ความเชื่อถือได้ของระบบ (Reliability of System)

ระบบประกอบขึ้นจากชิ้นส่วน (component)จำนวนมาก–น้อย ตามต้องการ การศึกษาถึงความเชื่อถือได้ของระบบจึงต้องเริ่มต้นจากความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนที่นำมาประกอบนั้น

ถ้ามีการออกแบบชิ้นส่วนดี, วิศวกรดี, ทดสอบรอบคอบ, ซ่อมแซมเครื่องใช้ต่าง ๆ ได้ทันที ชิ้นส่วนนั้นก็ควรจะใช้งานได้ดี (ไม่มีการเสียเลย ⟶ ความเชื่อถือได้เป็น ๑ หรือ ๑๐๐ %) แต่จากการทำงานจริง ๆ เป็นเวลา t พบว่า ชิ้นส่วนนั้นมีการเสียได้ (ความเชื่อถือได้ < ๑) แสดงว่าการเตรียมการนั้นไม่สามารถขจัด **failure** (การที่ชิ้นส่วนเสียไป) ได้อย่างเด็ดขาด

ในช่วงเวลา t ถ้าความถี่ของ **failure** ต่ำ ⟶ ความเชื่อถือได้สูง

แต่ถ้าความถี่ของ **failure** สูง ⟶ ความเชื่อถือได้ต่ำ

ก่อนจะกล่าวถึงความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วน จึงขอกล่าวถึง **failure** ของชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากสาเหตุต่าง ๆ กัน

๒.๑ การเสียของชิ้นส่วน

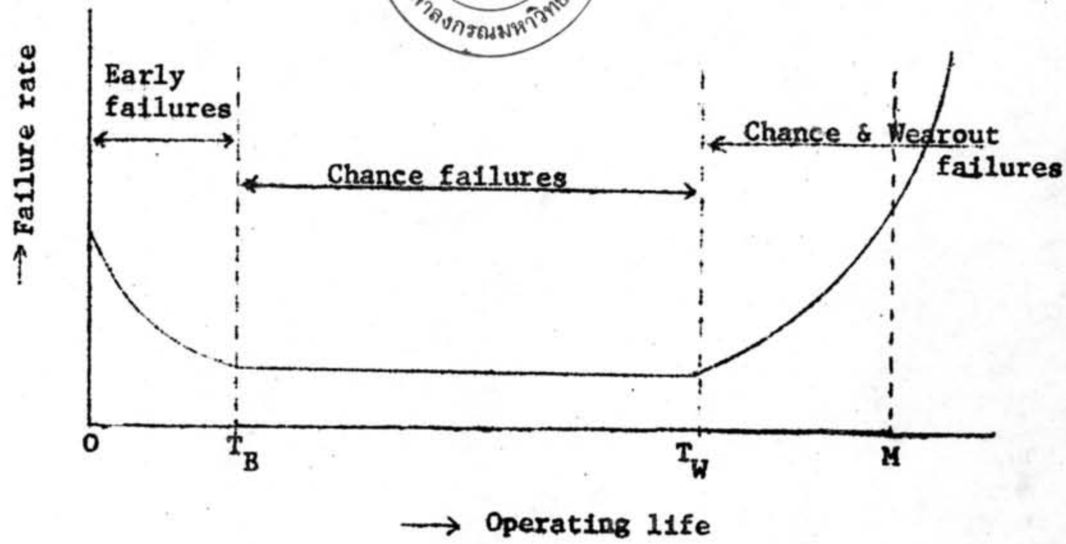
ถ้าเราจำแนกการเสียของชิ้นส่วน ตามสาเหตุของการเสีย จะจำแนกได้เป็น ๓ ชนิด คือ

(1) **early failures**

(2) **chance failures**

(3) **wearout failures**

ถ้าผลิตชิ้นส่วนชนิดหนึ่งขึ้นมาจำนวนหนึ่ง (มาก ๆ) นำไปใช้งาน นับจำนวนชิ้นส่วนที่เสียเมื่อเวลา t ใด ๆ จะได้ **curve** ของ **failure rate** ดังนี้



รูป ๒.๑ Failure rate ของชิ้นส่วน เป็น function ของ t

เมื่อเริ่มต้นใช้งาน (T = 0) failure rate จะสูงมาก เพราะชิ้นส่วนที่ผลิตมาไม่ได้มาตรฐานจะเสียไปในระยะแรกของการใช้งานนี้ (เรียก failure ในระยะแรกนี้ว่า early failure) และเมื่อชิ้นส่วนที่ไม่ได้มาตรฐานพวกนี้เสียไปหมด failure rate จะลดต่ำลงมาจนมีค่าคงที่เมื่อเวลา T_B (เรียกช่วงเวลา $t = 0$ ถึง $t = T_B$ นี้ว่า burn-in period หรือ debugging period) และจะคงอยู่ที่ค่านี้ไปเรื่อย ๆ จนถึงเวลา T_W ชิ้นส่วนที่ใช้งานอยู่เริ่มหมดอายุ จึงทำให้ failure rate สูงขึ้น และยิ่ง $t > T_W$ ก็จะยิ่งมีชิ้นส่วนหมดอายุมากขึ้น failure rate จึงสูงขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อถึงเวลา M (mean wearout lifeของ population หรือ mean life) จะมีชิ้นส่วนที่เสียเนื่องจากหมดอายุประมาณครึ่งหนึ่ง

ระหว่าง T_B ถึง T_W เป็นช่วงเวลาที่มี failure rate ต่ำที่สุด เรียกช่วงนี้ว่า useful life period เพราะในช่วงนี้เราสามารถใช้ชิ้นส่วนได้ดีที่สุด (อัตราการเสียน้อยที่สุด) และ failure rate ในช่วงนี้เกือบจะคงที่ จึงสามารถใช้ exponential law ประมาณค่าได้ดี

failure ที่เกิดในช่วง T_B ถึง T_W เป็น <u>chance failure</u> (เกิดจากความเค้นทันทีทันใดที่มากเกินความแข็งแรงของชิ้นส่วน) chance failure เกิดขึ้นอย่าง random ซึ่งคาดเดาไม่ได้

failure ที่เกิดหลังเวลา T_W ไป อาจเป็น chance failure หรือ <u>wearout failure</u> ก็ได้

<u>การกำจัด failures</u>

early failures กำจัดโดยใช้ debugging หรือ burn-in process

wearout failures กำจัดโดยใช้งานชิ้นส่วนนั้น ในเวลาที่น้อยกว่า M(mean life) หรือมีการใช้ชิ้นส่วนอื่นแทนที่ก่อนเวลา M (ในกรณีที่ไม่สามารถใช้ชิ้นส่วนอื่นแทนได้ เช่น การส่งจรวด จะต้องออกแบบชิ้นส่วนนั้นให้มี M > เวลาที่ต้องใช้ชิ้นส่วนนั้น)

chance failures ไม่สามารถกำจัดโดย debugging หรือใช้ชิ้นส่วนอื่นแทน เพราะไม่มีใคร ทายได้ว่า chance failures จะเกิดเมื่อใด แต่เราสามารถทำให้ chance failures น้อยลงได้ โดยใช้เทคนิคของความเชื่อถือได้

๒.๒ <u>ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วน</u>

มีผู้ให้คำจำกัดความของ "ความเชื่อถือได้" หรือ "Reliability" ไว้หลายท่าน เช่น C.R. Knight กล่าวว่า "ความเชื่อถือได้คือ ความน่าจะเป็นที่โครงงานหนึ่งจะบรรลุผลตามที่หวังไว้ในช่วงเวลาที่กำหนด และภายใต้ข้อกำหนดของงานนั้น" Igor Bazovsky กล่าวว่า "ความเชื่อถือได้ คือ ความน่าจะเป็นที่โครงงานนั้นสามารถดำเนินไปได้ในช่วงเวลาที่กำหนด" หรือ "ความเชื่อถือได้ คือ โอกาสที่จะอยู่รอดในระยะเวลาที่กำหนด" Paul L. Meyer กล่าวว่า "ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนใด ๆ คือ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนนั้นยังคงใช้งานได้ เมื่อเวลา t "

