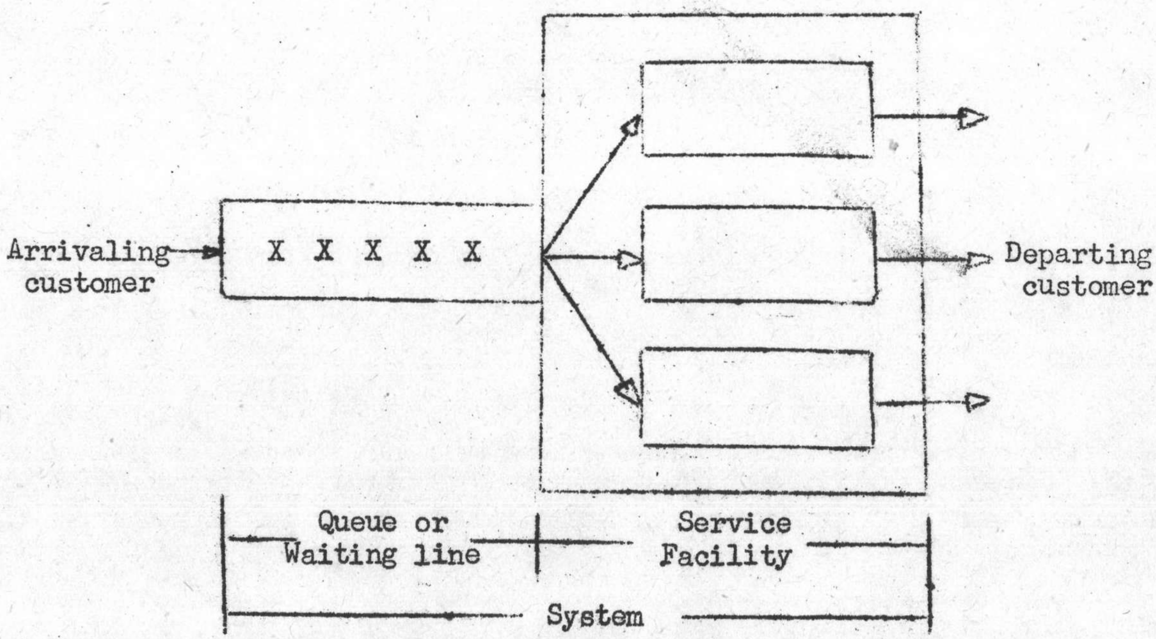
ทฤษฎีแถวรอคอย

ทฤษฎีแถวรอคอย มีต้นกำเนิดมาจากงานของ A.K. Erlang ในปี ค.ศ.๑๙๐๙ เกี่ยวกับการจัดระบบโทรศัพท์ต่อจากงานของ A.K. Erlang ก็มีผู้ทำการปรับปรุงงานจัดระบบโทรศัพท์อีกหลายคน เช่น Molina และ Thornton D. Fry จากปลายสงครามโลกครั้งที่ ๒ จึงได้พัฒนามาเป็นทฤษฎีแถวรอคอย

ในปัจจุบันทฤษฎีแถวรอคอยเป็นสาขาหนึ่งของวิชาวิจัยการปฏิบัติงาน ซึ่งวิชาการด้านนี้มีประโยชน์ต่อการบริหารงานสมัยใหม่มาก แต่เดิมการบริหารงานเราคิดว่าเป็น ศิลป์ (Art) แต่ปัจจุบันวิชาการทางคณิตศาสตร์ และสถิติเจริญขึ้นมาก และแทรกเข้ามามีส่วนในงานด้านการบริหารจนทำให้งานด้านการบริหารกลายเป็นวิทยาศาสตร์แขนงหนึ่ง

ทฤษฎีแถวรอคอยก็เหมือนวิชาการทางด้านอื่นที่มีศัพท์เทคนิคเฉพาะของตัวเอง เช่น

ระบบของแถวรอคอย (Queueing Model) สามารถแสดงให้เข้าใจได้ง่ายดังแผนผังข้างล่างนี้



<u>อัตราการมา</u> (Arrival Rate) หมายถึงอัตราเฉลี่ยที่บุคคลหรือสิ่งของมาปรากฏที่อุปกรณ์ให้บริการ เพื่อรับบริการ ในวิทยานิพนธ์นี้ อัตราการมาเป็นไปในรูปของจำนวนผู้ป่วยที่มาถึงแผนกเอ็กซเรย์ เพื่อขอรับการถ่ายภาพเอ็กซเรย์ โดยทั่วไปอัตราการมามักจะแสดงในรูปอัตราของการมาต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น ๑๐ คนต่อ ๖๐ นาที หรือ ๕๐ คน ต่อ ๑ ชั่วโมง

