หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้น

เนื่องจากงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีวัตถุประสงค์หลักที่จะสร้างเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคโดยอาศัยหลักการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ (laminar) ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก โดยมุ่งเน้นที่วิธีการตกตะกอนแบบสะสมของอนุภาคที่แขวนลอยอยู่ในสารแขวนลอย (Homogeneous cumulative gravitational sedimentation) รวมทั้งเขียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาการกระจายขนาดของอนุภาคจากข้อมูลการทดลองที่ได้ โดยอาศัยเทคนิคการลากเส้นสัมผัสตามวิธีมาตรฐานอุตสาหกรรมของประเทศญี่ปุ่น (JIS Z8820 และ JIS Z8822) และประยุกต์เทคนิคการลดข้อมูล (data reduction) แบบนอนลิเนียร์อิเทอเรทีฟอินเวอร์ชันของทูมี (Twomey's nonlinear iterative inversion) มาช่วยในการวิเคราะห์ผล ดังนั้นในเบื้องต้นของบทที่ 2 จะขอกล่าวถึงคำศัพท์บางคำเกี่ยวกับอนุภาคและการกระจายขนาดของอนุภาคที่มักพบบ่อยๆ เพื่อให้สื่อความหมายและความเข้าใจตรงกัน จากนั้นจึงกล่าวถึงสมการการเคลื่อนที่ของสโตกส์ ซึ่งเป็นสมการที่อธิบายปรากฏการณ์การเคลื่อนที่ของทรงกลมในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก รวมทั้งหลักการและวิธีการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอน สำหรับในช่วงท้ายของบทที่ 2 จะกล่าวถึงหลักการของวิธีนอนลิเนียร์อิเทอเรทีฟอินเวอร์ชันของทูมี และการนำมาประยุกต์ใช้ในการประเมินการกระจายขนาดของอนุภาค

2.1 คำศัพท์และความหมาย

มีคำศัพท์เกี่ยวกับอนุภาค และการกระจายขนาดของอนุภาคหลายคำที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ที่จะต้องอธิบายเพื่อให้มีความหมายและความเข้าใจตรงกัน ดังต่อไปนี้

ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ (Stokes' diameter) หมายถึง เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมที่มีค่าความหนาแน่น และค่าความเร็วในการตกตะกอนอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลกในของไหลที่กำหนดเท่ากับค่าความเร็วของอนุภาคที่สนใจ

ขนาดของอนุภาค (particle size) หมายถึง ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคที่เทียบเท่ากับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ที่วัดโดยวิธีการตกตะกอน

ความหนาแน่นของอนุภาค (particle density) หมายถึง ค่าความหนาแน่นที่คำนวณโดยการหารค่ามวลของอนุภาคทั้งหมดด้วยปริมาตรที่แท้จริงของอนุภาคทั้งหมด (ไม่รวมปริมาตรของช่องว่างระหว่างอนุภาค)

การกระจายขนาดของอนุภาค (particle size distribution) หมายถึง การกระจายตัวโดยมวลที่สอดคล้องกับแต่ละขนาดของอนุภาคที่เป็นส่วนประกอบของประชากรอนุภาคทั้งหมด ค่าการกระจายขนาดของอนุภาคแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ การกระจายขนาดแบบสะสม (cumulative size distribution) และการกระจายขนาดแบบสัมพัทธ์ (relative size distribution หรือเรียกว่า density distribution) (ดูรายละเอียดวิธีการคำนวณค่าการกระจายขนาดในหัวข้อ 2.2.4)

<u>หมายเหตุ</u>

1. อนุภาคโดยทั่วไป รวมทั้งอนุภาคสำหรับการทดสอบไม่ได้ประกอบด้วยอนุภาคที่มีขนาดเดียวกันทั้งหมด แต่จะประกอบด้วยอนุภาคที่มีขนาดแตกต่างกันตั้งแต่อนุภาคที่มีขนาดเส้นศูนย์กลางเล็กที่สุดจนถึงอนุภาคที่มีขนาดเส้นศูนย์กลางที่ใหญ่สุด โดยจะผสมกันอยู่ในสัดส่วนที่แตกต่างกัน
2. ค่าการกระจายขนาดของอนุภาคที่ได้จากการคำนวณสามารถนำมาแสดงผลในรูปของกราฟได้ทั้งในกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลปกติ (normal distribution) และในกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลล็อก (lognormal distribution)
3. โดยทั่วไปจะแสดงผลการกระจายขนาดของอนุภาคโดยใช้กราฟที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลล็อก เพราะอนุภาคหลายชนิดรวมทั้งวัสดุอนุภาค (powders) และอนุภาคแอโรโซลที่อยู่ในบรรยากาศ จะมีลักษณะการกระจายขนาดแบบล็อก (logarithmically distributed) ดังนั้นการแสดงค่าการกระจายขนาดของอนุภาคโดยใช้กราฟที่มีสเกลปกติจะทำให้จุดของข้อมูลสำหรับอนุภาคที่มีขนาดเล็กๆ เกิดการอัดตัว ทำให้สูญเสียรายละเอียดข้อมูลของอนุภาคขนาดเล็กๆ

ขนาดเกิน (Oversize) หมายถึง เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มอนุภาคในประชากรอนุภาคทั้งหมดที่มีขนาดใหญ่กว่าค่าที่กำหนด

ขนาดต่ำ (Undersize) หมายถึง เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มอนุภาคในประชากรอนุภาคทั้งหมดที่มีขนาดเล็กกว่าค่าที่กำหนด

เส้นผ่านศูนย์กลางมัธยฐาน (Median diameter) หมายถึง ขนาดของอนุภาค ณ ตำแหน่งที่ค่าการกระจายตัวแบบสะสมมีค่าเท่ากับ 50 %

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของขนาดอนุภาค หมายถึง ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงเรขาคณิต (geometric standard deviation) คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\sigma_g = \frac{\text{ขนาดของอนุภาค ณ ตำแหน่งที่ค่าการกระจายตัวแบบสะสมมีค่าเท่ากับ 84.13 \%}}{\text{ขนาดของอนุภาค ณ ตำแหน่งที่ค่าการกระจายตัวแบบสะสมมีค่าเท่ากับ 50 \%}}$$