จากคำจำกัดความต่าง ๆ เหล่านี้เห็นได้ว่า ความเชื่อถือได้ขึ้นอยู่กับช่วงเวลา (เป็น function ที่มี t เป็นตัวแปร) ใช้สัญลักษณ์ R(t) แทนความเชื่อถือได้ หรือ

ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนนั้นยังคงใช้งานได้ในช่วงเวลา $[0, t]$

$$R(t) = P(T > t)$$

เมื่อ T เป็นเวลาที่นับจากเริ่มใช้ชิ้นส่วนนั้น ($t = 0$) ไปจนถึงเวลาที่ชิ้นส่วนนั้นเสีย

หมายเหตุ การเสียของชิ้นส่วนในที่นี้ เราคิดเฉพาะ **chance failure** เท่านั้น (ถือว่ากำจัด **early** และ **wearout failure** ไปแล้ว) ดังนั้น t ที่กล่าวถึงจะอยู่ในช่วง T_B ถึง T_W (**useful life period**) และเวลา $t=0$ ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่ **origin** แต่เป็นเวลาใดก็ได้ที่เริ่มต้นใช้ชิ้นส่วนนั้น

ถ้าให้ f เป็น **pdf** ของ T (**probability density function** ของ T) ของชิ้นส่วนหนึ่ง จะพูดถึงความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนนั้นในเทอมของ **pdf** ของ T ได้ดังนี้

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s)\, ds \qquad \text{-----(1)}$$

หรือพูดถึงในเทอมของ **cdf** ของ T (**cumulative density function** ของ T) ก็ได้

$$\begin{aligned} \because \quad R(t) &= P\ (T > t) \\ &= 1 - P\ (T \leq t) \\ &= 1 - \int_0^{t} f(s)\, ds \\ &= 1 - F(t) \qquad \text{-----(2)} \end{aligned}$$

ถ้าเรามีชิ้นส่วนชนิดหนึ่งจำนวน N ชิ้นส่วน นำไปทดสอบใช้งาน เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง พบว่า ชิ้นส่วนที่ยังคงใช้งานได้ (หลังจากใช้งานแล้ว t ชั่วโมง) มีจำนวน N_s ชิ้นส่วน และชิ้นส่วนที่เสียไป (ระหว่างการใช้งาน t ชั่วโมง) มีจำนวน N_f ชิ้นส่วน

$$N = N_S + N_f$$

N เป็นตัวคงที่ตลอดการทดสอบ ไม่ว่า t จะมีค่าเท่าใด

แต่ N_s และ N_f แปรตามเวลา t เมื่อ t มากขึ้น จะทำให้ N_f เพิ่มขึ้น

และ N_s ลดลง

ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนชนิดนี้ (ซึ่งได้จากการทดสอบครั้งนี้) เมื่อเวลา t ใด ๆ คือ

$$R(t) = \frac{N_s}{N} = 1 - \frac{N_f}{N} \qquad \text{-----(3)}$$

differentiate ทั้งสองข้าง

$$\therefore \quad \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{N_f}{N}\right]$$

$$= -\frac{1}{N}\frac{dN_f}{dt}$$

หรือ

$$\frac{dN_f}{dt} = -N\frac{dR}{dt} \qquad \text{-----(4)}$$

$\frac{dN_f}{dt}$ คือ จำนวนชิ้นส่วนที่เสียระหว่างเวลา t ถึง $t + dt$ ซึ่งก็คือ rate ของชิ้นส่วนซึ่งยังคงใช้งานได้เมื่อเวลา t แต่เสียใน dt ถัดมา

ชิ้นส่วนที่ยังคงใช้งานได้เมื่อเวลา t มีจำนวน N_s ชิ้นส่วน ซึ่ง N_s ชิ้นส่วนนี้มีโอกาสเสียได้เท่า ๆ กัน (ในช่วง dt ถัดมา)

$\therefore$ rate ของชิ้นส่วน (๑ ชิ้นส่วน) ซึ่งยังคงใช้งานได้เมื่อเวลา t แต่เสียใน dt ถัดมา ก็คือ $\frac{1}{N_s}\frac{dN_f}{dt}$ ซึ่งเรียกว่า <u>instantaneous failure rate</u> (หรือ <u>hazard rate</u>) และใช้สัญญลักษณ์ λ

$$\lambda = \frac{1}{N_s}\frac{dN_f}{dt}$$

จาก (4)

$$= \frac{1}{N_s}\left(-N\frac{dR}{dt}\right)$$

$$= -\frac{N}{N_s}\frac{dR}{dt}$$

จาก (3)

$$= -\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} \qquad \text{-----(5)}$$

สมการ (5) ใช้ได้ทั้งในกรณีที่ความเชื่อถือได้เป็น exponential และกรณีที่ความเชื่อถือได้เป็น nonexponential

จาก (5) $\lambda\, dt = -\frac{1}{R}\, dR$

$$\int_0^t \lambda\, dt = -\int_1^R \frac{1}{R}\, dR \quad (\text{เมื่อ } t = 0 \longrightarrow R = 1)$$

$$= -\ln R$$

$$\therefore \quad \ln R = -\int_0^t \lambda\, dt$$

$$\therefore \quad R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda dt\right] \qquad \text{------}(6)$$

สมการ (6) ใช้ได้สำหรับการกระจายทุกแบบ ของ failure ซึ่ง λ อาจจะเป็น constant หรือ function ใด ๆ ของ t ก็ได้

ถ้า λ คงที่

$$-\int_0^t \lambda dt = -\lambda t$$

ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนนั้น จะเป็น exponential

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

นอกจากสมการ (5) ถ้าเราทราบ failure density function f(t) และ R(t) เราจะได้ failure rate เป็น

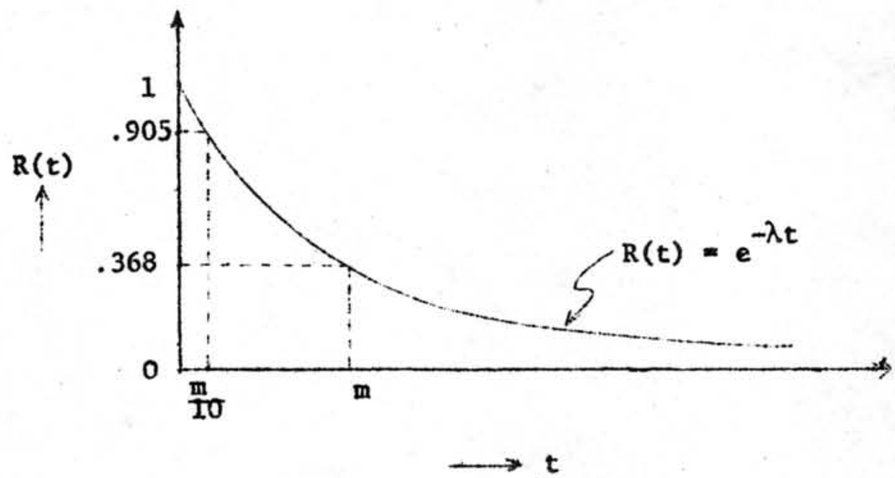
$$\lambda = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad \text{------}(7)$$

จาก (2) $\because$ $R(t) = 1 - F(t)$

$$\therefore \quad R'(t) = 0 - F'(t) = -f(t)$$

จาก (5) $$\lambda = -\frac{1}{R(t)} R'(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

ชิ้นส่วนต่าง ๆ ทาง electronic มักจะมี Reliability distribution เป็นแบบ exponential ซึ่งเราสามารถ plot graph ได้ดังรูป ๒.๒



