การขยายสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดสิก

นางสาว ศรีเสงี่ยม เสวตสมบูรณ์

004952

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๐

I 17026777

A GENERALIZATION OF THE GEODESIC DIFFERENTIAL EQUATION

MISS SRISANGIEM SAVETSOMBOON

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

Thesis Title	A Generalization of the Geodesic Differential Equation
By	Miss Srisangiem Savetsomboon
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

..... Dean of the Graduate School

(Professor Visid Prachuabmoh Ph.D.)

Thesis Committee

..... Chairman

(Professor Surawit Kongsasna M.A.)

..... Member

(Somporn Sengsee M.Sc.)

..... Member

(Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Copyright of the Graduate School, Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การขยายสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบยีออเดสิก

ชื่อนิสิต นางสาว ศรีเสงี่ยม เสวตสมบูรณ์

อาจารย์ที่ปรึกษา Dr. Sidney S. Mitchell

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๐

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ในการเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็คือ ศึกษาว่ามีสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองและฟังก์ชัน f ที่ให้ค่าจริงบนบางเนเบอร์ฮูดของ (0,0) อื่น ๆ อีกไหม ซึ่งต่างจากสมการยีออเดสิก และต่างจาก $f(\alpha,t) = \alpha t$. โดยที่สมการดิฟเฟอเรนเชียลนั้น ๆ ให้คำตอบที่คล้องตามฟังชันแนล

$$\Phi^i(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \Phi^i(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t)), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ในบทต้น ๆ ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญทางดิฟเฟอเรนเชียลและแคลคูลัสชั้นสูง ที่จำเป็นในการพิสูจน์ของบทต่อไป โดยเฉพาะในการพิสูจน์ทฤษฎีหลักในบทที่ ๓ ที่ว่า

ถ้ามีเนเบอร์ฮูด W ของ (0,0) ใน R^2 และมีแอนาไลติคฟังก์ชัน f บน W ซึ่งทำให้ $\vec{\Phi}(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \vec{\Phi}(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t))$ สำหรับทุก ๆ (α,t) ที่เป็นสมาชิกของ W และทุก ๆ $(\vec{P},\alpha\vec{V},t)$ ที่อยู่ในเซทเปิด V และถ้าเราสมมุติเพิ่มให้ $f(\alpha,0) = 0$, $f(0,t) = 0$ แล้วสมการดิฟเฟอเรนเชียลจะมีแบบเป็น

(1) $$\ddot{\psi}^i = G^i_{jk}(\vec{\psi})\,\dot{\psi}^j\,\dot{\psi}^k + c\dot{\psi}^i, \quad c \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$f(\alpha,t) = \frac{1}{c}\,\ell n(1 - \alpha + \alpha e^{ct})$$

or

(2) $$\ddot{\psi}^i = G^i_{jk}(\vec{\psi})\,\dot{\psi}^j\,\dot{\psi}^k, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$f(\alpha,t) = \alpha t\ .$$

ในทางกลับกัน ถ้ามีสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองแบบ (1) หรือ (2) โดยที่ $G^i_{jk}(\vec{\psi})$ เป็นฟังก์ชัน c^1 แล้วคำตอบของสมการจะคล้องตามฟังก์ชันแนล $\psi^i(\vec{P},\alpha\vec{V},t)$ $= \psi^i(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t))$ หรือ $\psi^i(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \psi^i(\vec{P},\vec{V},\alpha t)$ ตามลำดับ ทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,n.$ โดยกำหนด $f(\alpha,t) = \frac{1}{c}\ln(1 - \alpha + \alpha e^{ct})$, $c \neq 0$

Thesis Title	A Generalization of the Geodesic Differential Equation
Name	Miss Srisangiem Savetsomboon
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell
Department	Mathematics
Academic Year	1977

ABSTRACT

The purpose of writing this thesis is to determine whether there exist other types of second order ordinary differential equations distinct from the geodesic differential equation whose solutions satisfy a functional equation of the form

$$\Phi^i(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \Phi^i(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t))$$

for some real valued function $f(\alpha,t)$ where $i = 1,2,\ldots,n$.

In the first chapter of this thesis, we will state the main theorems of the theory of ordinary differential equation and some theorems in real analysis which are needed to prove the results in the next two chapters. Our main theorem is in chapter 3 and states :

Let $\vec{\Phi}(\vec{P},\vec{V},t)$ be the solution to a given 2^{nd} order differential equation $\ddot{\vec{\Phi}} = \vec{H}(\vec{\Phi}, \dot{\vec{\Phi}}, t)$. Suppose there exists a neighbourhood W of $(0,0)$ in R^2 and an analytic function $f : W \to R$ such that

$$\vec{\Phi}(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \vec{\Phi}(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t))$$

whenever $(\vec{P},\alpha\vec{V},t) \in V$ and $(\alpha,t) \in W$.

Furthermore, assume that $f(\alpha,0) = 0$, $f(0,t) = 0$ whenever defined. Then the differential equation must be either

(1) $\dot{\psi}^i = G^i_{jk}(\vec{\psi})\,\dot{\psi}^j\,\dot{\psi}^k + c\dot{\psi}^i$, $c \neq 0$, where

$$f(\alpha,t) = \frac{1}{c}\,\ell n\,[1 - \alpha + \alpha e^{ct}]$$

or

(2) $\ddot{\psi}^i = G^i_{jk}(\vec{\psi})\,\dot{\psi}^j\,\dot{\psi}^k$ where $f(\alpha,t) = \alpha t$

for all $i = 1,2,\ldots,n$.

Conversely, if for each $i = 1,2,\ldots,n$, ψ^i satisfies the second order ordinary differential equation of the types (1) or (2) where G^i_{jk} is c^1, then ψ^i must satisfy the functional equation $\psi^i(\vec{P},\alpha\vec{V},t) = \psi^i(\vec{P},\vec{V},f(\alpha,t))$ where $f(\alpha,t) = \frac{1}{c}\,\ell n\,[1 - \alpha + \alpha e^{ct}]$, $c \neq 0$ or $f(\alpha,t) = \alpha t$, $c = 0$.

หอสมุดกลาง
จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my thanks to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor for his aid and introduction to this article. He also took part not only in the correction of writing that is mathematical terminology, but also in English grammar usage. Most of all, I feel very thankful to him for his valuable assistance that makes me understand and be able to solve all problems. Days after days, he spent a lot of time and all his patience to face the difficulties of my thesis.

Finally, I wish to thank my grandparents, who supported me through the whole courses of mathematics.

TABLE OF CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH vi

ACKNOWLEDGEMENT viii

CHAPTER

I PRELIMINARY 1

II GEODESIC DIFFERENTIAL EQUATION 19

III A GENERALIZATION OF THE GEODESIC DIFFERENTIAL EQUATION 26

REFERENCES 77

VITA 78