



บทที่ 2

กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น

ความเป็นมา

การศึกษาผลกระทบต่อความแข็งแรงของวัสดุเนื่องจากรอยร้าว (crack) หรือตำหนิ (defect) ในเชิงปริมาณ (quantitative) นั้น เริ่มขึ้นโดย Inglis ซึ่งเปรียบเทียบรอยร้าวทำหน้าที่เป็นตัวเพิ่มความเค้น เขาพิจารณารูปร่างริบบิ้นแผ่นแบนขนาดใหญ่ (infinite plate) และหาสมการที่ใช้คำนวณความเค้นในเทอมของรัศมีความโค้ง ณ จุดปลายแกนเอก (major axis) ของรูเจาะรูปร่างรีดังกล่าวออกมา แต่อย่างไรก็ตามในกรณีที่รัศมีความโค้งมีค่าเท่ากับศูนย์หรือเกือบเท่ากับศูนย์ในรอยร้าวจริง ๆ ค่าความเค้นที่คำนวณจากสมการของ Inglis จะมีค่าเข้าสู่อนันต์ทำให้เกิดเกณฑ์ในการขยายตัวของรอยแตกร้าวขัดต่อหลักความเป็นจริงหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือหลักการของ Inglis ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของวัสดุที่บริเวณจุดปลายรอยร้าวได้ จากจุดนี้เองได้ทำให้เกิดแนวทางในการแก้ปัญหาแบบอื่นตามมา Griffith ประยุกต์กฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์สร้างทฤษฎีการแตกหัก (fracture theory) ขึ้น ทฤษฎีนี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการดุลพลังงานเกณฑ์การขยายตัวของรอยร้าวตามทฤษฎีนี้มีเนื้อความว่า "ถ้าการเปลี่ยนแปลงพลังงานความเครียดยืดหยุ่น (elastic strain energy) มีค่ามากกว่าพลังงานที่วัสดุต้องการเพื่อสร้างผิวของรอยร้าว (crack surface) แล้ว จะเกิดการขยายตัวของรอยร้าวขึ้น" แต่อย่างไรก็ดีทฤษฎีของ Griffith นั้นสามารถใช้ได้ดีกับวัสดุเปราะเท่านั้น ในเวลาต่อมา Irwin และ Orowan ต่างก็ได้ทำการปรับแต่งสมการของ Griffith เสียใหม่ให้สามารถใช้กับวัสดุเหนียวได้ สำหรับ Irwin เขาได้กำหนดปริมาณ อัตราการปลดปล่อยพลังงานความเครียด (strain energy release rate) ขึ้น โดยปริมาณดังกล่าวคือ พลังงานทั้งหมดที่ถูกใช้ไปในระหว่างที่รอยร้าวมีความยาวเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย และที่หนึ่งหน่วยความหนา แม้ว่าปริมาณดังกล่าวจะมองภาพรวมในการขยายตัวของรอยร้าวก็ตาม แต่ก็มีความสัมพันธ์ที่แน่ชัดกับพารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้น (stress intensity factor) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์เฉพาะที่ที่ควบคุมพฤติกรรมของรอยร้าว ในปัจจุบันตัวประกอบความเข้มของความเค้นในวัตถุ และรอยร้าวรูปร่างต่าง ๆ ภายใต้ภาระชนิดต่าง ๆ ได้ถูกรวบรวมไว้ในคู่มือซึ่งสามารถนำไปใช้งานได้โดยสะดวก

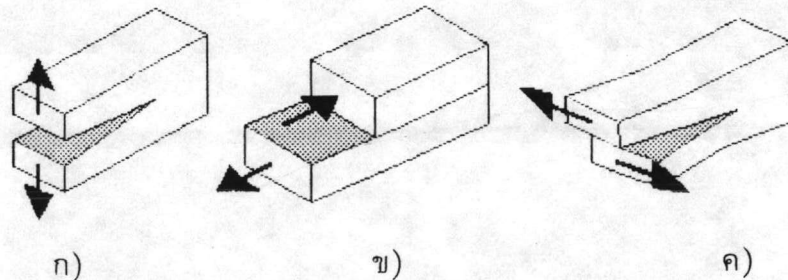
ชนิดของภาระที่กระทำต่อรอยร้าว

ชนิดของภาระที่กระทำต่อรอยร้าว(mode of loading) สามารถจำแนกออกได้ 3 แบบ ดังนี้

1. แบบเปิด(opening mode)จะมีลักษณะคือ ผิวหน้าของรอยร้าว(crack faces) ทั้งสองจะเคลื่อนที่ห่างออกจากกัน (รูปที่ 2.1ก) Anderson(1991) กล่าวว่าภาระที่กระทำต่อรอยร้าวแบบนี้ 1 นี้พบมากในทางปฏิบัติ และมักจะนำไปสู่ความเสียหายของชิ้นส่วนโครงสร้างมากกว่าภาระที่กระทำต่อรอยร้าวในแบบอื่น ๆ เป็นเหตุให้ภาระที่กระทำต่อรอยร้าวในแบบที่ 1 นั้นถูกนำมาศึกษาวิจัยมากที่สุด