2.2 การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอน

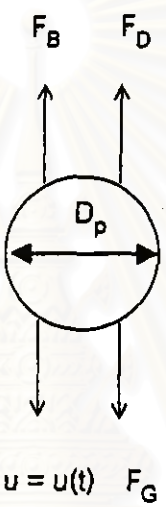
การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนนั้นอาศัยหลักการการตกตะกอนอย่างอิสระของทรงกลมเดี่ยวในของไหลที่ไม่จำกัดขอบเขตภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งได้มีการทำการทดลองจำนวนมากเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเร็วในการตกตะกอนกับขนาดของอนุภาค สโตกส์ (1819 - 1903) เป็นผู้พบความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (drag factor) กับค่าเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) สำหรับสภาวะที่มีค่าเลขเรย์โนลด์ ต่ำๆ โดยสมการแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวมีชื่อเรียกว่าสมการของสโตกส์ (Stokes equation) ซึ่งสามารถนำมาใช้คำนวณหาขนาดเทียบเท่าของอนุภาคขนิดใดๆ ที่ทราบค่าความเร็วในการตกตะกอน โดยขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคที่คำนวณได้มีชื่อเรียกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์

2.2.1 สมการของสโตกส์ (Stokes equation)

Goerge Gabriel Stokes (1819-1903) ได้สร้างสมการเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของทรงกลมในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก โดยอาศัยสมมุติฐานสามข้อ คือ ข้อที่หนึ่ง กำหนดให้พื้นผิวของทรงกลมจะต้องแข็ง (rigid) และเรียบอย่างสมบูรณ์ ข้อที่สอง กำหนดให้ทรงกลมเคลื่อนที่อยู่ในของเหลวที่ไม่จำกัดขอบเขต และสมมุติฐานข้อสุดท้ายกำหนดให้ทรงกลมเคลื่อน

ที่ด้วยความเร็วบั้นปลายที่คงที่ (steady terminal velocity) จากสมมุติฐานทั้งสามข้อข้างต้น แสดงให้เห็นว่าทรงกลมจะอยู่ในสภาวะสมดุลของแรงที่กระทำต่อทรงกลม

สำหรับการตกตะกอนอย่างอิสระของทรงกลมเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในตัวกลางที่อยู่นิ่งภายใต้สภาวะการไหลแบบชั้นๆ จะมีแรงกระทำต่อทรงกลม 3 ชนิด คือ แรงโน้มถ่วงของโลก (Gravitational force,F_G) แรงลอยตัวของของไหล (Bouancy force,F_B) และแรงเสียดทาน (Viscous drag force,F_D) ดังแสดงในรูปที่ 2.1



<u>รูปที่ 2.1</u> สมดุลของแรงที่กระทำต่อทรงกลมที่ตกตะกอนอย่างอิสระเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ในตัวกลางที่อยู่นิ่งภายใต้สภาวะการไหลแบบชั้นๆ

จากสมดุลของแรงที่กระทำต่อทรงกลมสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของทรงกลมได้ดังนี้

$$F_G - F_B - F_D = m_p \frac{du}{dt} \qquad (2.1)$$

โดย u คือ ความเร็วในการเคลื่อนที่ของทรงกลม (เมตร/วินาที)

จากสมมุติฐานข้อที่ 3 ที่กำหนดว่า ณ สภาวะสมดุล ทรงกลมจะตกตะกอนด้วยความเร็วปั้นปลายที่คงที่ ซึ่งเรียกว่าความเร็วในการตกตะกอนของสโตกส์ (Stokes' settling velocity, V_{st}) ดังนั้น ค่า dV_{st}/dt มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการการเคลื่อนที่ของทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด D_{pst} และมีความหนาแน่น ρ_p ที่เคลื่อนที่ในของไหลที่มีความหนาแน่น ρ_f สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F_G - F_B - F_D = m_p \frac{dV_{st}}{dt} = 0 \qquad (2.2)$$

จากสมการที่ (2.2) จะได้

$$F_D = m_p g - m_f g \qquad (2.3)$$

$$F_D = \frac{\pi}{6}(\rho_p - \rho_f) g D_{pst}^3 \qquad (2.4)$$

โดยที่ V_{st} คือ ความเร็วในการตกตะกอนของสโตกส์ (เมตร/วินาที)

m_p คือ มวลของทรงกลม (กิโลกรัม)

m_f คือ มวลของของไหลที่มีปริมาตรเท่ากับทรงกลม (กิโลกรัม)

g คือ อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (เมตร/วินาที^{2})

ρ_p คือ ความหนาแน่นของทรงกลม (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร)

ρ_f คือ ความหนาแน่นของของไหล (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร)

D_{pst} คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาค (เมตร)

จากนิยามของค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน (drag coefficient) ที่กำหนดให้

$$C_D = \frac{\text{drag force}}{\text{(Cross-section area of the sphere) * (Dynamic pressure on the sphere)}}$$

เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$F_D = C_D * \frac{\pi D_{pst}^2}{4} * \frac{\rho_f V_{st}^2}{2} \quad (2.5)$$

ในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานกับค่าเลขเรย์โนลด์ของทรงกลมสามารถแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad (2.6)$$

โดยค่าเลขเรย์โนลด์คำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$Re_p = \frac{\rho_f D_{pst} V_{st}}{\mu} \quad (2.7)$$

โดย μ คือ ความหนืดของของไหล (นิวตัน.วินาที/เมตร^2)

แทนสมการที่ (2.6) และสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.5) และจัดรูปของสมการใหม่จะได้

$$F_D = 3\pi D_{pst} \mu V_{st} \quad (2.8)$$

แทนสมการที่ (2.4) ลงในสมการที่ (2.8) และจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางกับค่าความเร็วในการตกตะกอนของทรงกลม ซึ่งเรียกว่าสมการของสโตกส์

$$D_{pst} = \sqrt{\frac{18\mu V_{st}}{(\rho_p - \rho_f)g}} \quad (2.9)$$

สมการของสโตกส์นี้ใช้สำหรับคำนวณขนาดของทรงกลมที่ทราบความเร็วบั้นปลาย โดยค่าความเร็วบั้นปลายสามารถหาได้จาก

$$V_{st} = \frac{h}{t} \qquad (2.10)$$

โดย h คือ ระยะทาง (เมตร) ที่ทรงกลมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ในเวลา t

t คือ เวลา (วินาที)