รูป ๒.๒ The standardized reliability curve

นอกจากจะคิดว่า λ เป็น parameter ของ R(t) เรามักจะใช้ MTBF (mean time between failures) ซึ่งเป็นส่วนกลับของ λ มาเป็น time parameter ของ R(t) ดังนั้น จึงเขียน R(t) ได้ในรูป

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

หรือ $$R(t) = e^{-t/m} \qquad (m = \text{MTBF})$$

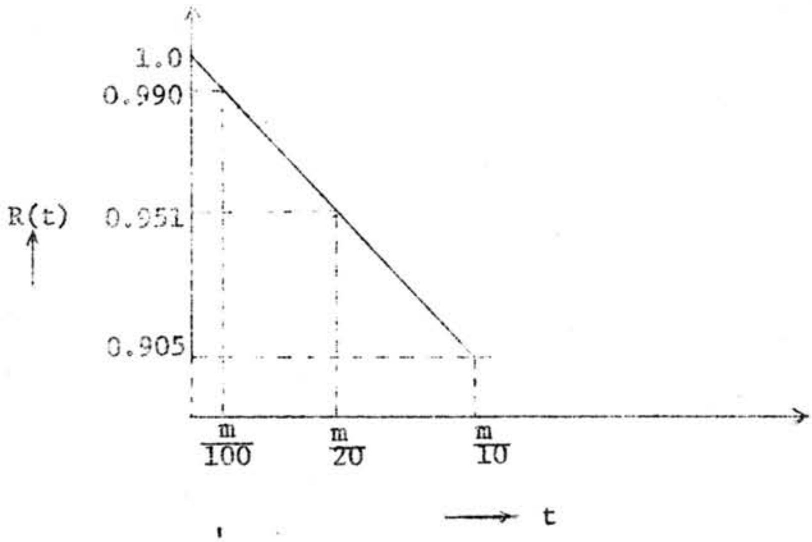
ตามแกนนอนของรูป ๒.๑ เวลา t ไม่จำเป็นต้องเริ่มนับจากเริ่มต้นใช้งาน แต่เรานับในช่วงใด ๆ ก็ได้ โดยคิดเวลาเริ่มต้นในช่วงนั้นเป็น t= 0 เช่น ในการใช้ชิ้นส่วน A ทำงานติดต่อกัน ๑๐๐ ชั่วโมง Reliability ในช่วงชั่วโมงที่ ๑ – ชั่วโมงที่ ๑๐ มีค่าเท่ากับ Reliability ในช่วงชั่วโมงที่ ๙๑ – ชั่วโมงที่ ๑๐๐ เพราะต่างก็มีค่าเท่ากับ $R(10) = e^{-10\lambda}$ หรือ $= e^{-10/m}$ ที่เป็นดังนี้เพราะเราถือว่า ๑๐๐ ชั่วโมง < useful life ของชิ้นส่วน A ชิ้นส่วนA จึงยังคงอยู่ในสภาพดีเหมือนใหม่ แม้ว่าจะได้ใช้ไป ๙๐ ชั่วโมงแล้วก็ตาม failure rate ก็ยังคงที่

ถ้าเราคิดช่วงเวลาใช้งาน $t = m = \frac{1}{\lambda}$

$$\therefore \quad R(t) = R(m) = e^{-m/m} = e^{-1} = 0.368 \simeq 37\ \%$$

หมายความว่า ถ้าเรานำชิ้นส่วนชนิดนี้จำนวน๑๐๐ชิ้นส่วน มาใช้งาน m ชั่วโมง เมื่อครบ m ชั่วโมงแล้ว จะเหลือประมาณ ๓๗ ชิ้น เท่านั้นที่ยังคงใช้งานได้ ในขณะที่อีก ๖๓ ชิ้น เสียไปก่อนแล้ว

ในงานจริง ๆ เราใช้งานชิ้นส่วนใด ๆ ในช่วงเวลาที่สั้นกว่า useful life มาก และก็สั้นกว่า MTBF มากด้วย ดังนั้นการคำนวณ Reliability จึงมักอยู่ในช่วงแรก ๆ ของรูป ๒.๒ ซึ่งนำมาขยายเป็นรูป ๒.๓ โดยคิด $t = 0$ ถึง $m/10$



รูป ๒.๓ ขยายเฉพาะส่วนบนของ standardized reliability curve ตั้งแต่ $t = 0$ ถึง $t = \frac{m}{10}$

เมื่อ $t = \frac{m}{10} \longrightarrow R(t) \cong 0.9$

$t = \frac{m}{100} \longrightarrow R(t) = 0.99$

$t = \frac{m}{1000} \longrightarrow R(t) = 0.999$

$t = \frac{m}{10000} \longrightarrow R(t) = 0.9999$

$\vdots \qquad \vdots$

ดังนั้น ถ้าต้องการชิ้นส่วนที่มี Reliability ถึง 0.999999 ในช่วงการทำงาน ๑ ชั่วโมง ชิ้นส่วนนั้นจะต้องมี MTBF = ๑,๐๐๐,๐๐๐ ชั่วโมง

ถ้าต้องการชิ้นส่วนที่มี Reliability = 0.999 ในช่วงการทำงาน ๑๐ ชั่วโมง ชิ้นส่วนนั้นจะต้องมี MTBF = ๑๐,๐๐๐ ชั่วโมง

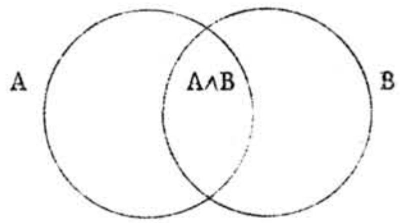
๒.๓ ทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ใช้ในการคำนวณความเชื่อถือได้

๒.๓.๑ ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ขึ้นต่อกัน (independent) และมีความน่าจะเป็น P(A) และ P(B) ตามลำดับ ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองเหตุการณ์จะเกิดขึ้นพร้อมกัน คือ

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{-----(8)}$$

๒.๓.๒ ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองสามารถเกิดขึ้นได้พร้อม ๆ กัน (non-mutually exclusive) ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง หรือทั้งสองเหตุการณ์จะเกิดขึ้น คือ

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \qquad \text{------(9)}$$



รูป ๒.๔ Non-mutally exclusive events.

๒.๓.๓ ถ้าเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นแล้ว อีกเหตุการณ์หนึ่งต้องไม่เกิดในขณะเดียวกัน (mutually exclusive) ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้น คือ

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) \qquad \text{------(10)}$$

๒.๓.๔ ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองเป็น complement ซึ่งกันและกัน (ถ้า A เกิดขึ้น, B ก็ต้องไม่เกิดขึ้น หรือถ้า A ไม่เกิดขึ้น, B ก็ต้องเกิดขึ้น)

$$P(A) + P(B) = 1 \qquad \text{-----(11)}$$

ทฤษฎีทั้งสี่ข้อนี้ ถ้ามองในแง่ของความเชื่อถือได้ โดยให้

$R(t)$ = ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนนั้นใช้การได้ ในช่วงเวลา t

$Q(t)$ = ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนนั้นเสีย ในช่วงเวลา t

เหตุการณ์ที่ชิ้นส่วนหนึ่งใช้การได้ และเหตุการณ์ที่ชิ้นส่วนเดียวกันนั้นเสีย ในช่วงเวลาเดียวกัน สองเหตุการณ์นี้เป็น **complement** ซึ่งกันและกัน และเป็น**mutually exclusive events** ด้วย

$$R(t) + Q(t) = 1$$

นอกจากความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนเดี่ยว ๆ แล้ว สิ่งที่เราใช้งานจริง ๆ คือ ความเชื่อถือได้ของระบบ เทคนิคของการหาค่าความเชื่อถือได้ของระบบตามที่ออกแบบไว้ หรือเทคนิคของการออกแบบระบบเพื่อให้ได้ความเชื่อถือได้ตามที่ต้องการ เป็นสิ่งที่เราจะศึกษาต่อไป

