สมการฟังก์ชันนัลบนเซมิกรุป

นางสาวศรีจันทร์ เลรามัญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2522

Functional Equation on Semigroups

Miss Srichan Layraman

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1979

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการฟังก์ชันนัลบนเซมิกรุป

โดย นางสาวศรีจันทร์ เลรามัญ

ภาควิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุประดิษฐ์ บุนนาค)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุภา สุจริตพงศ์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ไสว นวลตรณี)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการฟังก์ชันนัลบนเซมิกรุป
ชื่อนิสิต นางสาวศรีจันทร์ เลรามัญ
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2522

บทคัดย่อ

ให้ S เป็นโมนอยด์ F เป็นฟิลด์ ซึ่งมีแคแรคเตอริสติก ต่างจาก 2 คำตอบของสมการ

$$(*) \quad f(x + y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

บน S ไปสู่ F คือลำดับ(f, g) โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก S ไปสู่ F ซึ่งทำให้สมการ (*) เป็นจริงทุก ๆ ค่า x, y ใน S

จะสังเกตเห็นว่า ถ้า $f \equiv 0$ และ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ บน S แล้ว (f, g) จะเป็นคำตอบของสมการ (*) เราเรียกคำตอบแบบนี้ว่า <u>คำตอบทริเวียล</u> และเรียกคำตอบของสมการ (*) ที่ $f \not\equiv 0$ ว่า <u>คำตอบไม่ทริเวียล</u>

บนเซ็ทของจำนวนไม่ติดลบ เราจะพูดถึงคำตอบแบบต่อเนื่องของสมการ (*) ซึ่งเราจะหมายถึงคำตอบ (f, g) ใด ๆ ที่ f และ g เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่องบนเซ็ทของจำนวนไม่ติดลบ

อาจจะสรุปผลลัพธ์ที่สำคัญของวิทยานิพนธ์นี้ได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท A</u> ให้ S เป็นซิคลิคโมนอยด์ที่มี a เป็นเจนเนอเรเตอร์ F เป็นแอลจิบราอิคลี่โคลสด์ฟิลด์ ซึ่งมีแคแรคเตอริสติคต่างจาก 2 คำตอบที่ไม่ทริเวียลของสมการ

$$(*) \quad f(x + y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

บน S ไปสู่ F คือคู่ลำดับ (f, g) ทั้งหลายที่อยู่ในแบบต่อไปนี้เท่านั้น

แบบที่ 1
$$\begin{cases} f(na) = \beta q^n, \\ g(na) = \frac{1}{2} q^n \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า n ใน $\mathbb{N}$ โดยที่ β, q เป็นจำนวนใน F^* หรือ

แบบที่ 2
$$\begin{cases} f(na) = \beta(q_1^n - q_2^n), \\ g(na) = \frac{1}{2}(q_1^n + q_2^n) \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า n ใน $\mathbb{N}$ โดยที่ β, q_1, q_2 เป็นจำนวนใน F^* และ $q_1 \neq q_2$ หรือ

แบบที่ 3
$$\begin{cases} f(na) = n\beta q^n, \\ g(na) = q^n \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า n ใน $\mathbb{N}$ โดยที่ β, q เป็นจำนวนใน F^* หรือ

แบบที่ 4
$$\begin{cases} f(na) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n = 0, \\ \beta q^n & \text{ถ้า } n \neq 0, \end{cases} \\ g(na) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 0, \\ \frac{1}{2} q^n & \text{ถ้า } n \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า n ใน $\mathbb{N}$ โดยที่ β, q เป็นจำนวนใน F^* หรือ

แบบที่ 5
$$\begin{cases} f(na) = \begin{cases} \beta & \text{ถ้า } n = 1, \\ 0 & \text{ถ้า } n \neq 1, \end{cases} \\ g(na) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 0, \\ 0 & \text{ถ้า } n \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า n ใน $\mathbb{N}$ โดยที่ β เป็นจำนวนใน F^*

<u>ทฤษฎีบท B</u> คำตอบแบบต่อเนื่องไม่ทริเวียลของสมการ

$$(*) \quad f(x + y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

บน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ไปสู่ $\mathbb{C}$ คือคู่ลำดับ (f, g) ทั้งหลายที่อยู่ในแบบต่อไปนี้เท่านั้น