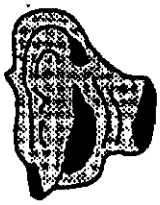
แทนสมการที่ (2.10) ลงในสมการที่ (2.9) จะได้

$$D_{pst} = \sqrt{\frac{18\mu h}{(\rho_p - \rho_f)gt}} \qquad (2.11)$$

สมการของสโตกส์นี้ใช้ได้เฉพาะกับการตกตะกอนของอนุภาคในช่วงการไหลแบบชั้นๆ เท่านั้น (ค่าเลขเรย์โนลด์ต่ำๆ) เพราะเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นจะเกิดสภาวะการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ซึ่งจะไปเพิ่มแรงเสียดทานต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค ทำให้อนุภาคตกตะกอนด้วยความเร็วที่ต่ำกว่าความเร็วที่ทำนายโดยสมการของสโตกส์ ดังนั้นขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคที่คำนวณได้จากสมการ (2.11) จะมีขนาดเล็กกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางที่แท้จริง

สำหรับอนุภาคที่มีรูปร่างไม่เป็นทรงกลมที่ตกตะกอนในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ อนุภาคจะตกตะกอนโดยไม่มีรูปแบบการจัดเรียงตัวที่แน่นอน ดังนั้นค่าแรงเสียดทานของอนุภาคจะขึ้นอยู่กับลักษณะการจัดเรียงตัวของอนุภาค อนุภาคที่มีรูปร่างไม่เป็นทรงกลมที่ตกตะกอนโดยจัดให้ด้านที่มีพื้นที่ตัดขวางมากที่สุดตั้งฉากกับทิศทางการไหล จะตกตะกอนช้ากว่าอนุภาคแบบเดียวกันที่ตกตะกอนโดยจัดให้ส่วนที่มีพื้นที่ตัดขวางน้อยที่สุดตั้งฉากกับทิศของไหล ดังนั้นอนุภาคที่มีรูปร่างไม่เป็นทรงกลมที่ตกตะกอนในสภาวะการไหลแบบชั้นๆ จะมีช่วงของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคที่แตกต่างกันช่วงหนึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะการจัดเรียงตัวของอนุภาค ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.2 อนุภาคมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางโดยปริมาตรเท่ากับ 204 μm ในกรณีที่อนุภาคจัดเรียงตัวในลักษณะที่ก่อให้เกิดแรงเสียดทานมากที่สุด อนุภาคจะตกตะกอนด้วยความเร็วเดียวกับอนุภาคทรงกลมที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 236 μm ในทางตรงกันข้ามถ้าอนุภาคจัดเรียงตัวในลักษณะที่ก่อให้เกิดแรงเสียดทานน้อยที่สุด อนุภาคจะตกตะกอนด้วยความเร็วเดียวกับอนุภาคทรงกลมที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 277 μm

$d_{St,min} = 236\ \mu m$



$d_{St,max} = 277\ \mu m$

$d_v = 204\ \mu m$

รูปที่ 2.2 เส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์สำหรับอนุภาคที่มีรูปร่างไม่เป็นทรงกลมที่มีค่าเส้นผ่านศูนย์กลางโดยปริมาตรเทียบเท่ากับ 204 μm

2.2.2 หลักการและวิธีการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอน

การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนสามารถจำแนกออกตามหลักการได้หลายชนิดดังแสดงในตารางที่ 2.1 จากหลักการชนิดต่างๆ ข้างต้นได้มีการนำมาพัฒนาเป็นเครื่องมือวัดขนาดของอนุภาคหลายชนิดดังแสดงตัวอย่างในตารางที่ 2.2 **ในที่นี้จะขอกล่าวถึงเฉพาะการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เท่านั้น**

การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก จะอาศัยการวัดอัตราการตกตะกอนของอนุภาคที่แขวนลอยอยู่ในตัวกลาง ซึ่งสามารถแบ่งวิธีการวัดออกได้เป็น 2 แบบ คือ การวัดแบบอินครีเมนทัล (Incremental) และการวัดแบบสะสม (Cumulative)

ตารางที่ 2.1 ลักษณะต่างๆ ของวิธีการตกตะกอน

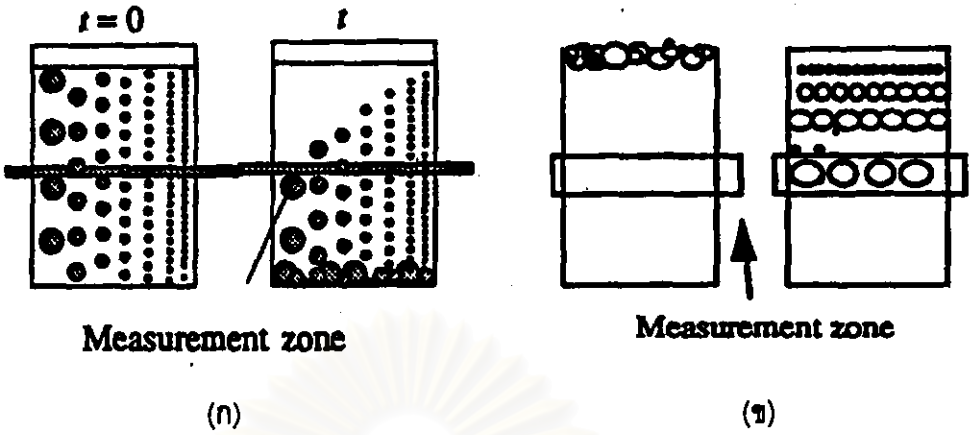
Suspension type	Measurement principle	Force field
Homogeneous	Incremental	Gravitational
Line start	Cumulative	Centrifugal

ตารางที่ 2.2 เครื่องวัดขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนที่มีจำหน่ายในท้องตลาด

Homogeneous, incremental gravitational sedimentation	Homogeneous, cumulative gravitational sedimentation
Andreasen pipette	Oden balance
Leschonski pipette	Svedberg and Rinde automatic recording Sedimentation beam balance
Fixed depth pipette	Cahn balance
Side-arm pipette	Gallenkamp balance
Wagner photosedimentation	Mettler H20E balance
EEL photosedimentometer	Sartorius Recording Sedibel balance
Bound Brook photosedimentometer	Palik torsion balance
Seishin Photomicrosizer	Kiffer continuous weighting chain link balance
Ladal wide angle scanning Photosedimentometer	Rabatin and Gale spring balance
Micromeritics Sedigraphs 5000&5100	Shimadzu balance
Quantachrome Microscan	ICI sedimentation column
X-ray sedimentometer	BCURA sedimentation column
Hydrometer	Fishers Dotts apparatus
Diver	Decanting
Suito specific gravity balance	β-back-scattering