เริ่มต้นจากระบบที่ง่ายที่สุด ซึ่งได้จากการต่อชิ้นส่วน ๒ ชิ้น เข้าด้วยกันจะได้กฎพื้นฐานสำหรับการคำนวณความเชื่อถือได้ของระบบ

ถือว่า การที่ชิ้นส่วนหนึ่งเสียไป ไม่เกี่ยวเนื่องกับการเสียของชิ้นส่วนอื่น (independent)

๒.๔ ความเชื่อถือได้ของระบบ

๒.๔.๑ ถ้าให้ A = เหตุการณ์ที่ชิ้นส่วนที่ ๑ ใช้การได้ (ในช่วงเวลา t)

B = เหตุการณ์ที่ชิ้นส่วนที่ ๒ ใช้การได้ (ในช่วงเวลา t)

∴ ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองชิ้นส่วน ใช้การได้ ในช่วงเวลา t

$$= P(A \wedge B)$$

$$= P(A).P(B) \quad \text{จาก (8)}$$

ซึ่ง $P(A)$ ก็คือ ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนที่ ๑ $= R_1(t)$

$P(B)$ ก็คือ ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนที่ ๒ $= R_2(t)$

$P(A \wedge B)$ ก็คือ ความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่อชิ้นส่วนที่ ๑ และ ๒ เข้าด้วยกัน

$$= R_s(t)$$

$$\therefore \quad R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

ระบบนี้จะใช้การได้ เมื่อชิ้นส่วนทั้งสองต้องใช้การได้ทั้งคู่

เหมือนกับการต่อชิ้นส่วนทั้งสองแบบอนุกรม

$\therefore$ $R_s(t)$ คือ ความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่อชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแบบอนุกรม (series system)

ถ้า λ_1, λ_2 เป็น failure rates ของชิ้นส่วนที่ ๑ และ ๒ ตามลำดับ

$$\therefore \quad R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

$$= \exp\left[-\int_0^t \lambda_1 dt\right] . \exp\left[-\int_0^t \lambda_2 dt\right] \text{ ------(12)}$$

๒.๔.๖ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งจะเสีย หรือเสียทั้งคู่

$$= P(\bar{A} \vee \bar{B})$$

$$= P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \quad \text{จาก (9)}$$

$$\therefore \quad Q_s(t) = Q_1(t) + Q_2(t) - Q_1(t) \cdot Q_2(t)$$

$$= [1-R_1(t)]+[1-R_2(t)]-[1-R_1(t)][1-R_2(t)]$$

$$= 1 - R_1(t) \cdot R_2(t)$$

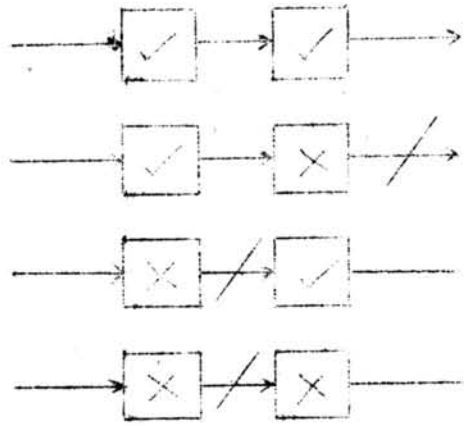
$$= 1 - R_s(t) \quad \text{-----(13)}$$

$Q_s(t)$ เป็น complement ของ $R_s(t)$.

ระบบนี้จะเสีย เมื่อชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งเสียไป

ระบบนี้ได้จากการต่อชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแบบอนุกรม

ระบบที่มี ๒ ชิ้น ส่วนต่ออนุกรมกัน จะ fail ทันทีที่ชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่ง fail ยิ่งมี n ชิ้นส่วนต่ออนุกรมกัน ก็จะยิ่ง fail ง่ายขึ้น ($n > 2$)



รูป ๒.๕ ระบบที่ได้จากการต่อ ๒ ชิ้นส่วนเข้าด้วยกัน แบบอนุกรม
(✓ = ชิ้นส่วนที่ใช้ได้, ✗ = ชิ้นส่วนที่เสีย)

๒.๔.๓ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่ง หรือทั้งสองชิ้นส่วน ใช้การได้

$$= P(A \vee B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \qquad \text{จาก (9)}$$

$$\therefore R_p(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t)$$

$$= \exp\left[-\int_0^t \lambda_1 dt\right] + \exp\left[-\int_0^t \lambda_2 dt\right] - \exp\left[-\int_0^t (\lambda_1+\lambda_2) dt\right] \quad \text{---(14)}$$

$R_p(t)$ คือ ความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่อชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแบบขนาน (parallel system)

๒.๔.๔ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนทั้งสอง เสีย

$$= P(\bar{A} \wedge \bar{B})$$

$$= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \qquad \text{จาก (8)}$$

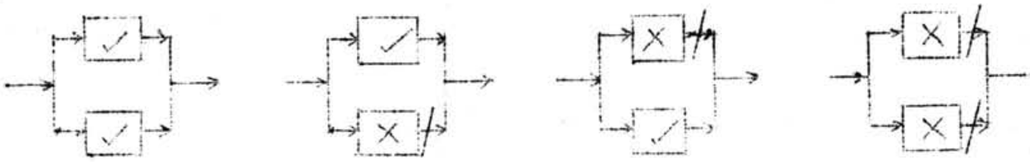
$$\therefore Q_p(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t)$$

$$= [1-R_1(t)] \cdot [1-R_2(t)]$$

$$= 1-R_1(t)-R_2(t)+R_1(t) \cdot R_2(t)$$

$$= 1 - R_p(t) \qquad \text{------(15)}$$

$Q_p(t)$ เป็น complement ของ $R_p(t)$



รูปที่ ๒.๖ ระบบที่ได้จากการต่อ ๒ ชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแบบขนาน

ระบบที่มี ๒ ชิ้นส่วนต่อกันแบบขนาน จะไม่ fail ถ้าชิ้นส่วน fail ไปเพียงชิ้นส่วนเดียว และถ้ายิ่งมี n ชิ้นส่วน $(n > 2)$ มาต่อขนานกัน ระบบนี้ก็จะไม่ fail จนกว่าชิ้นส่วนสุดท้ายจะ fail ไป

ถ้ามี n ชิ้นส่วนต่อขนานกัน การ fail ของ $(n-1)$ ชิ้นส่วนจะไม่ทำให้ระบบ fail เลย

สมการ (12) ถึง (15) ใช้ได้ทั้งกรณีที่ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนมีการกระจายแบบ exponential และ non-exponential

ในกรณีที่เป็น non-exponential ต้องคิดว่า failure rate ไม่เป็นตัวคงที่ แต่เป็น function ของ t

ในด้านไฟฟ้า ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนมีการกระจายแบบ exponential ดังนั้น เมื่อนำชิ้นส่วนต่าง ๆ มาต่อเข้าเป็นระบบ จึงได้เป็น

จาก (12) $R_s(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ -----(16)

จาก (13) $Q_s(t) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ ------(17)

จาก (14) $R_p(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ -----(18)

จาก (15) $Q_p(t) = (1-e^{-\lambda_1 t}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t})$ -----(19)

๒.๕ ความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่ออนุกรม

ถ้านำ n ชิ้นส่วนมาต่อกันแบบอนุกรม

โดยที่ $R_i(t)$ = ความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนที่ i $(i = 1,2,\ldots,n)$

$\therefore$ ความเชื่อถือได้ของระบบ $R_s(t) = R_1(t).R_2(t).\ldots.R_n(t)$

$$= \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad \text{-----(20)}$$

กฎนี้เรียกว่า **Product law of reliabilities**

และเมื่อ $R_i(t)$ เป็น exponential

$$\therefore \quad R_s(t) = (e^{-\lambda_1 t}).(e^{-\lambda_2 t}).\ldots\ldots(e^{-\lambda_n t})$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots\ldots+\lambda_n)t}$$

$$= e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t}$$

ตัวอย่าง ในระบบเดินอากาศโดยใช้ความเฉื่อย (Inertial Navigation System) ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนตามตาราง ๒.๑

