

อะแดฟทีไฟไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็ม



นายสุริยันต์ แก่นภักดี

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-14-2084-6

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD FOR PILE SETTLEMENT ANALYSIS



Mr. Suriyan Kaenpukdee

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2005

ISBN 974-14-2084-6


หัวข้อวิทยานิพนธ์ อะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็ม
โดย นายสุริยันต์ แก่นภักดี
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิรวัดร์ บุญญะฐิติ


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวี ชนะเจริญกิจ)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิรวัดร์ บุญญะฐิติ)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เดชวรสินสกุล)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฏาชน)

สํานักงานวิทยานิพนธ์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุริยันต์ แก่นภักดี : อะแดปทีฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็ม.
(ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD FOR PILE SETTLEMENT ANALYSIS)
อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.จิววัตร บุญญะฐิติ 71 หน้า. ISBN 974-14-2084-6.

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาโปรแกรมอะแดปทีฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็มเดี่ยว โดยใช้วิธีอะแดปทีฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์ชนิด enrichment เป็นกระบวนการปรับปรุงผลเฉลยและใช้เอลิเมนต์หกเหลี่ยม (hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความสามารถวิเคราะห์เสาเข็มแนวตั้งในเชิงสถิตยศาสตร์และรับแรงในแนวตั้ง เสาเข็มและดินมีคุณสมบัติเป็นอิลาสติก

การพัฒนาโปรแกรมประกอบด้วย การพัฒนาโปรแกรมการคำนวณหน่วยแรงที่จุดต่อจากหน่วยแรงที่จุดเกาส์โดยวิธี Superconvergent Patch Recovery (SPR) ซึ่งเสนอโดย Zeinkiewicz และ Zhu (1992), การพัฒนาโปรแกรมส่วนการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของผลการวิเคราะห์เพื่อการปรับโครงสร้างที่เหมาะสม, การพัฒนาโปรแกรมการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยวิธีอะแดปทีฟไฟไฟไฟแบบ enrichment

เนื่องจากการใช้วิธี enrichment จะทำให้เกิดโครงข่ายไม่คงรูป (non-conforming mesh) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการบังคับให้การเคลื่อนตัวและการกระจายของแรงภายในที่เกิดขึ้น ณ จุดต่อไม่คงรูปให้สอดคล้องกับค่าที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนข้างเคียงด้วย ในการจัดการกับจุดต่อไม่คงรูปนี้จะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 ส่วนคือ จุดต่อที่อยู่บนขอบ (node on edge) และ จุดต่อที่อยู่บนหน้า (node on face)

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมทำโดยการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งประกอบด้วยการวิเคราะห์ฐานรากแผ่แบบแถบและแบบสี่เหลี่ยม ซึ่งผลเฉลยที่ได้พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงในแต่ละรอบของการปรับปรุงโครงข่าย และเมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากโปรแกรมกับทฤษฎีอิลาสติกพบว่ามีความใกล้เคียงกันมาก ในปัญหาการวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็มเดี่ยวกรณีเสาเข็มแบบรับแรงเสียดทานและกรณีเสาปลายเสาเข็มวางบนชั้นดินแข็ง พบว่าค่าการทรุดตัวที่ได้จาก โปรแกรมอะแดปทีฟไฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกับทฤษฎีมาก โดยมีค่าไม่เกิน 3 %

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่อนิสิต
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ปีการศึกษา 2548

4570616721 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEYWORD : PILE FOUNDATION/ADAPTIVE FINITE ELEMENT/3D FINITE ELEMENT METHOD/
ENRICHMENT/MESH REFINEMENT/H-ADAPTIVE

SURIYAN KAENPUKDEE : ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD FOR PILE
SETTLEMENT ANALYSIS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. DR.TIRAWAT
BOONYATEE, 71 pp. ISBN : 974-14-2084-6.

The objective of thesis is to develop a 3D adaptive finite element code for the settlement analysis of single pile. Developed program adapts the h-adaptive enrichment scheme on 8-node hexahedron element for accuracy improvement. It can be used for static analysis of single elastic pile under vertical load. The ground is also treated as elastic material.

The implementation of program are consisted of, the extrapolation of nodal stresses from those at the gauss point using Superconvergence Patch Recovery method (Zeinkiewics and Zhu, 1992), the error estimation for mesh adaptation, the h-adaptive enrichment algorithm.

Since the non-conforming mesh is obtained from the enrichment algorithm, therefore, it is necessary to constrain the movement and to redistribute the internal forces at non-conforming nodes accordingly to the neighbor elements. To cope with these aspects, the two kinds of constrained nodes are considered, which are the node-on-edge and the node-on-face types.

To verify the correctness of developed program, the comparisons are made with closed-form solutions of the strip and rectangular footings. The results agree well with analytical solutions. It is also found that the error decreases as the mesh is more refined. For analyses of friction pile and end bearing pile, the results also agree with the analytical solutions where the error is contained in 3 %.

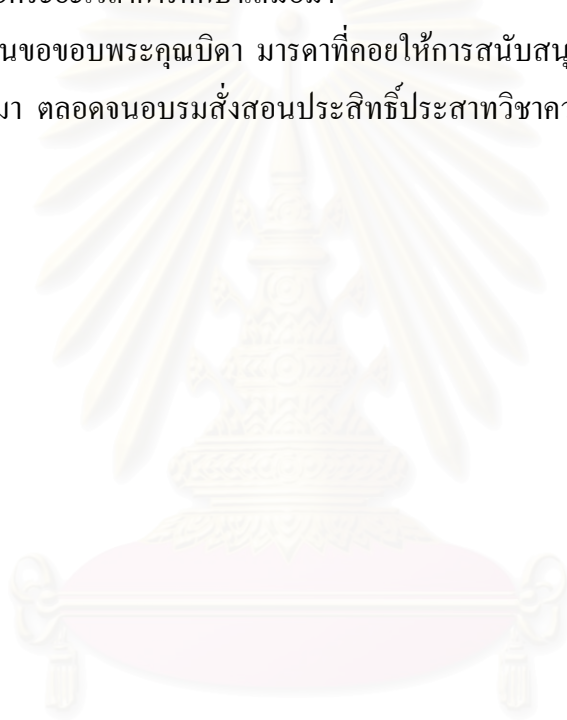
Department.....Civil Engineering..... Student's signature
Field of studyCivil Engineering..... Advisor's signature
Academic year2005.....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จีรวัด บุญญะฐิติ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ซึ่ง
ตลอดเวลาอันมีค่าในคำแนะนำตรวจสอบผลงาน ตลอดจนดูแลให้กำลังใจผู้เขียนตลอดระยะเวลาการ
ทำงาน ขอขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน ที่กรุณาให้ความสนใจในการร่วมเป็น
คณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์

ผู้เขียนขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ จากที่ทำงาน บริษัทเพาเวอร์ไลน์เอ็นจิเนียริงจำกัด(มหาชน)
หน่วยงาน โบบี้แบร์เมืองและเพื่อนร่วมห้องวิศวกรรมปฐพีที่ได้ให้คำปรึกษาและให้กำลังใจผู้เขียนใน
การทำวิทยานิพนธ์ตลอดระยะเวลาการศึกษาเสมอมา

สุดท้ายนี้ผู้เขียนขอขอบพระคุณบิดา มารดาที่คอยให้การสนับสนุนทั้งด้านการศึกษา ด้านกำลังใจ
ทรัพย์ กำลังใจ เสมอมา ตลอดจนอบรมสั่งสอนประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่างๆ ให้ผู้เขียนตลอดมา
จนกระทั่งปัจจุบัน



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฌ
สารบัญตาราง.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	3
1.4 ขอบเขตของงานวิจัย.....	4
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐาน.....	5
2.2 ระบบพิกัด (Coordinate System)	7
2.3 ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function)	8
2.4 การวิเคราะห์ค่าเมตริกซ์ความเครียด-การเคลื่อนตัว (Strain – Displacement Matrix)..	9
2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration).....	12
2.6 การประมาณค่าผลเฉลยจากผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	13
2.7 การประมาณความคลาดเคลื่อน (Error Estimation).....	15
2.8 อะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element)	17
บทที่ 3 การพัฒนาโปรแกรม	22
3.1 ส่วนขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ (Pre -Processing).....	22
3.2 ส่วนการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM Analysis).....	27
3.3 ส่วนส่วนขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ (Post – Processing).....	27
3.4 ส่วนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element).....	29
บทที่ 4 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม	46
4.1 ฐานรากแผ่แบบสตริป (Strip Footing).....	46

4.2 ตัวอย่างการวิเคราะห์ฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Square Footing).....	51
บทที่ 5 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในการวิเคราะห์พฤติกรรมเสาเข็ม.....	58
5.1 เสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง (Friction Pile).....	58
5.2 กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า (Pile Bearing on Stiffer Stratum).....	63
บทที่ 6 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	67
6.1 สรุปผลงานวิจัย.....	67
6.2 ข้อเสนอแนะ.....	67
รายการอ้างอิง	68
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	69
ภาคผนวก	70

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 1 แสดงระบบพิกัดและการจัดเรียงจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยชนิด เฮกซะอีตรอน.....	8
รูปที่ 2 ตำแหน่งเกาส์ในห่อมของจุดต่อที่ต้องการประมาณค่า.....	14
รูปที่ 3 การประมาณค่าคำตอบจากตำแหน่งเกาส์.....	15
รูปที่ 4 ลักษณะข้อกำหนดตามกฎการแบ่งแบบหนึ่งระดับ.....	21
รูปที่ 5 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นระหว่างเอลิเมนต์.....	21
รูปที่ 6 แสดงหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์.....	22
รูปที่ 7 จำนวนหน้า (Face) ในแต่ละเอลิเมนต์.....	23
รูปที่ 8 หมายเลขขอบเฉพาะที่ (Local Edge Numbers) และหมายเลขขอบโดยรวม (Global Edge Numbers)	24
รูปที่ 9 การป้อนข้อมูลแรงกระทำภายนอก.....	25
รูปที่ 10 ข้อมูลแรงกระทำภายนอกกรณีทีเอลิเมนต์ได้รับการแบ่ง (Refinement).....	25
รูปที่ 11 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์.....	30
รูปที่ 12 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไฟไนต์เอลิเมนต์(ต่อ).....	30
รูปที่ 13 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการตรวจสอบระดับการแบ่งเอลิเมนต์ ของเอลิเมนต์ที่พิจารณาเทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียง.....	31
รูปที่ 14 แสดงจุดต่อที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์แม่เพื่อให้เอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น.....	32
รูปที่ 15 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อให้เอลิเมนต์มี ความละเอียดขึ้น.....	32
รูปที่ 16 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement)...	33
รูปที่ 17 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement).....	34
รูปที่ 18 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement).....	34
รูปที่ 19 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement)...	35
รูปที่ 20 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งจุดต่อกลางของเอลิเมนต์ (Middle Node Refinement).....	36
รูปที่ 21 แสดงพิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์ใหม่ (Coordinate of New Node) และจุดต่อที่ควบคุม จุดต่อใหม่ (Control New Node)	37
รูปที่ 22 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการเก็บข้อมูลใหม่ของเอลิเมนต์.....	38

รูปที่ 23 แสดงลำดับของจุดต่อเอลิเมนต์และลำดับของเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่ง และหลังแบ่งเอลิเมนต์.....	39
รูปที่ 24 แสดงลำดับหมายเลขขอบเอลิเมนต์แม่และลำดับขอบเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่ง และหลังแบ่ง.....	40
รูปที่ 25 แผนภูมิการอพเดทข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element).....	42
รูปที่ 26 แผนภูมิการอพเดทข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element) (ต่อ).....	43
รูปที่ 27 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่ขอบ (Constained Node on Edge)	44
รูปที่ 28 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่หน้า (Constained Node on Face)	44
รูปที่ 29 แผนภูมิการวิเคราะห์จุดต่อที่ถูกบังคับ (Constained Node).....	45
รูปที่ 30 ขนาดโครงสร้างและหน้าตัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแบบสตริป.....	46
รูปที่ 31 โครงข่ายที่ใช้ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสตริป.....	47
รูปที่ 32 โครงข่ายสุดท้ายหลังการอะแดฟทีฟ ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสตริป.....	48
รูปที่ 33 แสดงรูปโครงข่ายเอลิเมนต์หลังการเคลื่อนตัวและรูปความเค้นในแนวตั้ง ฐานรากแบบสตริป.....	48
รูปที่ 34 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับ Degree of Freedom ของฐานรากแผ่น แบบสตริป.....	48
รูปที่ 35 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาของฐานรากแผ่นแบบสตริป.....	49
รูปที่ 36 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 1-1 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก.....	49
รูปที่ 37 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 2-2 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก.....	50
รูปที่ 38 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 3-3 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก.....	50
รูปที่ 39 ขนาดโครงสร้างและหน้าตัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส....	51
รูปที่ 40 แสดงเงื่อนไขขอบเขตปัญหา (Boundary Condition).....	52
รูปที่ 41 โครงข่ายในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	53
รูปที่ 42 โครงข่ายสุดท้ายหลังการอะแดฟทีฟ ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบ สี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	54
รูปที่ 43 แสดงรูปโครงข่ายเอลิเมนต์หลังการเคลื่อนตัวและรูปความเค้นในแนวตั้ง ตัวอย่างฐานรากแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	54
รูปที่ 44 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับ Degree of Freedom ของฐานรากแผ่นแบบ สี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	55

รูปที่ 45 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาของฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	55
รูปที่ 46 การเคลื่อนตัวในแนวตั้งตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	56
รูปที่ 47 Vertical Displacement ตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสในแต่ละรอบของการทดสอบโปรแกรม.....	56
รูปที่ 48 Vertical Displacement ตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในรอบสุดท้ายของการทดสอบโปรแกรม.....	57
รูปที่ 49 ขนาดโครงสร้างที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง.....	58
รูปที่ 50 สภาวะขอบเขต (Boundary Condition) ที่กำหนดในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยว.....	58
รูปที่ 51 โครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้น ในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง.....	59
รูปที่ 52 โครงข่ายสุดท้ายของเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง.....	60
รูปที่ 53 ค่าการเคลื่อนตัวเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง กับน้ำหนักบรรทุกเปรียบเทียบ กับผลเฉลยจากวิธีอิลาสติก.....	61
รูปที่ 54 ขนาดโครงสร้างที่ใช้ในการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า.....	63
รูปที่ 55 โครงข่ายเริ่มต้นของการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า.....	63
รูปที่ 56 โครงข่ายสุดท้ายของการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า.....	64
รูปที่ 57 ค่าการเคลื่อนตัวเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่ากับน้ำหนักบรรทุกเปรียบเทียบ กับผลเฉลยจากวิธีอิลาสติก.....	64
รูปที่ 58 ค่าการเคลื่อนตัวเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่าและกรณีเสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง.....	65

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 พิกัดของจุดต่อของชิ้นส่วน ในระบบพิกัดเฉพาะที่ 8



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมปฐพี ในปัจจุบันเกี่ยวข้องกับการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) มาใช้เป็นอย่างมากเนื่องจากปัญหาทางวิศวกรรมปฐพีเป็นปัญหาที่ความซับซ้อนสูงทั้งในรูปแบบของโครงสร้าง ชั้นดิน แรงภายนอกที่กระทำ แบบจำลองพฤติกรรมของดิน (Soil Model) และขอบเขตของปัญหา การวิเคราะห์ปัญหาโดยละเอียดซึ่งให้ผลคำตอบอย่างถูกต้องแม่นยำตามทฤษฎี จึงยุ่งยากเกินกว่าจะใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในทางปฏิบัติแนวทางในการวิเคราะห์ปัญหาที่ใช้ในปัจจุบัน เพื่อความสะดวกจึงมักใช้วิธีการอย่างง่ายต่างๆ เช่น ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) และวิธีวิเคราะห์โดยใช้ผลการทดสอบและประสบการณ์ (Empirical Method) เป็นต้น และเนื่องจากความก้าวหน้าของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันส่งผลให้วิธีเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น และได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นรูปแบบหนึ่งของการวิเคราะห์ปัญหาที่มีการประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวาง

ในปัจจุบันการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เริ่มได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากเป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยลดเวลาและต้นทุนในการออกแบบ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นมีอยู่หลายวิธี แต่วิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันในปัจจุบัน ก็คือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

ในการวิเคราะห์ปัญหาคด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นการวิเคราะห์โดยสมมุติปัญหาที่ต่อเนื่องให้มีลักษณะชิ้นส่วนย่อยๆ ประกอบกัน (Discretization) และใช้สมการคณิตศาสตร์จำลองพฤติกรรมชิ้นส่วนย่อยเหล่านั้น ร่วมกับการวิเคราะห์พฤติกรรมของชิ้นส่วนทั้งหมดรวมกัน เราสามารถหาค่าประมาณของผลเฉลยของปัญหาที่ต่อเนื่องได้ โดยความแม่นยำของผลเฉลยนั้นขึ้นอยู่กับแบบจำลองคณิตศาสตร์ และขนาดของชิ้นส่วนที่ประกอบกันซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนมากเท่าไร ความแม่นยำในการเป็นตัวแทนของชิ้นส่วนก็จะดีมากขึ้นเท่านั้น ในขณะที่การเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนซึ่งเป็นการลดขนาดของช่วงการประมาณก็จะลดความคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการประมาณปัญหาต่อเนื่องด้วยชิ้นส่วน

ในการเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลย ทำได้โดยการเพิ่มความซับซ้อนของสมการคณิตศาสตร์ เพื่อให้สอดคล้องกับพฤติกรรมมากขึ้น หรือโดยการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วน จากทั้งสองวิธีนี้ การเพิ่มความสอดคล้องของสมการคณิตศาสตร์นั้นทำได้ยาก ทั้งในด้านการวิเคราะห์หาสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม และการนำมาเขียนรหัสการคำนวณ ดังนั้นจึงใช้สมการคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนเฉพาะ

ในปัญหาที่ต้องการความแม่นยำของคำตอบหลายๆเท่านั้น ในงานวิจัยต่างๆ ไปนิยมใช้สมการคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมากนัก แต่ใช้ชิ้นส่วนจำนวนมากแทน

ในปัญหาหนึ่งๆ จะมีค่าของผลเฉลยแตกต่างกันไปตามโดเมน (Domain) ของปัญหา ในบริเวณใดที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่อพื้นที่มาก ก็จะมี ความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยอยู่มากเช่นกัน ดังนั้นในการที่จะวิเคราะห์ปัญหาให้มีประสิทธิภาพที่สุด จำเป็นต้องกระจายความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ให้มีค่าใกล้เคียงตลอดทั้งโดเมนของปัญหาซึ่งทำได้โดยการใช้ชิ้นส่วนที่มีขนาดเหมาะสมกับพื้นที่ของปัญหา โดยใช้ชิ้นส่วนที่มีขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก และใช้ชิ้นส่วนขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนน้อย การที่จะสร้างชิ้นส่วนให้ได้ดังที่กล่าวมานี้ จำเป็นต้องมีการเตรียมข้อมูลและทำการคำนวณหลายรอบ ซึ่งต้องใช้แรงงานและเวลาจำนวนมาก

วิทยานิพนธ์นี้มุ่งพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็ม โดยจะมีการประมาณค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลย และทำการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากให้โดยอัตโนมัติ มีผลให้ลดปริมาณการเตรียมข้อมูลลงได้มาก และได้คำตอบที่รวดเร็ว มีความคลาดเคลื่อนในขนาดที่ยอมรับได้

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Babuska และคณะ (1975-1983) ได้คิดค้นและพัฒนาการประมาณค่าคลาดเคลื่อนโดยวิธีแยกตักข้างของแรง ซึ่งเป็นการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการอินทิเกรตค่ากำลังสองของแยกตักข้างของหน่วยแรงในสมการอนุพันธ์ และกำลังสองของผลต่างของหน่วยแรงระหว่างชิ้นส่วน ซึ่งวิธีของ Babuska นี้ต้องใช้คณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากในการพิสูจน์และคำนวณค่าคลาดเคลื่อน จึงไม่สะดวกในการใช้งาน

Zienkiewicz และ Zhu (1987) ได้พัฒนาการประมาณค่าหน่วยแรงที่ดีขึ้นจากหน่วยแรงที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ และประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบหน่วยแรงทั้งสอง หลักการของวิธีนี้คือ ค่าหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะมีค่าไม่ต่อเนื่องกันระหว่างชิ้นส่วน ดังนั้นถ้ามีการปรับเรียบให้หน่วยแรงมีความต่อเนื่องกันก็จะได้คำตอบที่ดีขึ้น การปรับเรียบใช้กำลังสองน้อยที่สุด (Least Square) วิธีนี้ใช้หลักการง่ายๆ และมีการคำนวณที่ไม่ยุ่งยาก เหมาะสำหรับการเขียนรหัสในการคำนวณ อย่างไรก็ตามค่าประมาณของหน่วยแรงที่ได้จากวิธีนี้มีความถูกต้องน้อย และมีการลู่เข้าสู่คำตอบช้า โดยเฉพาะในแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มีระดับชั้นของพหุนามสูง

Zienkiewicz และ Zhu (1987) เสนอว่าให้วัดค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยค่าเปลี่ยนตำแหน่งไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยนอร์มพลังงาน โดยเสนอให้สร้างฟังก์ชันหน่วยแรงปรับเรียบ (Smoothed Stress) เพื่อใช้แทนหน่วยแรงแม่นยำตรงในการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนในนอร์มพลังงาน

Zienkiewicz และ Zhu (1990) ยังคงพัฒนาการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น และมีอัตราลู่เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น โดยใช้หลักการของตำแหน่งลู่เข้ายิ่งยวด (Superconvergent Points) หรือตำแหน่งเกาส์ (Gauss Point) ในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งมีค่าหน่วยแรงซึ่งมีความแม่นยำกว่าในตำแหน่งอื่นๆ และมีอัตราลู่เข้าสู่คำตอบมากกว่าระดับชั้นของพหุนามในสมการคณิตศาสตร์ 1 ระดับ (Oh^{p+1}) โดยวิธีนี้การประมาณค่าหน่วยแรงที่ตำแหน่งใดๆ ก็ได้จากการประมาณจากหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบ ตำแหน่งที่ต้องการประมาณนั้น โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีนี้มีหลักการที่สามารถเข้าใจง่ายและมีความแม่นยำพอสมควร ประกอบใช้การคำนวณไม่มากนัก จึงเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายจนกระทั่งถึงปัจจุบัน

Szabo (1986) ได้เสนอวิธีการวัดค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของปัญหาที่เกิดจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ จากการวัดค่าความคลาดเคลื่อนของพลังงานความเครียด (Error of Strain Energy) ซึ่งก็เป็นการเทียบหาความแตกต่างระหว่างพลังงานความเครียดแม่นยำกับพลังงานความเครียดโดยประมาณของปัญหาที่ได้จากการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Demkowicz และคณะ ได้เสนอหลักการวิธีเอชทีอะแดพทีฟ กล่าวคือหลังจากทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น จนได้ค่าความคลาดเคลื่อนของปัญหาประมาณร้อยละ 5 ต่อจากนั้นก็เพิ่มระดับชั้นพหุนามให้กับเอลิเมนต์ที่ยังมีความคลาดเคลื่อนเกินค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด การทำเช่นนี้จะทำให้ประหยัดจำนวนระดับชั้นความเสรีได้มาก

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1.3.1 พัฒนาโปรแกรมอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็มเดี่ยว
- 1.3.2 ศึกษาการประมาณค่าหน่วยแรงจากผลเฉลยไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.3.3 ศึกษาการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.3.4 ศึกษาวิธีการปรับปรุงผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.3.5 พัฒนาโปรแกรมอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดของชิ้นส่วน

1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1.4.1 เอลิเมนต์ที่ใช้คือ เฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ ในลักษณะ 3 มิติ
- 1.4.2 วิเคราะห์ปัญหาในเชิงสถิตยศาสตร์ (Static Analysis)
- 1.4.3 เสาเข็มรับแรงในแนวดิ่ง (Vertical Loading) เท่านั้น และเสาเข็มเป็นเสาเข็มในแนวดิ่ง (Vertical Piles)
- 1.4.4 เสาเข็มและดินมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic Material)
- 1.4.5 เสาเข็มและดินเป็นวัสดุยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นตรง (Linear Elastic Material)
- 1.4.6 แค็ปหัวเสาเข็ม (Pile Cap) มีคุณสมบัติยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Perfectly Flexible)
- 1.4.7 ไม่เกิดการเลื่อนไถลระหว่างผิวสัมผัสระหว่างเสาเข็มกับดิน

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

- 1.5.1 มีความเข้าใจพฤติกรรมของเสาเข็มเดี่ยว ภายใต้แรงกระทำในแนวดิ่งมากยิ่งขึ้น
- 1.5.2 มีความเข้าใจระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.5.3 มีความเข้าใจในหลักการประมาณค่าหน่วยแรงและค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.5.4 มีความเข้าใจวิธีการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น โดยวิธีเอชอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.5.5 สามารถนำหลักการการวิเคราะห์และผลการศึกษาของวิทยานิพนธ์ ใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาและพัฒนาต่อไปในอนาคต

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐาน

สมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์กลศาสตร์ของชิ้นส่วนต่อเนื่อง (Continuum Mechanics) ประกอบด้วยสมการหลัก 3 สมการดังนี้

1. สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์ (Static Equilibrium Equation) ประกอบด้วย

- สมการสมดุล (Equilibrium Equation) : $[\sigma_{ij,j} + h_i = 0]$

- สมการจำกัดเขตของหน่วยแรง (Stress Boundary) : $[T_{ij} = \sigma_{ij}n_j]$

โดยสามารถสรุปความสัมพันธ์ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]^T [\sigma] = [f] \quad (1)$$

โดยที่ $[\sigma]$ = เมตริกซ์ของความเค้น

$[f]$ = เมตริกซ์ของแรงภายนอก (External Force)

2. สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว (Compatibility Equation) แสดงได้ดังสมการที่ 2 ดังนี้

$$\epsilon_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (2)$$

โดยสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\epsilon] = [B][U] \quad (3)$$

โดยที่ $[\epsilon]$ = เมตริกซ์ความเครียด

$[U]$ = เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัว

$[B]$ = เมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว (Strain – Displacement Matrix)

3. สมการความสัมพันธ์ระหว่างเค้น - ความเครียด (Constitutive Equation) สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอีลาสติกเชิงเส้น (Linear Elastic) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic Property) แสดงได้ดังสมการที่ 4 ดังนี้

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

โดยสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (5)$$

โดยที่ $[D]$ = เมตริกซ์ความเค้น - ความเครียด (Constitutive Matrix)

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาใน 3 มิติ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (6)$$

เมื่อ

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

จากการพิสูจน์ด้วยหลักการงานเสมือน (Principle of Virtual Work) สามารถพิสูจน์ได้ว่า $A^T = B^T$ ดังนั้นจากสมการ 1,3 และ 5 จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นที่จุดใดๆ ภายในชิ้นส่วน ดังนี้

$$[B]^T [D][B] dv \{U\} = \{F_n\} \quad (8)$$

- โดยที่ $[B]$ = เมตริกซ์ความเครียดและการเคลื่อนตัว (Strain-Displacement Matrix)
- $[D]$ = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ความเค้น-ความเครียด (Constitutive Matrix)
- v = ปริมาตรของชิ้นส่วน
- $\{U\}$ = เวกเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นของจุดต่อ ในทิศทาง x,y และ z
- $\{F_n\}$ = แรงกระทำที่เพิ่มขึ้นที่จุดต่อ