2. แบบเฉือน(shear mode) จะมีลักษณะคือ ผิวหน้าของรอยร้าวทั้งสองจะไถลสัมพัทธ์กันไปในทิศทางตั้งฉากกับขอบหน้า(leading edge)ของรอยร้าว (รูปที่ 2.1ข)

3. แบบฉีก(tearing mode) จะมีลักษณะคือ ผิวหน้าของรอยร้าวทั้งสองจะไถลสัมพัทธ์กันไปในทิศทางขนานกับขอบหน้าของรอยร้าว (รูปที่ 2.1ค)



รูปที่ 2.1 แสดงรูปแบบของภาระที่กระทำต่อรอยร้าว

ก) แบบที่ 1 : แบบเปิด

ข) แบบที่ 2 : แบบเฉือน

ค) แบบที่ 3 : แบบฉีก

ความรู้พื้นฐานกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น

กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น(linear elastic fracture mechanics, LEFM) ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการประยุกต์ทฤษฎีทางอิลาสติคิตีกับวัสดุที่มีรอยร้าวหรือตำหนิ ทำให้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นแบบเชิงเส้นเท่านั้น แต่แม้ว่ากลศาสตร์การแตกหักจะสามารถประยุกต์ใช้งานได้ในช่วงจำกัดก็ตามแต่ก็เป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนรู้ขั้นสูงต่อไป อีกทั้งยังเป็นเครื่องมือหลักในการวิเคราะห์ปัญหาความล้าซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทถัดไปอีกด้วย

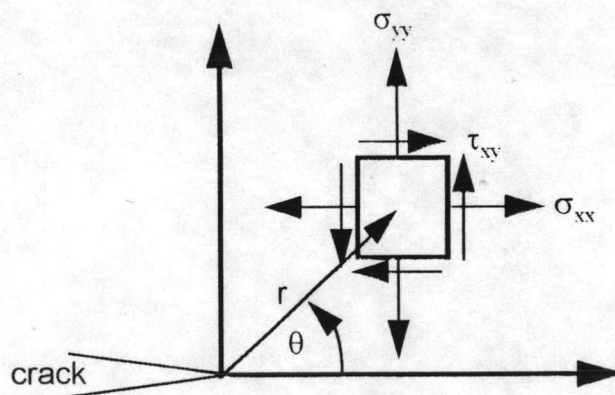
1. ข้อสมมุติของกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น

เนื่องจากกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นตั้งอยู่บนรากฐานของการประยุกต์ทฤษฎีทางอีลาสติซิตี (theory of elasticity) กับวัตถุที่มีรอยแตก ร้าว หรือตำหนิ ดังนั้นจึงมีข้อสมมุติต่าง ๆ เหมือนกับที่กล่าวในทฤษฎีทางอีลาสติซิตี ดังนี้

- มีระยะเคลื่อนตัวน้อย (small displacement) ทำให้ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดเป็นแบบเชิงเส้น
- วัสดุมีความเป็นเนื้อเดียวกัน และมีสมบัติเหมือนกันในทุก ๆ จุด (homogeneous)
- วัสดุมีสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (isotropic)

2. การวิเคราะห์ความเค้นบริเวณรอยร้าว

การวิเคราะห์ความเค้นที่บริเวณปลายรอยร้าวนั้นสามารถกระทำได้หลายวิธีด้วยกัน มีนักวิจัยหลายท่านได้ตีพิมพ์ผลเฉลยแม่นยำตรงของความเค้นในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีรอยร้าวออกมา ได้แก่ Westergaard, Irwin, Sneddon และ Williams อย่างไรก็ตามวิธีการวิเคราะห์ปัญหาถูกจำกัดอยู่ที่วัตถุต้องมีขนาดใหญ่ (infinite body), มีรูปร่าง และมีเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ซับซ้อน



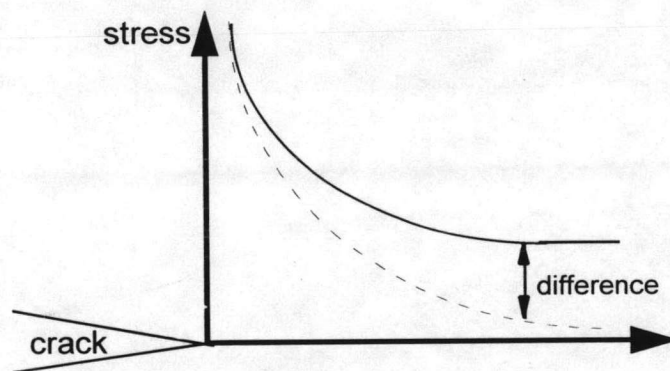
รูปที่ 2.2 แสดงระบบพิกัด และสนามความเค้นในบริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าว