ตารางที่ 2.2 (ต่อ)

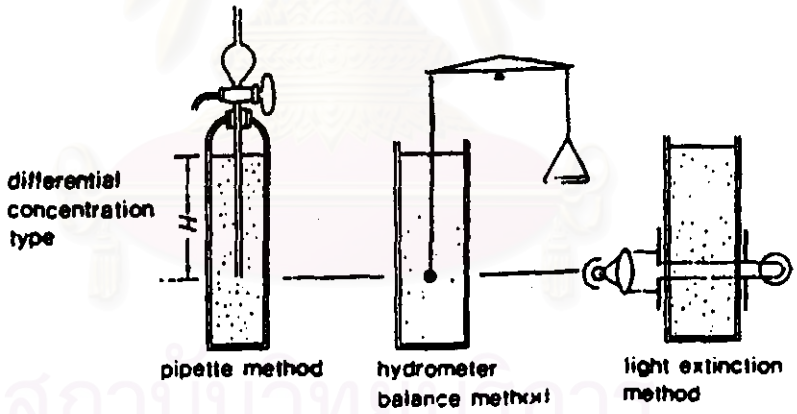
Line-start, incremental, gravitational sedimentation MSA analyzer	**Line-start, cumulative, gravitational sedimentation** Werner and Travis method Granumeter Micromerograph MSA analyzer
Homogeneous, incremental, centrifugal sedimentation Simcar centrifuge Ladal pipette centifuge Ladal x-ray centrifuge Brookhaven scanning x-ray centrifuge Brookhaven BI-DCP,disc photocentrifuge Kaye disc photocentrifuge Coulter photofuge Technord photocentrifuge Horiba cuvette photocentrifuges Seishin cuvette photocentrifuge Shimadzu cuvette photocentrifuge	**Homogeneous, cumulative, centrifugal sedimentation** Alpine centrifuge Hosokawa Mikropul Sedimentation **Line-start, cumulative, centrifugal sedimentation** MSA analyzer
Line-start, incremental, centrifugal sedimentation Joyce-Loebl disc photocentrifuge Brookhaven BI-DCP, disc photocentrifuge	



รูปที่ 2.3 การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยใช้หลักการการวัดแบบอินครีเมนทัล

ก. Homogeneous, incremental, gravitational sedimentation

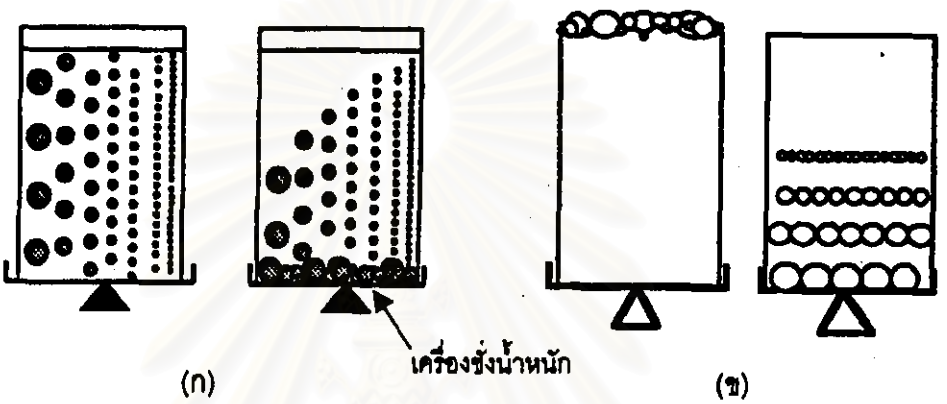
ข. Line-start, incremental, gravitational sedimentation



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างของเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคที่ใช้หลักการวัดแบบอินครีเมนทัล

การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการวัดแบบอินครีเมนทัล จะวัดการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของอนุภาคตัวอย่างที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ณ ระดับที่ทำการวัด โดยอนุภาคจะเคลื่อนที่ผ่านระดับที่ทำการวัด ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ค่าความเข้มข้นของอนุภาค ณ ระดับที่ทำการวัดจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลของอนุภาคตัวอย่างที่ทำการวิเคราะห์ ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคที่มี

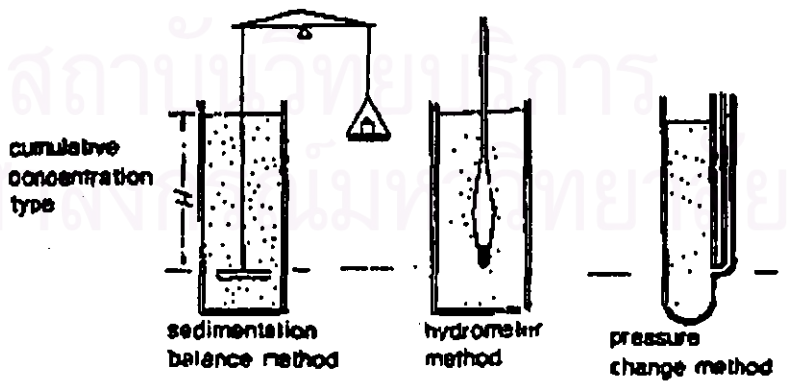
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเล็กกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางสโตกส์ ที่คำนวณจากค่าความเร็วในการตกตะกอน ณ เวลาที่ทำการวัด โดย ณ เวลาศูนย์ค่าความเข้มข้นจะมีค่าเท่ากับ 100% เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าความเข้มข้นสัมพัทธ์ (เทียบกับค่าความเข้มข้นที่เวลาเท่ากับศูนย์) มีค่าเท่ากับค่าสัดส่วนของมวลของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเล็กกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ ตัวอย่างของเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคแบบอินครีเมนทัล ได้แก่ Pipette method, Hydrometer balance method และ Light extinction method ฯลฯ ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.5 การวัดการกระจายขนาดของอนุภาคโดยใช้หลักการการวัดแบบสะสม

