ฟังชันฮาร์โมนิค ในหลายตัวแปร

นางสาว อิ่มจิตต์ บุญอำนวย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๐

ON A CLASS OF HARMONIC FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES

MISS IMCHIT BOONUMNUAY

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

Thesis Title On A Class of Harmonic Function of Several Variables

By Miss Imchit Boonumnuay

Department Mathematics

Thesis Advisor Dr. Sawai Nualtaranee

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Visid Prachuabmoh .... Dean of the Graduate School

(Professor Visidh Prachuabmoh Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Tirasupa .... Chairman

(Assistant Professor Yupaporn Tirasupa Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Member

(Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Sawai Nualtaranee .... Member

(Associate Professor Sawai Nualtaranee Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ฟังชันฮาร์โมนิค ในหลายตัวแปร

ชื่อนิสิต นางสาว อิ่มจิตต์ บุญอำนวย

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ไสว นวลตรณี

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๐

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเกี่ยวกับฟังชันฮาร์โมนิคของหลายตัวแปร เราจะขยายคุณสมบัติบางอย่างที่เป็นจริงในกรณีของ ๒ มิติ ไปสู่กรณีของ n มิติ

ในกรณีของ ๒ มิตินั้น ฟังชันฮาร์โมนิค ๒ ฟังชัน $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ จะสอดคล้องสมการของคอชี่-รีมานน์

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

เมื่อและก็ต่อเมื่อมีฟังชันฮาร์โมนิค $h(x,y)$ ซึ่งคู่ลำดับ (v,u) เท่ากับเกรเดียนท์ของฟังชัน h เราจะพิจารณากลุ่มของฮาร์โมนิคฟังชัน $F = (u_1,u_2,\ldots, u_n)$ ของตัวแปร n ตัว $X = (x_1,x_2,\ldots, x_n)$ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติคล้าย ๆ กัน นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j$$

และฟังชัน F ที่สอดคล้องคุณสมบัติข้างต้น จะเรียกว่า F เป็นระบบของฟังชันฮาร์โมนิคสังยุค เราจะนิยามคลาส G^p, $1 \leq p < \infty$, ว่าเป็นคลาสที่ประกอบด้วยระบบของฟังชันฮาร์โมนิคสังยุค F ทั้งหลาย นิยามบน $R_n \times(0,+\infty)$ และ F สอดคล้องอสมการ

$$\int_{\mathbb{R}_n} \frac{(|F(X,y)|^p}{(X^2+(1+y)^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} dX \leq A < \infty , y > 0$$

ในกรณีของ ๒ มิติ ถ้า F อยู่ในคลาส H^p นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p \, dx \leqslant A < \infty \quad , \; y > 0$$

แล้วค่าของฟังชัน $F(x+iy)$ เมื่อ y เข้าสู่ 0 จะหาค่าได้เกือบทุกค่า x ใน $\mathbb{R}$ และ $\lim_{y \to 0} F(x+iy) = F(x)$ ในนอร์มของ H^p. ดังนั้นในกรณีของ n มิติ เราจะแสดงว่า ค่าของฟังชัน $F(X,y)$ เมื่อ y เข้าสู่ 0 หาค่าได้เกือบทุกค่า เมื่อ $p \geqslant 1$ และ $\lim_{y \to 0} F(X,y) = F(X)$ ในนอร์มเมื่อ $p > 1$ ทุก ๆ ค่า X ใน $\mathbb{R}_n$

เราจะพิสูจน์คุณสมบัติเหล่านี้โดยใช้คุณสมบัติการหาได้ของลีสฮาร์โมนิค มาร์จอแรนท์ของฟังชันสับฮาร์โมนิคใน $\mathbb{R}^+_{n+1}$

ในบทที่ ๔ เราจะศึกษาคลาส H^p ใน $n+1$ มิติ ซึ่งประกอบด้วยระบบของฟังชันฮาร์โมนิคสังยุค ซึ่งสอดคล้อง

$$\int_{\mathbb{R}_n} |F(X,y)|^p \, dX \leqslant A < \infty \quad , \; y > 0.$$

$1 \leqslant p < \infty$ และเช่นเดียวกับในกรณี ๒ มิติ เราจะแสดงคุณสมบัติเซมิกรุปของแฟรคชันนัลอินทิกรัลของ F

Thesis Title	On A Class of Harmonic Function of Several Variables
Name	Miss Imchit Boonumnuay
Thesis Advisor	Associate Professor Dr. Sawai Nualtaranee
Department	Mathematics
Academic Year	1977

ABSTRACT

This thesis is concerned with a class of harmonic functions of several variables. We will extend to n-variables some of the properties known to hold in the case of two variables.

In the case of two variables, we know that two harmonic functions $u(x,y)$ and $v(x,y)$ satisfy the Cauchy-Riemann equations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

if and only if there exists a harmonic function $h(x,y)$ such that the pair (v,u) is the gradient of the function h. We will consider the class of n-tuple of harmonic functions, $F = (u_1,u_2,\ldots, u_n)$, of n-variables, $X = (x_1,x_2,\ldots, x_n)$ which satisfies such a similar property i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad , \quad i \neq j$$

$$1 \leqslant i, j \leqslant n ,$$

and such a function F is said to be a system of conjugate harmonic functions. If we define the class G^p, $1 \leqslant p < \infty$

to consist of all systems of conjugate harmonic functions F defined on $\mathbb{R}_n \times (0,+\infty)$ and F satisfies

$$\int_{\mathbb{R}_n} \frac{(|F(X,y)|)^p}{(X^2+(1+y)^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\, dx \leq A < \infty, \quad y > 0 .$$

In the case of two dimensions if F is in H^p class, then the boundary values $F(x) = \lim_{y\to 0} F(x+iy)$ exist both almost everywhere and in the norm. So in the n+1-dimensional case we will show that $F(X) = \lim_{y\to 0} F(X,y)$ exists almost everywhere for $p \geq 1$ and in the norm if $p > 1$, $X \in \mathbb{R}_n$.

We will prove this by means of the existence of least harmonic majorants of subharmonic function in $\mathbb{R}^+_{n+1}$.

In Chapter V, we will study on the class of H^p-class in n+1 dimensions, which consists of those systems of conjugate harmonic functions satisfying

$$\int_{\mathbb{R}_n} |F(X,y)|^p\, dX \leq A < \infty, \quad y > 0$$

$1 \leq p < \infty$. As in the two-dimensional case, we will show the "semigroup-property" of the fractional integral of F.

TABLE OF CONTENTS

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my deep appreciation to Dr. Sawai Nualtaranee, my thesis supervisor, for his helpful guidance and encouragement during the course of this study.

Also, I am greatly indebted to all lecturers who taught me in undergraduate and graduate courses at Chulalongkorn University.

Finally, I would like to take this opportunity to record my deep appreciation to my parents for their untired encouragement.