สนามความเค้นในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีรอยร้าว (รูปที่ 2.2) นั้นสามารถเขียนได้ในรูปทั่วไปคือ

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) \cdot f_{ij}(\theta) + \dots \quad (2.1)$$

โดย σ_{ij} คือ องค์ประกอบของความเค้น(stress tensor)
 k คือ ค่าคงตัว
 และ f_{ij} คือ ฟังก์ชันไร้หน่วยของมุม θ

Suresh(1994) กล่าวว่าเพียงเทอมแรกของอนุกรมอนันต์ในสมการที่ (2.1) นั้นก็เพียงพอในการบ่งบอกสถานะของความเค้นในบริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าวได้ ทั้งนี้เพราะเทอมอันดับสูงขึ้นไปเหลือจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ r มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราเรียกบริเวณที่เทอมแรกของสมการที่ (2.1) ทำหน้าที่เป็นตัวควบคุมสนามความเค้นว่า singularity dominated zone สำหรับขอบเขตของบริเวณดังกล่าวถูกจำกัดโดยความแตกต่างของผลเฉลยซึ่งได้จากการพิจารณาเฉพาะเทอมแรกกับผลเฉลยที่ได้จากการพิจารณาทุก ๆ เทอมแตกต่างกันเกิน 10% (รูปที่ 2.3)



รูปที่ 2.3 แสดงการกระจายความเค้นที่ได้จากการพิจารณาเทอมแรกของสมการที่ 2.1 (เส้นประ) และที่ได้จากการพิจารณาทุก ๆ เทอม(เส้นเต็ม)

2.1 ฟังก์ชันความเค้นของ Westergaard

วิธีการของ Westergaard นั้นมีแนวความคิดเหมือนกับการหาฟังก์ชันความเค้นของ Airy (Airy stress function) เพียงแต่ว่าฟังก์ชันความเค้นของ Westergaard จะเขียนอยู่ในรูปของตัวแปรเชิงซ้อน ทำให้เงื่อนไขต่าง ๆ ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของฟังก์ชันความเค้น และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นกับฟังก์ชันความเค้นของ Airy และของ Westergaard นั้นเหมือนกัน

กำหนดฟังก์ชันความเค้นของ Westergaard คือ

$$\Phi = \operatorname{Re} \overline{\overline{Z(z)}} + y \operatorname{Im} \overline{Z(z)} \quad (2.2)$$

โดย $Z(z)$ แทน ฟังก์ชันความเค้นเชิงซ้อน (complex stress function) ซึ่ง $z = x + yi$
และ $i^2 = -1$

$$\overline{\overline{Z(z)}} \text{ แทน อินทิกรัลอันดับที่สองของ } Z(z) \text{ เทียบกับ } z \text{ หรือ } \overline{\overline{Z(z)}} = \iint Z(z) dz$$

และ $\overline{Z(z)}$ แทน อินทิกรัลอันดับที่หนึ่งของ $Z(z)$ เทียบกับ z หรือ $\overline{Z(z)} = \int Z(z) dz$

ฟังก์ชันความเค้นของ Westergaard จะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.3)$$

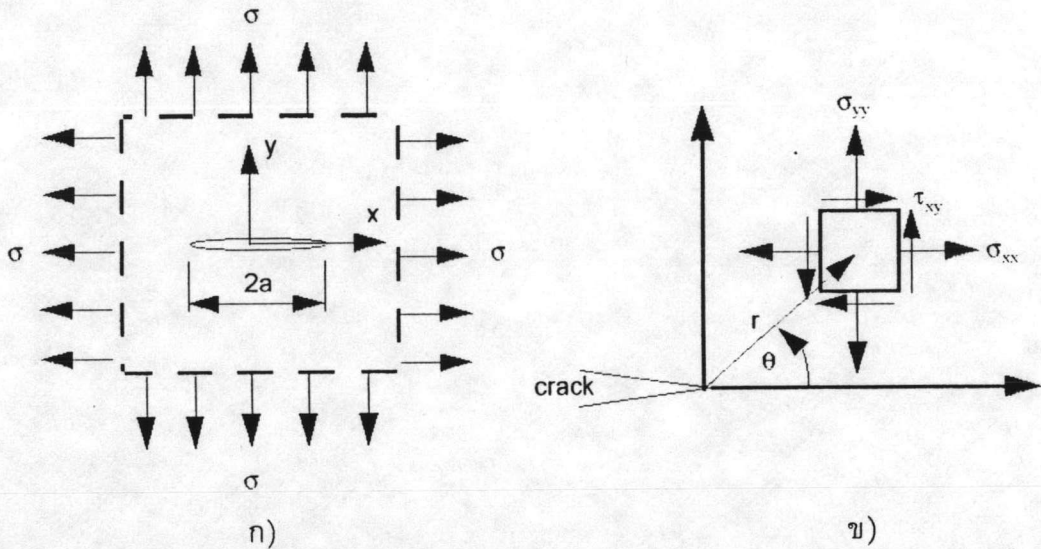
และจะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับฟังก์ชันความเค้นของ Westergaard ดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \operatorname{Re}(Z) - y \operatorname{Im}(Z) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re}(Z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 สนามความเค้นสำหรับการรับภาระแบบที่หนึ่ง