ตาราง ๒.๑ อัตราการเสียของชิ้นส่วนต่าง ๆ ของระบบเดินอากาศโดยใช้ความเฉื่อย

Assembly	Qty./system	Removal rate per 10^6 hrs.	λ_i
Gyroscope	2	183.0	.0003660
Accelerometer	3	158.0	.0004740
Gimbal	1	217.0	.0002170
Computer	1	340.0	.0003400
Chassis	1	158.0	.0001580
I/O Tray Assy	1	259.0	.0002590
Power Supply	1	158.0	.0001580
Quantizer	1	91.5	.0000915
Sequencer	1	124.0	.0001240
Servo	1	83.3	.0000833
Digital/Synchro	1	50.0	.0000500
Cross Track	1	66.7	.0000667
Synchro Repeater	1	29.1	.0000291
Mode Logic	1	33.3	.0000333
ARINC Driver	1	8.3	.0000083
Gyro Spin	1	16.7	.0000167
T/R Assembly	1	41.5	.0000415
Input Converter	1	16.7	.0000167
Ambient Temperature	1	8.3	.0000083
Filter and Phase Shift	1	8.3	.0000083
Gyro Fine Temperature	1	16.7	.0000167
			$\sum_{i=1}^{21} \lambda_i = 0.0025664$

$$\therefore \quad \lambda_{system} = \Sigma \lambda_i = 0.0025664$$

$$R_S(t) = e^{-\lambda t} = e^{-(0.0025664)t}$$ เป็นความเชื่อถือได้ของระบบเดินอากาศโดยใช้ความเฉื่อย สำหรับระยะการใช้งาน t ใด ๆ

สมมุติว่า ต้องการหาความเชื่อถือได้ของระบบ สำหรับ 100-hours operation

$$R_S(100) = e^{-(0.0025664)(100)}$$

$$= e^{-0.25664}$$

$$\cong 0.775$$ หรือ 77.5 %

10-hrs operation

$$R_S(10) = e^{-(0.0025664)(10)}$$

$$= e^{-0.025664}$$

$$\cong 0.975$$ หรือ 97.5 %

ถ้าต้องการทราบ expected MTBF ของ system

$$m_{system} = \frac{1}{\lambda_{system}}$$

$$= \frac{1}{0.0025664}$$

$$= 399.65087$$

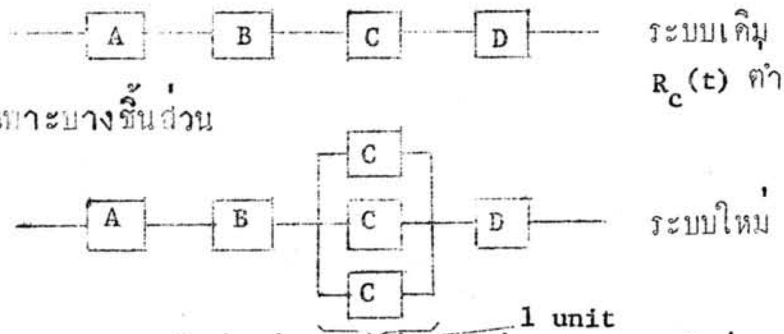
จาก $R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$

จะเห็นได้ว่า $R_S(t) \leqslant \min\left[R_1(t),\ldots\ldots,R_n(t)\right]$

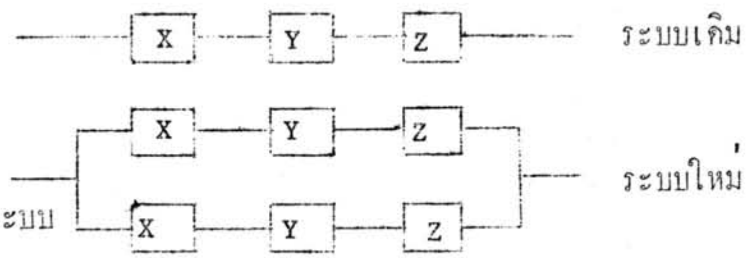
ดังนั้น ถ้าระบบใดมีชิ้นส่วนใดแม้เพียงชิ้นส่วนหนึ่งที่มีความเชื่อถือได้ต่ำมาก ก็จะทำให้ระบบนั้น fail ได้ง่าย เช่นในระบบเดินอากาศโดยใช้ความเฉื่อย มีชิ้นส่วนที่มีความเชื่อถือได้ต่ำสุดคือ computer มี $R(t) = e^{-(.00034)t}$ และเป็นจุดอ่อนที่ทำให้ระบบนี้มีความเชื่อถือได้ต่ำลง ถ้าไม่มีข้อกำหนดอย่างอื่น เช่นว่า ราคา (ค่าใช้จ่าย), เนื้อที่, น้ำหนัก, ฯลฯ (ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป) เราควรจะปรับปรุงที่จุดนี้

โดยเปลี่ยนให้เป็นกลุ่ม (unit) ที่ประกอบด้วย redundancy ที่มาต่อขนานด้วย

รูป ๒.๗
ต่อขนาน เฉพาะบางชิ้นส่วน



ถ้าในระบบใด มีชิ้นส่วนที่มีความเชื่อถือได้ต่ำ ๆ เกือบทุกชิ้นส่วน เราอาจทำให้ความเชื่อถือได้ของระบบสูงขึ้น โดยการใช้กลุ่ม(ระบบ)ที่เหมือนกันมาต่อขนานก็ได้



รูป ๒.๘
ต่อขนานทั้งระบบ

๒.๖ <u>ความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่อขนาน</u>

เมื่อต้องการให้ระบบมีความเชื่อถือได้สูงมากเท่าที่กำหนดไว้ นอกจากจะทำโดยลดจำนวนชิ้นส่วน (ที่ไม่จำเป็น) ที่ต่ออนุกรมลงแล้ว ยังจะต้องใช้ชิ้นส่วนซึ่งมีความเชื่อถือได้ต่ำมาต่อขนาน (หรือใช้กลุ่มที่มีความเชื่อถือได้ต่ำมาต่อขนาน) วิธีการเพิ่มความเชื่อถือได้แบบนี้ เรียกว่า parallel redundancy

การคำนวณความเชื่อถือได้ของระบบที่ได้จากการต่อขนาน

จาก(14) เมื่อนำ ๒ ชิ้นส่วนมาต่อกันแบบขนาน

$$R_p(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t)$$

ถ้าเป็น ๓ ชิ้นส่วนต่อกันแบบขนาน จะได้

$$R_p(t) = R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t) - R_2(t)R_3(t) - R_3(t)\,R_1(t) + R_1(t)\,R_2(t)\,R_3(t).$$

เห็นได้ว่า ถ้ามีชิ้นส่วน ≥ 4 ต่อกันแบบขนาน การคำนวณความเชื่อถือได้โดยวิธีนี้จะยุ่งมาก

เรามีวิธีที่ง่ายกว่า จากการที่เราทราบว่า $R_p(t) + Q_p(t) = 1$ ถ้าคำนวณ $Q_p(t)$ ได้ ก็จะทราบ $R_p(t)$ ทันที

จาก (15) $Q_p(t) = Q_1(t) \,.\, Q_2(t)$ ในกรณีที่ ๒ ชิ้นส่วนต่อกันแบบขนาน

ถ้านำ n ชิ้นส่วนมาต่อกันแบบขนาน

$$\therefore \quad Q_p(t) = Q_1(t) \,.\, Q_2(t) \ldots\ldots. Q_n(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) \qquad \text{-----(21)}$$

กฎนี้เรียกว่า <u>Product law of unreliabilities in parallel operation</u> แล้วจึงคำนวณ $R_p(t) = 1 - Q_p(t)$ จะง่ายกว่าการคำนวณ $R_p(t)$ โดยตรง