แบบที่ 1
$$\begin{cases} f(x) = \beta q^x, \\ g(x) = \frac{1}{2} q^x \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า x ใน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ โดยที่ β, q เป็นจำนวนใน $\mathbb{C}^*$ หรือ

แบบที่ 2
$$\begin{cases} f(x) = \beta(q_1^x - q_2^x), \\ g(x) = \frac{1}{2}(q_1^x + q_2^x) \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า x ใน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ โดยที่ β, q_1, q_2 เป็นจำนวนใน $\mathbb{C}^*$ และ $q_1 \neq q_2$ หรือ

แบบที่ 3
$$\begin{cases} f(x) = x\beta q^x, \\ g(x) = q^x \end{cases}$$

ทุก ๆ ค่า x ใน $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ โดยที่ β, q เป็นจำนวนใน $\mathbb{C}^*$.

Thesis Title	Functional Equation on Semigroups
Name	Miss Srichan Layraman
Thesis Advisor	Associate Professor Dr. Virool Boonyasombat
Department	Mathematics
Academic Year	1979

ABSTRACT

Let S be a monoid, F be a field of characteristic different from 2. By a solution of the functional equation

$$(*) \quad f(x+y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

on S into F we mean an ordered pair (f,g) where f and g are functions from S into F such that (*) holds for all x,y in S. It is clear that any ordered pair (f,g) where f is identically zero, and g is an arbitrary function, is a solution of (*) . Such a solution will be called a <u>trivial solution</u>, any other solution will be called a <u>non-trivial solution</u>.

In the case where S is a set of non-negative real numbers and F is a field of all complex numbers, we may speak of a <u>continuous solution</u>. By this we mean any solution (f,g) for which f and g are continuous.

The main results obtained in this study can be summarized in the following theorems:

<u>THEOREM A</u> Let S be a cyclic monoid with generator a, F be an algebraically closed field of characteristic different from 2, Then (f,g) is a non-trivial solution of

$$(*)\quad f(x+y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

on S into F if and only if f, g are functions of the form

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} f(na) = \beta q^n, \\ g(na) = \frac{1}{2} q^n \end{cases}$$

for all n in $\mathbb{N}$, where β, $q \in F^*$, or

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} f(na) = \beta(q_1^n - q_2^n), \\ g(na) = \frac{1}{2}(q_1^n + q_2^n) \end{cases}$$

for all n in $\mathbb{N}$, where β, q_1, $q_2 \in F^*$ such that $q_1 \neq q_2$, or

$$\text{(iii)}\quad \begin{cases} f(na) = n\beta q^n, \\ g(na) = q^n \end{cases}$$

for all n in $\mathbb{N}$, where β, $q \in F^*$, or

$$\text{(iv)}\quad \begin{cases} f(na) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ \beta q^n & \text{otherwise}, \end{cases} \\ g(na) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{2} q^n & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

for all n in $\mathbb{N}$, where β, $q \in F^*$, or

$$
\text{(v)} \quad \begin{cases} f(na) = \begin{cases} \beta & \text{if } n = 1, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \\ g(na) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}
$$

for all n in $\mathbb{N}$., where $\beta \in F^*$

<u>THEOREM B</u> Let f, g be functions on $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ into $\mathbb{C}$. Then (f, g) is a continuous non-trivial solution of

$$(*) \quad f(x + y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$$

on $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ if and only if f, g are of the form

$$
\text{(i)} \quad \begin{cases} f(x) = \beta q^x, \\ g(x) = \frac{1}{2} q^x \end{cases}
$$

for all x in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, where $\beta, q \in \mathbb{C}^*$, or

$$
\text{(ii)} \quad \begin{cases} f(x) = \beta(q_1^x - q_2^x), \\ g(x) = \frac{1}{2}(q_1^x + q_2^x) \end{cases}
$$

for all x in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, where $\beta, q_1, q_2 \in \mathbb{C}^*$ such that $q_1 \neq q_2$, or

$$
\text{(iii)} \quad \begin{cases} f(x) = x\beta q^x, \\ g(x) = q^x \end{cases}
$$

for all x in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, where $\beta, q \in \mathbb{C}^*$.

ACKNOWLEDGEMENT

I feel extremely grateful to Dr. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for introducing me to this subject and for his valuable assistance in preparing this thesis.

TABLE OF CONTENTS