สำหรับแผ่นแบนขนาดใหญ่ที่มีรอยร้าวขนาด $2a$ และรับความเค้นที่ระยะไกล ๆ (far-field stress) เท่ากับ σ (รูปที่ 2.4) เราจะได้เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาคือ

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 0 && \text{ที่ } -a < x < a \\ \sigma_{xx} &= \sigma && \text{ที่ } x \text{ เข้าไกลอนันต์} \\ \sigma_{yy} &= \sigma && \text{ที่ } y \text{ เข้าไกลอนันต์} \\ \text{และ} \quad \sigma_{yy} &= \infty && \text{ที่ } x = \pm a \end{aligned}$$



- รูปที่ 2.4 ก) แสดงแผ่นแบนขนาดใหญ่ที่มีรอยร้าวขนาด $2a$ และรับความเค้นระยะไกล ๆ เท่ากับ σ บน z -coordinate
 ข) แสดงภาพขยายบริเวณปลายรอยร้าว และการกำหนดระบบโคออร์ดิเนตใหม่ (ξ -coordinate) โดยให้จุดกำเนิดอยู่ที่ปลายรอยร้าว

เราจะได้ฟังก์ชันความเค้นเชิงซ้อนของ Westergaard ที่สอดคล้องกับสมการ (2.3) และเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Z = \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.5)$$

เพื่อความสะดวกจึงทำการกำหนดระบบโคออร์ดิเนตขึ้นใหม่ โดยให้จุดกำเนิดของระบบโคออร์ดิเนตใหม่ (ξ) อยู่ที่ปลายรอยร้าว
 ดังนั้น

$$\xi = r \cdot e^{i\theta} = z - a \quad (2.6)$$

แทนลงในสมการ (2.5) จะได้

$$Z(\xi) = \frac{\sigma \cdot (a + \xi)}{\sqrt{(a + \xi)^2 - a^2}} \quad (2.7)$$

เมื่อ $\xi \ll a$ และใช้การประมาณค่าเชิงเส้น เราสามารถเขียนสมการ (2.7) เสียใหม่ได้เป็น

$$Z(\xi) = \frac{\sigma \cdot a}{\sqrt{2 \cdot a \cdot \xi}} \quad (2.8)$$

แทนสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$Z(\xi) = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot e^{-\frac{i\theta}{2}} \quad (2.9)$$

แทนสมการ (2.9) ลงในสมการ (2.4) เราจะได้สนามความเค้นบริเวณปลายรอยร้าวคือ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

และ ในกรณีความเค้นระนาบ $\sigma_{zz} = 0$ (2.11ก)

ในกรณีความเค้นดัดระนาบ $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (2.11ข)

พารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้นสามารถเขียนได้ในรูป
นิพจน์ทางคณิตศาสตร์คือ

$$K_I = \lim_{\theta, r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}) \quad (2.12)$$

โดยที่ตัวห้อยบ่งบอกถึงการรับภาระแบบที่หนึ่ง

เนื่องจากสมการ (2.10) จะเป็นจริงในบริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าว ทำให้ตัวประกอบความเข้มของความเค้นเป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมพฤติกรรมในบริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าวหรือภายใน singular dominated zone ซึ่งเรียกได้อีกอย่างว่า K-dominated zone หรือ K-field เท่านั้น

3. ตัวประกอบความเข้มของความเค้น

พารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้นจะมีค่าแตกต่างกันไปตามรูปร่างของชิ้นส่วน รอยร้าว และลักษณะภาระที่มากกระทำ วิธีการหาพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถทำได้ทั้งวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method), วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) และโดยการทดลอง (experimental method)

การหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2.2 โดยอาศัยสมการที่ (2.12) นั้นในทางปฏิบัติจะทำได้ยากเนื่องจากรูปร่าง และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีความซับซ้อน ดังนั้นเรามักจะเขียนสมการที่ (2.12) เสียใหม่ในรูป

$$K_I = F \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.13)$$

โดย F คือ ตัวประกอบเรขาคณิต (geometry factor) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 ในวัตถุขนาดใหญ่ และแตกต่างกันไปตามรูปร่างของวัตถุ และรอยร้าวในกรณีวัตถุมีขนาดจำกัด