ก. Homogeneous, cumulative, gravitational sedimentation

ข. Line-start, cumulative, gravitational sedimentation



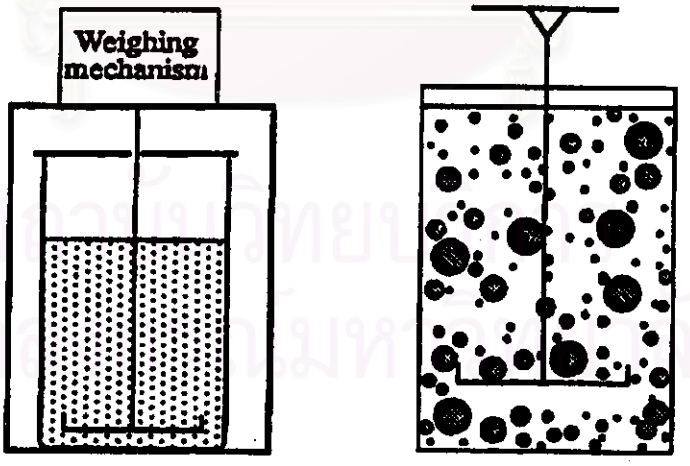
รูปที่ 2.6 ตัวอย่างของเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคที่ใช้หลักการวัดแบบสะสม

สำหรับวิธีการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคแบบสะสม จะวัดค่าความเข้มข้นของอนุภาคตัวอย่างทั้งหมดที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งเป็นวิธีการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นจะกล่าวถึงอย่างละเอียดในหัวข้อต่อไป ตัวอย่างของเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคที่ใช้หลักการวัดแบบสะสม ได้แก่ Sedimentation balance method, Hydrometer method และ Pressure change method ฯลฯ ดังแสดงในรูปที่ 2.6

2.2.3 การตกตะกอนแบบสะสมภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก

(Homogeneous cumulative gravitational sedimentation)

เครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคที่พัฒนาขึ้นในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะใช้วิธีการตกตะกอนแบบสะสมของอนุภาคภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก โดยหลักการการวัดการกระจายขนาดของอนุภาคของวิธีนี้คือการวัดอัตราการตกตะกอนของอนุภาคในสารแขวนลอยเนื้อเดียว (Homogeneous suspension) ซึ่งทำโดยการวัดน้ำหนักของอนุภาคที่ตกตะกอนลงบนจานรับน้ำหนักที่แขวนอยู่ในสารแขวนลอย ดังแสดงในรูปที่ 2.7 อนุภาคที่ตกตะกอนลงบนจานรับน้ำหนัก ณ เวลาใดๆ จะประกอบด้วยอนุภาคสองส่วนคือ อนุภาคทั้งหมดที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ และสัดส่วนของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเล็กกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์



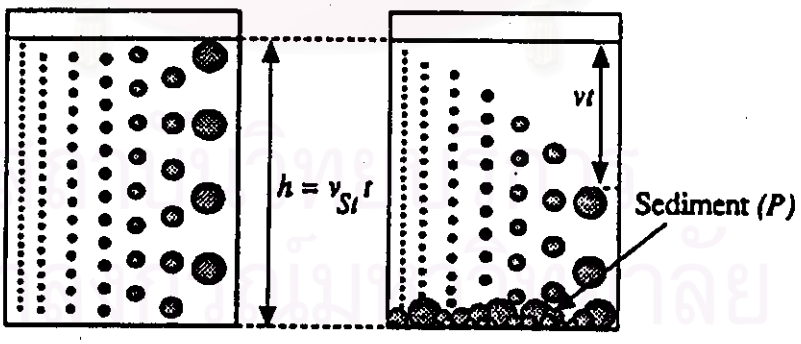
รูปที่ 2.7 หลักการวัดน้ำหนักของอนุภาคในสารแขวนลอยที่ตกตะกอนลงบนจานรับน้ำหนักซึ่งแขวนอยู่ในคอลัมน์ตกตะกอน

ทฤษฎีในการหาค่าการกระจายแบบละสมขนาดของอนุภาค (mass oversize distribution) สำหรับวิธีการตกตะกอนแบบละสมนี้คิดค้นโดย Oden และพัฒนาต่อโดย Coutts, Crowthers และ Bostock ก่อนอื่น นิยามค่าการกระจายขนาดของอนุภาคในรูปของสมการต่อไปนี้

$$W(D_{pst}) = \int_{D_{pst}}^{D_{pmax}} f(D_p)dD_p \qquad (2.12)$$

โดย $f(D_p)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายขนาดของอนุภาค (% / μm)

W คือค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ (weight percentage) ที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ (D_{pst}) ส่วนค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ (P) ของอนุภาคที่ตกตะกอนลงบนจานรับน้ำหนัก ณ เวลา t ใดๆ จะประกอบด้วยค่าน้ำหนักสองส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นน้ำหนักของอนุภาคทั้งหมดที่มีความเร็วในการตกตะกอนมากกว่าหรือเท่ากับ V_{st} โดยที่ $V_{st} = h/t$ และส่วนที่เหลือเป็นน้ำหนักของอนุภาคที่มีความเร็วในการตกตะกอนน้อยกว่า V_{st} แต่ตกตะกอนลงมาเนื่องจากอนุภาคเหล่านี้แขวนลอยอยู่ที่ความสูงระหว่างกลางใด ๆ ในคอลัมน์ของเหลว ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 การตกตะกอนแบบละสมของอนุภาคที่แขวนลอยในสารแขวนลอยภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก

ในกรณีของอนุภาคขนาดหนึ่งที่มีค่าความเร็วในการตกตะกอนเท่ากับ V ซึ่งน้อยกว่า V_{st} ค่าสัดส่วนของอนุภาคขนาดนี้ที่ตกตะกอนลงบนจานที่เวลา t จะมีค่าเท่ากับ Vt / h โดยที่ h คือค่าความสูงของสารแขวนลอย และค่าความเร็วในการตกตะกอนของอนุภาคขนาดใดๆ คำนวณได้จาก

$$V = \frac{18\mu}{(\rho_p - \rho_f)gD_p^2} \qquad (2.13)$$

ดังนั้นค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ของอนุภาคที่ตกตะกอนลงบนจานรับน้ำหนัก ณ เวลา t ใดๆ สามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$P(t) = \int_{D_{pst}}^{D_{pmax}} f(D_p)dD_p + \int_{D_{pmin}}^{D_{pst}} \frac{V(D_p)t}{h} f(D_p)dD_p \qquad (2.14)$$