ชิ้นส่วนที่นำมาต่อขนานกัน มักใช้ชิ้นส่วนชนิดเดียวกัน (equal component) ความเชื่อถือได้ของแต่ละชิ้นส่วนจึงเท่ากันหมด

$$R_1(t) = R_2(t) = \ldots\ldots\ldots = R_n(t) = R(t)$$

$$Q_1(t) = Q_2(t) = \ldots\ldots\ldots = Q_n(t) = Q(t)$$

$$\therefore Q_p(t) = [Q(t)]^n = [1 - R(t)]^n$$

$$R_p(t) = 1 - [Q(t)]^n = 1 - [1 - R(t)]^n$$

<u>ตัวอย่าง</u> ชิ้นส่วน (หรือระบบ) ชนิดหนึ่ง มี failure rate = 0.01 ถ้าใช้งานในช่วง ๑๐ ชั่วโมง

$$\therefore \quad R(10) = e^{-(0.01)(10)} = e^{-0.1}$$

$$= 0.90484$$

ถ้าต้องการความเชื่อถือได้มากขึ้น โดยใช้ระบบที่ประกอบด้วยชิ้นส่วน (หรือระบบ) ชนิดนี้ ๓ ชิ้นส่วน (ระบบ) ต่อกันแบบขนาน จะเพิ่มความเชื่อถือได้ขึ้นอีกเท่าใด ?

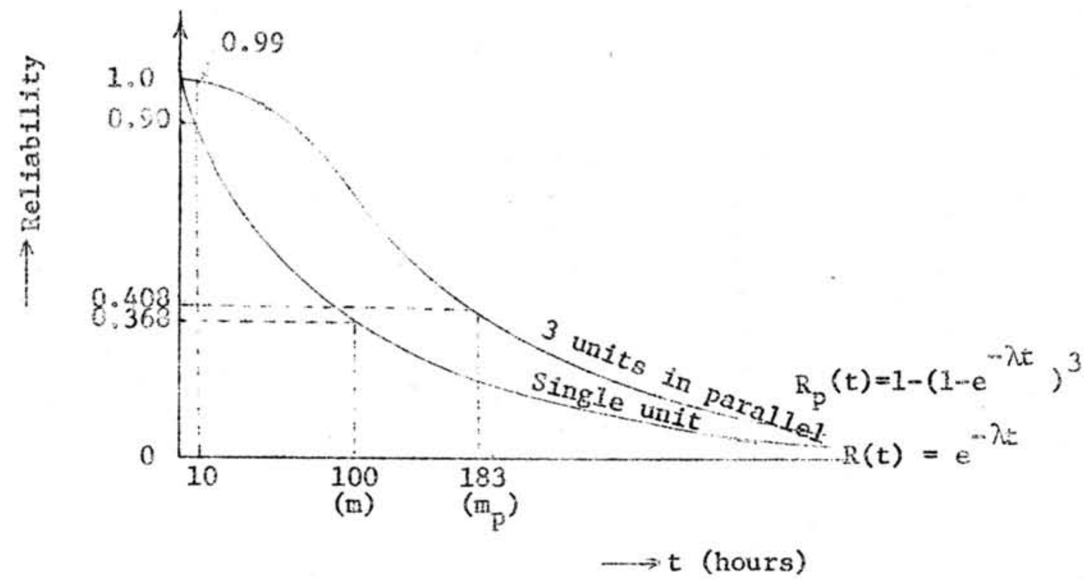
$$\text{จาก} \quad R_p(t) = 1 - [Q(t)]^n$$

$$\therefore \quad R_p(10) = 1 - [1 - 0.90484]^3$$

$$= 1 - 0.000862$$

$$= 0.999138$$

$\therefore$ ระบบที่นำชิ้นส่วน (ระบบ) ๓ อันที่เหมือนกันมาต่อกันแบบขนาน จะให้ค่าความเชื่อถือได้สูงกว่าระบบเดิมที่มีเพียง ๑ ชิ้นส่วน (ระบบ) ถึง ๙.๔ %



รูป ๒.๙ เทียบความเชื่อถือได้ และ MTBF ของระบบซึ่งมีชิ้นส่วน (กลุ่ม) เดียว และระบบซึ่งมี ๓ ชิ้นส่วน (กลุ่ม) ต่อขนานกัน

การที่ค่าความเชื่อถือได้ของระบบเดิม = 0.90484 หมายความถึงระบบนี้จะเสียประมาณ ๑๐ ใน ๑๐๐ ครั้ง ของการทำงาน ในช่วง ๑๐ ชั่วโมง

ค่าความเชื่อถือได้ของระบบใหม่ = 0.999138 หมายความถึง ระบบนี้จะเสียเพียงประมาณ ๑ ใน ๑๐๐๐ ครั้ง ของการทำงานในช่วง ๑๐ ชั่วโมง

ถ้าระบบนี้เกี่ยวกับความปลอดภัย จะเห็นได้ว่าระบบใหม่ปลอดภัยกว่าเดิมมาก

ในระบบที่ได้จากการต่ออนุกรมของชิ้นส่วนที่มีความเชื่อถือได้ เป็น exponential failure rate ของระบบคือ λ_s จะยังเป็นตัวคงที่ เพราะได้จากผลบวกของ failure rate ของทุกชิ้นส่วน (ซึ่งเป็นตัวคงที่) ดังนั้นความเชื่อถือได้ของระบบนี้จึงยังคงเป็น exponential

$$R_S(t) = e^{-\lambda_s t}$$

และ MTBF ของระบบ $= m_s = \frac{1}{\lambda_s}$

แต่ในระบบที่ได้จากการต่อขนานของชิ้นส่วนที่มีความเชื่อถือได้ เป็นแบบ exponential จะไม่เป็นอย่างนี้ ถึงแม้ MTBF ของระบบ $= m_p$ จะยังคงเป็นตัวคงที่ซึ่งคำนวณได้จาก

$$m_p = \int_0^{\infty} R_p \, dt \qquad \text{ก็ตาม}$$

แต่ failure rate ของระบบจะเป็น function ซึ่งแปรตามระยะการใช้งาน t.

<u>ตัวอย่าง</u> ระบบที่ได้จากการต่อขนานของชิ้นส่วน ๒ ชิ้นส่วน ที่มีความเชื่อถือได้เป็น exponential

ถ้า λ_1 และ λ_2 เป็น failure rate ของชิ้นส่วนที่ ๑ และ ๒ ตามลำดับ

$$\therefore \quad R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$$

$$R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$$

จาก (11) $R_p(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t)$

$$= e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - (e^{-\lambda_1 t})(e^{-\lambda_2 t})$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$R_p(t)$ ไม่เป็น exponential

การคำนวณ MTBF ของระบบที่ได้จากการต่อขนาน

ถ้าต่อขนาน ๒ ชิ้นส่วน ที่มี failure rate λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ

$$m_p = \int_0^{\infty} [\, e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \,]\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

ถ้าต่อขนาน ๒ ชิ้นส่วน ที่เหมือนกัน $(\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$

$$\therefore \quad m_p = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}$$

ถ้าต่อขนาน ๓ ชิ้นส่วนที่เหมือนกัน

$$m_p = \int_0^{\infty} [3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}]\,dt$$

$$= \frac{3}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda}\right) + \frac{1}{3\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda}$$