อย่างไรก็ดีในแง่มุมของการทดลองนั้นการกำหนดขนาดของภาระจะสะดวกกว่าการกำหนดขนาดของความเค้นที่กระทำต่อชิ้นงานทดสอบทำให้ความสัมพันธ์ที่ใช้หาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น นิยมเขียนอยู่ในรูป

$$K_I = \frac{P}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2.14)$$

โดย P แทน ภาระที่กระทำต่อชิ้นงานทดสอบ
 B แทน ความหนาของชิ้นงานทดสอบ
 f(a/W) แทน ตัวประกอบเรขาคณิต (geometry factor)

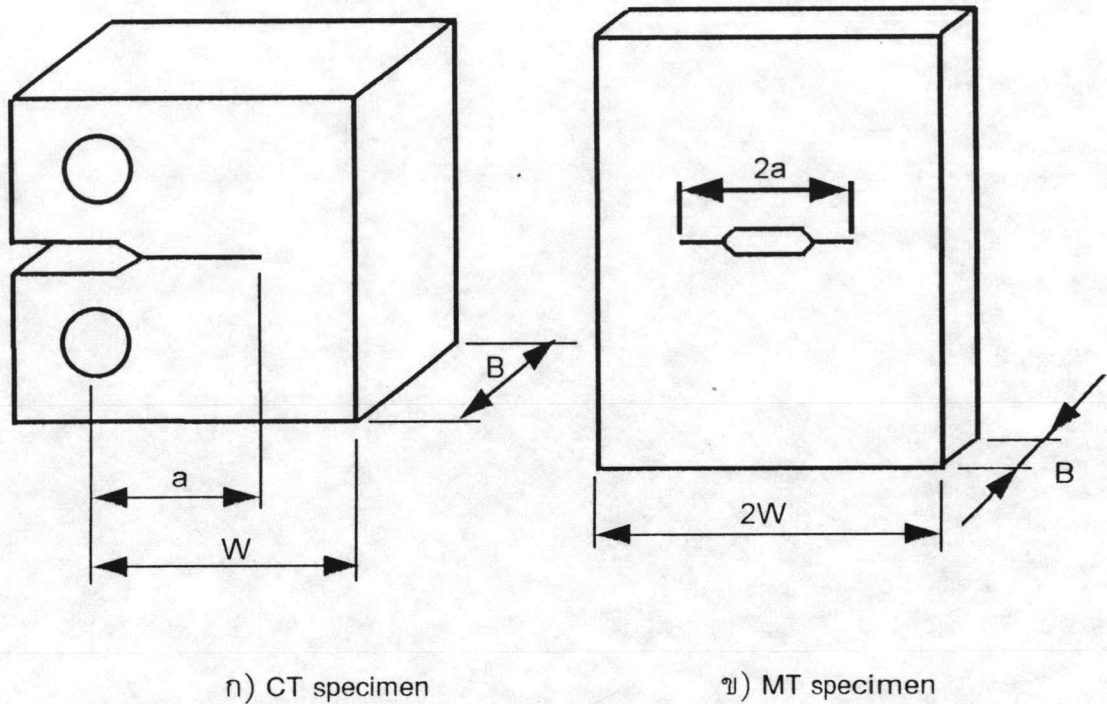
ตัวอย่างชิ้นงานทดสอบที่นิยมใช้ในการทดสอบหาอัตราการเติบโตของรอยร้าว ได้แก่ ชิ้นงานทดสอบแบบ CT และชิ้นงานทดสอบแบบ MT (รูปที่ 2.5 ก และ ข) สำหรับความสัมพันธ์ที่ใช้หาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในชิ้นงานทดสอบทั้งสองชนิดตามมาตรฐาน ASTM E647-93 นั้นแสดงอยู่ในสมการที่ (2.15) และ (2.16) ตามลำดับ

สำหรับชิ้นงานทดสอบแบบ CT (ในช่วง $0.2 < a/w < 1$)

$$K_I = \frac{P}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot \frac{2 + \frac{a}{W}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[0.886 + 4.64 \cdot \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.60 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^4\right] \quad (2.15)$$

สำหรับชิ้นงานทดสอบแบบ MT

$$K_I = \frac{P}{B \cdot \sqrt{W}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{4 \cdot W}} \cdot \sec\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot W}\right) \cdot \left[1 - 0.025 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^4\right] \quad (2.16)$$



รูปที่ 2.5 แสดงชิ้นงานทดสอบที่นิยมใช้ในการทดสอบหาอัตราการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากความล้า

สำหรับความสัมพันธ์ที่ใช้หาค่าความเข้มของความเค้นในชิ้นส่วนโครงสร้างจริง ๆ จะเขียนอยู่ในรูปแบบที่คล้ายคลึงกับที่ปรากฏในสมการ (2.15) และ (2.16) เพียงแต่ตัวแปรต้นจะเป็นตัวแปรเกี่ยวกับมิติของโครงสร้าง และรูปแบบของภาระที่กระทำต่อโครงสร้างนั้น ๆ ยกตัวอย่างเช่น ภาชนะความดัน ตัวแปรเกี่ยวกับมิติของโครงสร้างก็ได้แก่ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางและความหนา ฯลฯ ตัวแปรที่เกี่ยวกับภาระก็ได้แก่ความดันภายใน เป็นต้น เมื่อนำมโนทัศน์ที่ว่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นเป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมพฤติกรรมบริเวณรอยร้าวมาพิจารณา เราจะสามารถเชื่อมโยงพฤติกรรมของวัสดุบริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าวในชิ้นงานทดสอบกับพฤติกรรมของวัสดุใกล้ ๆ ปลายรอยร้าวในโครงสร้างจริงได้นั่นเอง

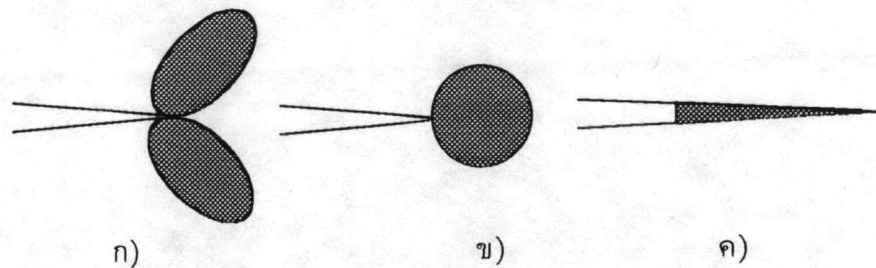
4. บริเวณเสียรูปแบบพลาสติก

ในหัวข้อที่ 2.2 แม้ว่าเราสามารถสามารถคำนวณหาความเค้นที่บริเวณใกล้ ๆ กับปลายรอยร้าวได้โดยใช้สมการที่ 2.10 ก็ตาม แต่เราก็ไม่สามารถนำสมการดังกล่าวไปคำนวณค่าความเค้นที่ปลายรอยร้าวได้ เพราะค่าความเค้นที่ได้จะมีค่าเข้าสู่อนันต์ เราสามารถ

ทราบได้ทันทีว่าเป็นไปไม่ได้ในความเป็นจริง เพราะเมื่อเนื้อวัสดุรับความเค้นสูงเกินความต้านแรงดึงคราก(yield strength)แล้วเนื้อวัสดุในบริเวณนั้นจะเกิดการเสียรูปถาวร หรือบริเวณเสียรูปแบบพลาสติก(plastic zone)ขึ้น การกระจายความเค้นภายในบริเวณดังกล่าวจะมีการจัดเรียงตัวใหม่จนมีค่าจำกัด(finite value)ค่าหนึ่ง นอกจากนี้ภายในบริเวณดังกล่าวความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดจะเป็นแบบไม่เชิงเส้น จากจุดนี้เองที่ทำให้การประยุกต์ใช้งาน LEFM ถูกจำกัดอยู่ที่ขนาดของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติก(plastic zone size) จะต้อง มีขนาดเล็กเมื่อเปรียบเทียบกับมิติของรอยร้าว และมิติของวัตถุหรือชิ้นงานทดสอบที่มีรอยร้าว

เนื้อวัสดุบริเวณปลายรอยร้าวจะรับความเค้นสูงกว่าเนื้อวัสดุบริเวณอื่น ๆ ทำให้ถึงจุดที่วัสดุเกิดการคราก(yield)ก่อน การคำนวณหาขนาด และรูปร่างของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติก สามารถทำได้หลายวิธีด้วยกัน ดังนี้

- ใช้ทฤษฎีความเสียหาย(failure criteria)
- ใช้แนวทางของเออร์วิน(Irwin approach)
- ใช้แบบจำลองแถบคราก(strip yield model)



รูปที่ 2.6 แสดงรูปร่างของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติกที่คำนวณด้วยวิธีต่าง ๆ

- ก) ใช้ทฤษฎีความเสียหาย
- ข) ใช้แนวทางของเออร์วิน
- ค) ใช้แบบจำลองแถบคราก

แนวทางของเออร์วิน และแบบจำลองแถบครากนั้นต่างก็อาศัยหลักการของแนวทางที่ 1 เพียงแต่สมมุติให้บริเวณเสียรูปแบบพลาสติกมีรูปร่างเป็นวงกลม และแถบตามลำดับก่อนที่จะทำการคำนวณหาขนาดต่อไป รูปร่างของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติกที่คำนวณจากแนวทางทั้งสามแสดงอยู่ในรูปที่ 2.6 ในบริเวณที่แรง