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (9)$$

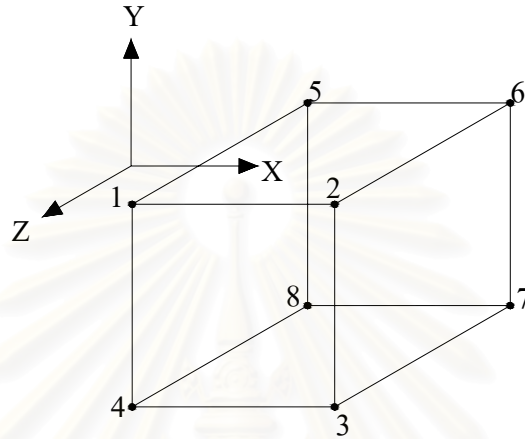
- โดยที่ $[K]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ (Stiffness Matrix)
- = $[B]^T [D][B]$
- $\{F\}$ = เวกเตอร์ของแรงกระทำ (Load Vector)

2.2 ระบบพิกัด (Coordinate System)

ชิ้นส่วนย่อย (Element) ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้คือ ชิ้นส่วนเฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยระบบพิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ที่ใช้คือพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian) x-y-z ขณะที่ระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ที่ใช้คือระบบพิกัดฉาก $\xi - \eta - \zeta$ ที่ปรับขนาดให้ใช้ขอบเขตเดียวกันทุกชิ้นส่วน ค่าพิกัดที่จุดต่อได้แสดงในตารางที่ 1

2.3 ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function)

ในขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองเพื่อการประมาณค่าของตัวแปรพื้นฐานในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาหน่วยแรงและการเคลื่อนตัว (Stress - Deformation Analysis) มีตัวแปรดังกล่าวคือ ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ (Displacement)



รูปที่ 1 แสดงระบบพิกัดและการจัดเรียงจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยชนิด เฮกซะอีดรอน

Node	ξ	η	ζ
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1
4	+1	-1	-1
5	-1	+1	-1
6	-1	+1	+1
7	+1	+1	+1
8	+1	+1	-1

ตารางที่ 1 พิกัดของจุดต่อของชิ้นส่วน ในระบบพิกัดเฉพาะที่

การประมาณค่าการกระจายของการเคลื่อนตัวภายในชิ้นส่วนย่อย จะใช้ฟังก์ชันการประมาณในช่วง (Interpolating Function) หรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งกำหนดโดยสมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 u &= [N]\{U\} \\
 v &= [N]\{V\} \\
 w &= [N]\{W\}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

โดยที่ u, v, w = ค่าการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆ ภายในชิ้นส่วนตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

$\{U\}, \{V\}, \{W\}$ = ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

$[N]$ = ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ที่ตำแหน่งใดๆ ภายในชิ้นส่วนโดย

$$N = f(\xi, \eta, \zeta)$$

นอกจากนี้สำหรับในกรณีที่ชิ้นส่วนมีคุณสมบัติเป็นไอโซพารามेटริก (Isoparametric) จะสามารถใช้ฟังก์ชันรูปร่าง ในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไปและพิกัดเฉพาะที่ได้ดังสมการ 11 และฟังก์ชันรูปร่างสำหรับชิ้นส่วนที่ใช้ในงานวิจัยสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 14

$$\begin{aligned}
 x &= [N]\{X\} \\
 y &= [N]\{Y\} \\
 z &= [N]\{Z\}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

โดยที่ x, y, z = พิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ที่จุดใดๆ ภายในชิ้นส่วนซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ผ่านทางฟังก์ชันรูปร่าง

$\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$ = พิกัดทั่วไปที่จุดต่อทุกจุดของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

2.4 การวิเคราะห์ค่าเมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว (Strain – Displacement Matrix)

ค่าของเมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว หรือเมตริกซ์ B คำนวณได้จากสมการที่ 12 และ 13 ดังนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \tag{12}$$

หรือ $[\varepsilon] = [A][e]$ (13)

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

ในกรณีของการวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปเมตริกซ์ โดยความเค้นเฉือนแสดงในรูปของ Engineering Shear Strain (γ) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (15)$$

โดยที่ u , v และ w คือการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆ ในชิ้นส่วนตามแนวแกน x , y และ z จากการใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ทำให้สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนตัวที่จุดต่อของชิ้นส่วนกับความเครียด ซึ่งแสดงโดยสมการ $[\varepsilon] = [B]U$ ได้ดังนี้จากสมการ 15 เมื่อพิจารณาเฉพาะ ε_x จะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (16)$$

จากสมการที่ 10 คือ $u = [N]\{U\}$ จะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}[N]\{U\} \quad (17)$$

สำหรับในกรณีที่เป็นชิ้นส่วนแบบเฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ เขียนได้ดังสมการที่ 18 ดังนี้

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณเป็นฟังก์ชันพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ξ, η, ζ ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณในพิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ซึ่งจำเป็นในการหาค่าเมตริก B จึงต้องใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule) ดังแสดงในสมการที่ 19 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \\ \frac{\partial}{\partial y} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \\ \frac{\partial}{\partial z} [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] \end{bmatrix} \quad (19)$$

จากสมการของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) หาได้จากการใช้เมตริกซ์ผกผัน (Inverse) ของเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) ซึ่งกำหนดโดยสมการที่ 20 ดังนี้

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ค่าของเมตริกจาโคเบียนสามารถหาได้โดยใช้คุณสมบัติของการประมาณ ในการสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไปกับพิกัดเฉพาะที่ ดังแสดงในสมการที่ 21 ดังนี้

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} [N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} [N_1 & N_2 & \dots & N_8] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_8 & Y_8 & Z_8 \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ขั้นตอนการอินทิเกรตที่ใช้ในการหาค่าสติเฟนสมเมตริกซ์ ซึ่งเป็นการอินทิเกรตเชิงปริมาตร ในงานวิจัยนี้จะใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยวิธีของ Gauss ซึ่งหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดๆ ที่กำหนด ภายในชิ้นส่วน ซึ่งเรียกว่าจุดเกาส์ (Gauss Point) หรือจุดอินทิเกรต (Integration Point) คูณกับแฟลคเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor) และหาผลการอินทิเกรตโดยการรวมผลคูณของแต่ละจุด ค่าแฟลคเตอร์ถ่วงน้ำหนักจะขึ้นกับตำแหน่ง และจำนวนของจุดเกาส์ที่เลือกใช้ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\iiint [B]^T [D] [B] dv = \sum_{i=1}^n [B_i]^T [D_i] [B_i] \det |J_i| w_{1i} w_{2i} w_{3i} \quad (22)$$

โดยที่	i	=	จุดเกาส์ (Gauss Point)
	n	=	จำนวนทั้งหมดของจุดเกาส์ (Gauss Point) ภายในชิ้นส่วน
	$\det J_i $	=	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกจาโคเบียน
	$w_{1i} w_{2i} w_{3i}$	=	แฟลคเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor)

2.6 การประมาณค่าผลเฉลยจากผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การประมาณค่าความคลาดเคลื่อน จะประมาณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำกว่า ซึ่งในหัวข้อต่อไปนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความแม่นยำยิ่งขึ้น โดยวิธี Superconvergence Patch Recovery (SPR) เพื่อใช้เปรียบเทียบหาความคลาดเคลื่อน

โดยธรรมชาติของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หน่วยแรงที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันไปในแต่ละส่วนของชิ้นส่วน โดยที่ตำแหน่งเกาส์ (Gauss Point) จะมีค่าหน่วยแรงแม่นยำกว่าในตำแหน่งอื่นๆ ดังนั้นเราจึงสามารถประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อได้แม่นยำขึ้น โดยประมาณจากหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบจุดต่อนั้น ดังแสดงในรูปที่ 2 สำหรับวิธีที่ใช้ในการประมาณค่านั้นทำได้หลายวิธี แต่ที่ค่อนข้างยืดหยุ่นและได้ค่าที่แม่นยำคือวิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังรายละเอียดดังต่อไปนี้

สมมติให้หน่วยแรงโดยประมาณ (σ^*) เป็นหน่วยที่ได้จากการประมาณค่าจากตำแหน่งเกาส์ ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนาม สำหรับกรณี 1 มิติจะมีลักษณะเป็นเส้นดังแสดงในรูปที่ 3 และลักษณะของเส้นจะขึ้นอยู่กับกำลังและค่าคงตัวของพหุนาม สำหรับกรณี 2 มิติหน่วยแรงโดยประมาณมีลักษณะเป็นพื้นผิว มีค่าดังสมการ 23.1 หรือในรูปเมตริกซ์ ดังแสดงในสมการ 23.2

$$\sigma^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots \quad (23.1)$$

$$\sigma^* = [p]\{a\} \quad (23.2)$$

โดยที่ $[p]$ = ฟังก์ชันฐาน (Base Function) อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม $[1 \ x \ y \ z \ xy \ xz \ zy \ xyz]$
 $\{a\}$ = ค่าคงตัวของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$

หลักของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือต้องหาค่าคงตัว $\{a\}$ ให้หน่วยแรงโดยประมาณมีความแตกต่างจากจุดที่ประมาณมาน้อยที่สุด ในกรณี 2 มิติเศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงโดยประมาณและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์สามารถแสดงได้ดังสมการ 24

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma^*(x_i, y_i, z_i) - \sigma_h(x_i, y_i, z_i))^2 \quad (24.1)$$

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma^*(x_i, y_i, z_i) - [p(x_i, y_i, z_i)]\{a\})^2 \quad (24.2)$$

โดยที่ $R(a)$ = เศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรง
 σ^* = หน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์

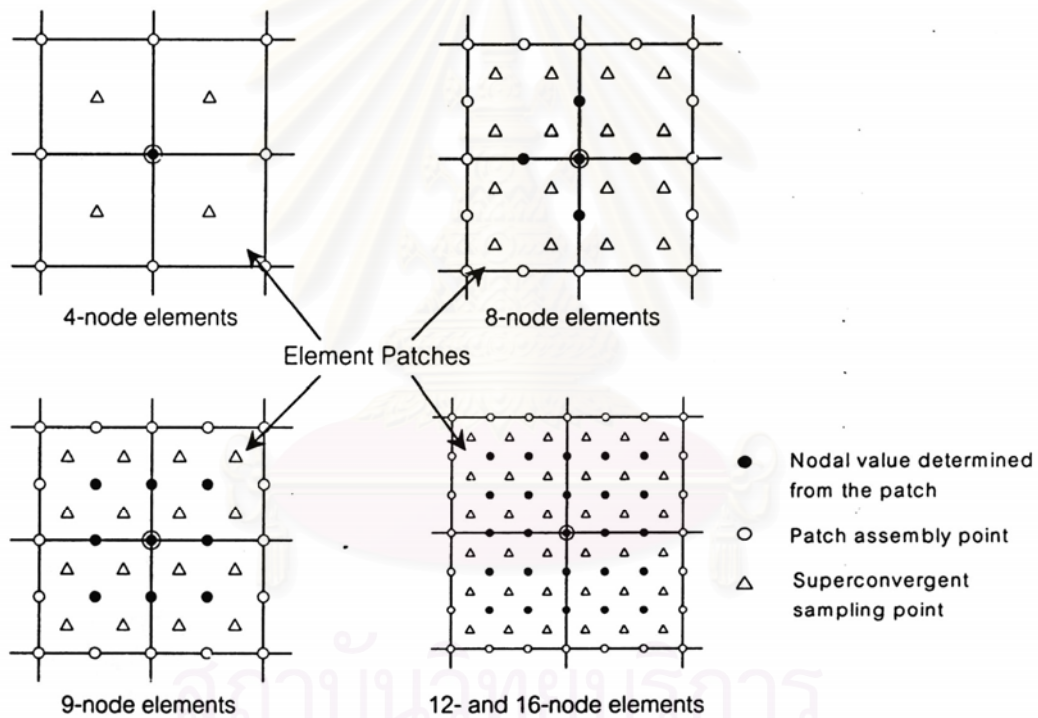
σ_h = หน่วยแรงจากไฟไนต์เอลิเมนต์
 n = จำนวนตำแหน่งเกาส์ทั้งหมด

ในการหาค่าคงตัวเพื่อให้ได้เศษตกค้างต่ำสุด ทำได้โดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของเศษตกค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [p(x_i, y_i, z_i)]^T [p(x_i, y_i, z_i)] \{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma^*(x_i, y_i, z_i) [p(x_i, y_i, z_i)]^T \quad (25)$$

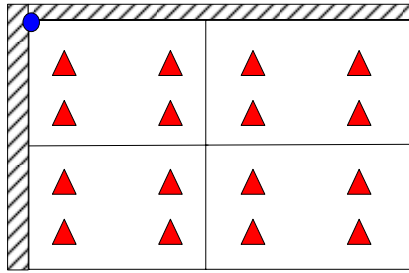
หรือ $[A]\{a\}=\{b\}$ (26)

$$\{a\}=[A]^{-1}\{b\} \quad (27)$$

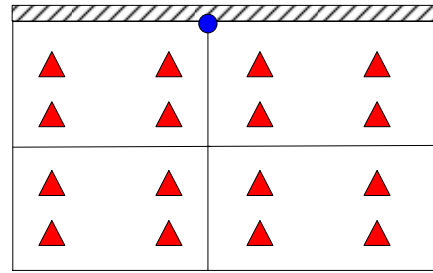


รูปที่ 2 ตำแหน่งเกาส์ในหย่อมของจุดต่อที่ต้องการประมาณค่า

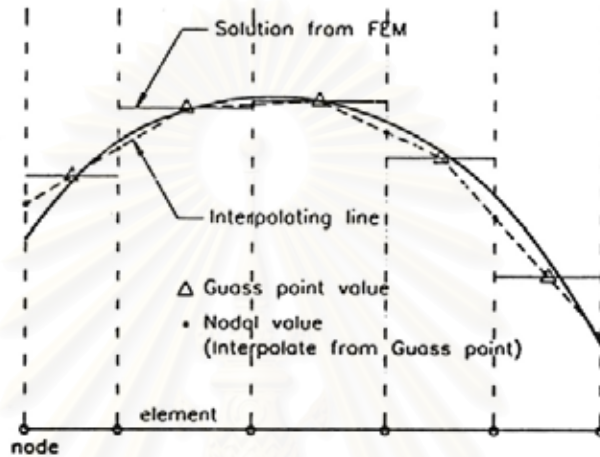
สำหรับจุดต่อที่อยู่บนขอบเขตของปัญหา จำนวนจุดเกาส์ที่อยู่รอบๆ จุดต่อไม่เพียงพอในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม $\{a\}$ จึงจำเป็นต้องขยายขอบเขตออกไปดังแสดงในรูปที่ 3 และในกรณีที่ระนาบของวัสดุต่างชนิดกัน การพิจารณาหน่วยแรงที่จุดเกาส์ก็จะทำการขยายขอบเขตจุดเกาส์ออกไปเช่นเดียวกัน



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 3 การประมาณค่าคำตอบจากตำแหน่งเกาส์

2.7 การประมาณความคลาดเคลื่อน (Error Estimation)

ในการปรับขนาดของชิ้นส่วนให้มีความสอดคล้องกับปัญหาใดๆ นั้นมีขั้นตอนใหญ่ๆ ตามลำดับดังต่อไปนี้ หลังจากได้ผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบชิ้นส่วนที่มีลักษณะหายับซึ่งเป็นระบบเริ่มต้น แล้วจึงประมาณค่าคลาดเคลื่อนในตำแหน่งต่างๆของปัญหาจากผลเฉลยที่ได้ จากนั้นคำนวณหาขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสมกับความคลาดเคลื่อนพร้อมทั้งสร้างชิ้นส่วนขึ้นใหม่ตามขนาดที่คำนวณได้ แล้วจึงสร้างสติฟเนสเมตริกซ์เพื่อคำนวณหาผลเฉลยต่อไป กระทำซ้ำตามขั้นตอนที่กล่าวมาจนกระทั่งค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมีขนาดอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ จึงใช้ผลเฉลยสุดท้ายนั้นเป็นผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ประโยชน์ต่อไป

โดยปกติการคำนวณความคลาดเคลื่อนของวิธีการใดๆ ก็ตามจะทำได้โดยการเทียบคำตอบที่ได้จากวิธีการนั้นๆ กับผลเฉลยแม่นยำ เช่น

$$e = u - u_h \quad (28.1)$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (28.2)$$

โดยที่	e	=	ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจัด
	u	=	ค่าการกระจัดแม่นยำตรง
	u_h	=	ค่าการกระจัดที่ได้จากการวิเคราะห์
	e_σ	=	ค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
	σ	=	ค่าหน่วยแรงแม่นยำตรง
	σ_h	=	ค่าหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

แต่ในกระบวนการปรับขนาดของชิ้นส่วนนั้น เราไม่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา จึงไม่สามารถหาความคลาดเคลื่อนตามสมการ (28) ได้ ต้องประมาณจากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยอื่นที่มีความถูกต้องกว่าผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการที่ (29) สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยที่ดีขึ้นเราจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป

$$e^* = u^* - u_h \quad (29.1)$$

$$e_\sigma^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (29.2)$$

โดยที่	e^*	=	ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของการกระจัด
	u^*	=	ค่าการกระจัดที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
	u_h	=	ค่าการกระจัดที่ได้จากวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
	e_σ^*	=	ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
	σ^*	=	ค่าหน่วยแรงที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
	σ_h	=	ค่าหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากสมการ 28 และ 29 จะเห็นว่าเราวัดความคลาดเคลื่อนเป็นสเกลาร์ในขณะที่คำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีลักษณะเป็นเวกเตอร์ ซึ่งมีความไม่สะดวกในการนำมาใช้งาน ดังนั้นจึงต้องมีการนำรูปแบบอื่นที่มีลักษณะเป็นสเกลาร์มาใช้แทนเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน เช่นในรูปแบบพลังงานความคลาดเคลื่อนดังแสดงในสมการที่ 30

$$\|e_\sigma^*\| = \left(\int_{\Omega} e_\sigma^{*T} D^{-1} e_\sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

โดยที่	$\ e_\sigma^*\ $	=	นอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน
	e_σ	=	เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

$$D = \text{เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด } \sigma = D\varepsilon$$

$$\Omega = \text{โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (Global)}$$

นอกจากการแสดงผลในรูปของนอร์มพลังงานแล้วอาจใช้นอร์มในรูปแบบอื่นแทนได้ เช่น แอลทูนอร์ม (L_2 Norm) ซึ่งมีรูปแบบในลักษณะเดียวกับนอร์มพลังงาน แต่ไม่มีพจน์ของเมตริกซ์ความสัมพันธ์ (D) ทำให้ปริมาณการคำนวณลดลง ค่านอร์มต่างๆ ในสมการที่ 30 สามารถเขียนอยู่ในรูปของแอลทูนอร์มได้ดังสมการที่ 31 ถึง 35 ดังนี้

$$\|e^*_\sigma\|_2 = \left(\int_{\Omega} e^{*T}_\sigma e^*_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

$$\|U^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

$$\|U\|_2 \approx \sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*_\sigma\|_2^2} \quad (33)$$

$$\eta = \frac{\|e^*_\sigma\|_2}{\|U\|_2} \quad (34)$$

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|_2}{\sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e^*\|_2^2}} \quad (35)$$

โดยที่

$$\eta^* = \text{ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)}$$

$$\|U^*\|_2 = \text{แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จาก SPR}$$

$$\|U\|_2 = \text{แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำ}$$

เมื่อได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ถ้ามีความคลาดเคลื่อนมากกว่าก็คำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในแต่ละส่วนต่อไป

2.8 อะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element)

อะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นแนวทางในการปรับปรุงผลเฉลยจากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในปัจจุบันได้มีการกระทำกันในสองแนวทางคือ

1) การนำเอาโครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้นที่นำมาปรับปรุงให้ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement) โดยยังคงเค้าโครงเดิมไว้ ทำเพียงแต่เพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

2) การปรับเปลี่ยนโครงข่ายเอลิเมนต์ใหม่ (Remeshing) โดยไม่มีเค้าโครงเดิม คือสร้างโครงข่ายเอลิเมนต์ใหม่ที่มีความละเอียดมากขึ้น โดยไม่อาศัยโครงข่ายเอลิเมนต์เดิม

จะเห็นได้ว่าวิธีที่สอง (Remeshing) ต้องอาศัยความชำนาญในการสร้างโครงข่ายเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นวิธีที่มีความยากและซับซ้อน เพราะฉะนั้นในงานวิจัยนี้จะขอกล่าวถึงเพียง การทำงานของ ขบวนการอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ตามวิธีที่ 1 (Mesh Refinement) เท่านั้นดังต่อไปนี้

2.8.1 การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement)

ขบวนการเพิ่มระดับความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ หรือที่เรียกว่าการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement) หมายถึง การจัดการกับระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) ให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ของปัญหาที่จำลองมาให้มีจำนวนเพิ่มขึ้นจากเดิมที่ได้จากโครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้น เพื่อให้แบบจำลองโครงข่ายเอลิเมนต์นั้น มีพฤติกรรมใกล้เคียงพฤติกรรมของโครงสร้างปัญหาจริงที่มีระดับขั้นความเสรีเป็นจำนวนนับไม่ได้ โดยมีแนวทางในการเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ไว้ 3 แนวทางคือ

1) การเพิ่มระดับขั้นความเสรี โดยการแบ่งเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง เพื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้น โดยที่เอลิเมนต์ที่ใช้ยังคงใช้ชนิดเดิมเหมือนกันทั้งหมดวิธีนี้เรียกว่า ขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ h-Refinement

2) การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ด้วยวิธีการเพิ่มระดับขั้นพหุนาม (Polynomial Degree) ในฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (Interpolation Function) โดยที่ไม่เปลี่ยนแปลงขนาดและจำนวนเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์เดิม การทำเช่นนี้เป็นการเพิ่มระดับขั้นความเสรีอีกแนวทางหนึ่ง ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า ขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ p-Refinement

3) การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ด้วยวิธีผสมทั้งสองวิธีข้างต้น ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า ขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ h-p Refinement

สำหรับเทคนิคการเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ อาจจำแนกได้สองรูปแบบคือ

1) การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแบบสม่ำเสมอ (Uniform Mesh Refinement) หมายถึงการเพิ่มระดับความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ทุกเอลิเมนต์พร้อมกันในโครงข่ายเอลิเมนต์

2) การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแบบอะแดปทีฟ (Adaptive Mesh Refinement) หมายถึง การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์ โดยเลือกเพิ่มให้เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนมากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับให้เท่านั้น ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ประสิทธิภาพของวิธีนี้จะดีกว่าวิธีแรก แต่ขั้นตอนการวิเคราะห์จะมีความซับซ้อนมากขึ้น ทฤษฎีการดูเข้าสามารถนำมาใช้ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนขั้นตอนต้นได้

2.8.2 วิธีเอชอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method)

วิธีเอชอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method) เป็นกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และมีการควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย โดยการแบ่งเอลิเมนต์เดิมในโครงข่ายเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง เพื่อเป็นการเพิ่มระดับความเสถียร โดยเอลิเมนต์ใหม่ที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเดียวกับเอลิเมนต์เดิม การที่จะรู้ว่าควรแบ่งเอลิเมนต์ใด ก็ทำโดยตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนแต่ละเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ใดมีความคลาดเคลื่อนมากเกินไปกว่าค่าที่ยอมรับให้ ก็จะแบ่งเอลิเมนต์นั้น การทำเช่นนี้จะทำให้ได้โครงข่ายเอลิเมนต์ที่เหมาะสม เพราะเป็นการเพิ่มระดับขั้นความเสถียรให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ตรงตำแหน่งที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมาก ทำให้ประหยัดจำนวนระดับขั้นความเสถียร และทำให้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่วิเคราะห์ได้ มีค่าเข้าสู่ผลเฉลยที่แม่นยำด้วยอัตราที่เร็ว ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของขบวนการเอชอะแดปทีฟ ซึ่งมีงานวิจัยที่เสนอวิธีเอชอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาลักษณะต่างๆ ที่ประสบผลสำเร็จแสดงให้เห็นว่าวิธีนี้สามารถควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนได้ในเกณฑ์ที่น่าพอใจคือประมาณร้อยละ 5

วิธีเอชอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method) มีผู้นำไปใช้อย่างแพร่หลายทำให้เป็นที่นิยมในงานวิจัยและงานทางวิศวกรรมต่างๆ ซึ่งสามารถสรุปวิธีการได้ดังนี้

- หลังจากวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ (u_h) แล้วนำตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน
- กำหนดค่าที่ยอมรับให้ในรูปแบบของสัดส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนต่อผลเฉลย เช่น กำหนดค่าที่ยอมรับให้ ($\bar{\eta}$) เท่ากับ ร้อยละ 10
- คำนวณค่า η จากสัดส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณต่อผลเฉลยโดยประมาณ ที่รวมกับค่าความคลาดเคลื่อน โดยประมาณ ดังแสดงในสมการที่ 36

$$\eta \approx \eta^* = \left(\frac{\|e_\sigma^*\|_2^2}{(\|U^*\|_2^2 + \|e_\sigma^*\|_2^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

โดยที่ η = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยประมาณ
 $\bar{\eta}$ = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้
 $\|e^*\|_2^2$ = กำลังสองของนอร์มพลังงานของค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณของการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวงกว้าง (Global)

$$\|u^*\|_2^2 = \text{กำลังสองของนอร์มพลังงานของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวงกว้าง}$$

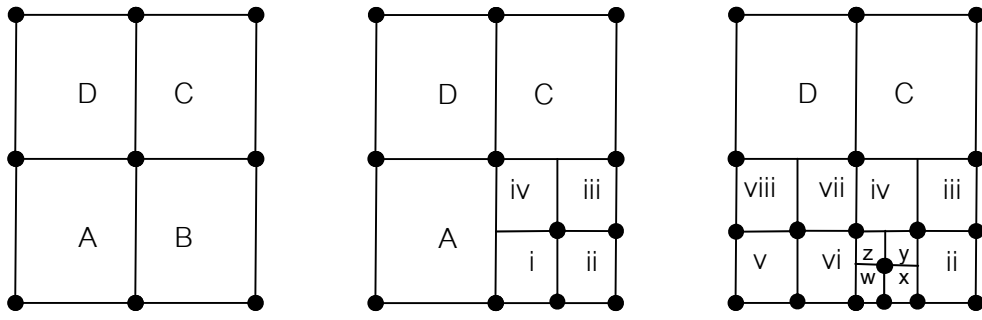
(Global)

เปรียบเทียบ η กับ $\bar{\eta}$ ถ้าหาก $\eta > \bar{\eta}$ ก็แสดงให้เห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยนั้นยังค่ามากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ดังนั้นจึงต้องมีการปรับปรุงโครงข่ายเอลิเมนต์ โดยทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น ซึ่งทำได้โดยการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลงเพื่อเพิ่มจำนวนมากขึ้น ต่อจากนั้นก็กลับไปวิเคราะห์หาผลเฉลยใหม่อีกครั้ง และทำซ้ำจนกว่าจะได้ $\eta < \bar{\eta}$ แสดงว่าความถูกต้องของผลเฉลยที่อยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้แล้ว จากขบวนการที่สรุปข้างต้นนี้ จะพบว่าวิธีเฮชอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์มีการคำนวณที่เป็นระเบียบ ไม่ซับซ้อนและสามารถกระทำในระดับเอลิเมนต์ได้