ทำการอนุพันธ์สมการที่ (2.14) เทียบกับเวลา และคูณด้วย t จะได้

$$t\frac{dP(t)}{dt} = \int_{D_{pmin}}^{D_{pst}} \frac{V(D_p)t}{h} f(D_p)dD_p \qquad (2.15)$$

สมการที่ (2.14) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$P(t) = W(D_{pst}) + t\frac{dP(t)}{dt} \qquad (2.16)$$

เนื่องจากค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ของอนุภาคที่ตกตะกอนบนจานรับน้ำหนัก ณ เวลาใดๆ (P) และค่าเวลาในการตกตะกอน (t) เป็นข้อมูลที่ทราบค่า ดังนั้นจึงสามารถหาค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ $W(D_{pst})$ ของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ ได้โดยการสร้างกราฟระหว่างค่า P(t) กับ t และลากเส้นสัมผัสจากจุด (P,t) ใดๆ มาตัดกับแกนตั้ง โดยเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด (P_{Dp},t_{Dp}) จะตัดแกนตั้งที่ $W(D_{pst})$ ซึ่งเป็นค่าน้ำหนักเปอร์เซ็นต์ของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่า D_{pst}

2.2.4 การคำนวณและการแสดงค่าการกระจายขนาดของอนุภาคในรูปของกราฟ

ข้อมูลการกระจายขนาดของอนุภาคเป็นข้อมูลพื้นฐานสำคัญที่สามารถบอกถึงคุณสมบัติ และพฤติกรรมของวัสดุอนุภาค (particulate material) นอกเหนือจากข้อมูลทางด้านคุณลักษณะ เช่น รูปร่าง หรือองค์ประกอบของอนุภาค ดังนั้นการแสดงค่าการกระจายขนาดของอนุภาคอย่างมีประสิทธิภาพจึงมีความสำคัญเป็นอย่างมาก ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะคำนวณและแสดงค่าการกระจายขนาดของอนุภาคตามวิธีที่กำหนดในเอกสารมาตรฐานอุตสาหกรรมของประเทศญี่ปุ่น (JIS Z8820 และ JIS Z8822) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.4.1 ขั้นตอนการคำนวณค่าการกระจายขนาดของอนุภาค

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณขนาดของอนุภาค $D_{p1},D_{p2},...,D_{pi}$ ที่สอดคล้องกับเวลาในการตกตะกอน $t_1,t_2,...,t_i$ โดยใช้สมการของสโตกส์

$$D_{pi} = \sqrt{\frac{18\mu h}{(\rho_p - \rho_f)g\,t_i}} * 10^{12} \qquad (2.17)$$

โดยที่ D_{pi} คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาค (ไมโครเมตร)

t_i คือ เวลาในการตกตะกอน (วินาที)

h คือ ความสูงจากผิวของสารแขวนลอยถึงผิวจานรับน้ำหนัก (เมตร)

μ คือ ความหนืดของตัวกลาง (นิวตัน.วินาที/เมตร^2) หรือ (กิโลกรัม/เมตร.วินาที)

g คือ อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (เมตร/วินาที^{2})

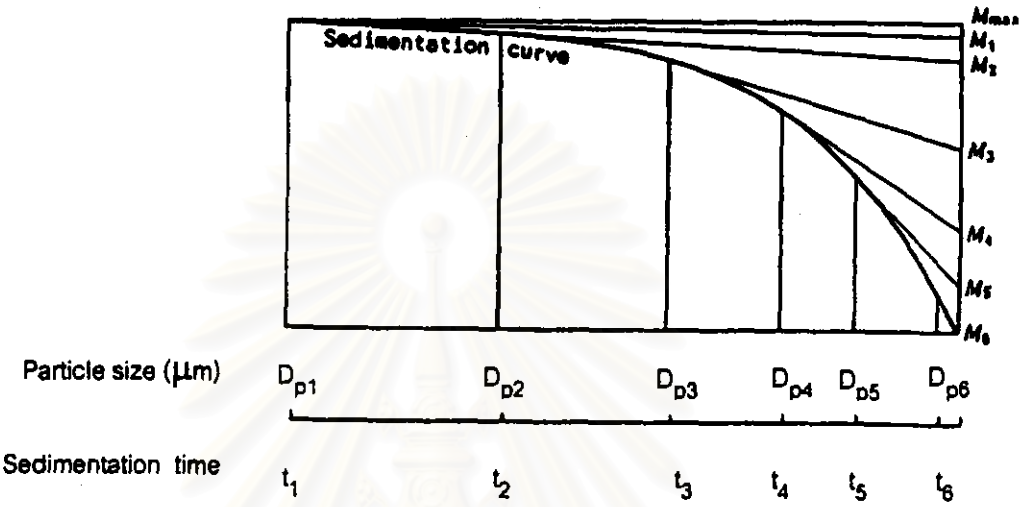
ρ_p คือ ความหนาแน่นของอนุภาค (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร)

ρ_f คือ ความหนาแน่นของตัวกลาง (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร)

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าน้ำหนักของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสโตกส์ ณ เวลา ใดๆ โดยการพล็อตกราฟระหว่างค่าเวลาในการตกตะกอนกับค่าน้ำหนักอนุภาคที่สะสมบนจานรับน้ำหนัก และทำการลากเส้นสัมผัส ณ จุดของเวลา $t_1,t_2,...,t_i$ ที่สอด

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คล้องกับค่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาค $D_{p1},D_{p2},...,D_{pi}$ โดยค่า $M_1,M_2,...,M_i$ ที่อ่านได้จากจุดที่เส้นสัมผัสตัดกับแกนตั้ง คือ ค่าน้ำหนักของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่าขนาด $D_{p1},D_{p2},...,D_{pi}$ ตามลำดับ ดังตัวอย่างการวิเคราะห์ที่แสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างการวิเคราะห์กราฟการตกตะกอน

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณค่าการกระจายขนาดแบบสะสมของอนุภาคสำหรับอนุภาคที่มีขนาดใหญ่กว่า D_{pi} โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$Q_i = \frac{M_i}{M_{max}} \qquad (2.18)$$

โดยที่ Q_i คือ การกระจายขนาดสะสมแบบเกินของอนุภาค (-) (oversize distribution, on mass basis)

M_i คือ น้ำหนักของอนุภาคทั้งหมดที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่า D_{pi} ที่สะสมอยู่บนจานรับน้ำหนัก (กรัม)