อย่างไรก็ดีขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกบนระนาบของรอยร้าว(มุม $\theta = 0^\circ$) ที่คำนวณจากแนวทางทั้งสามจะมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นจะกล่าวถึงรายละเอียดเฉพาะแนวทางที่สองเท่านั้น

4.1 ขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกภายใต้ภาวะสถิตย์

สำหรับวิธีการหาขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกภายใต้ภาวะสถิตย์ โดยแนวทางของเออร์วินในกรณีสถานะของความเค้นเป็นแบบความเค้นระนาบ จะเริ่มจากการนำความสัมพันธ์ในสมการ 2.10 แทนค่าลงในทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด(maximum shearing stress) ดังแสดงในสมการ (2.17) หรือแทนในทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัล(octahedral shearing stress) ในสมการ (2.18)

$$\sigma_v = \text{MAX} (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (2.17)$$

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (2.18)$$

โดย σ_y แทน ความต้านแรงดึงครากของวัสดุ

σ_1 และ σ_2 แทน ความเค้นหลัก(principle stress)

ถ้าพิจารณาบนระนาบของรอยร้าว ความเค้นที่ปรากฏในสมการ (2.10) จะเป็นความเค้นหลัก(principle stress) ดังนั้นจะได้

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_y \quad (2.19)$$

แทนค่าลงไปจะได้

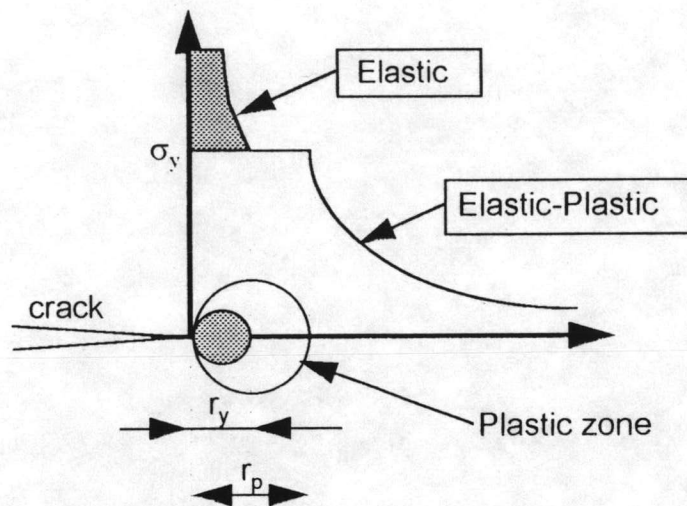
$$\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r_y}} = \sigma_y \quad (2.20)$$

แก้สมการหา r_y จะได้

$$r_y = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.21)$$

ค่า r_y ในสมการที่ (2.21) จะแสดงถึงระยะทางหน้ารอยร้าวที่ความเค้นมีค่าสูงกว่าความต้านแรงดึงคราก (รูปที่ 2.7) โดยการดูพื้นที่ที่ถูกตัดออก(บริเวณที่แรงเงา)ด้วยการเพิ่มขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติก เราจะได้สมการที่ใช้หาขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกดังแสดงในสมการ (2.22)

$$r_p = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.22)$$



รูปที่ 2.7 แสดงการกระจายความเค้น และขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติก

สำหรับกรณีนี้ที่สถานะความเค้นเป็นแบบความเครียดระนาบจะเกิดความเค้นในแกนที่สามมีขนาดเท่ากับ

$$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.23)$$

ความเค้นในสมการ (2.23) จะจำกัดให้ขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกมีขนาดเล็กลงภายใต้ภาระขนาดเท่ากับที่ทำให้เกิดบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกในสมการ (2.22) ประมาณ 3 เท่า ดังนั้นขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกภายใต้สถานะความเครียดระนาบ คือ

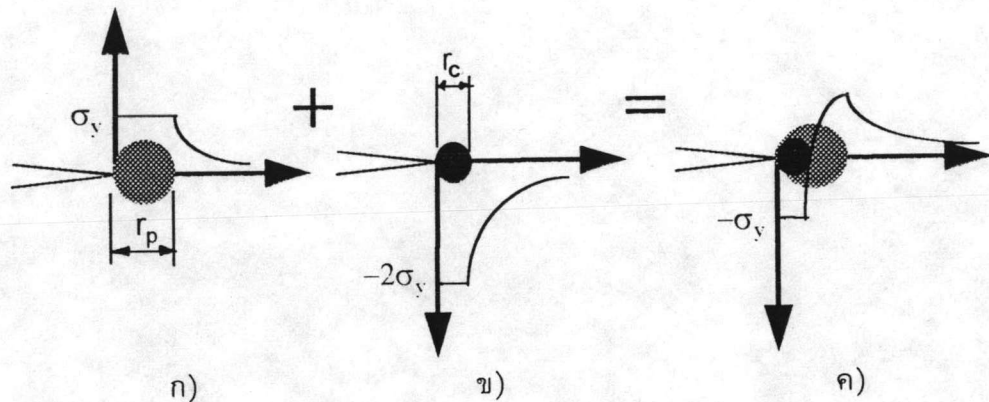
$$r_p = \frac{1}{3 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.24)$$

4.2 ขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกภายใต้ภาระกระทำเป็นรอบ

Rice ใช้หลักการซ้อนทับ (superposition) เพื่อหาขนาดของบริเวณเสีयरูปแบบพลาสติกภายใต้ภาระกระทำเป็นรอบ r_c (รูปที่ 2.8) ขนาดของบริเวณดังกล่าวหาได้จากการแทน K_I และ σ_y ที่ปรากฏอยู่ในสมการ (2.22) และ (2.24) ด้วย ΔK_I และ $2\sigma_y$ ตามลำดับ ผลลัพธ์ที่ได้แสดงอยู่ในสมการที่ (2.25 ก) และ (2.25 ข) ตามลำดับ

กรณีความเค้นระนาบ $r_c = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2$ (2.25ก)

กรณีความเค้นเฉือนระนาบ $r_c = \frac{1}{12 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2$ (2.25ข)



รูปที่ 2.8 แสดงหลักการซ้อนทับของ Rice เพื่อหาขนาดความเค้นบริเวณรอยร้าว ก) ขณะรับภาระสูงสุด ข) ขณะรับภาระต่ำสุด ค) การกระจายความเค้นที่ได้จากการซ้อนทับผลของข้อ ก) และ ข)

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.25ก) และ (2.25ข) จะเห็นว่าขนาดของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติกภายใต้ภาระกระทำเป็นรอบจะมีขนาดเล็กกว่าภายใต้ภาระสถิตย์ประมาณ 4 เท่า Dowling (1993) แสดงให้เห็นว่าขนาดของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติกในกรณีรับภาระสถิตย์กับกรณีรับภาระกระทำเป็นรอบที่อัตราส่วนความเค้นใด ๆ มีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ (2.26)

$$\frac{r_c}{r_p} = \frac{(1-R)^2}{4} \quad (2.26)$$

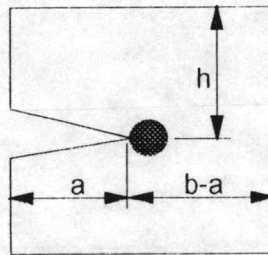
ในกรณีของการรับภาระแบบกระทำเป็นรอบ สิ่งหนึ่งที่ควรทราบก็คือ r_p นั้นบ่งบอกถึงขนาดของบริเวณที่วัสดุเกิดการร้าว ส่วน r_c จะบ่งบอกถึงบริเวณที่มีการร้าวและมีการกระจายความเค้นภายในเท่ากับ $-\sigma_y$ ทำให้ r_c มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า reverse yield zone หรือจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือขนาดของบริเวณเสียรูปแบบพลาสติกที่เกิดขึ้นจริง ๆ ทั้งการรับภาระสถิตย์ หรือกระทำเป็นรอบจะมีค่าเท่ากับ r_p นั้นเอง

5. ขีดจำกัดของกลศาสตร์การแตกหักยึดหยุ่นเชิงเส้น

เงื่อนไขที่สามารถประยุกต์ใช้งานกลศาสตร์การแตกหักยึดหยุ่นเชิงเส้นได้นั้นถูกกำหนดโดยขนาดของบริเวณเสี้ยวรูปแบบพลาสติกต้องมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับมิติของชิ้นงาน Dowling(1993) กล่าวว่าขนาดชิ้นงานที่มากกว่า 4 เท่าของบริเวณเสี้ยวรูปแบบพลาสติกนั้นถือว่าเพียงพอ และเราจะได้สมการที่ใช้ตรวจสอบเงื่อนไขดังกล่าวคือ

$$a, (b-a), h \geq \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{K}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.27)$$

โดย a , $b-a$ และ h แทน ความยาวรอยร้าว, ความยาวของส่วนที่ไม่มีรอยร้าว และความสูงชิ้นงานตามลำดับ (รูปที่ 2.9)



รูปที่ 2.9 แสดงมิติของชิ้นงานที่ใช้ในการตรวจสอบเงื่อนไขการประยุกต์ใช้งานกลศาสตร์การแตกหักยึดหยุ่นเชิงเส้น