2}$$

$$R_1^2 = S_{00} - \frac{S_{0i}^2}{S_{ij}}$$

$$S_{ij} = (n_1 - 1)S_{X_1}^2 + (n_2 - 1)S_{X_2}^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2$$

$$S_{0i} = (n_1 - 1)S_{X_1Y_1} + (n_2 - 1)S_{X_2Y_2} + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)$$

$$S_{00} = (n_1 - 1)S_{Y_1}^2 + (n_2 - 1)S_{Y_2}^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)^2$$

<u>การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ไม่มีเงื่อนไข</u>

การเปรียบเทียบประชากรสองกลุ่ม โดยการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ไม่มีเงื่อนไขนั้น ในที่นี้คือการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของตัวแปร Y เท่านั้น โดยมิได้คำนึงถึงตัวแปร X ซึ่งเป็นปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อตัวแปร Y ตัวสถิติที่นำมาใช้ในการทดสอบความแตกต่างจะใช้การทดสอบแบบ t - test [20]

---

[20] Edward, Allen L., <u>Experimental Design in Psychological Research</u>, (New York Holt Rinehart and Winston, 1960.) p. 104.

$$t = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{\frac{s^2_{Y_1}}{n_1} + \frac{s^2_{Y_2}}{n_2}}} \qquad \ldots(3.13)$$