$\therefore$ ในกรณีทั่วไป ถ้านำ n ชิ้นส่วนที่เหมือนกันมาต่อกันแบบขนาน จะได้ MTBF ของระบบเป็น

$$m_p = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n\lambda}$$

และเนื่องจาก **failure rate** เป็น **variable function** เราคำนวณได้เพียง **instantaneous failure rate** จากสมการ (5)

$$\lambda = -\frac{1}{R_p(t)} \cdot \frac{d\,R_p(t)}{dt}$$

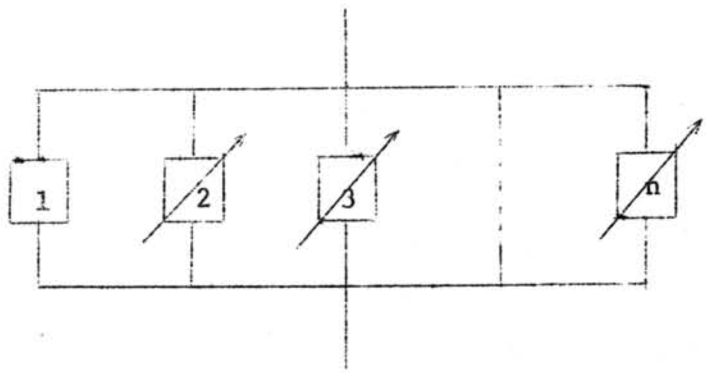
เมื่อจำเป็นต้องใช้ **redundancy** การเลือก **duplicate** ชิ้นส่วนใด หรือกลุ่มใด หรือทั้งวงจร จะต้องพิจารณาในแง่เศรษฐศาสตร์ด้วย เพราะการ **duplicate** แต่ละชิ้นส่วน ถึงแม้จะทำให้ความเชื่อถือได้สูงขึ้น แต่ก็ทำให้ค่าใช้จ่ายสูงขึ้นด้วย

นอกจากนี้ชิ้นส่วนบางชนิดก็ไม่เหมาะกับการต่อขนาน เช่น Resistor และ Capacitor ที่ใช้งานในระบบ ถ้า redundancy ที่ใช้เกิดเสียไป ๑ ชิ้นส่วน จะทำให้ circuit constant เปลี่ยนไปได้ ดังนั้นถ้าต้องการเพิ่มความเชื่อถือได้ จึงควรใช้แบบ stand-by จะเหมาะกว่า

๒.๗ <u>ความเชื่อถือได้ของระบบที่ใช้ Stand - by</u>

สำหรับกรณีที่ไม่สามารถจะทำเป็นระบบแบบต่อขนาน (หรือไม่เหมาะกับระบบแบบต่อขนาน) เราใช้ระบบ "stand-by" แทน ระบบนี้ก็คือ ในขณะที่กำลังใช้งานชิ้นส่วนหนึ่งอยู่ (หรือ unit หนึ่ง) อีกชิ้นส่วนจะรอคอย stand-by อยู่ พร้อมที่จะทำงานได้ทันทีที่ชิ้นส่วน (unit) ซึ่งกำลังใช้งานอยู่นั้นเสียไป

ในระบบที่ต่อชิ้นส่วนแบบขนาน ทุกชิ้นส่วนจะถูกใช้งานพร้อมกันหมด แต่ในกรณีระบบที่ต่อชิ้นส่วนแบบ stand-by เราใช้งานทีละชิ้นส่วน จนกระทั่งชิ้นส่วนนั้นเสียไปจึงจะเริ่มใช้ชิ้นส่วนที่ stand-by



รูป ๒.๑๐ ระบบ stand-by ซึ่งประกอบด้วย n ชิ้นส่วน
(ใช้งาน ๑ ชิ้นส่วน และ stand-by n-1 ชิ้นส่วน)

ชิ้นส่วนที่ stand-by จะถูกนำมาใช้งาน (เมื่อชิ้นส่วนเดิมที่ใช้งานอยู่เกิดเสียไป) โดย sensing-switching device ในขั้นแรกนี้ เราถือว่า switch นั้นมีความเชื่อถือได้ ๑๐๐ % และชิ้นส่วนที่กำลังทำงานอยู่ มี failure rate เท่ากันกับชิ้นส่วนที่มา stand-by (failure rate = λ)

ถ้ามี n ชิ้นส่วนที่มา stand-by การทำงานของชิ้นส่วนหนึ่ง $\therefore$ ระบบนี้ประกอบด้วย (n+1) ชิ้นส่วน การที่ชิ้นส่วนเสียไป $\leq n$ ชิ้นส่วน จะไม่ทำให้ระบบนี้เสียไปเลย ระบบนี้จะเสียก็ต่อเมื่อชิ้นส่วนสุดท้าย (ชิ้นส่วนที่ n+1) เสียไป

จาก λ = failure rate ของชิ้นส่วน

$\therefore \lambda t$ = จำนวนครั้งของการเสีย (โดยเฉลี่ย) ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t

$\therefore \quad e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$ = ความน่าจะเป็นที่ไม่มีการเสีย ในช่วงเวลา t

$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^1}{1!} = e^{-\lambda t}(\lambda t)$ = ความน่าจะเป็นที่เสีย ๑ ครั้ง ในช่วงเวลา t

$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}$ = ความน่าจะเป็นที่เสีย ๒ ครั้ง ในช่วงเวลา t

$\vdots$

ถ้าในระบบที่มี 1 stand-by ระบบนี้จะไม่เสีย ถ้าชิ้นส่วนนั้นไม่เสีย หรือเสียไปเพียง ๑ ชิ้นส่วน ดังนั้น ความเชื่อถือได้ของระบบนี้ในช่วงเวลา t ก็คือ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนในระบบไม่มีการเสีย หรือ เสียเพียง ๑ ชิ้นส่วนเท่านั้น ในช่วงเวลา t

$$\therefore \quad R_b(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(\lambda t)$$

$$= e^{-\lambda t}[1+\lambda t] \qquad \text{------(22)}$$

ความเชื่อถือไม่ได้ (unreliability) ของระบบ stand-by ใด ๆ คิดจาก

$$\because \quad 1 = e^{-x} \cdot e^{x}$$

$$= e^{-x}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots..\right]$$

$$\therefore \quad 1 = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots\ldots..\right]$$

และ $R(t) + Q(t) = 1$

$$\therefore \quad R_b(t) + Q_b(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots\ldots\right]$$

ดังนั้นจาก (22) $Q_b(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots\ldots\right]$ ------(23)

ทำนองเดียวกัน ถ้าระบบที่มี 2 stand-by (ชิ้นส่วนเสีย ≤ 2 $\longrightarrow$ ระบบไม่เสีย)

ความเชื่อถือได้ของระบบก็คือ $R_b(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(\lambda t) + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}$

$$= e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!}\right]$$

และ $Q_b(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \ldots\ldots\right]$

MTBF ของระบบstand-by

ถ้าระบบประกอบด้วย ๒ ชิ้นส่วน (ทำงาน๑ชิ้นส่วน stand-by ๑ ชิ้นส่วน)

$$\therefore\ m_b(t) = \int_0^\infty R_b(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty [e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\lambda t]\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda}$$

ถ้าระบบประกอบด้วย ๓ ชิ้นส่วน (ทำงาน ๑ ชิ้นส่วน, stand-by ๒ ชิ้นส่วน)

$$\therefore\ m_b(t) = \int_0^\infty \left[e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(\lambda t) + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}\right] dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{3}{\lambda}$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้าระบบประกอบด้วย n ชิ้นส่วน (ทำงาน ๑ ชิ้นส่วน stand-by n-1 ชิ้นส่วน)

จะมี $m_b(t) = \frac{n}{\lambda}$

และในทำนองเดียวกับระบบที่มีการต่อชิ้นส่วน แบบขนาน failure rate ของระบบ stand-by จะไม่คงที่ และความเชื่อถือได้ของระบบ stand-by ก็ไม่เป็น exponential ด้วย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนชิ้นส่วนที่มา stand-by ดังรูป (๒.๙)

<u>ตัวอย่าง</u> ในช่วงเวลา ๑๐ ชั่วโมง คำนวณความเชื่อถือได้ของระบบ stand-by ที่ประกอบด้วย ๒ ชิ้นส่วน (เหมือนกัน) ซึ่งมี

$$\lambda = 0.01$$

จาก (22) $R_b(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(\lambda t)$

$$\therefore \quad R_b(10) = e^{-(0.01)(10)} + e^{-(0.01)(10)}(0.01)(10)$$

$$= e^{-0.1} + 0.1\, e^{-0.1}$$

$$= 0.90484 + (0.1)(0.90484)$$

$$= 0.995324$$

ถ้าไม่มี stand-by ความเชื่อถือได้ของระบบนี้จะเป็น

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \quad R(10) = 0.90484$$

ถ้า ๒ ชิ้นส่วนนี้ต่อกันแบบขนาน ความเชื่อถือได้ของระบบจะเป็น

จาก (15) $\therefore R_p(t) = 1 - Q_p(t)$

จาก (26) $= 1 - [Q(t)]^2$ ในกรณีที่ชิ้นส่วนทั้งสองเหมือนกัน

$$= 1 - [1 - R(t)]^2$$

$$= 1 - [1-0.90484]^2$$

$$= 1 - [0.09516]^2$$

$$= 0.990945$$

ถ้าเปรียบเทียบระหว่าง $R(t)$, $R_b(t)$ และ $R_p(t)$ จะเห็นได้ว่า $R_b(t)$ มากที่สุด และถ้าคำนวณ MTBF จะพบว่า m_b มากที่สุดด้วย

$$\therefore \quad m = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.01} = 100$$

$$m_b = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{0.01} = 200$$

$$m_p = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2(0.01)} = 150$$

แต่ในทางปฏิบัติจริง ๆ $R_b(t)$ จะไม่มากเท่านี้ เนื่องจากค่าความเชื่อถือได้ของ sensing - switching device ไม่ถึง ๑๐๐ %

ให้ R_{SS} = ความเชื่อถือได้ของ sensing - switching device

∴ ในระบบที่ stand-by ๑ ชิ้นส่วน และทำงานอยู่ ๑ ชิ้นส่วน แทนที่จะเป็นตามสมการ (22) ก็จะได้เป็น

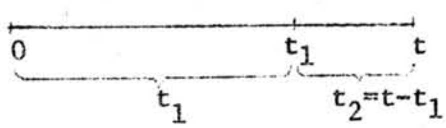
$$R_b(t) = e^{-\lambda t} + R_{ss}(e^{-\lambda t})(\lambda t) \qquad \text{------(24)}$$

นอกจากนี้ failure rate ของชิ้นส่วนที่ stand - by อาจจะไม่เท่ากับ failure rate ของชิ้นส่วนที่ทำงานอยู่ก็ได้ ในกรณีเช่นนี้ สมมุติให้

λ_1 เป็น failure rate ของชิ้นส่วนที่ทำงานอยู่

λ_2 เป็น failure rate ของชิ้นส่วนที่ stand-by

และถ้าเริ่มต้นใช้งานระบบ stand - by (ซึ่งประกอบด้วย ๒ ชิ้นส่วน) เมื่อเวลา t = 0



รูปที่ ๒.๑๑ เวลาการใช้งานระบบ stand-by ที่ประกอบด้วย ๒ ชิ้นส่วน

และชิ้นส่วนแรกเสียไปเมื่อเวลา t_1 sensing - switching device จะนำชิ้นส่วนที่ stand - by เข้าสู่ระบบทันที และชิ้นส่วนหลังนี้ก็จะทำงานไปจนถึงเวลา t

∴ เวลาที่ใช้ชิ้นส่วน stand-by ก็คือ $t_2 = t - t_1$

ทั้ง t_1 และ t เป็นตัวแปรอิสระ t_2 เป็นตัวแปรตาม

pdf ของชิ้นส่วนที่หนึ่ง คือ $f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}$

pdf ของชิ้นส่วนที่สอง คือ $f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_1)}$

∴ joint density function ของระบบ stand-by นี้ก็คือ

$$f(t) = \int_{t_1=0}^{t} f_1(t_1) \cdot f_2(t_2)\, dt_1$$

$$= \int_{t_1=0}^{t} \lambda_1\lambda_2\, e^{-\lambda_1 t_1} \cdot e^{-\lambda_2(t-t_1)}\, dt_1$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_{t_1=0}^{t} e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{+\lambda_2 t_1}\, dt_1$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_{t_1=0}^{t} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_1} e^{-\lambda_2 t}\, dt_1$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]$$

.·. ความเชื่อถือได้ของระบบ **stand-by** ที่ประกอบด้วย ๒ ชิ้นส่วนนี้ ในช่วงเวลา t ก็คือ

$$R_b(t) = \int_{t}^{\infty} f(t)\, dt$$

$$= \int_{t}^{\infty} \lambda_1\lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right] dt$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2}$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \quad \text{------(25)}$$

ถ้า $R_{SS} < 1 \longrightarrow R_b(t) = e^{-\lambda_1 t} + R_{SS} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ -----(26)

และมี MTBF เป็น $m_b = \int_0^\infty R_b(t)\, dt$

$$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

$$= m_1 + m_2$$

ในกรณีทั่วไป ถ้าระบบ stand-by ประกอบด้วย n ชิ้นส่วน (ทำงาน ๑ ชิ้นส่วน stand-by n-1 ชิ้นส่วน) ซึ่งชิ้นส่วนเหล่านี้ มี failure rate เป็น $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ตามลำดับ จะได้ค่าความเชื่อถือได้ของระบบเป็น

$$R_b(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_2)} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t}}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)} \qquad \text{-----(27)}$$

และมี MTBR เป็น

$$m_b = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \qquad \text{-----(28)}$$

ถ้าในระบบซึ่งมีชิ้นส่วนที่เหมือนกัน (equal components) N ชิ้นส่วน ต่อกันแบบอนุกรม และมี n ชิ้นส่วนแบบเดียวกัน มา stand-by และไม่ว่าชิ้นส่วนใดใน N ชิ้นส่วน เสียไป ก็สามารถนำชิ้นส่วนหนึ่งใน n ชิ้นส่วนมาทำงานแทนได้ทันที (ถือว่าการ replace เร็วมากจนไม่คิดว่าระบบเสีย ระหว่างการ replace) failure rate ของแต่ละชิ้นส่วน = λ ดังนั้นเมื่อไม่มี stand-by ระบบนี้จะมี failure rate = $N\lambda$ และ MTBF = $\frac{1}{N\lambda}$ แต่เมื่อมี n ชิ้นส่วน stand-by อยู่ ∴ ระบบนี้จะเสียเมื่อชิ้นส่วน ที่ (n+1) เสียไป ∴ จึงมี MTBF = $\frac{n+1}{N\lambda}$ และมี failure rate = $\frac{N\lambda}{n+1}$ ความเชื่อถือได้ของระบบชนิดนี้จึงเป็น

$$R_S(t) = e^{-\left(\frac{N\lambda}{n+1}\right)t} \qquad \text{-----(29)}$$

ตัวอย่าง Airborne radar มีหลอด ๓๐ หลอดที่เหมือนกัน (equal) แต่ละหลอดมี failure rate $\lambda = 0.001$ สมมุติว่าชิ้นส่วนอื่น ๆ ใน Airborne radar มีความเชื่อถือได้ 100 % ค่าความเชื่อถือได้ของ Airborne radar ในช่วงเวลา ๑๐ ชั่วโมง ก็คือ

จาก (29) $R(t) = e^{-(N\lambda)t}$ เมื่อ $n = 0$

$$\therefore \quad R(10) = e^{-(30)(0.001)(10)}$$

$$= e^{-0.3}$$

$$= 0.74082$$

ถ้าเรานำหลอดชนิดนี้สำรองไว้อีก ๓ หลอด ค่าความเชื่อถือได้ก็จะเพิ่มเป็น

จาก (29) $R(10) = e^{-\frac{(30)(0.001)}{(3+1)}(10)}$ เมื่อ $n = 3$

$$= e^{-\frac{0.3}{3+1}}$$

$$= e^{-0.075}$$

$$= 0.925$$

ซึ่งเห็นได้ว่า เพิ่มขึ้นจากเดิมถึง ๑๘.๕ % ดังนั้นถ้าในเที่ยวบินนี้ไม่จำกัดน้ำหนัก และมีชิ้นส่วนสำรองพอ ก็สามารถจะเพิ่มความเชื่อถือได้ของระบบได้ตามต้องการ