M_{max} คือ น้ำหนักของอนุภาคทั้งหมดที่สะสมอยู่บนจานรับน้ำหนัก ณ เวลาที่อนุภาคตกตะกอนหมดแล้ว (กรัม)

2.2.4.2 การแสดงค่าการกระจายขนาดของอนุภาคในรูปของกราฟ

การกระจายขนาดของอนุภาคสามารถแสดงด้วยกราฟ ทั้งในรูปกราฟการกระจายตัวแบบสะสม และกราฟการกระจายตัวแบบสัมพัทธ์ โดยสามารถแสดงผลได้ทั้งในกรณีที่ใช้สเกลปกติ และในกรณีที่ใช้สเกลล็อก ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเสนอข้อมูลการกระจายขนาดของอนุภาคในรูปของกราฟการกระจายตัวแบบสะสม และกราฟการกระจายตัวแบบสัมพัทธ์ ทั้งในกรณีที่ใช้สเกลปกติ และในกรณีที่ใช้สเกลล็อก โดยรายละเอียดในการคำนวณสำหรับการแสดงผลดังต่อไปนี้

(1) กราฟการกระจายตัวแบบสะสม (cumulative size distribution)

แกนนอนของกราฟชนิดนี้จะแสดงค่าขนาดของอนุภาค ในขณะที่แกนตั้งของกราฟแสดงค่าการกระจายตัวแบบสะสม ทั้งในกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลปกติและสเกลล็อก

(2) กราฟการกระจายตัวแบบสัมพัทธ์ (relative size distribution)

การคำนวณหาการกระจายขนาดของอนุภาคแบบสัมพัทธ์จากผลการทดลอง จะมีสูตรในการคำนวณที่แตกต่างกันสำหรับกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลปกติและสเกลล็อก โดยมีรายละเอียดดังนี้

(2.1) ในกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลปกติ ค่าระยะห่างระหว่างอนุภาคขนาด D_{pi} และ D_{pi+1} คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\Delta D_{pi} = D_{pi+1} - D_{pi} \qquad (2.19)$$

โดยที่ ΔD_{pi} คือ ระยะห่างระหว่างขนาดอนุภาค (ไมโครเมตร)

D_{pi+1}, D_{pi} คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาค (ไมโครเมตร)

ค่าความสูงของคอลัมน์ระหว่างอนุภาคขนาด D_{pi} และ D_{pi+1} คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$q\,(D_{pi}, D_{pi+1}) = \frac{\Delta Q(D_{pi}, D_{pi+1})}{\Delta D_{pi}} \qquad (2.20)$$

$$\Delta Q\,(D_{pi},\, D_{pi+1}) \quad = \quad Q(D_{pi}) \;-\; Q(D_{pi+1}) \qquad (2.21)$$

โดยที่ $q\,(D_{pi},\, D_{pi+1})$ คือ ค่าความสูงของคอลัมน์ของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่าง D_{pi} และ D_{pi+1} (% / μm)

$Q(D_{pi})$ คือ ค่าการกระจายขนาดสะสมของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่า D_{pi} (% oversize)

2.2) ในกรณีที่แกนนอนของกราฟเป็นสเกลแบบล็อก ค่าระยะห่างระหว่างขนาดของอนุภาค ($\Delta \log D_{pi}$) คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\Delta \log D_{pi} \quad = \quad \log\left(\frac{D_{pi+1}}{D_{pi}}\right) \qquad (2.22)$$

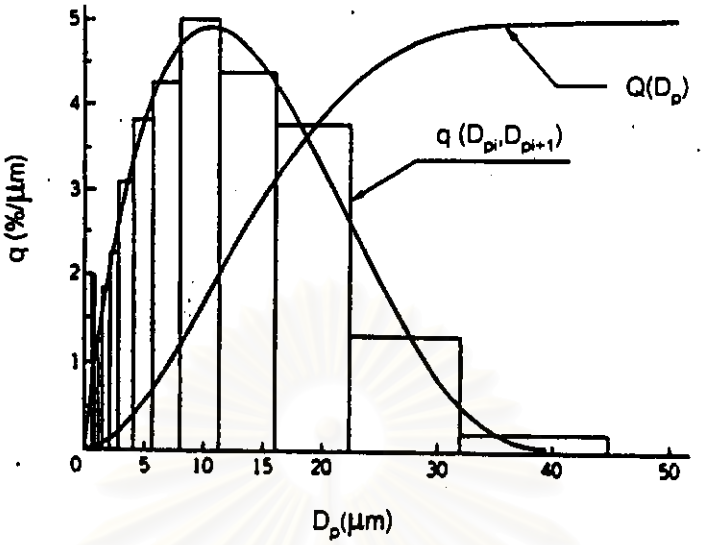
ค่าความสูงของคอลัมน์ของอนุภาคที่มีขนาดระหว่าง D_{pi} และ D_{pi+1} คำนวณโดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\dot{q}\,(\log D_{pi},\, \log D_{pi+1}) \quad = \quad \frac{\Delta Q(D_{pi}, D_{pi+1})}{\Delta \log D_{pi}} \qquad (2.23)$$

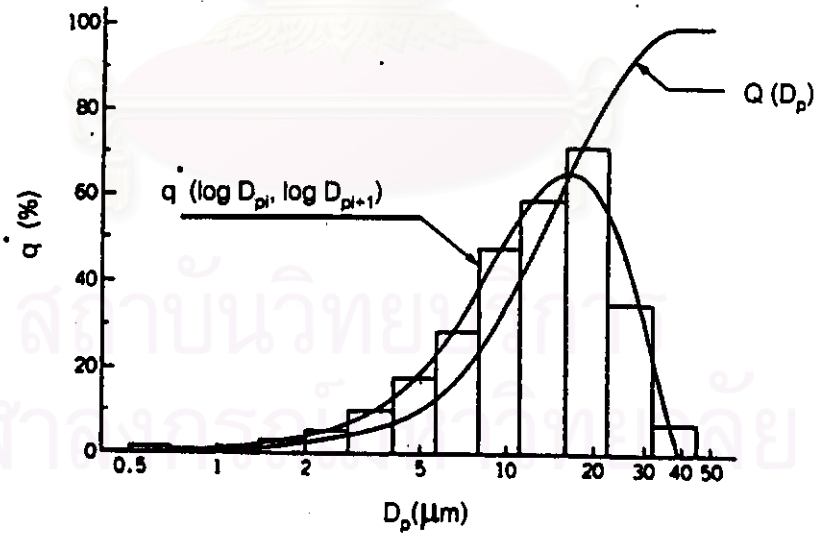
โดย $\dot{q}\,(\log D_{pi},\, \log D_{pi+1})$ คือ ค่าความสูงของคอลัมน์ของอนุภาคที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่าง D_{pi} และ D_{pi+1}

รูปที่ 2.10 และรูปที่2.11 แสดงตัวอย่างการแสดงข้อมูลการกระจายขนาดของอนุภาคในรูปของกราฟจากข้อมูลการทดลองที่วัดได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.10 ตัวอย่างของกราฟการกระจายตัวแบบสะสมและกราฟการกระจายตัวแบบสัมพัทธ์ในกรณีที่ใช้สเกลปกติ



รูปที่ 2.11 ตัวอย่างของกราฟการกระจายตัวแบบสะสมและกราฟการกระจายตัวแบบสัมพัทธ์ในกรณีที่ใช้สเกล semi-logarithmic

2.3 เทคนิคการลดข้อมูลแบบนอนลิเนียร์อิเทอเรทีฟอินเวอร์ชันของทูมี

การคำนวณฟังก์ชันการกระจายขนาดของอนุภาค $f(D_p)$ เนื่องจากการตอบสนอง y_i ของเครื่องมือวัดขนาดของอนุภาคชนิดต่าง ๆ เช่น เครื่อง Cascade Impactor, เครื่อง Electrical Aerosol Analyzer รวมทั้งเครื่องวิเคราะห์การกระจายขนาดของอนุภาคโดยวิธีการตกตะกอนที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จะเกี่ยวข้องกับการแก้สมการที่อยู่ในรูปของการอินทิเกรต ดังที่แสดงในสมการที่ (2.24)

$$y_i = \int_{D_{pmin}}^{D_{pmax}} K_i(D_p) f(D_p) dD_p \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2.24)$$

โดย y_i คือ ข้อมูล n ค่า ที่วัดได้โดยตรงจากเครื่องมือ (cumulative % by mass) (กรัม)

$K_i(D_p)$ คือ Instrument specific response functions (Kernel functions) (-)

D_{pmin} คือ ขนาดอนุภาคเล็กสุดที่เครื่องมือสามารถวัดได้ (ไมโครเมตร)

D_{pmax} คือ ขนาดของอนุภาคใหญ่สุดที่เครื่องมือสามารถวัดได้ (ไมโครเมตร)

$f(D_p)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายขนาดที่ต้องการทราบ (unknown function) โดยที่ $f(D_p) \geq 0$ และ $\int_{D_{pmin}}^{D_{pmax}} f(D_p) dD_p = 1$

ในอุดมคติ วิธีการอินเวอร์ต (inversion routines) เพื่อหาค่าของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าควรจะให้ค่าผลลัพธ์ที่เป็นค่าบวกที่ถูกต้อง และผลลัพธ์ที่ได้ควรจะสามารถทำความเข้าใจและแปลความหมายได้ง่าย รวมทั้งวิธีการอินเวอร์ตควรจะสามารถนำมาใช้งานได้ง่ายและมีความสะดวกในการนำไปปรับใช้เพื่อคำนวณผลลัพธ์ของกรณีต่าง ๆ

Twomey (1975) ได้เสนอระเบียบวิธี (algorithm) เพื่อคำนวณค่าของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า เรียกว่าระเบียบวิธีของทูมีซึ่งมีผู้นำมาใช้กันอย่างแพร่หลายเพราะว่าระเบียบวิธีของทูมีเป็นระเบียบวิธีที่ไม่จำกัดจำนวนจุดของผลลัพธ์ที่จะคำนวณ และยังให้ค่าผลลัพธ์ที่เป็นค่าบวกเสมอ (positively

constrained result) รวมทั้งในบางกรณีระเบียบวิธีของทูมียังสามารถกำจัดการแกว่ง (oscillation) ที่ไม่น่าเชื่อถือในผลลัพธ์

ระเบียบวิธีของทูมีจะทำการคำนวณค่าผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าโดยการปรับค่าฟังก์ชันเริ่มต้น (Initial guess function) ที่กำหนดให้ตามลำดับด้วยพจน์ที่บรรจุค่าสัดส่วนของค่าจริงที่ได้จากการทดลองต่อค่าที่ได้จากการคำนวณ และคูณอยู่กับ Kernel functions ระเบียบวิธีของทูมีสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$f^{k+1}(D_{pj}) = \left[1+\left(\gamma_i^k-1\right)K_i(D_{pj})\right]f^k(D_{pj}) \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad (2.25)$$

กำหนดให้ i มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n และ j มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง m โดยที่ γ_i^k คำนวณได้จาก

$$\gamma_i^k = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{m}\left[K_i(D_{pj})f^k(D_{pj})\Delta D_p\right]} \qquad (2.26)$$

โดยที่ D_{pj} คือ ขนาดของอนุภาค m ขนาดที่ใช้ในการคำนวณค่า $f(D_p)$

ΔD_p คือ ระยะห่างของขนาดของอนุภาคซึ่งมีค่าคงที่

$= D_{pi+1} - D_{pi} = D_{pi} - D_{pi-1}$

γ_i^k คือ อัตราส่วนระหว่างค่าที่วัดได้โดยตรงจากเครื่องมือกับค่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

k คือ ครั้งที่คำนวณ (ครั้งก่อนล่าสุด)

k+1 คือ ครั้งล่าสุดที่ทำการคำนวณ

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำระเบียบวิธีของทูมีมาใช้คำนวณฟังก์ชันการกระจายขนาดของอนุภาคจากข้อมูลการทดลองที่วัดได้ เพื่อช่วยลดขั้นตอนในการวิเคราะห์ผล เพราะระเบียบวิธีของทูมีสามารถคำนวณฟังก์ชันการกระจายขนาดของอนุภาคจากข้อมูลการทดลองได้โดยตรงโดยไม่ต้องทำการลากเส้นสัมผัส และเนื่องจากระเบียบวิธีของทูมีไม่จำกัดจำนวนจุดของผลลัพธ์ที่จะทำการคำนวณ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเทคนิคทูมีมาใช้ทำนายค่าการกระจายขนาดของอนุภาค ณ ตำแหน่งที่ไม่มีข้อมูลการทดลอง เพื่อช่วยลดระยะเวลาในการทำการทดลองให้สั้นลง