สำหรับผลงานวิจัยที่เสนอเกี่ยวกับเทคนิคการสร้างรหัสโปรแกรมการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นในวิธีเฮช (h – Adaptive) มีผู้เสนอไว้ดังนี้

Devloo, Oden และ Strouboulis (1987) ได้เสนอเทคนิคการจัดสร้างรหัสโปรแกรม สำหรับการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นด้วยการแบ่งเอลิเมนต์เดิมให้มีขนาดเล็กลง โดยเฉพาะกรณีสี่เหลี่ยม การแบ่งเอลิเมนต์จะแบ่งจากหนึ่งเอลิเมนต์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยสี่เอลิเมนต์ และได้เสนอเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นไปตามกฎที่เรียกว่า กฎหนึ่งระดับ (1 – Level Rule) หมายถึงเอลิเมนต์ที่ติดกันจะต้องมีความแตกต่างของระดับการแบ่งมากที่สุดเท่าที่หนึ่ง ซึ่งจะทำให้เอลิเมนต์ใดๆ มีเอลิเมนต์ที่ติดกับแต่ละด้านได้สูงสุดด้านละสองเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4 เดิมมี 4 เอลิเมนต์(A,B,C,D) เมื่อต้องการแบ่งเอลิเมนต์ B ก็จะทำให้การแบ่งครั้งด้านทั้งสี่ได้เอลิเมนต์ย่อย 4 ตัวคือ i,ii,iii,iv สังเกตว่าจะเกิดจุดต่อบนด้านเอลิเมนต์ A และ C ซึ่งจะถูกรูปสร้างเป็นจุดต่อที่มีระดับขึ้นความเสรีแบบไม่ปกติ (Irregular Node) หรือเรียกว่าจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constrained Node) ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์ และหากต้องการที่จะมีการแบ่งเอลิเมนต์ i จากกฎหนึ่งระดับจะไม่สามารถแบ่งได้ทันที จะต้องทำการ

แบ่งเอลิเมนต์ A เพื่อให้ได้เอลิเมนต์ v,vi,vii,viii เสียก่อน จึงจะสามารถแบ่งเอลิเมนต์ i ได้ ดังนั้นจุดต่อบนด้าน A ที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับก็จะเปลี่ยนเป็นจุดต่อที่มีระดับขึ้นความเสรีแบบอิสระ และจะได้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลง มีระดับการแบ่งเพิ่มขึ้นหนึ่งระดับคือเอลิเมนต์ w,x,y,z ซึ่งจะเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับเพิ่มขึ้นที่ด้านของเอลิเมนต์ D,ii,iv,vi ทำให้ต้องมีการจัดการที่จุดต่อเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อถัดไป



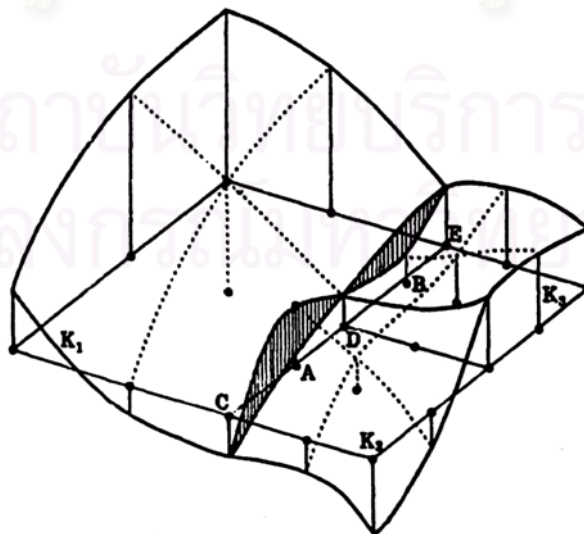
- จุดต่อแบบอิสระ
- จุดต่อแบบถูกบังคับ

รูปที่ 4 ลักษณะข้อกำหนดตามกฎการแบ่งแบบหนึ่งระดับ

Demkowicz และคณะ (1989) ได้เสนอเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบหนึ่งระดับ เช่นเดียวกับ Devloo แต่ในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นถึงเทคนิคในการแบ่งเอลิเมนต์และจัดการกับจุดต่อชนิดที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับ ดังแสดงในรูปที่ 5 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นระหว่างเอลิเมนต์ Demkowicz ได้เสนอสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าของจุดต่อที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับดังสมการที่ 37 ดังนี้

$$u_h(A) = \alpha u_h(C) + \beta u_h(D) + \gamma u_h(E) \quad (37)$$

โดยที่ u_h = ผลเฉลยของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งไฟไนต์เอลิเมนต์
 α, β, γ = สัมประสิทธิ์ค่าความเหมาะสม เพื่อทำให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์



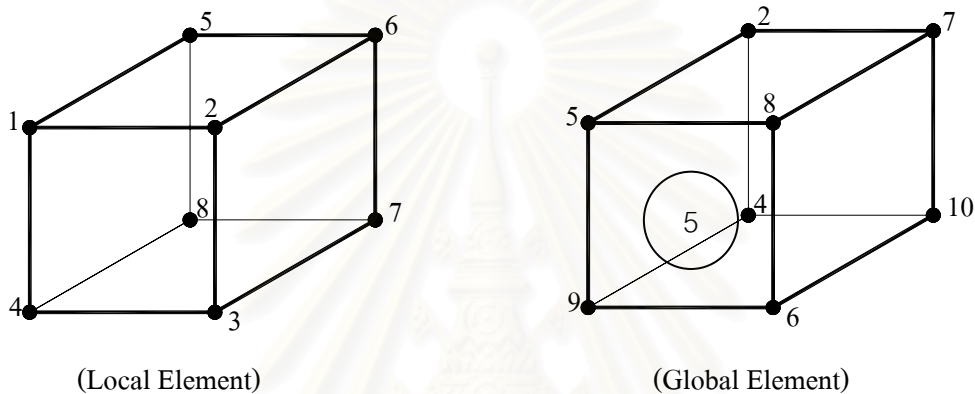
รูปที่ 5 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นระหว่างเอลิเมนต์

บทที่ 3 การพัฒนาโปรแกรม

3.1 ส่วนขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ (Pre-Processing)

ส่วนขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ (Preprocessing) เป็นส่วนการเตรียมข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ (Node Number per Element) ดังแสดงในรูปที่ 6 ดังนี้



รูปที่ 6 แสดงหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์

การเก็บข้อมูลหมายเลขจุดต่อจะเก็บโดยเรียงลำดับหมายเลขจุดต่อตามเอลิเมนต์เฉพาะที่ (Local Element) ซึ่งจากรูปที่ 6 ได้หมายเลขจุดต่อ (Node) ของเอลิเมนต์ที่ 5 ดังนี้

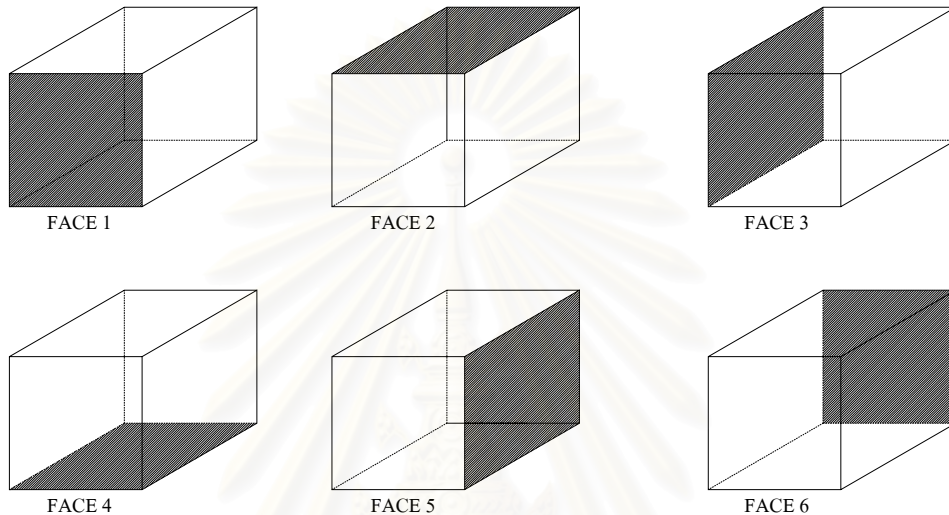
Element No.	Node Number
Local Element=	1 2 3 4 5 6 7 8
5	5 8 6 9 2 7 10 4

2. ข้อมูลหมายเลขพิกัดของจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ (Node Coordinates Number per Element) โดยแสดงหมายเลขจุดต่อและพิกัดในระนาบแกน X,Y,Z ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Node No.	Node Coordinate	X	Y	Z
1		10	-15	5
2		5	20	-10

3. ข้อมูลค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์ (Degree of Refinement) ดังแสดงในรูปที่ 4 ดังนี้ เอลิเมนต์ A มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 1, เอลิเมนต์ iv มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 2 และเอลิเมนต์ Z มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 3

4. ข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียงในแต่ละหน้า (Face) ในแต่ละเอลิเมนต์ (Neighbors Element) โดยเอลิเมนต์หนึ่งเอลิเมนต์จะมีจำนวนหน้าอยู่ 6 หน้า ดังแสดงในรูปที่ 7 โดยเอลิเมนต์ที่ไม่มีเอลิเมนต์ข้างเคียงจะกำหนดให้เป็น 0 ดังแสดงต่อไปนี้

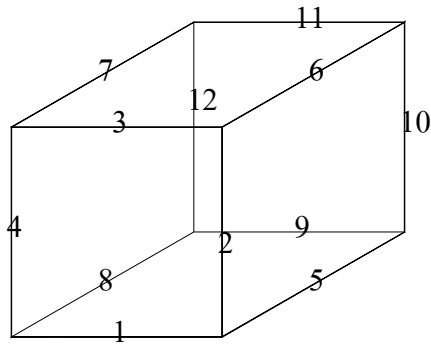


รูปที่ 7 จำนวนหน้า (Face) ในแต่ละเอลิเมนต์

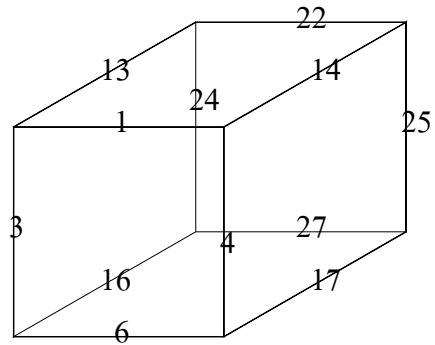
Element No.	Neighbors Element					
	Face= 1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	3	2	5
2	0	2	3	0	0	8

5. ข้อมูลหมายเลขขอบของเอลิเมนต์ (Edge Number of Element) โดยเอลิเมนต์หนึ่งๆ จะมีจำนวนขอบ (Edge) 12 ขอบ ดังแสดงในรูปที่ 8 และจะทำการรับค่าหมายเลขขอบ (Edge) โดยหมายเลขขอบนี้จะเป็นหมายเลขขอบโดยรวม (Global Edge Number) ดังต่อไปนี้

Element No.	Edge Number of Element											
	Edge= 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6	4	1	3	17	14	13	16	27	25	22	24
2	7	5	2	4	18	15	14	17	28	26	23	25



Local Edge Numbers



Global Edge Numbers

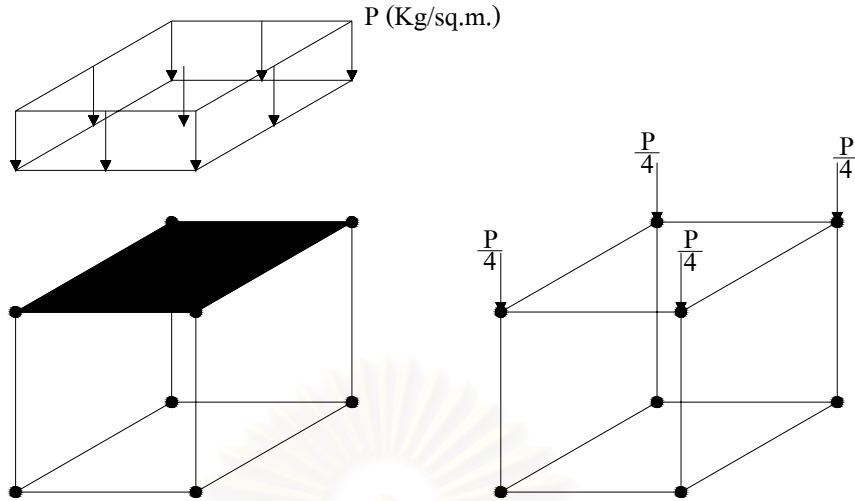
รูปที่ 8 หมายเลขขอบเฉพาะที่ (Local Edge Numbers) และหมายเลขขอบโดยรวม (Global Edge Numbers)

6. ข้อมูลการเคลื่อนตัวของจุดอ่อนขอบเขต (Node Displacement Boundary Condition or Degree of Freedom) เพื่อไม่ให้มีการเคลื่อนตัวในทิศทางใดๆ ที่จุดต่อ โดยต้องระบุจุดต่อที่ต้องการและกำหนดทิศทางที่ต้องการไม่ให้เกิดการเคลื่อนตัว โดยทิศทางที่อิสระกำหนดให้เป็น 1 และทิศทางที่ต้องการจำกัดการเคลื่อนตัวกำหนดเป็น 0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

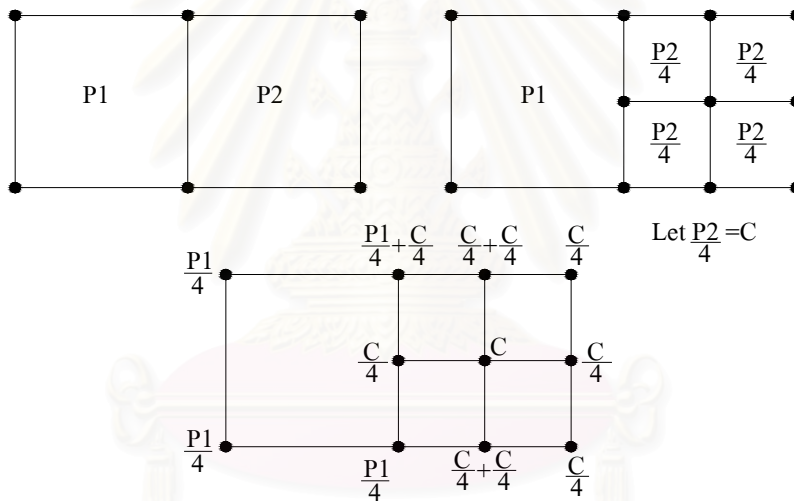
Node No.	X	Y	Z
1	0	1	0
2	1	0	1

7. ข้อมูลแรงกระทำภายนอก (External Load Data) เนื่องจากการงานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับอะแดพทีฟไฟไฟในต์เอลิเมนต์ ผลจากการแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียด ทำให้การที่จะกำหนดแรงกระทำที่จุดต่อหลังจากแบ่งเอลิเมนต์แล้วมีความยุ่งยาก จึงทำการป้อนแรงกระทำเป็นพื้นที่บนหน้า (Face) ของเอลิเมนต์ แล้วจึงทำการกระจายแรงกระทำกระทำที่จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 9,10 และการกำหนดแรงกระทำทำได้โดยกำหนดเฉพาะเอลิเมนต์ที่มีแรงมากกระทำเท่านั้น ดังแสดงต่อไปนี้

Element No.	หน้า(Face) ที่แรงกระทำ	ขนาดแรงกระทำ
1	2	-100
2	2	-100



รูปที่ 9 การป้อนข้อมูลแรงกระทำภายนอก



รูปที่ 10 ข้อมูลแรงกระทำภายนอกกรณีทีเอนิเมนต์ได้รับการแบ่ง (Refinement)

8. ข้อมูลคุณสมบัติของเอลิเมนต์ (Element Material Data) จะทำการกำหนดคุณสมบัติต่างกันไปในแต่ละเอลิเมนต์ โดยกำหนดหมายเลขแสดงชนิดของเอลิเมนต์ (Element Type Number) และข้อมูลคุณสมบัติของเอลิเมนต์ เช่น ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น(E), อัตราส่วนปัวส์ซอง (v) ดังแสดงต่อไปนี้

Element Type No.	E	v
1	3000	0.3
2	400	0.5

Element No.	1	2	3	4	5	6
Element Type No.	1	1	2	1	1	2

9. ข้อมูลจำนวนเอลิเมนต์เริ่มต้นทั้งหมด (Total Initial Element), จำนวนจุดต่อเอลิเมนต์เริ่มต้นทั้งหมด (Total Node) และจำนวนหมายเลขขอบโดยรวมเริ่มต้นทั้งหมด (Total Initial Global Edge Numbers)

10. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของปัญหา (Node on Edge Problem) และข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนผิวของปัญหา (Node Surface) เพื่อใช้เป็นข้อมูลประกอบในการตรวจสอบจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node) รายละเอียดจะกล่าวในเรื่องการตรวจสอบจุดต่อแบบถูกบังคับ โดยหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของปัญหากำหนดให้เป็น 1 แต่ถ้าหากจุดต่อไม่ใช่จุดต่อที่อยู่บนขอบกำหนดให้เป็น 0 ดังแสดงต่อไปนี้

Node No.	Node on Edge/Nodesurface
1	0
2	1

11. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบเอลิเมนต์ (Node on Edge Element) ทั้ง 12 ขอบ เป็นข้อมูลที่จำเป็นต้องมีแต่ไม่ต้องเตรียมค่าข้อมูล เนื่องจากได้ทำการเขียนโปรแกรมให้คำนวณหาหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์อัตโนมัติ จากรูปที่ 6,8 มีวิธีการวิเคราะห์หาจุดต่อบนขอบดังนี้

จากรูปที่ 8 ตำแหน่งที่หมายเลขขอบเฉพาะที่ (Local Edge Numbers) ลำดับที่ 1 เมื่อดูจากรูปที่ 6 ที่ขอบลำดับที่ 1 นี้ จะมีลำดับหมายเลขจุดต่อเฉพาะที่ (Local Node) คือลำดับที่ 4,3 และจะมีหมายเลขจุดต่อโดยรวมจากรูปที่ 6 คือ 9,6 และขอบที่ 2 ถึง 12 สามารถวิเคราะห์ได้ดังที่กล่าวมา ได้ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

Element No.5

Edge	Sequence Node	Node on Edge (Global Node)
1	3 4	6 9
2	2 3	8 6
3	1 2	5 8
4	1 4	5 9
5	3 7	6 10
6	2 6	8 7
7	1 5	5 2

8	4	8	9	4
9	7	8	10	4
10	6	7	7	10
11	5	6	2	7
12	5	8	2	4

12. ข้อมูลหมายเลขจุดที่อยู่บนหน้าเอลิเมนต์ (Node on Face Element) เป็นข้อมูลที่โปรแกรมคำนวณให้โดยอัตโนมัติเหมือนกับข้อมูลหมายเลขจุดที่อยู่บนขอบ และหลักการวิเคราะห์ก็คล้ายกันโดย หมายเลขจุดของหน้า

Element No.5				
Face	Sequence	Node	Node on Face (Global Node)	
1	1	2 3 4	5	8 6 9
2	1	2 5 6	5	8 2 7
3	1	4 5 8	5	9 2 4
4	3	4 7 8	6	9 10 4
5	2	3 6 7	8	6 7 10
6	5	6 7 8	2	7 10 4

3.2 ส่วนวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM Analysis)

เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วนำผลเฉลยที่ได้สู่ขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ต่อไป

3.3 ส่วนขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ (Post-Processing)

เป็นส่วนวิเคราะห์ข้อมูลเพิ่มเติมที่ได้จากการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ และนำเสนอข้อมูลต่างๆในรูปแบบที่เหมาะสม

1. การนำเสนอข้อมูลโครงข่ายเอลิเมนต์
2. การนำเสนอข้อมูลการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ
3. การนำเสนอข้อมูลหน่วยแรงที่จุดต่อ

4. ขั้นตอนการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน (Error Estimation) หลังจากได้ผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบชิ้นส่วนที่มีลักษณะหยาบซึ่งเป็นระบบเริ่มต้น แล้วจึงประมาณค่าความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งต่างๆของปัญหาจากผลเฉลยที่ได้ โดยทำการประมาณค่าทั้งในส่วนเฉพาะที่

(Local) และโดยรวม (Global) แล้วทำการตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนที่ได้ในแต่ละเอลิเมนต์ว่าเอลิเมนต์ใดบ้างที่มีค่าคลาดเคลื่อนเกินกว่าที่ยอมรับหรือไม่ หากค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ ก็ทำการส่งข้อมูลสู่ขั้นตอนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป ซึ่งในส่วนพัฒนาโปรแกรมประกอบไปด้วย

- พัฒนาโปรแกรมในการสร้างหน่วยแรงปรับเรียบในระดับเอลิเมนต์ และหาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่จุดต่อของเอลิเมนต์
- คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนในระดับเอลิเมนต์ โดยใช้นิยามจากสมการที่ 38 ดังนี้

$$\|e_\sigma^*\|_2 = \left(\int_\Omega e_\sigma^{*T} e_\sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

โดยที่

- $\|e_\sigma^*\|_2$ = นอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน
- e_σ^* = เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
- D = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด $\sigma = D\varepsilon$
- Ω = โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (Global)

- คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในระดับทั่วไป (Global) โดยใช้นิยามจากสมการที่ 39 ดังนี้

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e_\sigma^*\|_2}{\sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e_\sigma^*\|_2^2}} \quad (39)$$

โดยที่

- η^* = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)
- $\|U^*\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จาก SPR
- $\|U\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง

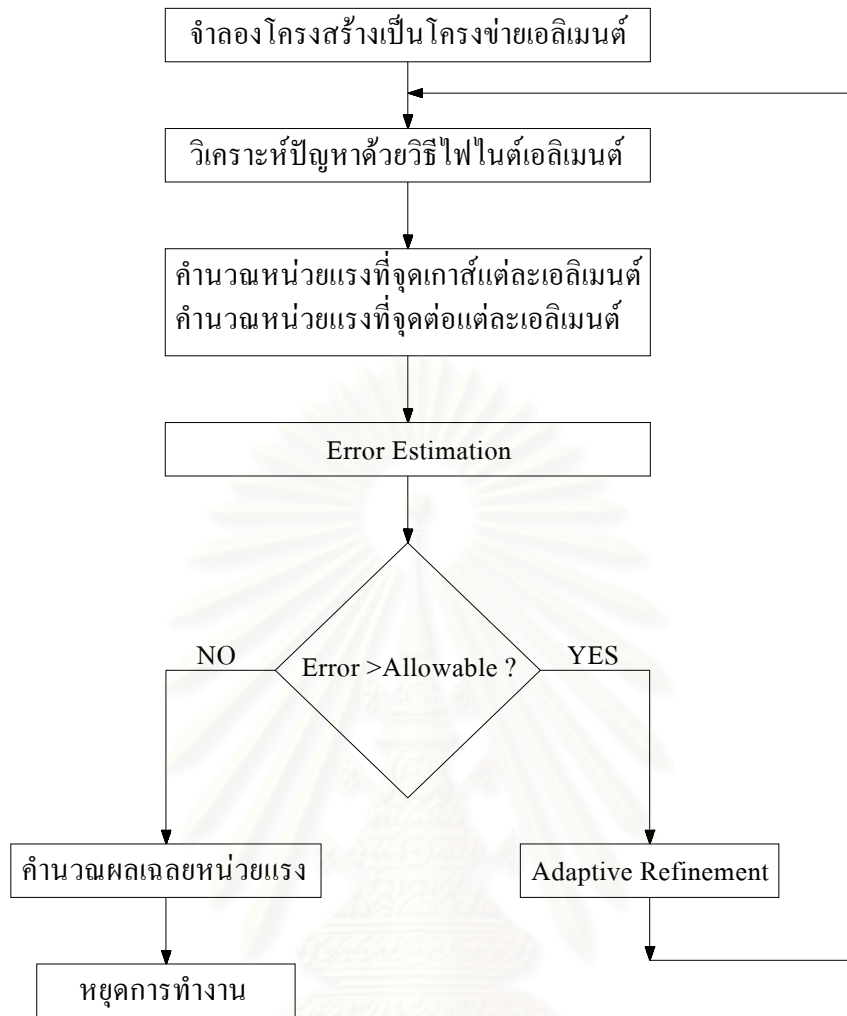
- ตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนที่ได้กับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ และจะทำการเพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนระดับเอลิเมนต์สูงสุด 10 % ของจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด โดยจะทำการส่งข้อมูลสู่ขั้นตอนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

3.4 ส่วนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element)

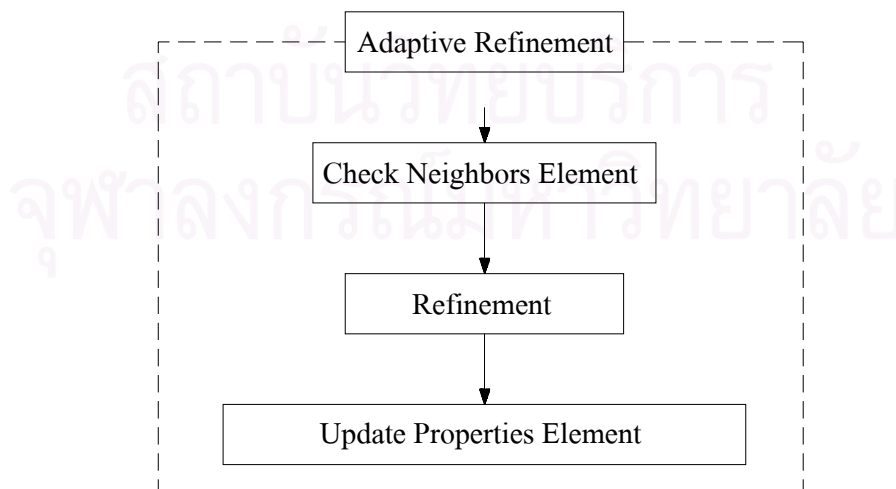
เป็นส่วน โปรแกรมที่ทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับให้เท่านั้น หลังจากที่ทำการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแล้วก็จะทำการส่งข้อมูลไปคำนวณตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้ง เพื่อหาผลเฉลย และตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนอีกครั้ง และทำการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดอีกหากผลเฉลยยังมีค่าความคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าค่าที่ยอมรับให้ ซึ่งก็จะกระทำซ้ำๆ ไปเรื่อยๆ จนกว่าได้ค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในเกณฑ์ที่พอใจ การทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แสดงดังรูปที่ 11 – 18 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การตรวจสอบระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียง ซึ่งแผนภูมิการทำงานได้แสดงในรูปที่ 13 โดยวิธีการตรวจสอบจะรับค่าเอลิเมนต์ที่ต้องการแบ่งให้ละเอียดเนื่องจากมีค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าที่ยอมรับให้มาตรวจสอบระดับการแบ่ง (Degree of Refinement) เทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียงในทุกๆ หน้า (Face) หากระดับการแบ่งของเอลิเมนต์ข้างเคียงน้อยกว่าก็ต้องทำการแบ่งเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นด้วย โดยที่ไม่ต้องพิจารณาว่าค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าค่าที่ยอมรับให้หรือไม่ และต้องตรวจสอบเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นด้วยว่ามีค่าระดับการแบ่งน้อยกว่าเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นหรือไม่ หากน้อยกว่าก็ต้องทำการแบ่งเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นๆ ต่อไป กระทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะครบทุกเอลิเมนต์ที่ต้องทำการแบ่งเพิ่มความละเอียด