<u>อัตราการให้บริการ</u> (Servicing Rate) หมายถึง อัตราที่อุปกรณ์ให้บริการ สามารถให้บริการแก่บุคคลหรือสิ่งที่เข้ามารับบริการอัตราให้บริการ ก็แสดงในรูปอัตราที่ให้บริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา

<u>ระเบียบคิว</u> (Queue Discipline) หมายถึงลักษณะการเลือกให้บริการแก่ลูกค้าที่เข้ามารับบริการ ซึ่งมีวิธีการดำเนินการได้หลายอย่าง โดยปกติลูกค้าที่มารับบริการจะอยู่ในแถวรอคอย ตามหลักมาก่อนอยู่ในแถวก่อน (First come-First in Line basis) ในทำนองเดียวกัน ลูกค้าที่อยู่ในแถวโดยปกติจะได้รับบริการตามหลัก ผู้ที่อยู่ในแถวถัดไปได้รับบริการถัดไป (Next in Line-Next Served basis) แต่ในบางกรณีก็มิได้เป็นไปตามลักษณะนี้ อาจมีลักษณะ Last come First Served, Service in Random Order หรือ General Service Discipline เป็นต้น แต่ในวิทยานิพนธ์นี้จะถือปฏิบัติตามแบบมาก่อนบริการก่อน (First come First Served)

โดยปกติระบบแถวรอคอย อัตราการมาขอรับบริการจะมีการแจกแจงแบบพัวซอง และอัตราการให้บริการ มีการกระจายแบบเอ็กซโปเนนเชียล ซึ่งมีผลให้ Inter-arrival มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล และ Departure time มีการแจกแจงแบบพัวซอง ลักษณะแถวรอคอยแบบนี้เรียก Poisson Queueing Model

ลักษณะทางคณิตศาสตร์ ของ Poisson Queueing Model

ในการกล่าวถึงลักษณะทางคณิตศาสตร์ของ poisson queueing model มีสัจจการที่จำเป็น ดังนี้

สัจจการที่ ๑ ให้ $N(t)$ เป็นจำนวนการมา หรือการจากไปในช่วงเวลา 0 ถึง t Probability process ที่ใช้อธิบาย $N(t)$ จะมีการเพิ่มขึ้นแบบคงที่

เราสามารถอธิบายสัจจการนี้ได้ดังนี้ :-

ถ้าให้ h = การเพิ่มขึ้นในทางบวก สำหรับเวลา $t < t_1 < \dots t_k$, $(k+1)$

เราจะได้ตัวแปรสุ่ม ๒ ตัว คือ

$$\left\{ N(t_{i+1}) - N(t_i) \right\}$$

$$\left\{ N(t_{i-1}+h) - N(t_i+h) \right\}$$

โดยที่ $i = 0,1 \dots\dots\dots\dots, k-1$

ตัวแปรสุ่ม ๒ ตัวนี้ จะเป็นอิสระซึ่งกันและกัน และมีการกระจายคล้ายกัน

สัจจการที่ ๒ ในแต่ละช่วงเวลาที่ h มากกว่า 0 Probability ของการมา หรือการจากไป จะมีค่าบวก แต่ค่านี้จะไม่แน่นอน

$$0 < P \left\{ N(h) = 1 \right\} < 1$$

สัจจการที่ ๓ ในช่วงเวลาที่เล็กพอสำหรับให้ การมาหรือการจากไป เกิดได้ ๑ ครั้ง จะทำให้

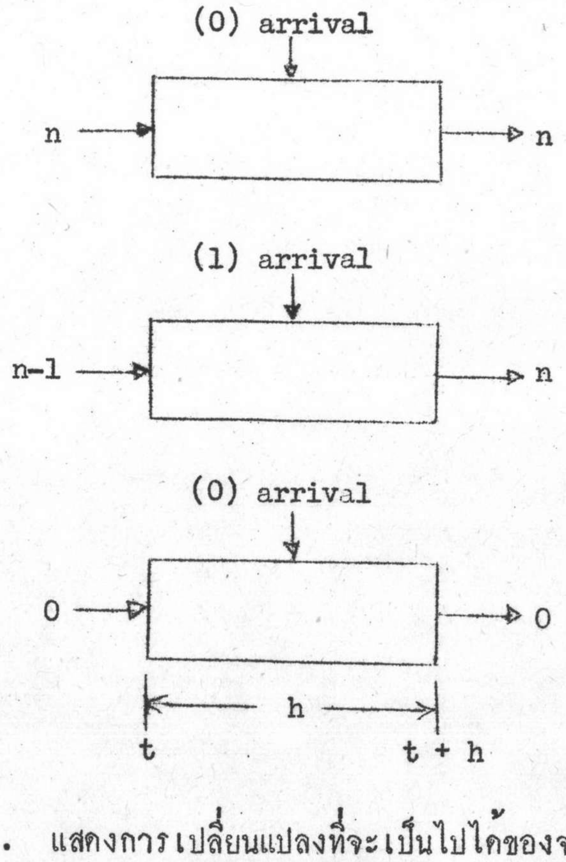
$$P \left\{ N(h) \geq \right\} 2 = 0$$

<u>การกระจายของการมาขอรับบริการ</u>

จากสัจจการดังกล่าวมาแล้ว จะเห็นว่า โอกาสที่การมา ๑ ครั้ง ระหว่างช่วงเวลาเล็ก ๆ h มีค่าเท่ากับ $\lambda h + o(h^2)$ และโดยที่ h มีค่าน้อย ๆ เมื่อยกกำลังสอง จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ **ดังนั้นโอกาสที่จะมีการมา ๑ ครั้ง มีค่าเท่ากับ** λh ในทางตรงกันข้าม โอกาสที่จะไม่มีการมาเลย มีค่าเท่ากับ $1 - \lambda h$ และโดยสัจจการที่ ๒ จะได้ $0 < 1 - \lambda h < 1$

เรามาพิจารณา $P_n(t)$: โอกาสที่จะมีการมา n ครั้งในเวลา t

$P_n(t + h)$ โอกาสที่จะมีการมา n ครั้งในเวลา $t + h$



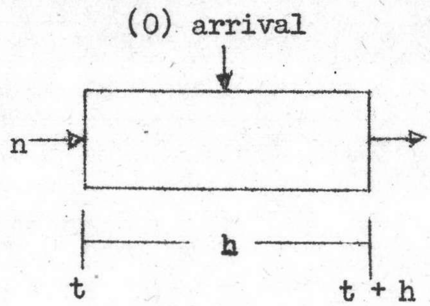
รูปที่ ๓. แสดงการเปลี่ยนแปลงที่จะเป็นไปได้ของจำนวนลูกค้า ในระบบระหว่างเวลา t ถึง $t + h$

จากรูปที่ ๓ จะเห็นว่ามีการเปลี่ยนแปลง ๒ ลักษณะ

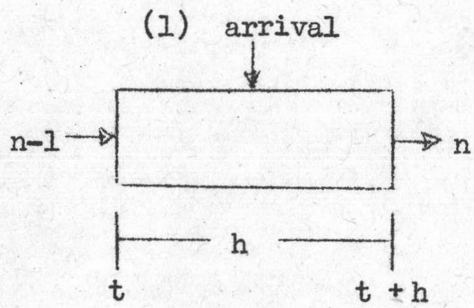
<u>ลักษณะที่</u> ๑ : สำหรับ n มากกว่า 0

ถ้าในระบบมีลูกค้า n คน ณ. เวลา t + h ซึ่งแยกได้ ๒ กรณี

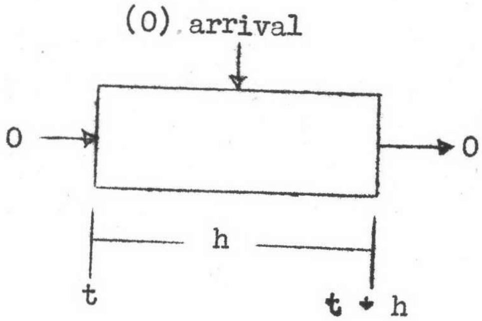
<u>กรณีที่</u> ๑ : ถ้ามีลูกค้า n คน ณ เวลา t
และไม่มีการมาเลยในระหว่างช่วงเวลา h
จะมีลูกค้า n คน ณ. เวลา t + h



<u>กรณีที่</u> ๒ : ถ้ามีลูกค้า n - 1 คน ณ เวลา t
และมีการมา ๑ ครั้ง ระหว่างเวลา h
จะมีลูกค้า n คน ณ เวลา t + h



<u>ลักษณะที่</u> ๒ : สำหรับ n เท่ากับ ๐
ถ้าไม่มีลูกค้าเลย ณ เวลา t
และไม่มีการมาเลยในช่วงเวลา h
จะมีลูกค้า 0 คน ณ เวลา t + h



ณ. n มากกว่า 0

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - h) + P_{n-1}(t)\lambda h$$

$$= P_n(t) - P_n(t)\lambda h + P_{n-1}(t)\lambda h$$

ณ. n เท่ากับ ๐

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h)$$

$$= P_0(t) - P_0(t)\lambda h$$

จัดรูปเสียใหม่จะได้

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + P_{n-1}(t)$$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t)$$

ใส่ limit เมื่อ h เข้าใกล้ 0 แล้ว differentiate เทียบกับ t จะได้

$$P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$P_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

สมการนี้เป็นสมการ Difference - Differential และมีผลลัพธ์ดังนี้:-

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n . e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 ....$$

จากสมการผลลัพธ์จะเห็นว่าเป็นสมการการแจกแจงแบบ พัวซอง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ λt

<u>การแจกแจง ของ Inter-Arrival Time</u>

ให้ $f(t)$; $t > 0$. = Probability density function ของ Inter-Arrival time

$F(t)$ = Cummulative density function ของ Inter-Arrival time

ดังนั้น $F(t) = \int_0^t f(t)dt$

และ $P_0(t) = \int_t^\infty f(t)dt$

$$= 1 - \int_0^t f(t)dt$$

$$= 1 - F(t)$$

เนื่องจาก $P_0(t) \quad = \quad e^{-\lambda t}$

ดังนั้น $e^{-\lambda t} \quad = \quad 1 - F(t)$

เมื่อ differentiate เทียบกับ t

จะได้ $f(t) \quad = \quad e^{-\lambda t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; t > 0$

$\qquad\qquad = \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; t \geqslant 0$

ซึ่งเป็นสมการการแจกแจงแบบ เอ็กซโปเนนเชียล มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $1/\lambda$ และมี varience เท่ากับ $1/\lambda^2$

การแจกแจงของการจากไปของผู้รับบริการ

ให้ h มากกว่า 0 จะได้ $uh + O(h^2)$ เป็นโอกาสที่ลูกค้า ๑ คน จะออกจากระบบระหว่างช่วงเวลา h และ $1 - uh$ เป็นโอกาสที่จะไม่มีลูกค้าออกจากระบบเลย

ซึ่งเขียนสมการได้ดังนี้ :-

$$P_N(t + h) = P_N(t)(1 - uh) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; n = N$$

$$P_n(t + h) = P_n(t)(1 - uh) + P_{n+1}(t)uh \qquad \ldots\ldots\ldots \; 0 < n < N$$

$$P_0(t + h) = P_0(t).1 + P_1(t)uh \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; n = 0$$

จัดเทอมเสียใหม่ แล้วใส่ limit เมื่อ h เข้าใกล้ 0 จะได้

$$P_n(t) = \frac{(ut)^{N-n} \cdot e^{-ut}}{(N - n)} \quad , \; n = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots N$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{n} P_n(t)$$

จากสมการผลลัพธ์ จะเห็นว่าเป็นสมการการแจกแจงแบบ พัวซอง

การแจกแจงของเวลาบริการ

ให้ g(t) เป็น Probability density process ของเวลาบริการ แต่ probability ของการที่ไม่มีบริการเลย ระหว่างเวลา 0 ถึง t เท่ากับ probability ของการไม่มีลูกค้าออกจากระบบระหว่างเวลา 0 ถึง t

ซึ่งจะเขียนสมการได้ดังนี้ :-

$$P\left\{\text{service time}, t > T\right\} = P\left\{\text{no departure during } T\right\}$$

$$1 - \int_0^T g(t)dt = P_N(T) = e^{-uT}$$

$$\int_0^T g(t)dt = 1 - e^{-uT}$$

เมื่อ differentiate เทียบกับ t จะได้

$$g(t) = ue^{-uT} \quad \text{เมื่อ} \quad t > 0$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ} \quad t \leq 0$$

จากสมการผลลัพธ์ จะเห็นว่าเป็นสมการการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ $1/u$ และ varience เท่ากับ $1/u^2$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง</u> W_S , W_q, L_S <u>และ</u> L_q

J.D.C. Little และ W.S. Jewell ได้ร่วมกันพิสูจน์ว่า

$$L_S = W_S$$

$$L_q = W_q$$

และจากคำจำกัดความของ W_q ที่ว่า "เวลาที่ต้องรอคอยในแถวรอคอยเท่ากับเวลาที่ต้องรอคอยในระบบ ลบด้วยเวลาที่ใช้ในการให้บริการกับลูกค้า ๑ คน"

$$W_q = W_S - 1/u$$

คูณด้วย ทั้งสองข้าง จะได้

$$L_q = L_S - \rho$$