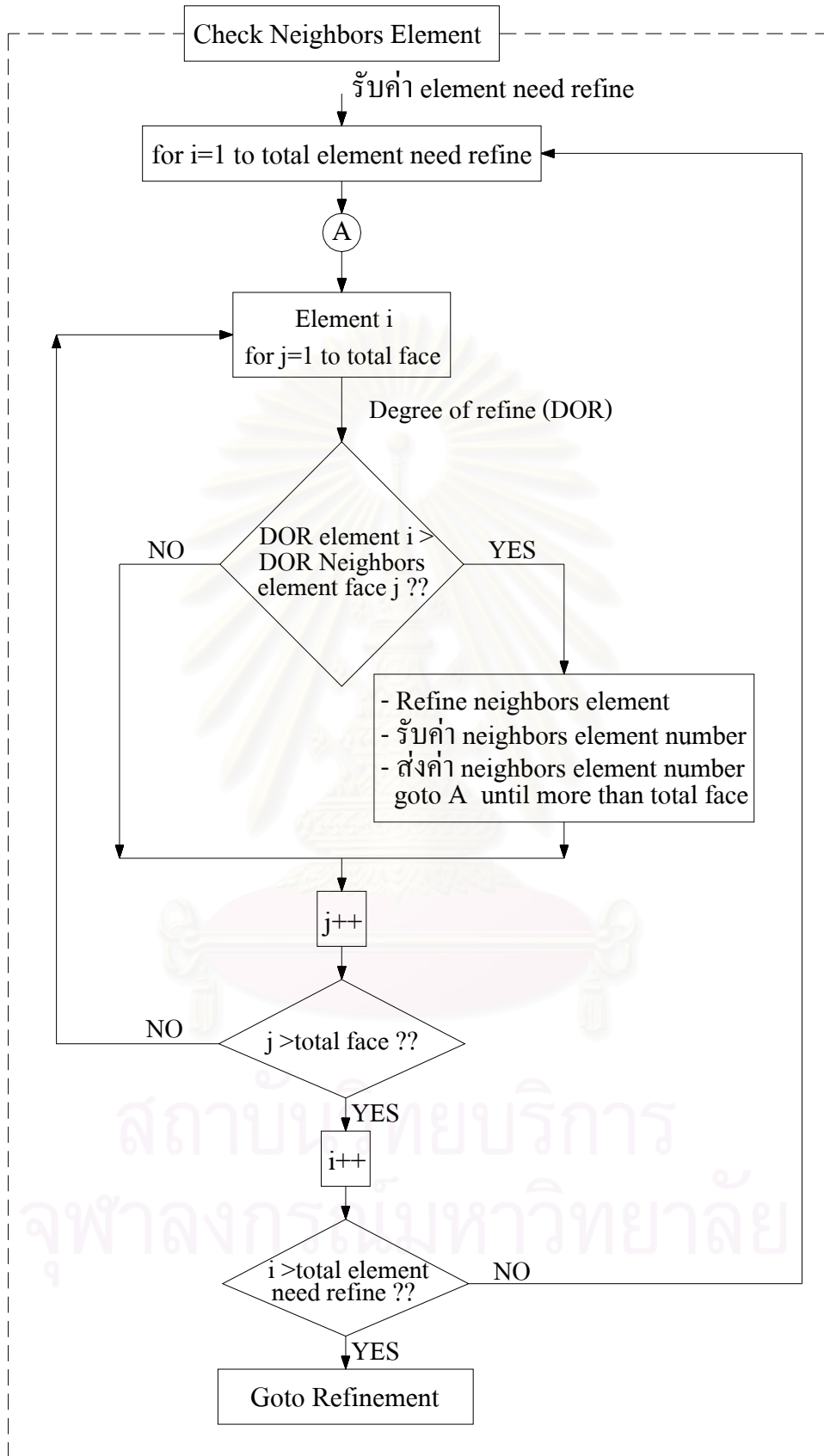
ซึ่งในขณะที่มีการตรวจสอบเอลิเมนต์กับเอลิเมนต์ข้างเคียง ทำให้มีการต้องแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มเติมจากกรณีที่มีค่าระดับการแบ่งน้อยกว่าเอลิเมนต์ข้างเคียง ก็จะทำการเก็บข้อมูลเอลิเมนต์ที่ต้องแบ่งเพิ่ม และเตรียมข้อมูลเอลิเมนต์ที่จะแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดส่งให้ขบวนการแบ่งเอลิเมนต์ (Refinement) ต่อไป



รูปที่ 11 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์

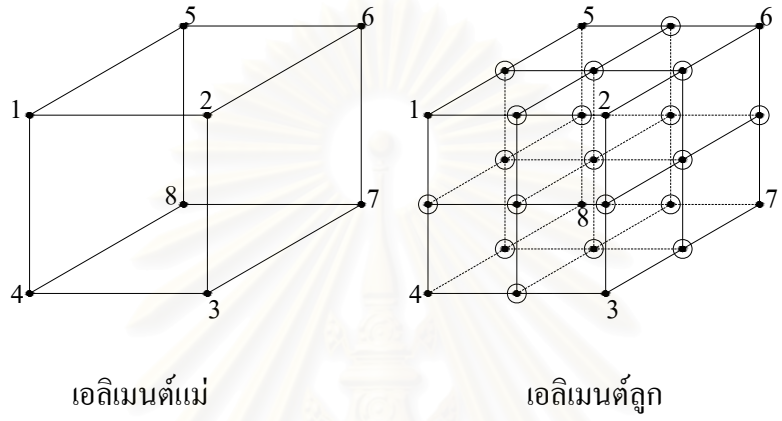


รูปที่ 12 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์



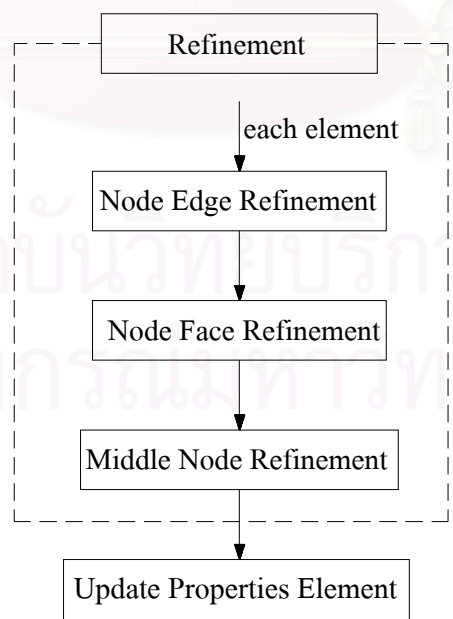
รูปที่ 13 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการตรวจสอบระดับการแบ่งเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ที่พิจารณาเทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียง

2. การแบ่งเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ โดยในขั้นตอนการแบ่งนี้จะทำการแบ่งเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ ในการแบ่งเอลิเมนต์จะเรียกเอลิเมนต์ก่อนที่จะทำการแบ่งว่าเอลิเมนต์แม่ (Mother Element) และเรียกเอลิเมนต์หลังจากการแบ่งแล้วว่าเอลิเมนต์ลูก (Son of Element) ในเอลิเมนต์ลูกที่เกิดขึ้นก็จะเกิดจุดต่อใหม่ มากที่สุดรวมทั้งหมด 27 จุดต่อการแบ่งในหนึ่งเอลิเมนต์ และในจุดต่อ (Node) ที่เกิดขึ้นมีทั้งจุดต่อที่ขอบ (Node on Edge), จุดต่อที่หน้า (Node on Face) ,และจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์แม่ (Node in Middle Mother Element) ดังแสดงในรูปที่ 14



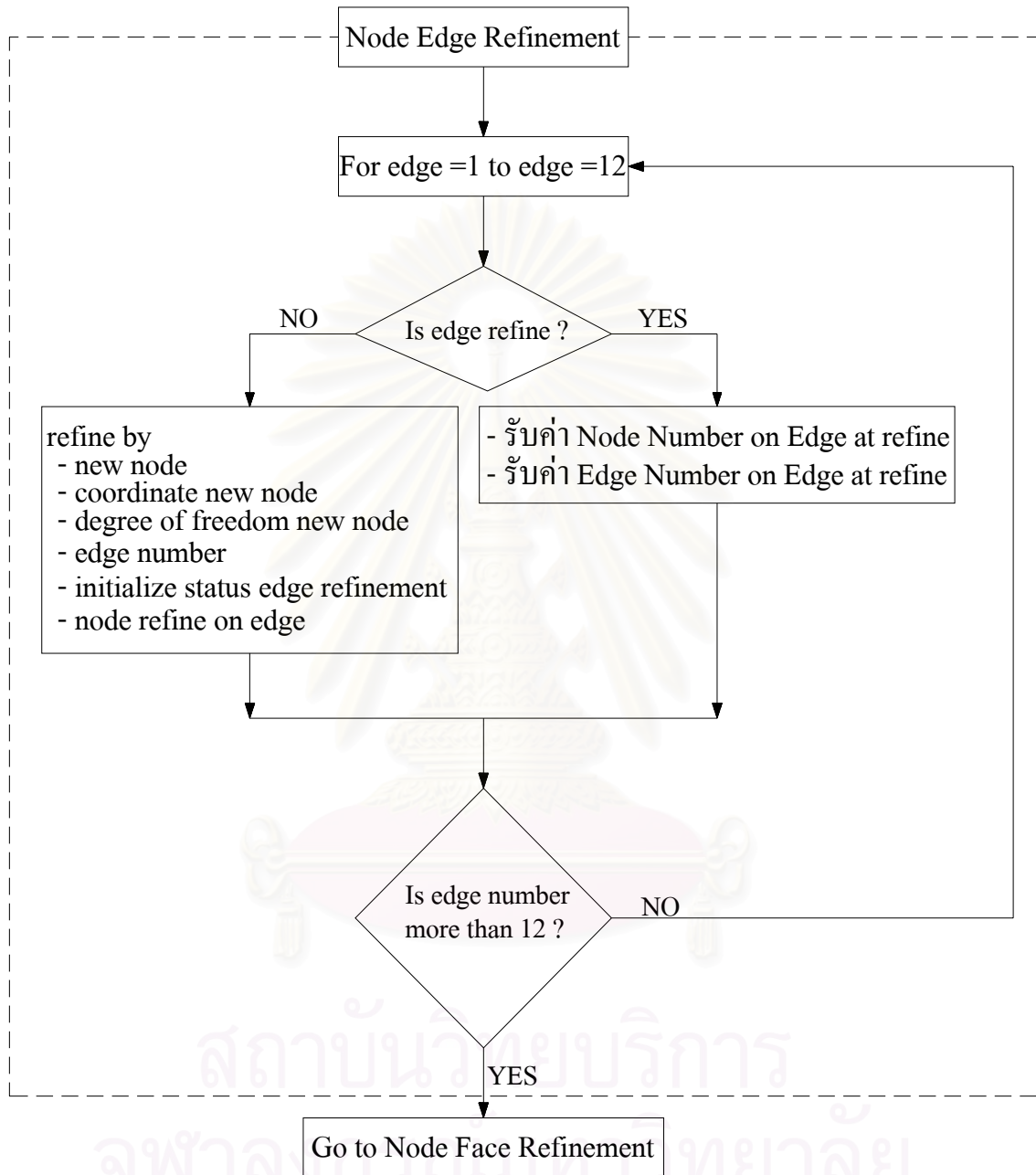
รูปที่ 14 แสดงจุดต่อที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์แม่เพื่อทำให้เอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น

ดังนั้นเพื่อให้มีความง่ายและเป็นระบบระเบียบในการแบ่งเอลิเมนต์จึงแบ่งเป็น 3 ส่วนดังแสดงในรูปที่ 15 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

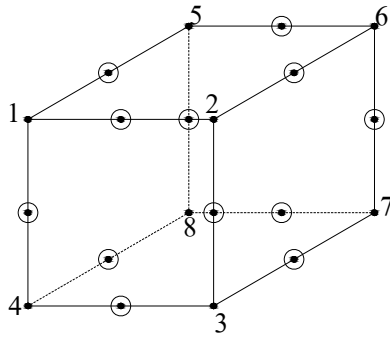


รูปที่ 15 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อทำให้เอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่ขอบ (Node on Edge Refinement) สามารถแสดงดังในรูปที่ 15 เอลิเมนต์ในแต่ละเอลิเมนต์จะมีขอบอยู่ 12 ขอบ ดังนั้นการแบ่งจะเกิดจุดต่อ 12 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 16



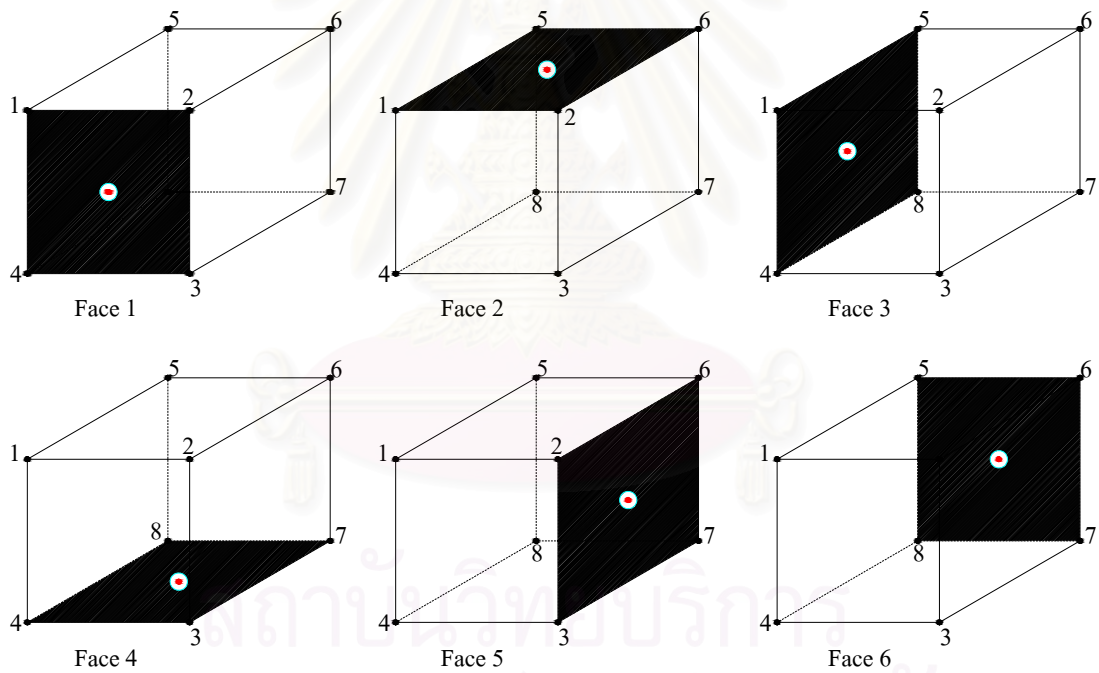
รูปที่ 16 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement)



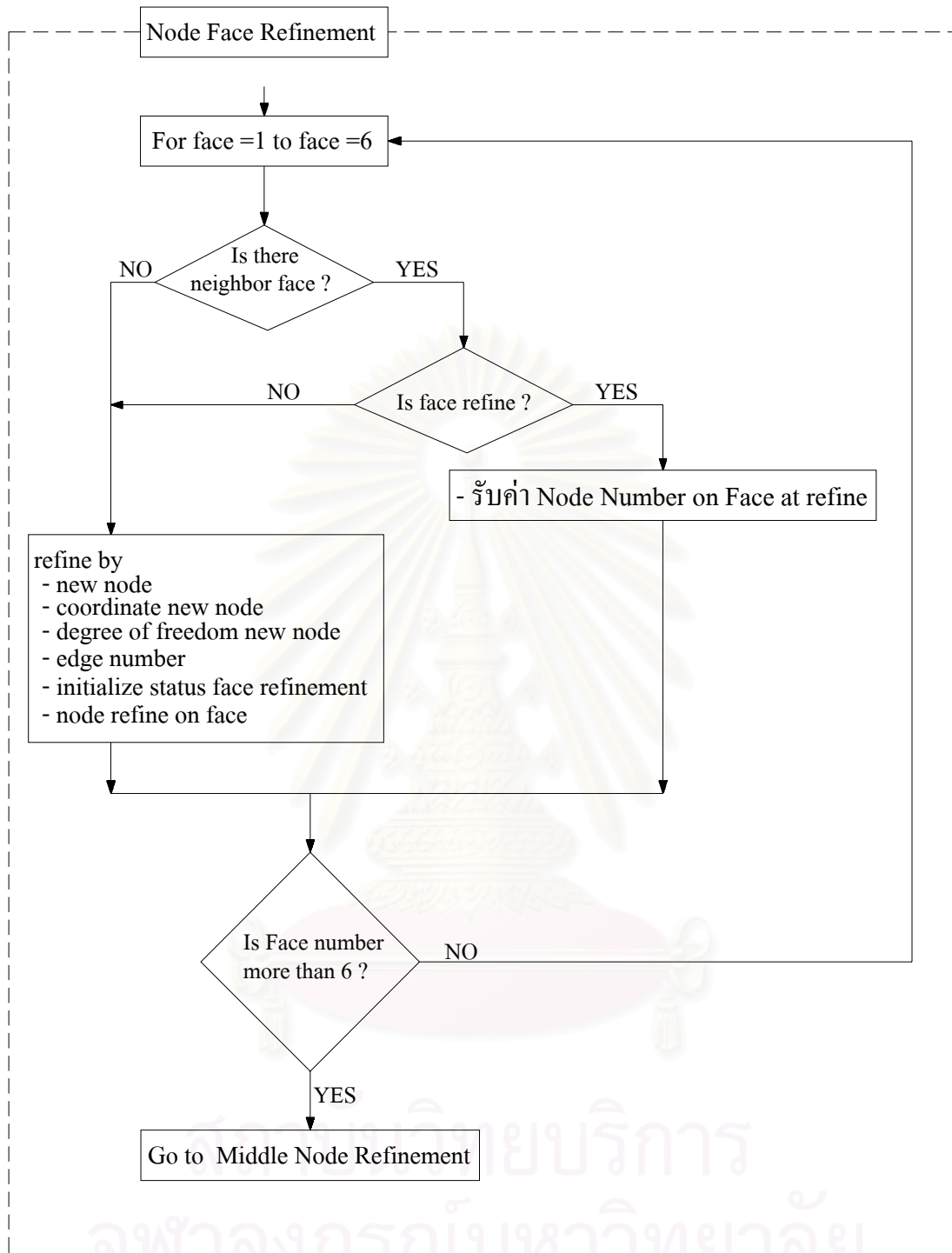
รูปที่ 17 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement)

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่หน้า (Node on Face Refinement) สามารถแสดงดังในรูปที่ 19 เอลิเมนต์ในแต่ละเอลิเมนต์จะมีจำนวนหน้าอยู่ 6 หน้า ดังนั้นการแบ่งจะเกิดจุดต่อ 6 จุดต่อดังแสดงในรูปที่

18

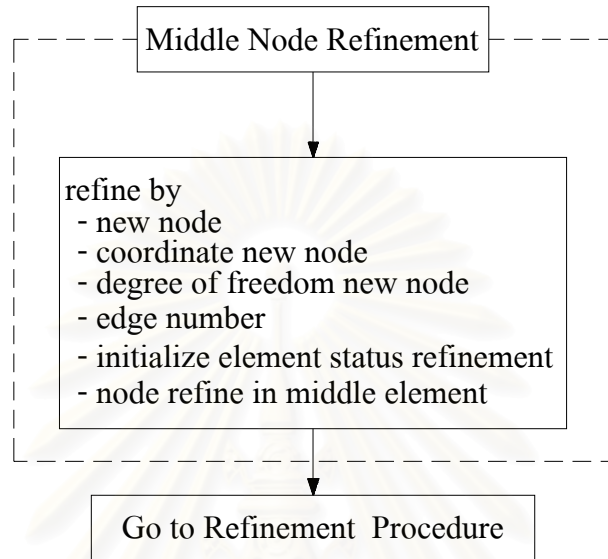


รูปที่ 18 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement)



รูปที่ 19 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement)

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่กลางเอลิเมนต์ (Middle Node Refinement) การแบ่งจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์จะไม่มี ความยุ่งยากซับซ้อน เนื่องจากไม่ต้องทำการตรวจสอบการแบ่งว่าได้รับการแบ่งหรือยัง เพราะจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์จะยังไม่ได้รับการแบ่งเสมอ สามารถแบ่งได้เลย ทำให้เกิดจุดต่อใหม่ขึ้นมา 1 จุดต่อ ซึ่งแผนภูมิการทำงานได้แสดงในรูปที่ 20

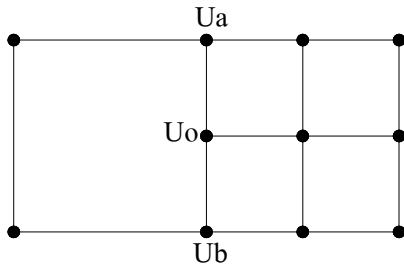


รูปที่ 20 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งจุดต่อกลางของเอลิเมนต์ (Middle Node Refinement)

หลังจากที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์จนครบทั้ง 3 ส่วนและทุกเอลิเมนต์ที่ต้องทำการแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ นั่นคือสิ้นสุดขบวนการแบ่งเอลิเมนต์ และขั้นตอนต่อไปคือการอัปเดตข้อมูลใหม่เพื่อการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

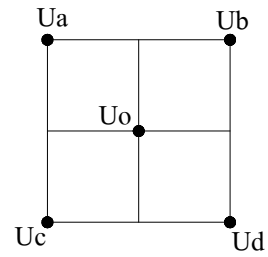
3.การอัปเดตข้อมูล (Update Data) เพื่อการเตรียมข้อมูลให้กับขบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งรายละเอียดในวิธีการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

- พิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์ใหม่ (Coordinate of New Node) และจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ (Control New Node) จากการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีความความคลาดเคลื่อนสูง ทำให้มีโอกาสที่จะเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับ(Constrained Node) ดังนั้นในการที่จะกำหนดค่าพิกัดจุดต่อใหม่ จึงต้องมีการเก็บข้อมูลจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ โดยวิธีการหาค่าพิกัดและจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ แบ่งเป็น 3 ส่วน โดยแต่ละส่วนแยกในแต่ละแกน X,Y,Z สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 21



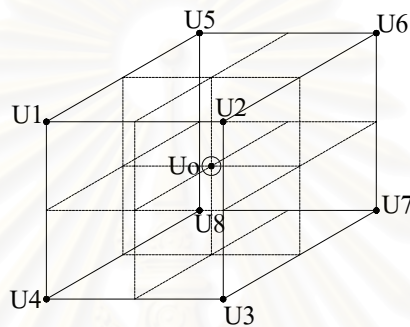
(1) ขอบ (Edge)

$$U_o = \frac{U_a + U_b}{2}$$



(2) หน้า (Face)

$$U_o = \frac{U_a + U_b + U_c + U_d}{4}$$



(3) จุดต่อกลางของเอลิเมนต์แม่ (Middle Node)

$$U_o = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8}{8}$$

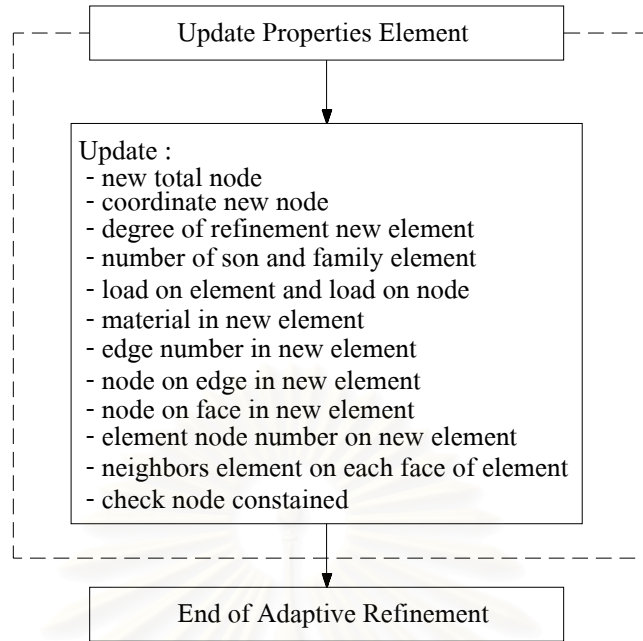
รูปที่ 21 แสดงพิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์ใหม่ (Coordinate of New Node) และจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ (Control New Node)

โดยที่ U_a, U_b, U_c, U_d = จุดต่อที่ควบคุมจุดต่อเอลิเมนต์ลูกบนขอบและบนหน้าเอลิเมนต์แม่

U_o = จุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node)

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8$ = จุดต่อที่ควบคุมจุดต่อเอลิเมนต์ลูกของเอลิเมนต์แม่

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 22 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการเก็บข้อมูลใหม่ของเอลิเมนต์

- หมายเลขเอลิเมนต์ลูกและเอลิเมนต์แม่ โดยในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะทำการบันทึกค่าว่าเอลิเมนต์นี้มีเอลิเมนต์ลูกใดบ้างหรือเอลิเมนต์นี้เป็นเอลิเมนต์แม่ของเอลิเมนต์ใด ซึ่งเอลิเมนต์แม่ที่ได้รับการแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดจะมีเอลิเมนต์ลูกอยู่ 8 ตัว

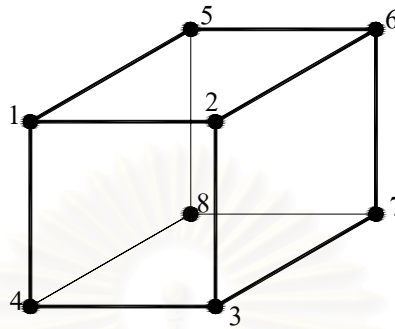
- แรงกระทำบนเอลิเมนต์และแรงกระทำบนจุดต่อ (Load on Element and Load on Node) ได้อธิบายในหัวข้อขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ ในที่นี้จึงไม่อธิบายต่อ

- คุณสมบัติของเอลิเมนต์ (Material Element) ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้ได้สร้างคุณสมบัติของเอลิเมนต์ใหม่ให้มีค่าเหมือนกับเอลิเมนต์แม่

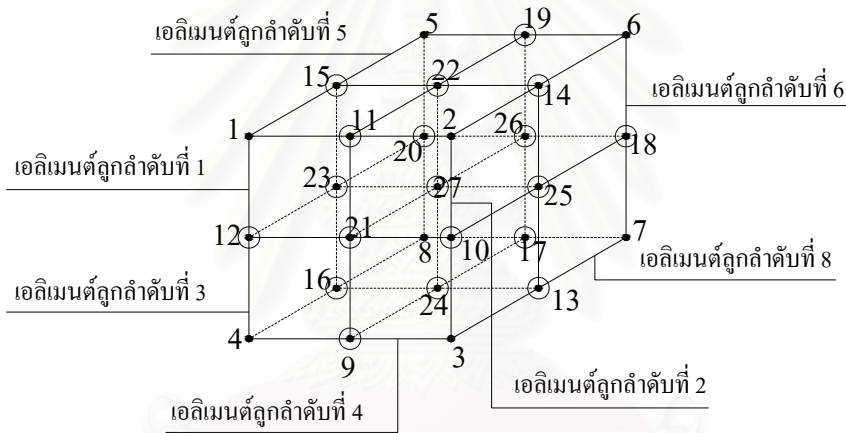
- หมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์ใหม่ (New Element Node Number) การที่จะทำการเก็บข้อมูลนี้ได้ ในขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ต้องมีข้อมูลลำดับของจุดต่อที่แบ่งและลำดับของเอลิเมนต์ลูก และในข้อมูลของลำดับจุดต่อเอลิเมนต์จะเก็บข้อมูลหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 23 และวิธีการเก็บข้อมูลสามารถแสดงได้ดังนี้

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่	ลำดับหมายเลขจุดต่อ
1	11 21 12 15 22 27 23
2	11 2 10 21 22 14 25 27
3	12 21 9 4 23 27 24 16
4	21 10 3 9 27 25 13 24
5	15 22 27 23 5 19 26 20

6	22	14	25	27	19	6	18	26
7	23	27	24	16	20	26	17	8
8	27	25	13	24	26	18	7	17



Before Refinement



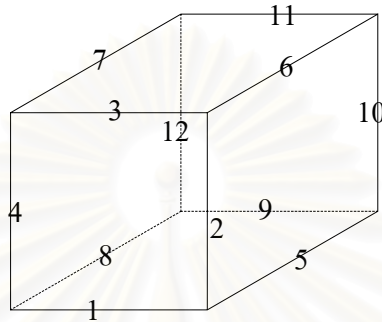
After Refinement

รูปที่ 23 แสดงลำดับของจุดต่อเอลิเมนต์และลำดับของเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่งและหลังแบ่งเอลิเมนต์

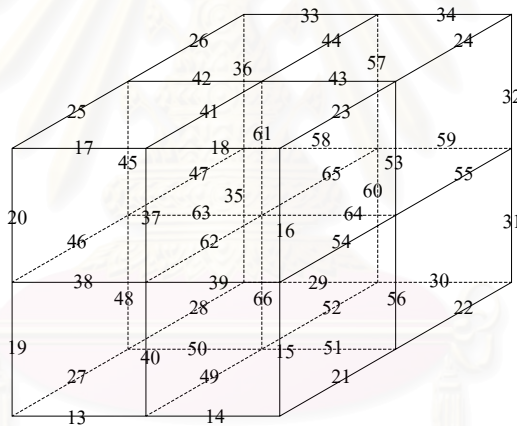
- หมายเลขขอบของเอลิเมนต์ใหม่ (Edge Number of New Element) โดยในการเก็บข้อมูลนี้จะต้องมีลำดับของหมายเลขขอบเอลิเมนต์เฉพาะที่ก่อนแบ่งและลำดับของหมายเลขขอบเอลิเมนต์เฉพาะที่หลังแบ่ง ดังแสดงในรูปที่ 24 และในข้อมูลลำดับขอบของเอลิเมนต์จะเก็บข้อมูลหมายเลขขอบโดยรวมของเอลิเมนต์ลูก ดังต่อไปนี้

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่	ลำดับหมายเลขขอบเอลิเมนต์ลูก
1	38 37 17 20 62 41 25 46 63 61 42 45
2	39 16 18 37 54 23 41 62 64 53 43 61
3	13 40 38 19 49 62 46 27 50 66 63 48

4	14	15	39	40	21	54	62	49	51	56	64	66
5	63	61	42	45	65	44	26	47	58	57	33	36
6	64	53	43	61	55	24	44	65	59	32	34	57
7	50	66	63	48	52	65	47	28	29	60	58	35
8	51	56	64	66	22	55	65	52	30	31	59	60



Before Refinement



After Refinement

รูปที่ 24 แสดงลำดับหมายเลขขอบเอลิเมนต์แม่และลำดับขอบเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่งและหลังแบ่ง

- หมายเลขจุดต่อบนขอบของเอลิเมนต์ใหม่ (Node on Edge of New Element) จากรูปที่ 23 และ 24 สามารถนำมาพิจารณาหาหมายเลขจุดต่อบนขอบของเอลิเมนต์ ได้ดังนี้ (เนื่องจากข้อมูลมีมากจึงยกตัวอย่างเพียง 1 ตัวอย่าง)

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่ 1

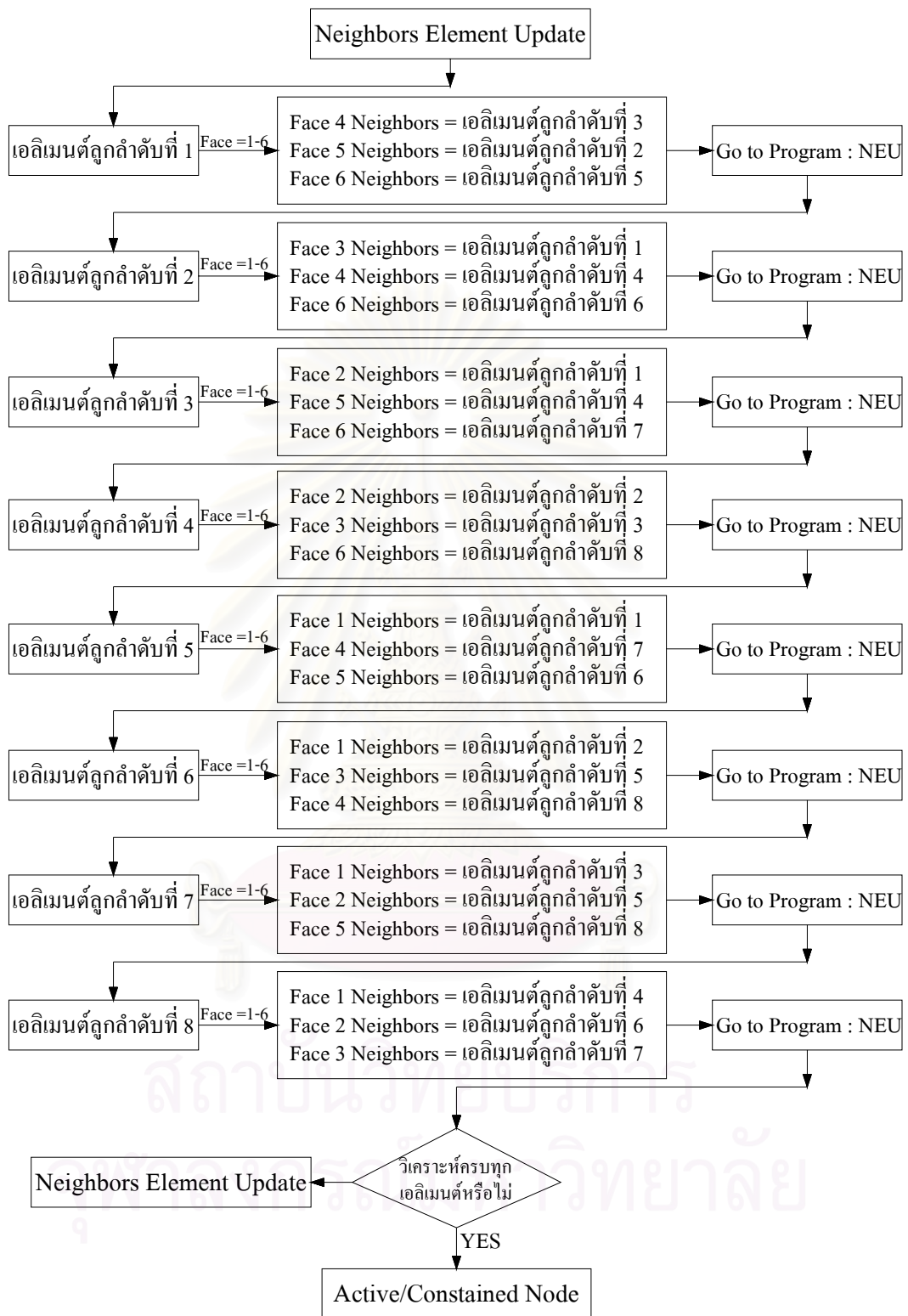
ลำดับขอบเอลิเมนต์	ลำดับหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์บนขอบ	
38	21	12
37	11	21
17	1	11
20	1	12
62	21	27
41	11	22
25	1	15
46	12	23
63	27	23
61	22	27
42	15	22
45	15	23

- หมายเลขจุดต่อบนหน้าของเอลิเมนต์ใหม่ (Node on Face of New Element) จากรูปที่ 23 และ 24 สามารถนำมาพิจารณาหาหมายเลขจุดต่อบนหน้าของเอลิเมนต์ ได้ดังนี้ (เนื่องจากข้อมูลมีมากจึงยกตัวอย่างเพียง 1 ตัวอย่าง)

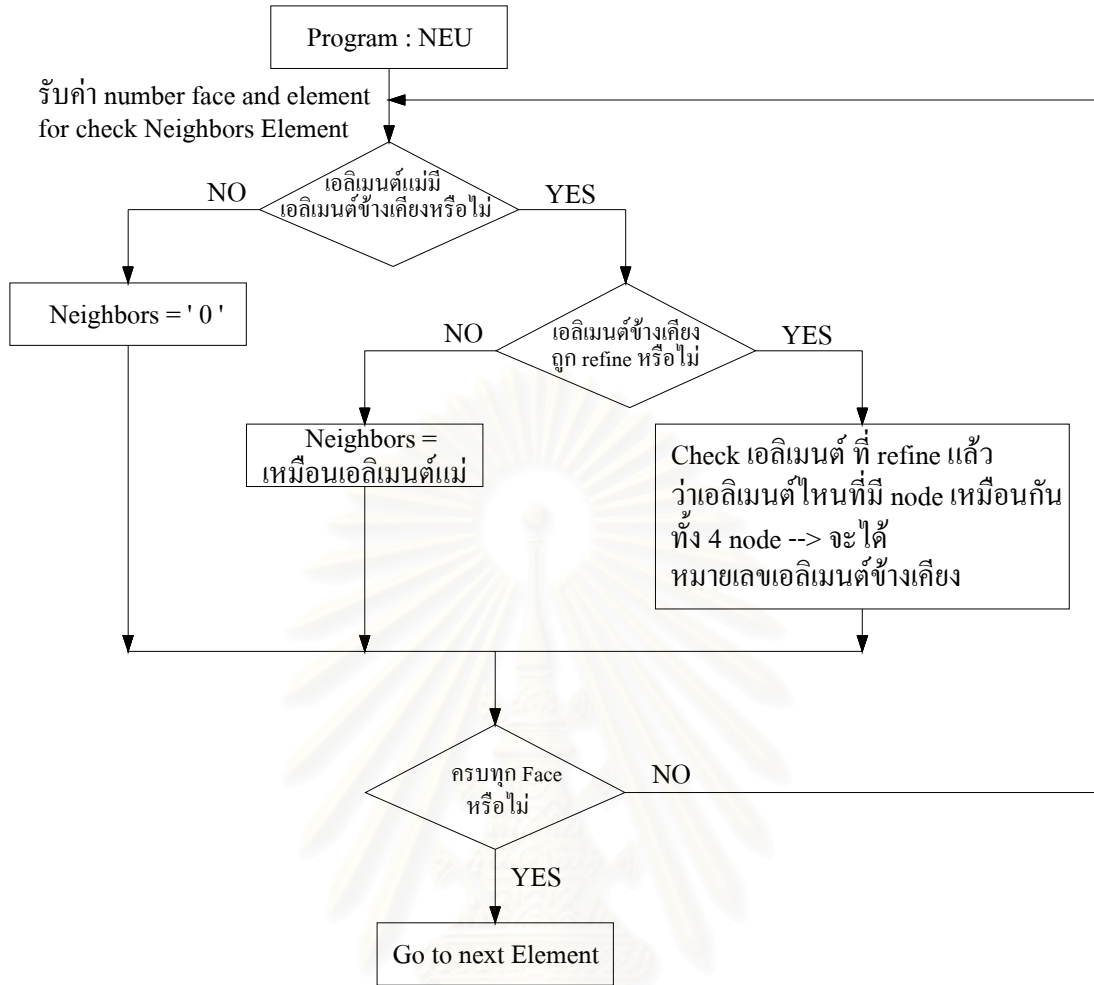
เอลิเมนต์ลูกลำดับที่ 1

หน้า(Face)เอลิเมนต์ที่	ลำดับหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์บนหน้า			
1	1	11	21	12
2	1	11	15	22
3	1	12	15	23
4	21	12	27	23
5	11	21	22	27
6	15	22	27	23

- หมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbor Element) หลักการวิเคราะห์เพื่อหาเอลิเมนต์ข้างเคียงหลังจากมีการแบ่งเอลิเมนต์ สามารถดูได้จากรูปที่ 25 และ 26 ดังแสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ 25 แผนภูมิการอัปเดตข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element)



รูปที่ 26 แผนภูมิการอัพเดทข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element) (ต่อ)

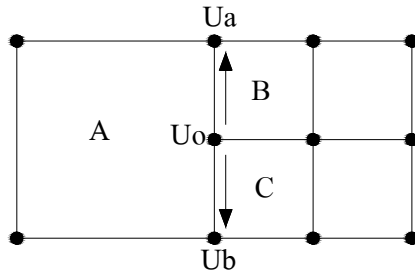
- หมายเลขจุดต่อที่ถูกบังคับ (Constained Node) และการจัดการจุดต่อที่ถูกบังคับ เนื่องจากวิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ต้องทำการแบ่ง(Refine) เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนสูงเท่านั้น ทำให้เอลิเมนต์หลังการแบ่งแล้วจะเกิดสภาพ Nonconformimg mesh เป็นผลทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรง ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการจัดการความต่อเนื่องของหน่วยแรงดังนี้

1. กรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่ขอบ (Constained Node on Edge) ดังแสดงในรูปที่ 27 หน่วยแรงที่จุดต่อ 0 ของเอลิเมนต์ A จะถูกกระจายหน่วยแรงไปยังจุด a,b ของเอลิเมนต์ A ดังนี้

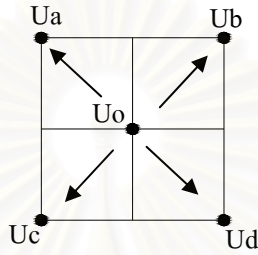
$$\text{หน่วยแรงที่จุด (a,b)} = (\text{หน่วยแรงที่จุด O})/2$$

2. กรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่หน้า (Constained Node on Face) ดังแสดงในรูปที่ 28 หน่วยแรงที่จุดต่อ 0 ของหน้าเอลิเมนต์ A จะถูกกระจายหน่วยแรงไปยังจุด a,b,c,d ของเอลิเมนต์ A ดังนี้

$$\text{หน่วยแรงที่จุด (a,b,c,d)} = (\text{หน่วยแรงที่จุด O})/4$$

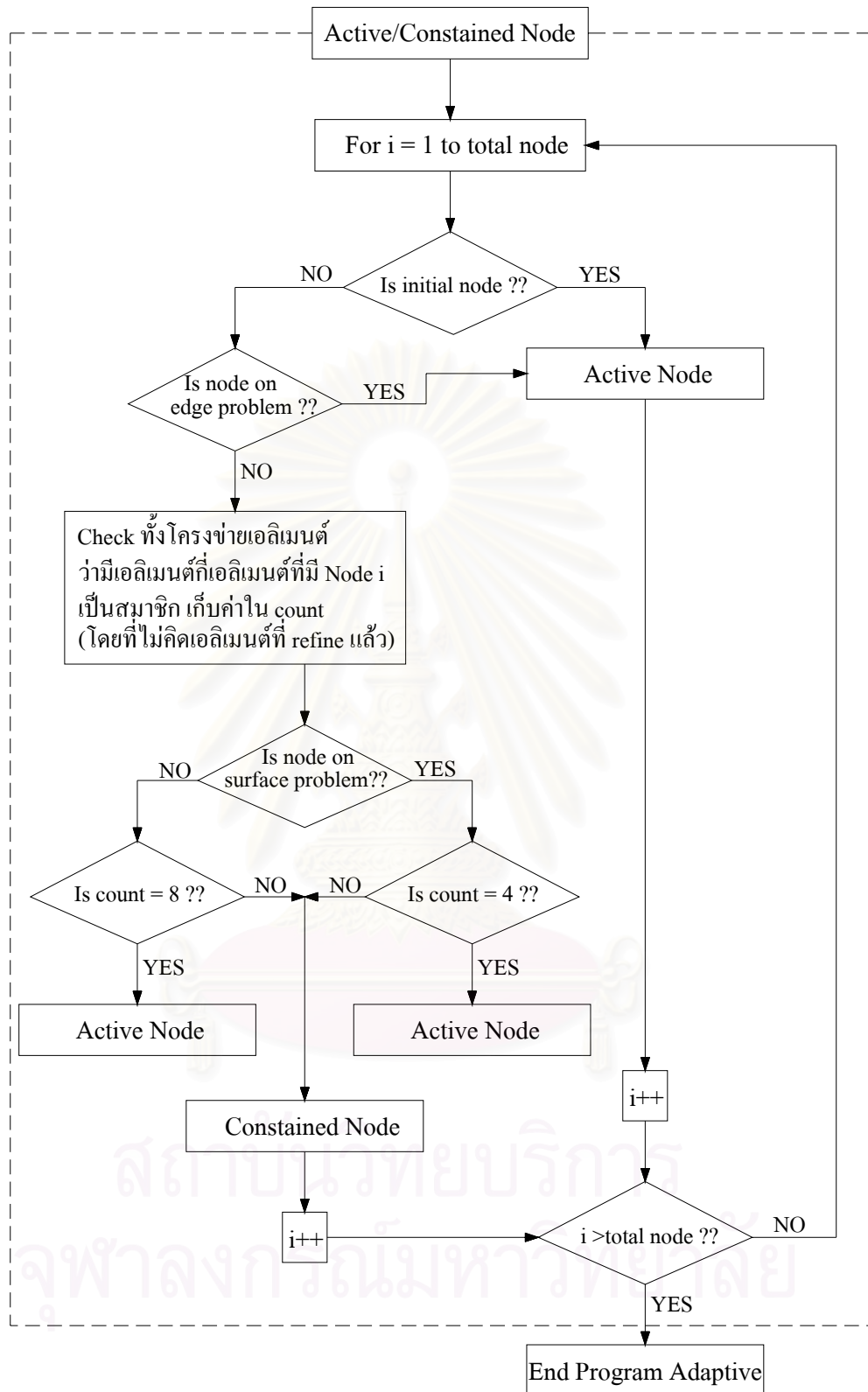


รูปที่ 27 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่ขอบ (Constained Node on Edge)



รูปที่ 28 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่หน้า (Constained Node on Face)

สำหรับการวิเคราะห์เพื่อหาจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node) หลังจากมีการแบ่งเอลิเมนต์ สามารถดูได้จากรูปที่ 29 ดังแสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ 29 แผนภูมิการวิเคราะห์จุดต่อที่ถูกบังคับ (Constained Node)

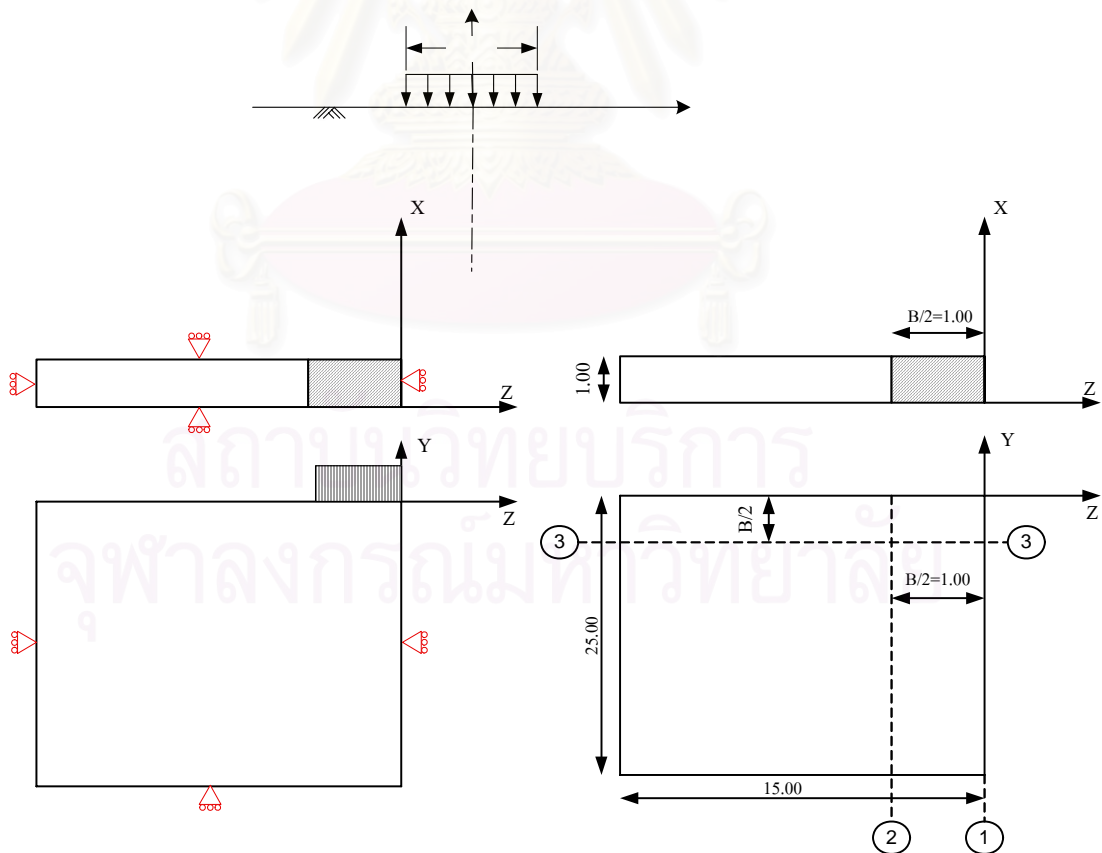
บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

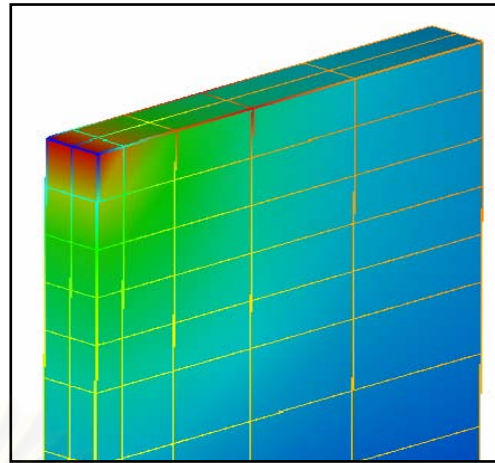
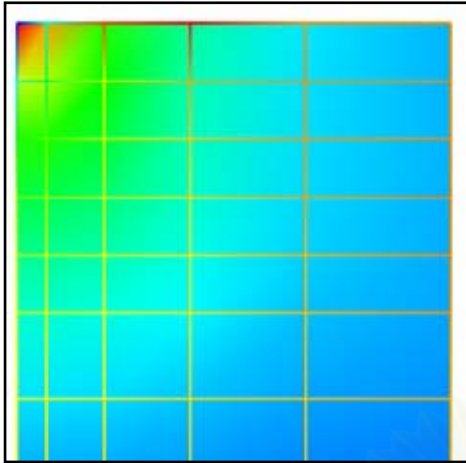
ในส่วนนี้จะทำการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัย โดยทำการวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ และเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์โปรแกรมอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์กับผลเฉลยที่ได้จากวิธีอีลาสติก (Elastic Solution) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมหาดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 ฐานรากแผ่แบบสตริป (Strip Footing)

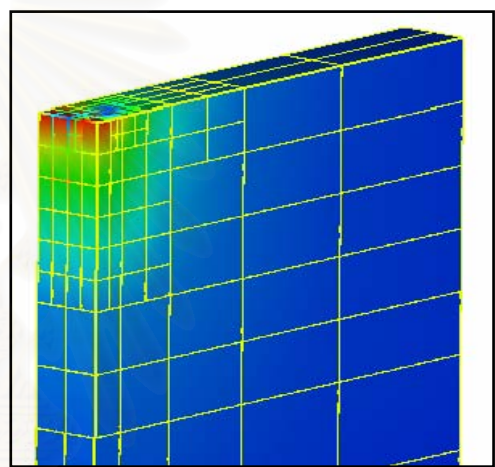
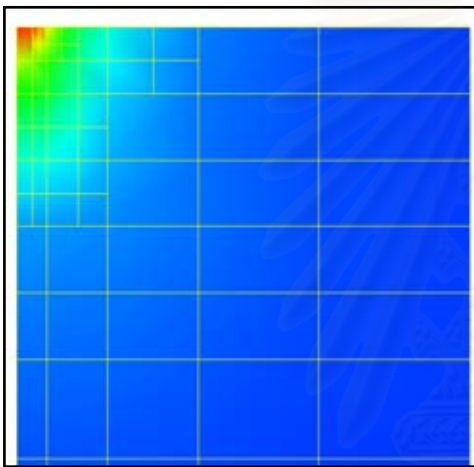
ทดสอบใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาฐานรากแบบสตริป ซึ่งเป็นฐานรากแผ่ที่มีความยาวด้านยาว ยาวกว่าความยาวด้านสั้นมากๆ ทำให้ความเครียดในทิศทางตามด้านยาวของฐานรากมีค่าเป็นศูนย์ และในการตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยด้วยวิธีอีลาสติก (Elastic Solution) ซึ่งเสนอโดย Poulos และ Davis (1974) โดยสมมุติฐานเบื้องต้นคือ ฐานรากเป็นแบบอ่อนตัว (Flexible Footing) เพื่อให้แรงกระทำแบบสม่ำเสมอ (Uniform Load) และดินมีคุณสมบัติแบบอีลาสติกเชิงเส้น (linear Elastic) และฐานแข็ง (Rigid Base) อยู่ในระดับลึกมากๆ



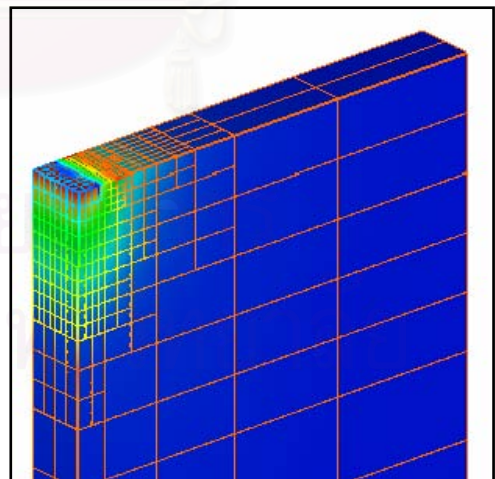
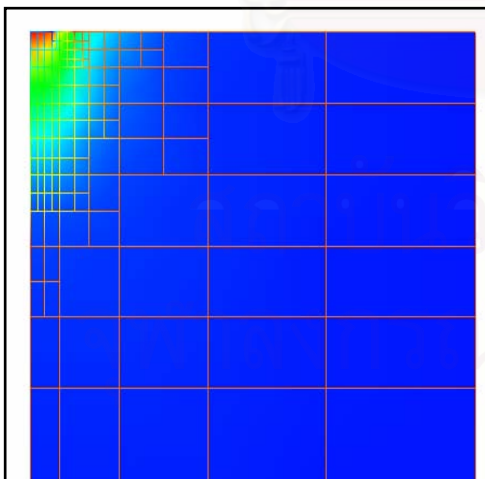
รูปที่ 30 ขนาดโครงสร้างและหน้าตัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแบบสตริป



(ก) โครงข่ายเริ่มต้น (Initial Mesh)

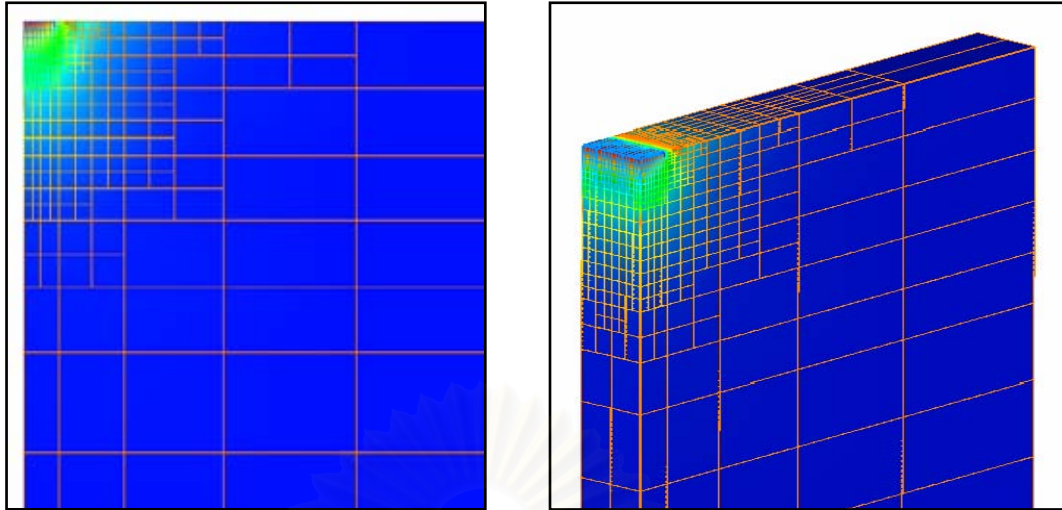


(ข) โครงข่ายที่ 2 (Mesh 2)

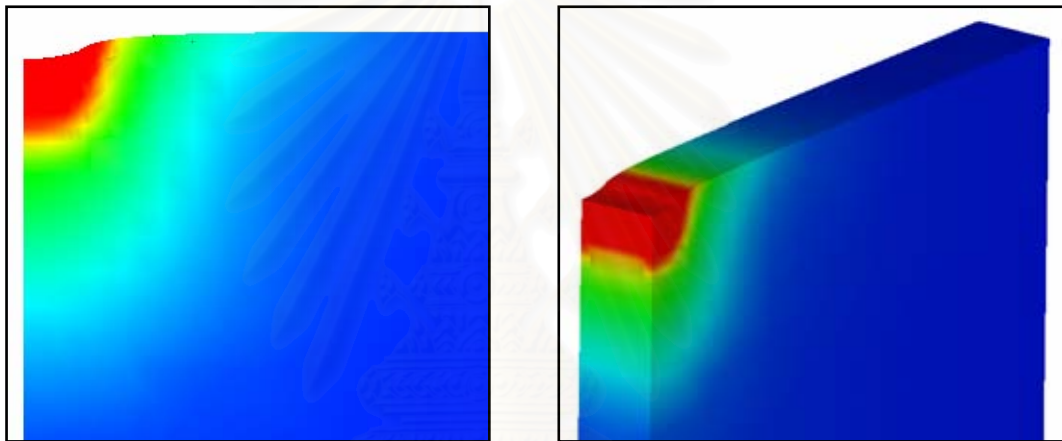


(ค) โครงข่ายที่ 3 (Mesh 3)

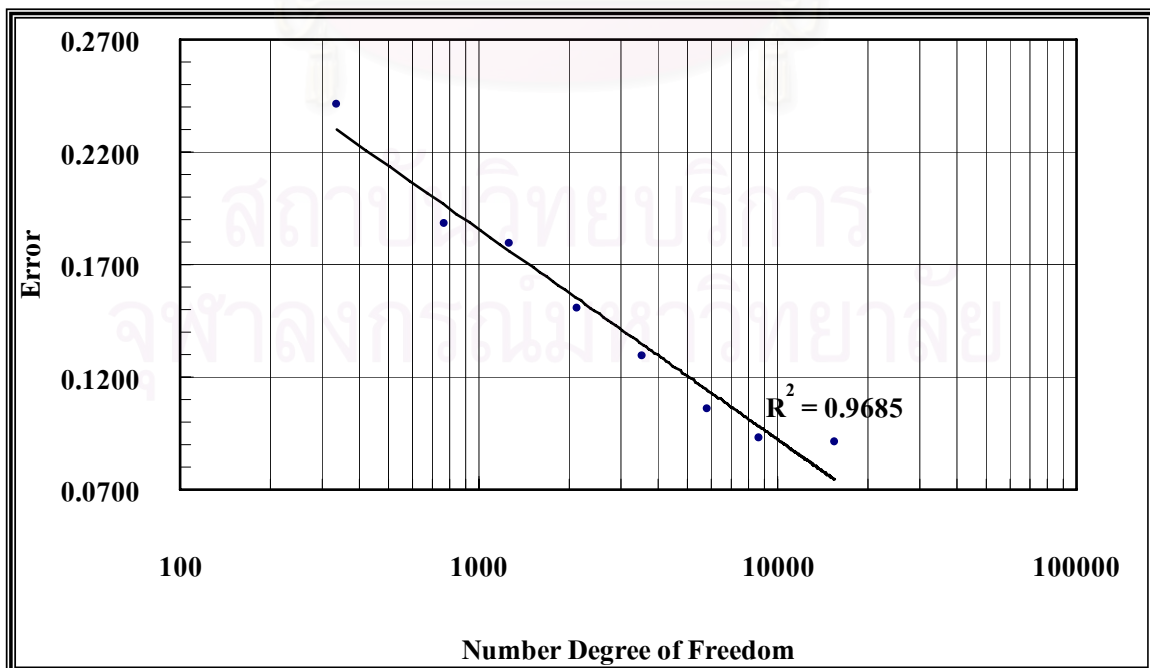
รูปที่ 31 โครงข่ายการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสตริป



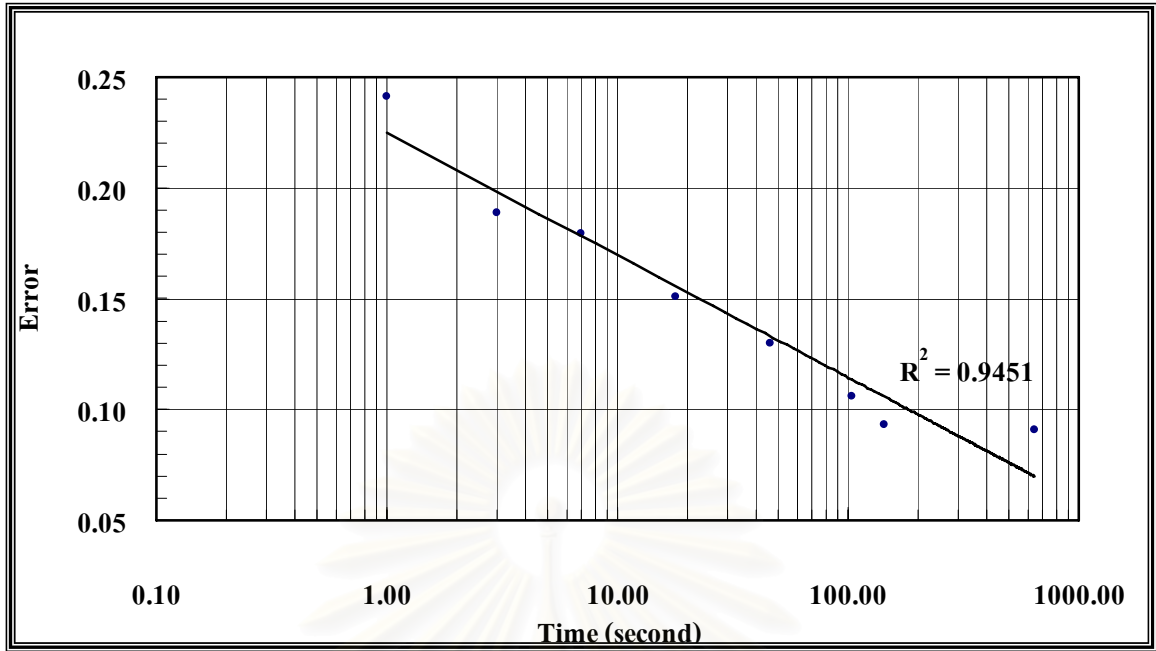
รูปที่ 32 โครงข่ายสุดท้ายหลังการอะแดปทีฟ ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสตริป



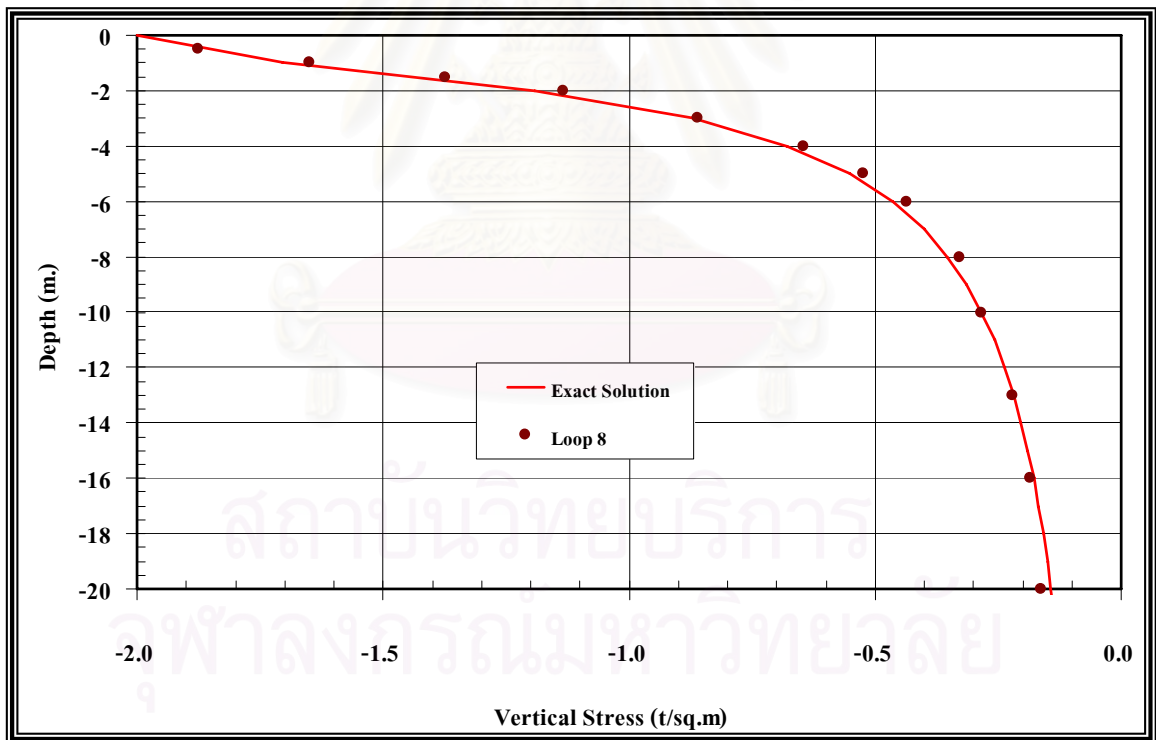
รูปที่ 33 แสดงรูปโครงข่ายเอลิเมนต์หลังการเคลื่อนตัวและรูปความเค้นในแนวดิ่ง ฐานรากแบบสตริป



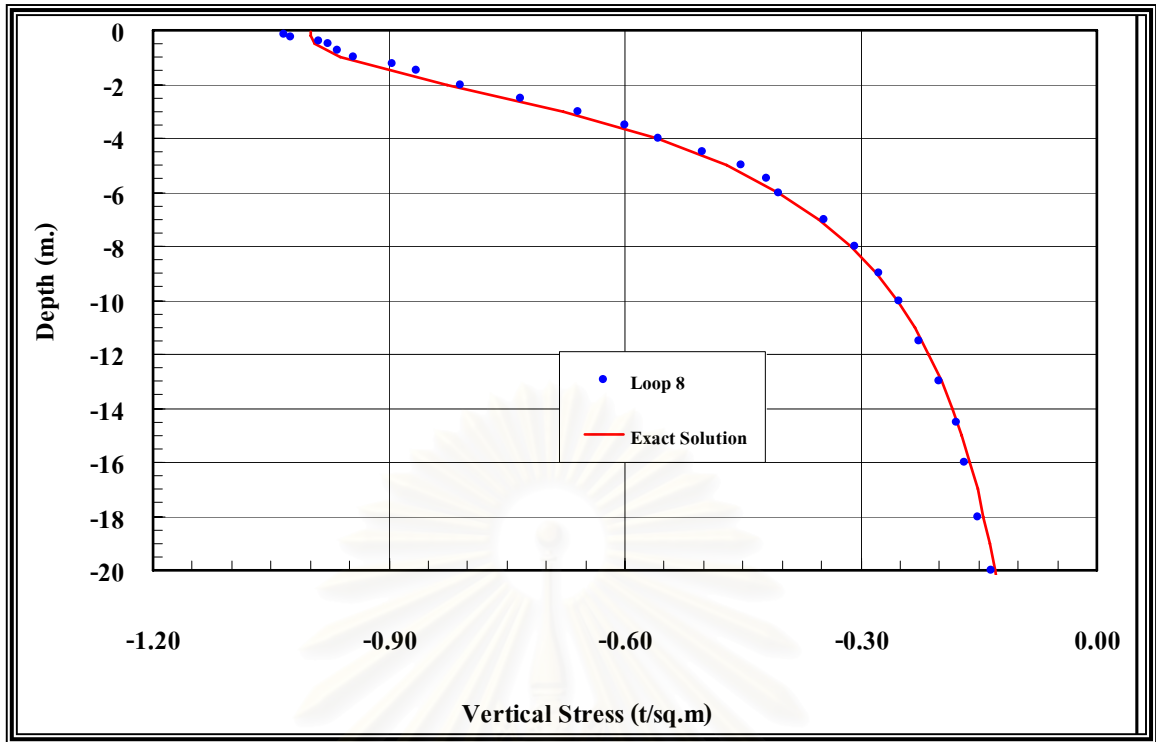
รูปที่ 34 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับ Degree of Freedom ของฐานรากแผ่นแบบสตริป



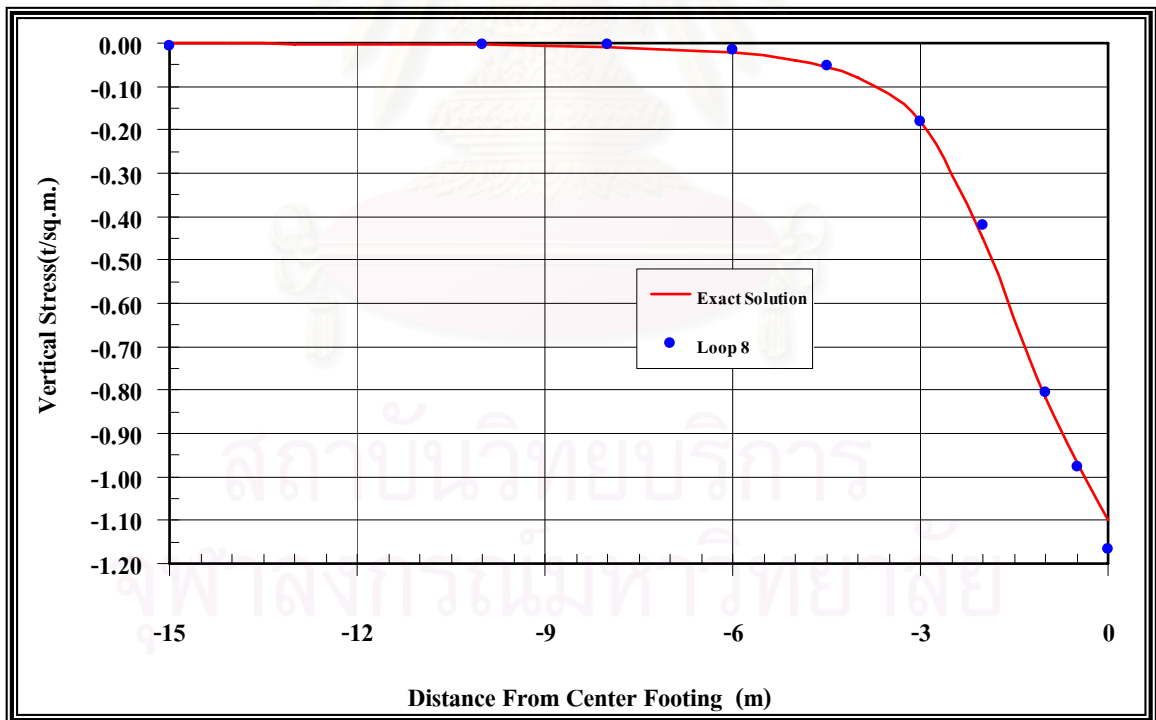
รูปที่ 35 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาของฐานรากแผ่แบบสตริป



รูปที่ 36 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 1-1 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก



รูปที่ 37 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 2-2 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก



รูปที่ 38 หน่วยแรงในแนวตั้งที่หน้าตัด 3-3 เทียบกับผลเฉลยจากอิลาสติก

โครงข่าย

เนื่องจากโครงข่ายมีคุณสมบัติการสมมาตร การวิเคราะห์จะใช้เพียงครึ่งหนึ่งของโครงสร้างเพื่อลดขนาดข้อมูลและเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ นอกจากนี้เนื่องจากความเครียดตามแนวแกน x เป็นศูนย์ จึงสามารถลดขนาดความหนาโครงสร้างในแนวแกน x ซึ่งในตัวอย่างนี้ใช้เพียง 1.00 ม.

ผลการวิเคราะห์

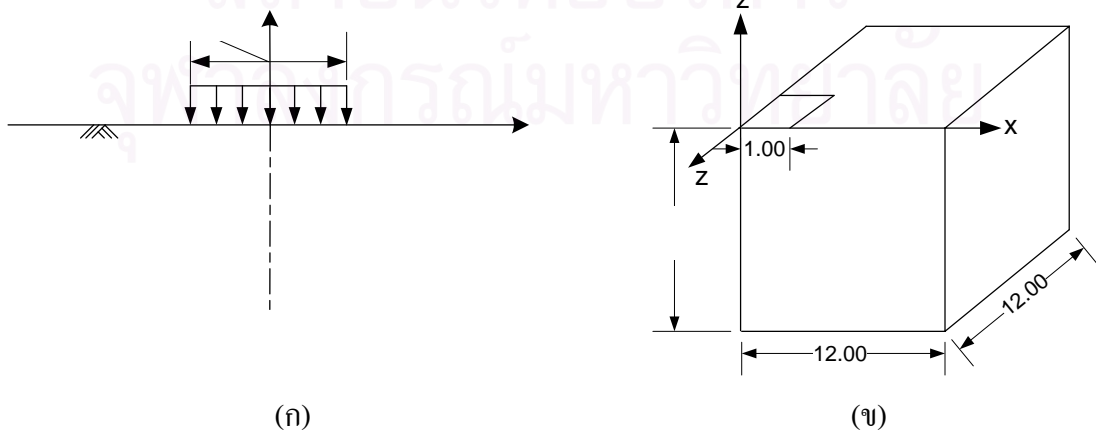
ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากโปรแกรมอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้นำเสนอเป็นรูปแบบโครงข่ายของตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสตริปดังแสดงในรูปที่ 31 และ 32 โดยแสดงโครงข่ายเริ่มต้น, โครงข่ายในแต่ละรอบของการปรับปรุงผลเฉลย นำเสนอโครงข่ายหลังการเคลื่อนตัวและรูปความเค้นในแนวตั้ง (Contour Stress) ดังแสดงในรูปที่ 33

จากรูปที่ 34 แสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับระดับค่าความอิสระ (Error and Degree of Freedom, DOF) พบว่ายิ่งค่า DOF มีค่ามากขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าลดลงและจากรูปที่ 35 แสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรม

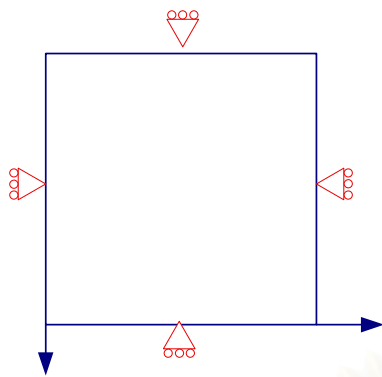
ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยนำเสนอกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นในแนวตั้ง (Vertical Stress) เทียบกับความลึกที่หน้าตัดต่างๆกับผลเฉลยอีลาสติก (Elastic Solution) ดังแสดงในรูปที่ 36-38 พบว่าผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยอีลาสติกมาก

4.2 ฐานรากแผ่นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Square Footing)

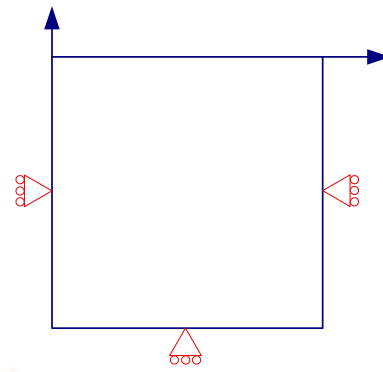
ทดลองใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นวิเคราะห์ปัญหาฐานรากแผ่นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพื่อเปรียบเทียบหน่วยแรงและการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่างๆ ที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยด้วยวิธีอีลาสติก เสนอโดย Poulos และ Davis (1974) โดยสมมุติฐานเบื้องต้นคือ ฐานรากเป็นแบบอ่อนตัว (Flexible Footing) เพื่อให้แรงกระทำเป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform Load) ดินมีคุณสมบัติเชิงเส้น (Linear Elastic) และฐานแข็ง (Rigid Base) อยู่ในระดับลึกมากๆ



รูปที่ 39 ขนาดโครงสร้างและหน้าตัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส



(ก) รูปมุมมองบน (Top View)



(ข) รูปด้านข้าง

รูปที่ 40 แสดงเงื่อนไขขอบเขตปัญหา (Boundary Condition)

โครงข่าย

จากคุณสมบัติการสมมาตรของปัญหา สามารถลดขนาดของปัญหาโดยวิเคราะห์เพียงหนึ่งในสี่ ส่วนของโครงสร้างทั้งหมด ซึ่งขอบเขตของโครงสร้างที่เลือกใช้งานวิจัยได้แสดงดังรูปที่ 39,40 และในรูปที่ 41 และ 42 แสดงโครงข่ายเอลิเมนต์ของแต่ละรอบของการเพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ และโครงข่ายสุดท้ายหลังการวิเคราะห์อะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์

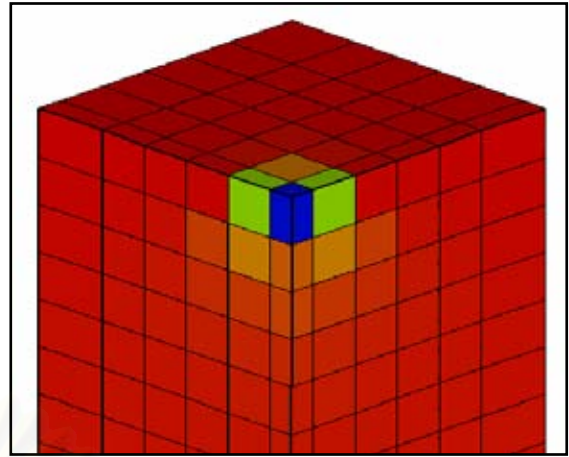
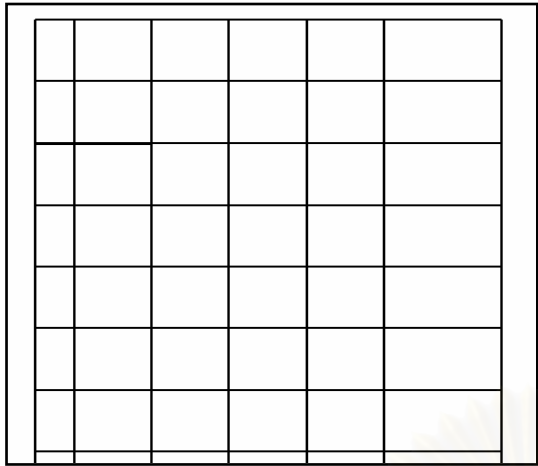
ผลการวิเคราะห์

จากรูปที่ 43 แสดงรูปโครงข่ายเอลิเมนต์หลังการเคลื่อนตัว (Mesh Deformation) และ รูปความเค้นในแนวตั้ง (Stress Contour) ตัวอย่างฐานรากแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

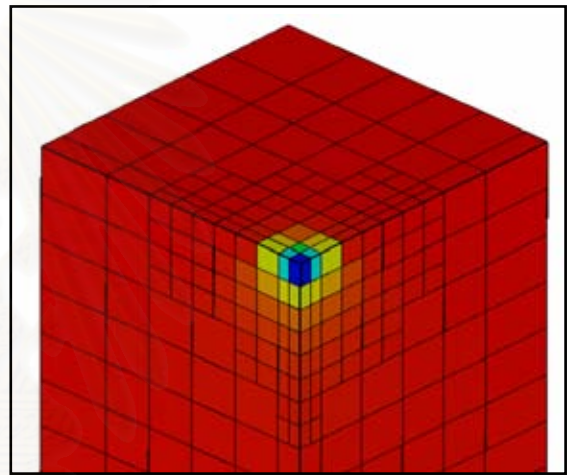
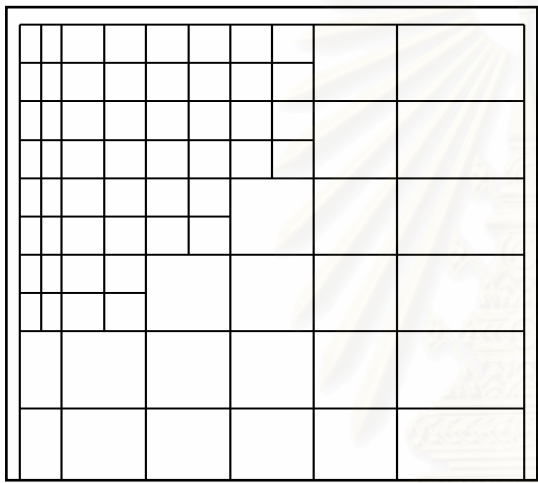
จากรูปที่ 44 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับค่า Degree of Freedom พบว่า เมื่อค่า Degree of Freedom มีค่ามากขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนจะมีลดลงเช่นเดียวกับตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสตริป จากรูปที่ 45 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลา พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาเป็นสัดส่วนผกผันกัน กล่าวคือยิ่งค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลง เวลาที่ใช้ในการรันโปรแกรมยังมีค่ามากขึ้น

จากรูปที่ 46 แสดงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งตามแกนกลางและหน่วยแรงในแนวตั้งของตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส เปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอีลาสติก (elastic solution) สามารถอธิบายได้ดังนี้

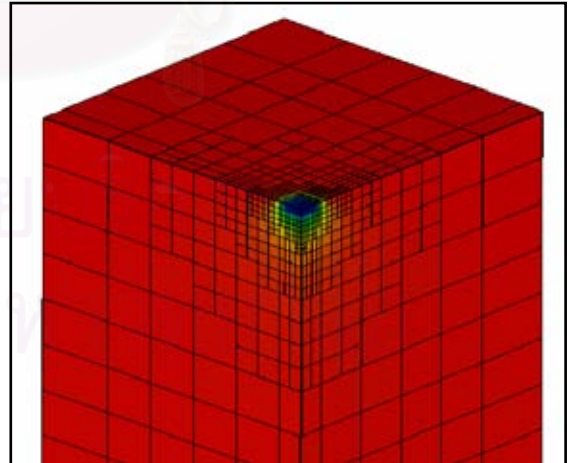
ค่าการเคลื่อนตัวในแนวตั้ง (vertical deflection) ตามแนวแกนกลาง (center line) หรือแกน Y ผลที่ได้จากโปรแกรมอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ที่พัฒนาขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของวิธีอีลาสติก



(ก) โครงข่ายเริ่มต้น (Initial Mesh)

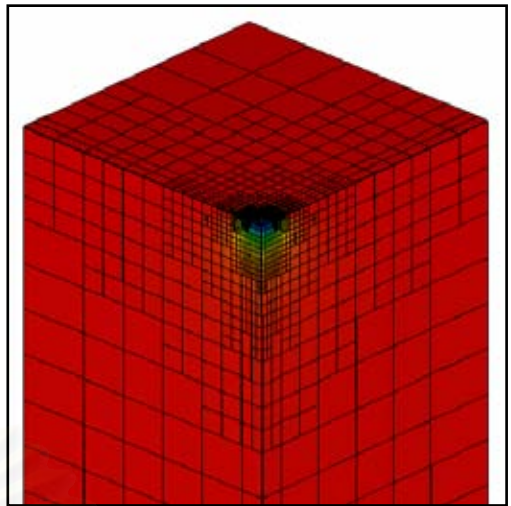
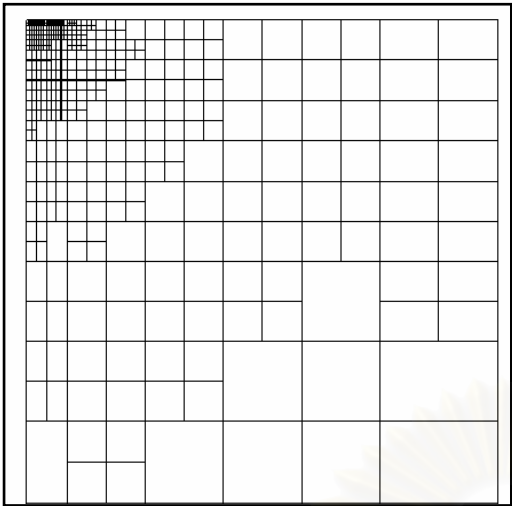


(ข) โครงข่ายที่ 2 (Mesh 2)

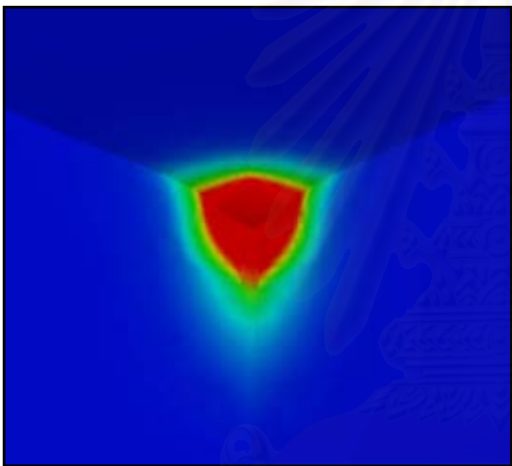


(ค) โครงข่ายที่ 3 (Mesh 3)

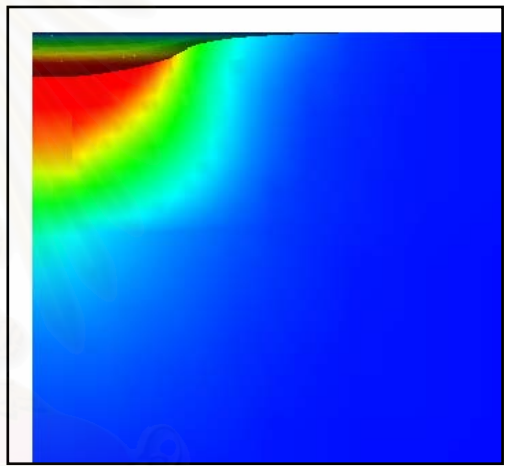
รูปที่ 41 โครงข่ายในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส



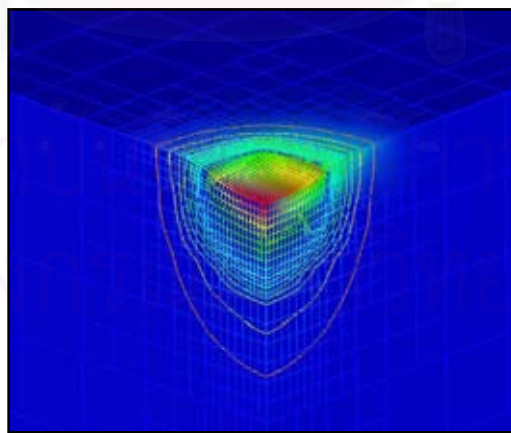
รูปที่ 42 โครงข่ายสุดท้ายหลังการอะแดปทีฟ ในการวิเคราะห์ตัวอย่างฐานรากแผ่นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส



(ก)

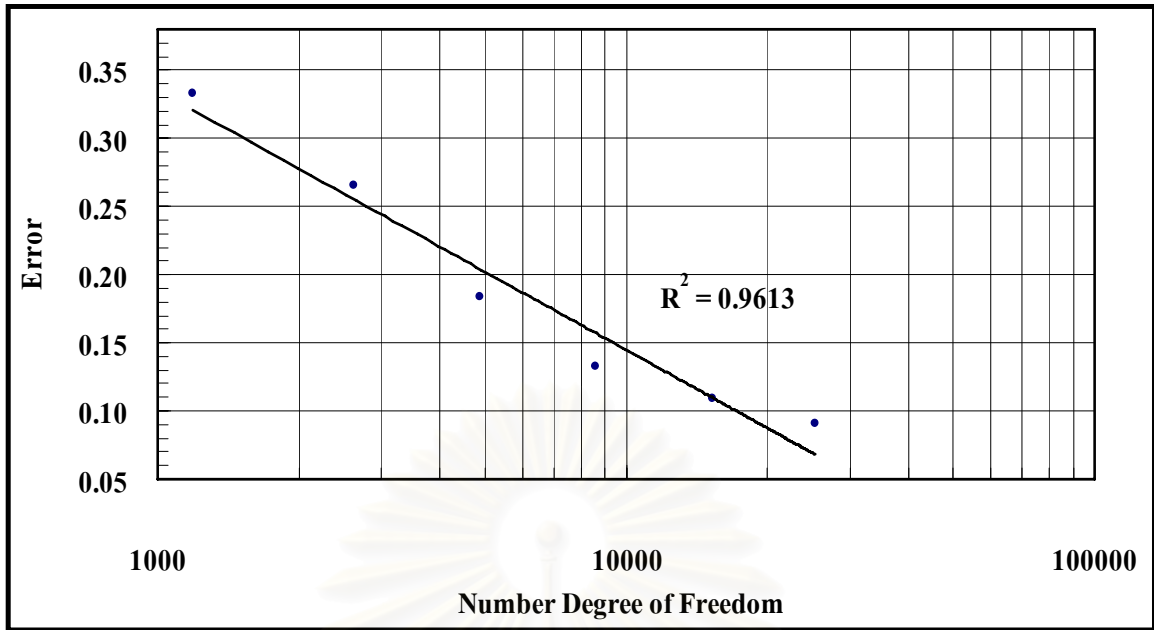


(ข)

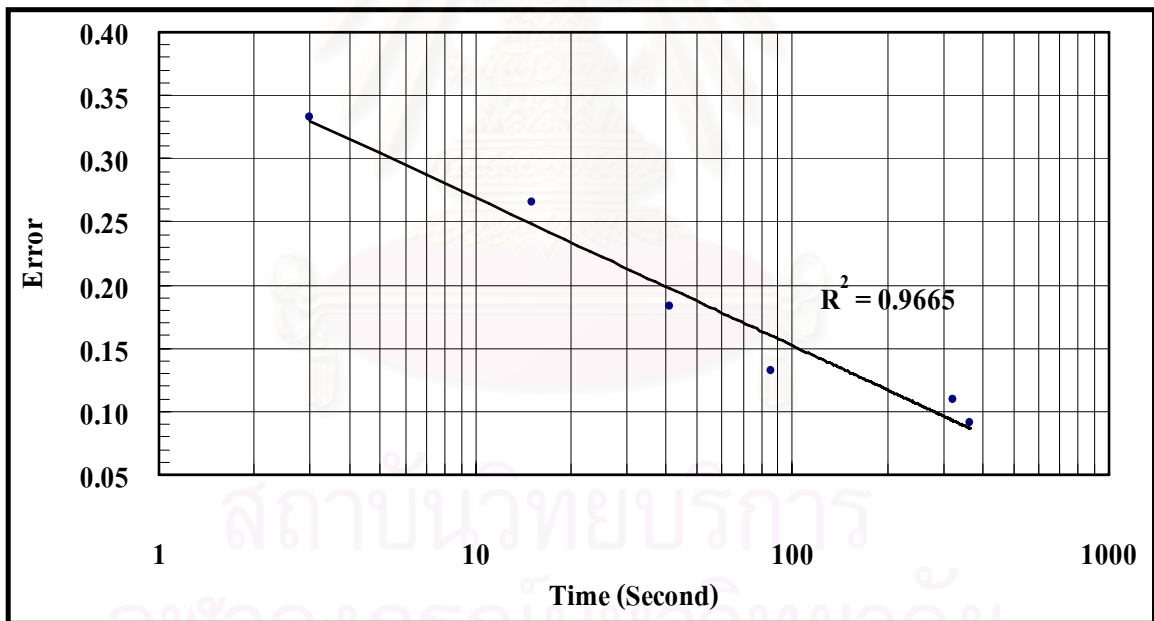


(ค)

รูปที่ 43 แสดงรูปโครงข่ายเอลิเมนต์หลังการเคลื่อนตัวและรูปความเค้นในแนวตั้ง ตัวอย่างฐานรากแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

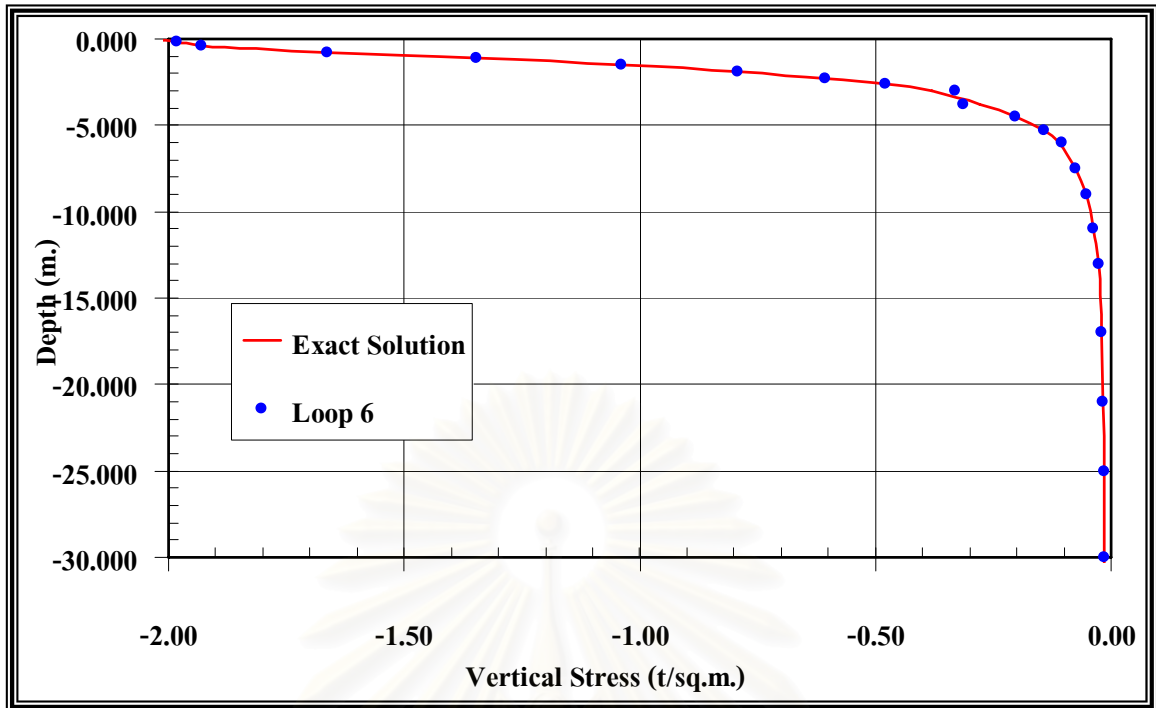


รูปที่ 44 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับ Degree of Freedom ของฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

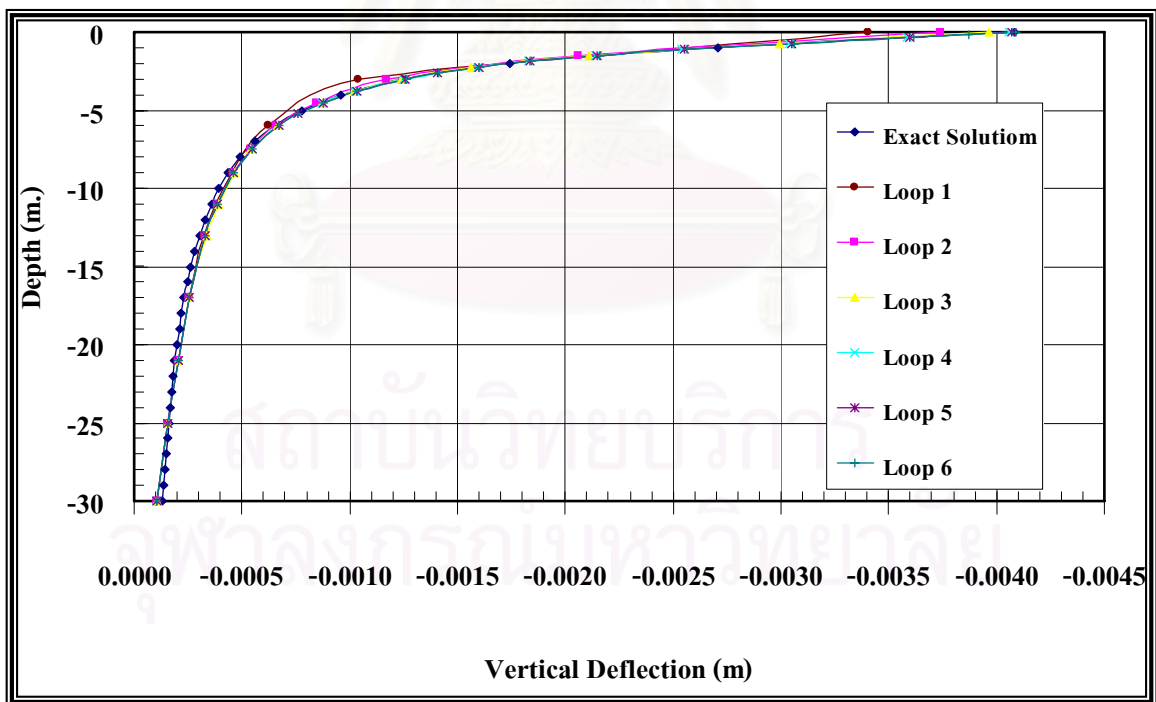


รูปที่ 45 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกับเวลาของฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

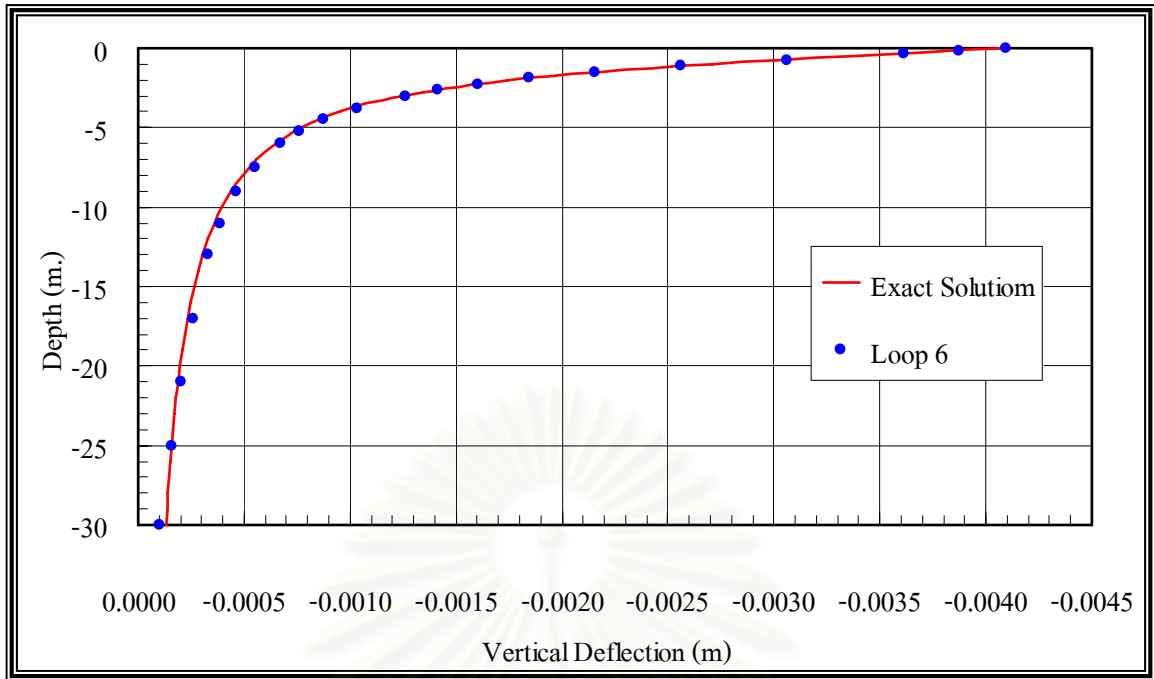
ค่าการทรุดตัวที่ระดับผิวดินตามแนวแกนกลางของฐานราก ซึ่งได้จากโปรแกรมอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ 0.408 เซนติเมตร และการทรุดตัวจากวิธีอีลาสติก คือ 0.408 เซนติเมตร โดยมีผลต่างประมาณ 1.00 %



รูปที่ 46 การเคลื่อนตัวในแนวดิ่งตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปที่ 47 Vertical Displacement ตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในแต่ละรอบของการทดสอบโปรแกรม



รูปที่ 48 Vertical Displacement ตามแกนกลางของตัวอย่างฐานรากแผ่แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในรอบสุดท้ายของการทดสอบโปรแกรม

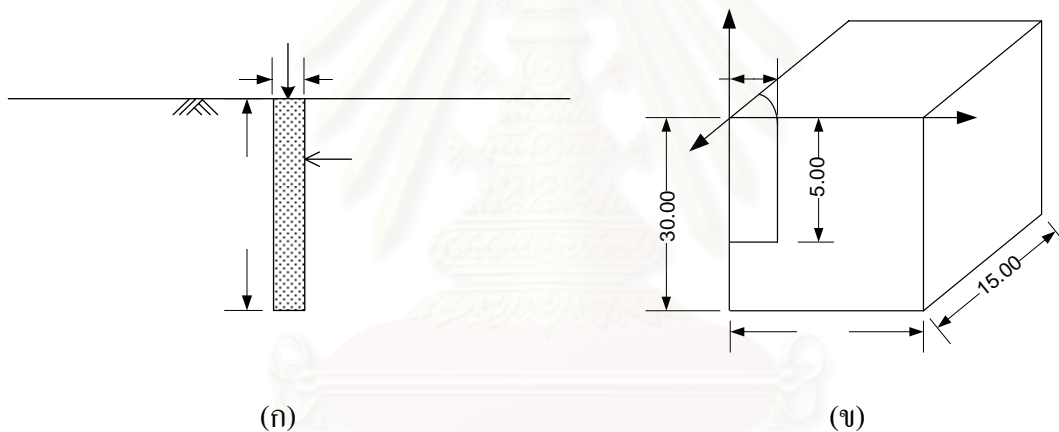
บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในการวิเคราะห์พฤติกรรมเสาเข็ม

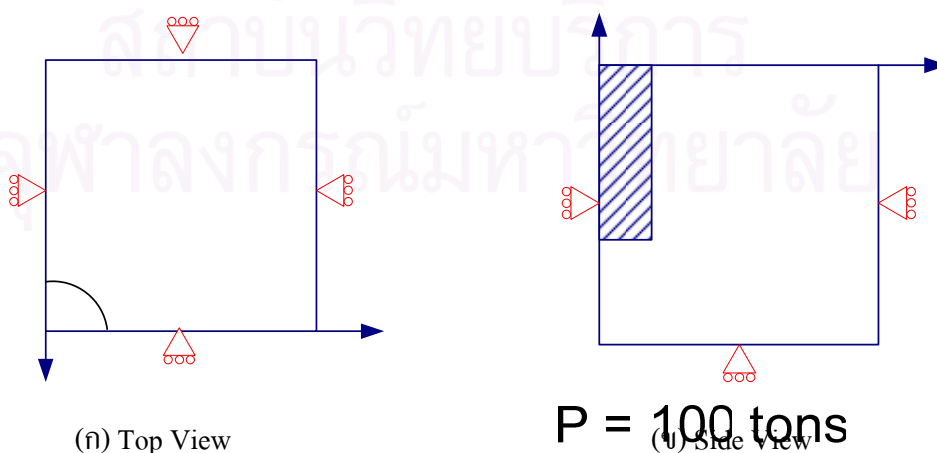
ในส่วนนี้ แสดงรายละเอียดวิธีการที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยวในงานวิจัย แสดงรูปแบบ และการกระจายขนาดของโครงข่าย สภาพขอบเขต (Boundary condition) ชนิดของแรงกระทำชนิดของชิ้นส่วน แบบจำลองพฤติกรรมของโครงสร้างที่ใช้ และแสดงผลการวิเคราะห์ตัวอย่างเสาเข็มเดี่ยว พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยอิลาสติก

5.1 เสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง (Friction pile)

เป็นกรณีวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว ปัญหาที่ใช้เป็นตัวอย่างในการวิเคราะห์ เลือกในกรณีที่ผลเฉลยค่อนข้างชัดเจน ดังแสดงต่อไปนี้



รูปที่ 49 ขนาดโครงสร้างที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง



รูปที่ 50 สภาพขอบเขต (Boundary Condition) ที่กำหนดในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยว

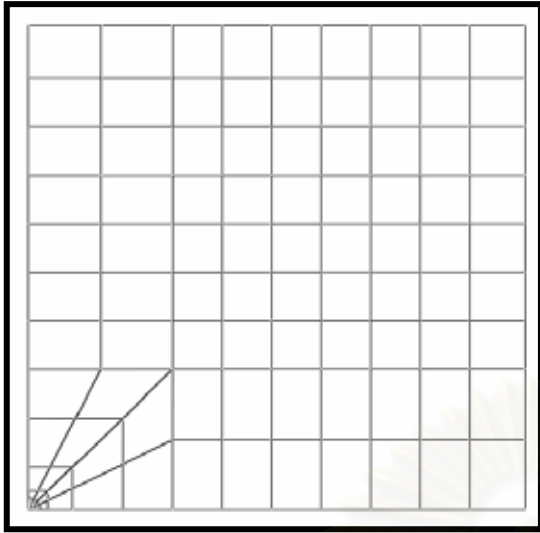
Soil Properties

$$E_s = 450 \text{ t/m}^2$$

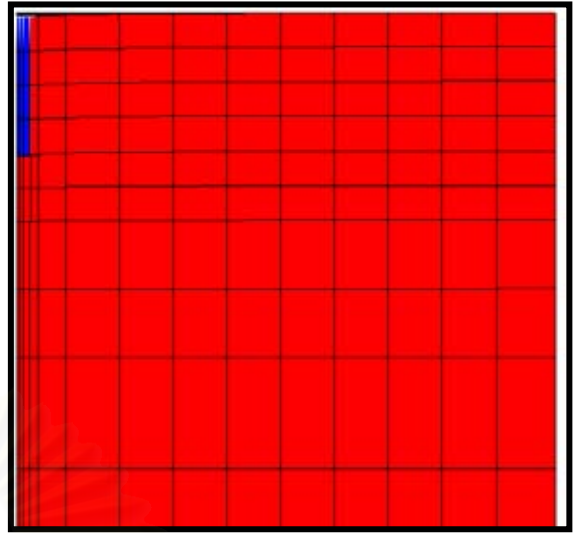
300 m

Pile Properties

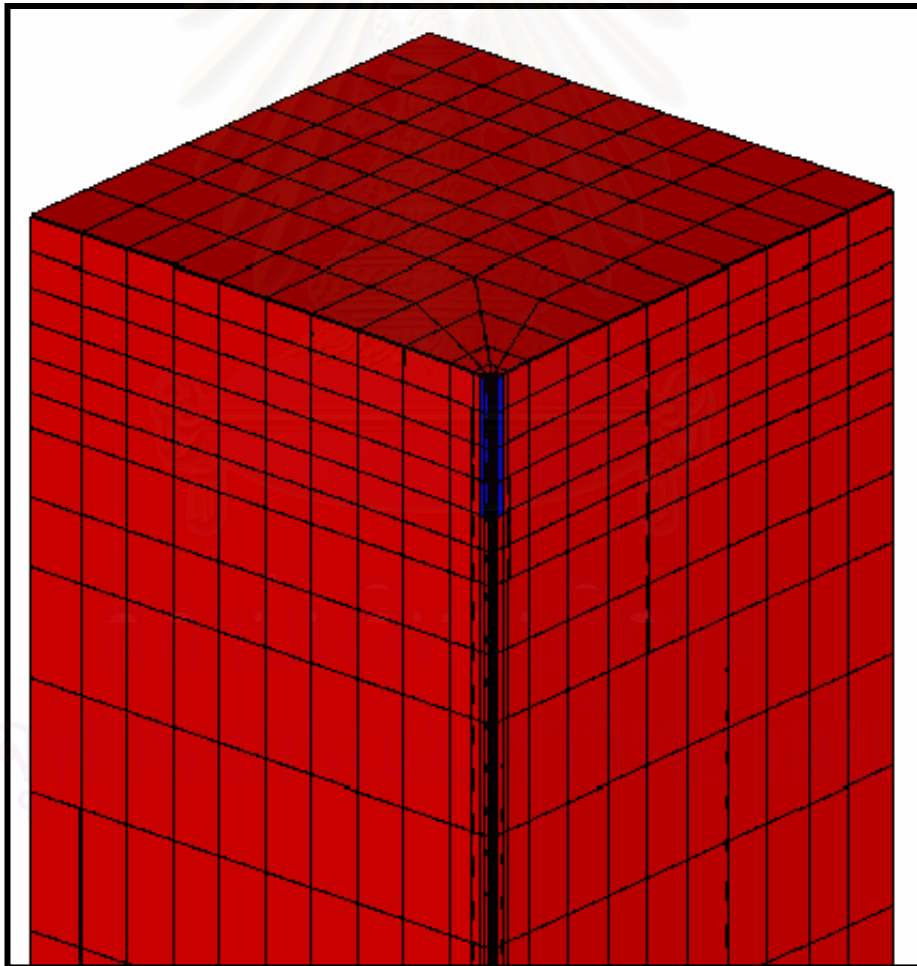
$$E_p = 450,000 \text{ t/m}^2$$



(ก) มุมมองด้านบน

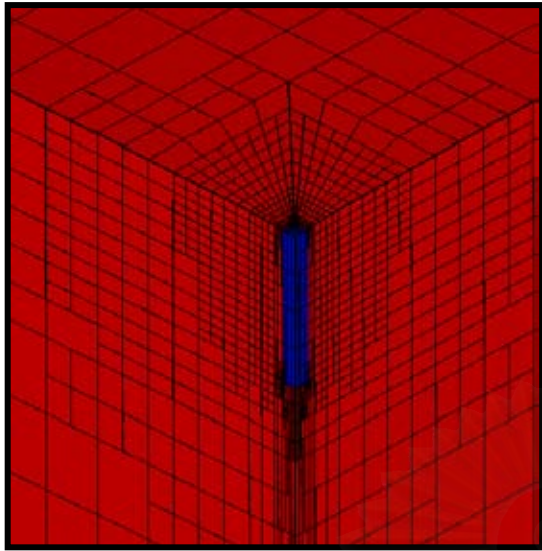


(ข) มุมมองด้านข้าง

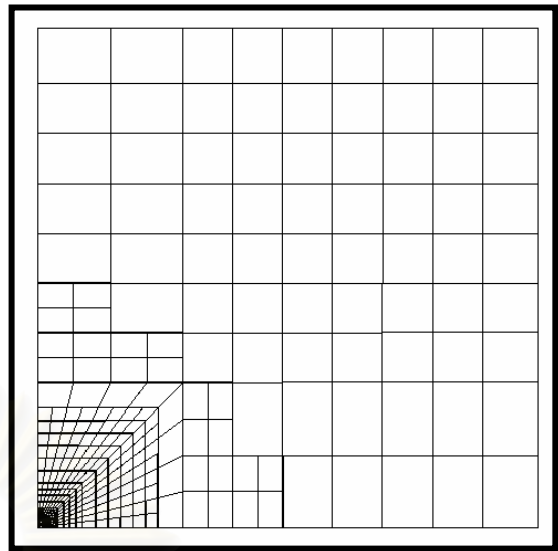


(ค) มุมมอง 3 มิติ

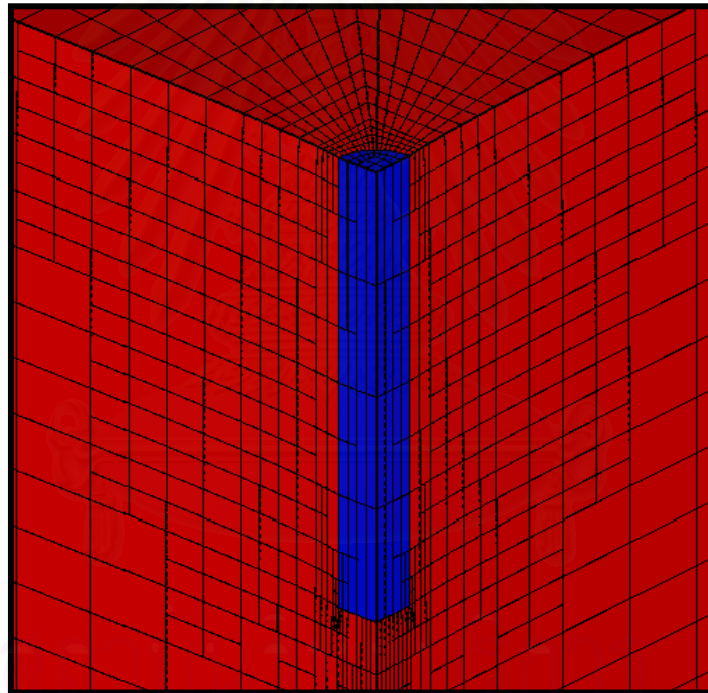
รูปที่ 51 โครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้น ในการวิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง



(ก)

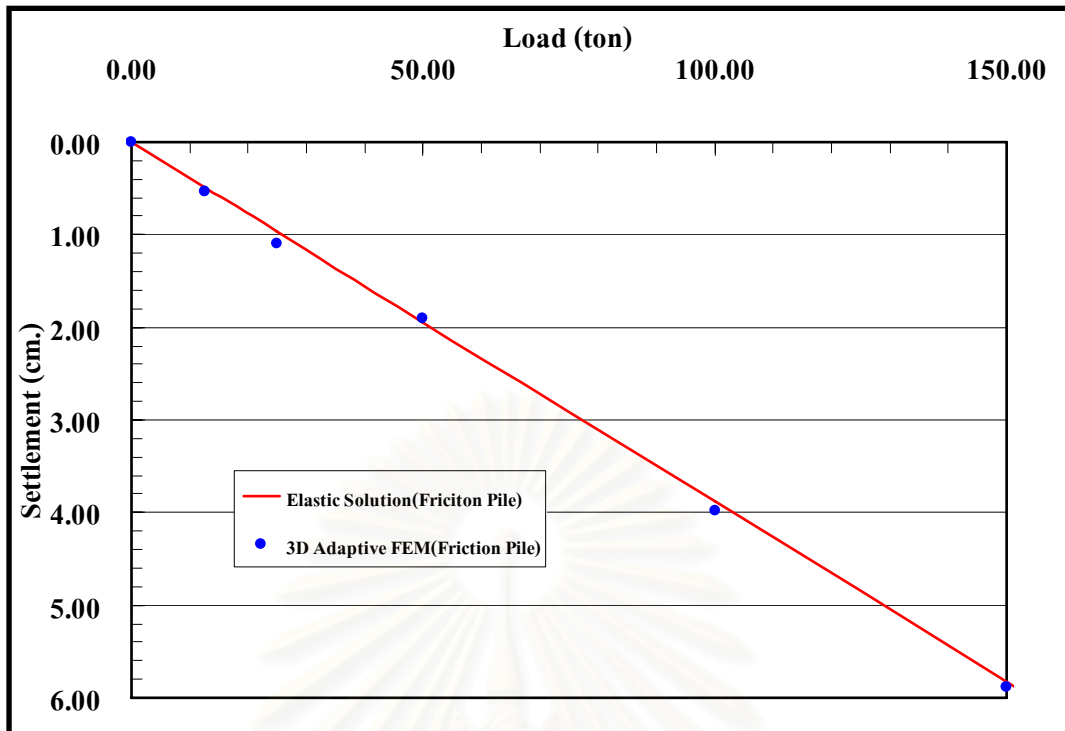


(ข)



(ค)

รูปที่ 52 โครงข่ายสุดท้ายของเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง



รูปที่ 53 ค่าการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง กับน้ำหนักบรรทุกทุกเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอีลาสติก

โครงข่าย

การสร้างโครงข่ายและขอบเขตของกรณีศึกษา นี้ แสดงดังรูปที่ 49,50 โดยตัวอย่างโครงข่ายเริ่มต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์ แสดงในรูปที่ 51

ผลการวิเคราะห์

ผลการวิเคราะห์แสดงในกรณีที่กำหนดแรงกระทำ P เป็นแรงกระทำสม่ำเสมอที่หัวเสาเข็มขนาด 100 ตัน/ตร.ม โดยรูปที่ 51 เปรียบเทียบภาพด้านข้างของโครงข่ายเริ่มต้น และในรูปที่ 52 แสดงโครงข่ายสุดท้ายในการวิเคราะห์

ในกรณีเปรียบเทียบการทรุดตัวของเสาเข็ม ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยในกรณีต่าง ๆ Poulos และ Davis (1980) ได้เสนอค่าปรับแก้ผลของปัจจัยทำการผลของระดับของฐานแข็ง ที่ไม่อยู่ในระดับที่ลึกเพียงพอ และผลของค่าอัตราส่วนผิวของสัที่ใกล้เคียงกับ 0.5 ดังกล่าว ดังสมการต่อไปนี้

$$\rho = P/E_s d \quad (40)$$

โดยที่ I : $I_0 R_k R_h R_v$

I_0 : อินฟลูเอนซ์แฟกเตอร์ของการทรุดตัว (settlement-influence factor) ในกรณีเสาเข็มแบบไม่อัดตัว (incompressible pile) เมื่อฐานแข็งอยู่ในระดับลึก และอัตราส่วนปัวซองส์ $V_s = 0.5$

R_k : ค่าปรับแก้ค่าความอัดตัวของเสาเข็ม

R_h : ค่าปรับแก้ระดับของฐานแข็ง

R_v : ค่าปรับแก้ระดับอัตราส่วนปัวซองส์

d : ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของเสาเข็ม

เพื่อการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ทดลองวิเคราะห์ปัญหาเดิมเมื่อลดความลึกของระดับฐานแข็งลงเป็น 30 เมตร ในกรณีที่ค่าอัตราส่วนปัวซองส์เป็น 0.4 และคำนวณค่าการทรุดตัวที่หัวเสาเข็ม (ρ) เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้รับการแก้ค่าแล้ว ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ρ จากโปรแกรม = 3.980 ซม.

ρ จากผลเฉลย = 3.880 ซม.

ความคลาดเคลื่อน = 2.58 %

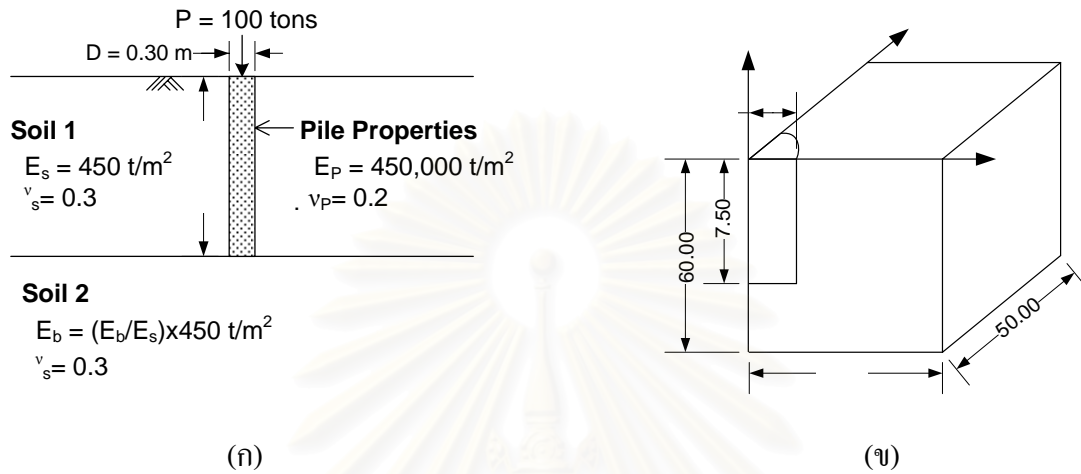
จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนมีน้อยมาก สรุปได้ว่าโปรแกรมสามารถประมาณค่าการทรุดตัวของเสาเข็มในสถานะอิลาสติกได้ใกล้เคียงกับผลทางทฤษฎี

จากรูปที่ 53 แสดงค่าการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวรับแรงเสียดทานด้านข้าง กับน้ำหนักบรรทุก เปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอิลาสติก พบว่าที่น้ำหนักบรรทุกต่างๆ ผลเฉลยจากโปรแกรมให้ค่าการทรุดตัวที่ใกล้เคียงกับผลทางทฤษฎี

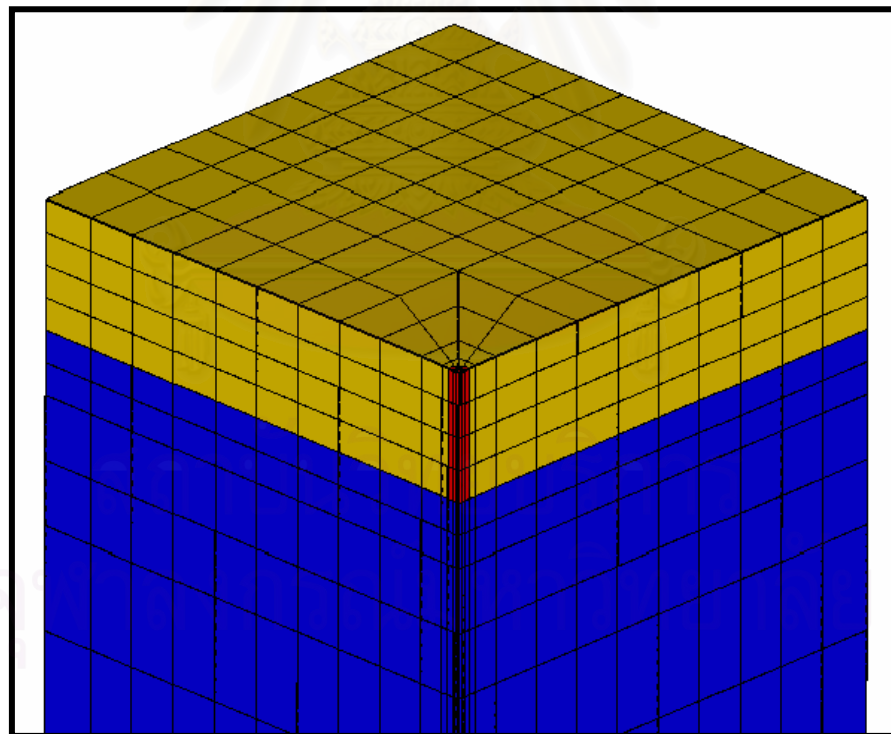
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5.2 กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า (Pile bearing on stiffer stratum)

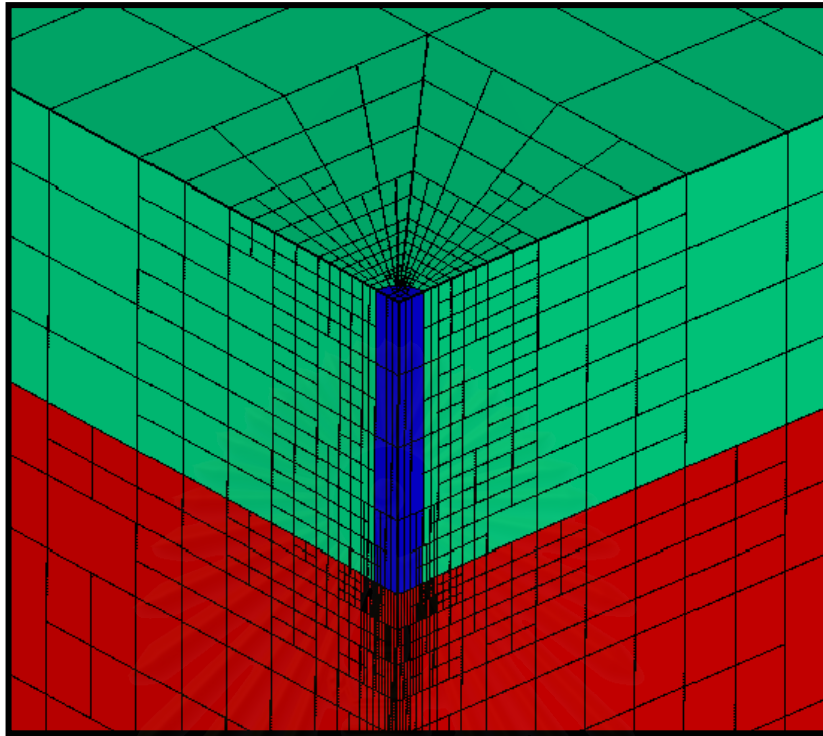
เป็นกรณีวิเคราะห์เสาเข็มต้นเดียว ในดินที่มี 2 ชั้นดิน ดินชั้นล่างมีสติเฟนสูงกว่าดินชั้นบน โดยปลายเสาเข็มอยู่ที่ระดับรอบต่อของชั้นดิน โดยที่ฐานแข็ง (rigid base) อยู่ในระดับลึกมาก ๆ ปัญหาที่ใช้เป็นตัวอย่างการวิเคราะห์ แสดงต่อไปนี้



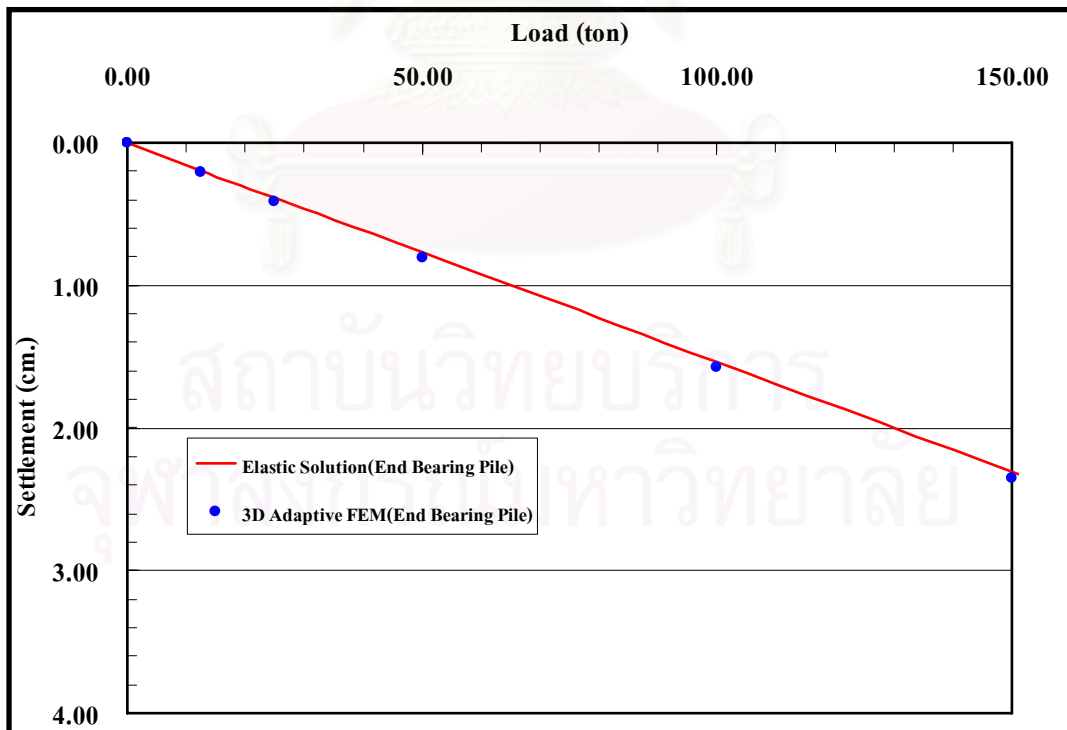
รูปที่ 54 ขนาดโครงสร้างที่ใช้ในการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า



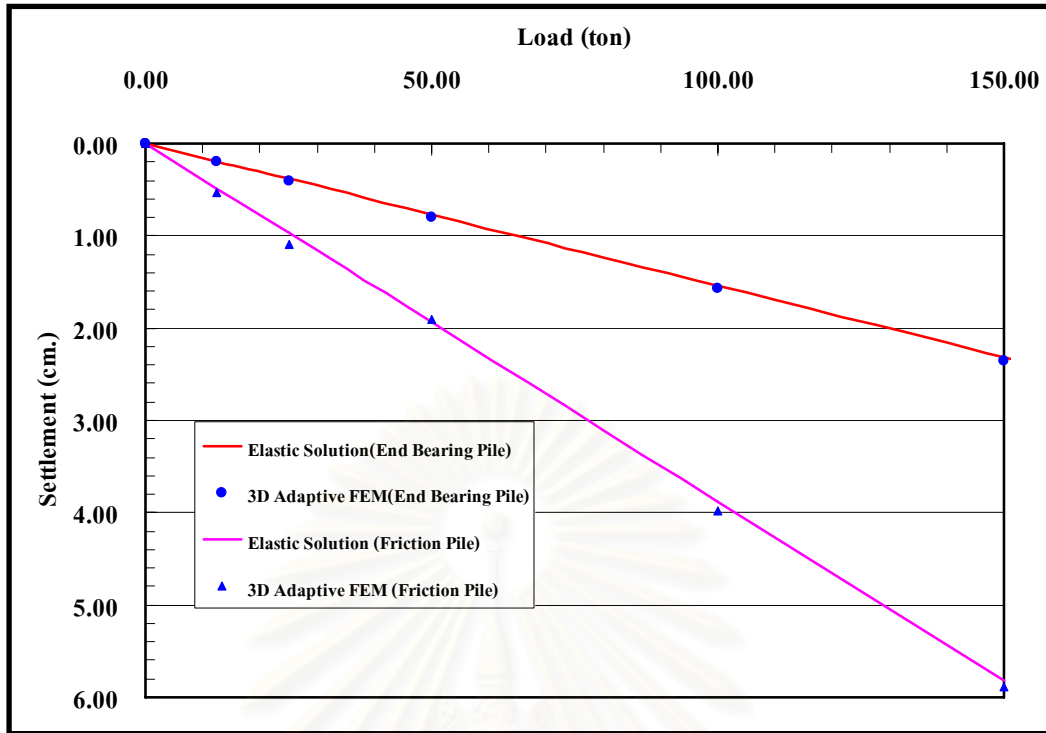
รูปที่ 55 โครงข่ายเริ่มต้นของการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า



รูปที่ 56 โครงข่ายสุดท้ายของการวิเคราะห์เสาเข็มเดี่ยว กรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า



รูปที่ 57 ค่าการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่ากับน้ำหนักบรรทุก เปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอีลาสติก



รูปที่ 58 ค่าการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งแกร่งและกรณีเสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง

โครงข่าย

ขนาดของขอบเขตที่เลือกใช้ในการสร้างโครงข่ายของกรณีศึกษานี้ ใช้ขอบเขตเดียวกับกรณีเสาเข็มลอย (Floating pile) โดยเพิ่มส่วนของชั้นดินที่แข็งแกร่งที่ปลายเสาเข็มดังแสดงดังรูปที่ 54 โดยตัวอย่างโครงข่ายเริ่มต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์ดังแสดงในรูปที่ 55 และจากรูปที่ 56 แสดงโครงข่ายสุดท้ายที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งแกร่ง

ผลการวิเคราะห์

ผลการวิเคราะห์แสดงในกรณีที่กำหนดแรงกระทำ P เป็นแรงกระทำสม่ำเสมอที่หัวเสาเข็มขนาด 100 ตัน/ตร.ม. เพื่อการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นในกรณีที่ค่าอัตราส่วนปัวซองส์เป็น 0.4 และคำนวณค่าการทรุดตัวของหัวเสาเข็ม (ρ) เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้รับการแก้ค่าแล้ว ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ρ จากโปรแกรม = 1.570 ซม.

ρ จากผลเฉลย = 1.539 ซม.

ความคลาดเคลื่อน = 2.01 %

จะเห็นว่าค่าตลาดเคลื่อนมีน้อยมาก สรุปได้ว่าโปรแกรมสามารถประมาณค่าการทรุดตัวของเสาเข็มในสถานะอิลาสติกได้ใกล้เคียงกับผลทางทฤษฎี

จากรูปที่ 57 แสดงค่าการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งแกร่งกว่า กับน้ำหนักบรรทุกทุกเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีอิลาสติก พบว่าที่น้ำหนักบรรทุกต่างๆ ผลเฉลยจากโปรแกรมให้ค่าการทรุดตัวที่ใกล้เคียงกับผลทางทฤษฎี และในรูปที่ 58 แสดงการเคลื่อนตัวของเสาเข็มเดี่ยวกรณีปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งแกร่งกว่าและกรณีเสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง พบว่าทั้งสองกรณีให้ค่าการทรุดตัวที่ใกล้เคียงกับทฤษฎี โดยที่การทรุดตัวของตัวอย่างเสาเข็มรับแรงเสียดทานด้านข้าง



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลงานวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ในการพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การทรุดตัวของเสาเข็มเดี่ยว โดยใช้วิธีเอชอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ชนิด Enrichment และใช้เอลิเมนต์เฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ บนพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ โดยพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเพื่อเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์

ผลการควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนพบว่า เมื่อเอลิเมนต์ถูกทำให้ละเอียดขึ้นหรือเพิ่มค่า Degree of Freedom โดยวิธีเอชอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าลดลงในขณะที่เวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาจะมีค่าเพิ่มมากขึ้น

ผลการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น โดยการวิเคราะห์ตัวอย่างปัญหา 3 มิติสำหรับปัญหาฐานรากแผ่แบบสตริป และฐานรากแผ่สี่เหลี่ยมจัตุรัส วิเคราะห์ในกรณีที่พฤติกรรมของดินเป็นอิลาสติก ได้ค่าการเคลื่อนตัว และหน่วยแรงตามแนวแกนต่าง ๆ ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยของวิธีอิลาสติกมาก

ผลการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมการวิเคราะห์ตัวอย่างเสาเข็ม ในกรณีเสาเข็มต้นเดียวพบว่าในกรณีที่พฤติกรรมของดินเป็นอิลาสติก วิเคราะห์ตัวอย่างเสาเข็มลอย (Friction pile) และตัวอย่างเสาเข็มในกรณีที่ปลายเสาเข็มอยู่บนชั้นดินที่แข็งกว่า (End Bearing Pile) ค่าการทรุดตัวของเสาเข็มให้ผลใกล้เคียงกับผลเฉลยจากวิธีอิลาสติกมาก โดยการทรุดตัวที่หัวเสาเข็มมีผลต่างไม่เกิน 3%

6.2 ข้อเสนอแนะ

1. วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเฉพาะการทรุดตัวของเสาเข็มเดี่ยว ควรจะมีการพัฒนาเสาเข็มกลุ่มต่อไปในอนาคต
2. การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ควรจะมีการพิจารณา ในกรณีดินมีพฤติกรรมเป็นอิลาสโตพลาสติก
3. การพัฒนาโปรแกรมในส่วนการป้อนข้อมูลควรจะมีการทำเป็น Graphic User Interface เพื่อความสะดวกในการใช้งานสำหรับบุคคลทั่วไป
4. การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีเอชอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์มีประสิทธิภาพดี และช่วยลดเวลาการสร้างโครงข่ายเริ่มต้น อย่างไรก็ตามการควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนก็สามารถทำได้ระดับหนึ่ง หากต้องการความละเอียดมากขึ้น อาจจะต้องใช้วิธีพีหรือเอชพีอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์
5. ควรจะมีการเปรียบเทียบผลทดสอบการทรุดตัวเสาเข็มจากโปรแกรมกับผลทดสอบในสนาม

รายการอ้างอิง

- Kelly, D.W., De, J.P., Gago, S.R., Zienkiewicz, O.C., and Babuska, I. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method :Part 1 – Error Analysis Int. J. Numer. Meht. in Eng. 19(1983):1593-1619
- Kelly, D.W., De, J.P., Gago, S.R., Zienkiewicz, O.C., and Babuska, I. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method :Part 2 – Adaptive Mesh Refinement Int. J. Numer. Meht. in Eng. 19(1983):1621-1656
- Lo, S.H., A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains Int. J. Numer. Meht. in Eng. 19(1985):1403-1426
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis Int. J. Numer. Meht. in Eng. 24(1987):337-357
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., Superconvergence Recovery Technique and a Posteriori Error Estimator Int. J. Numer. Meht. in Eng. 30(1990):1321-1339
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., Adaptive and Mesh Generation Int. J. Numer. Meht. in Eng. 32(1991):783-810
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., The Superconvergence Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1 :The Recovery Technique Int. J. Numer. Meht. in Eng. 33(1992):1331-1364
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., The Superconvergence Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2 : Error Estimates and Adaptivity Int. J. Numer. Meht. in Eng. 33(1992):1365-1382
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., Error Estimates and Adaptive Refinement for plate Bending Problems Int. J. Numer. Meht. in Eng. 28(1989):2839-2853
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 2000, The Finite Element Method. Vol. 1 The Basis. 5th edit. England:McGraw-Hill
- Smith, I.M. and Giffiths, D.V. 1998. Programming the Finite Element Method. 3rd edit. England : John Willey & Sons.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รหัสโปรแกรมและข้อมูลอะแดฟที่ไฟไนต์เอลิเมนต์



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุริยันต์ แก่นภักดี เกิดเมื่อวันอังคารที่ 5 มิถุนายน พ.ศ. 2522 ที่จังหวัดอุบลราชธานี
สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2544 เข้า
ศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ในปีการศึกษา 2545



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย