

การวิเคราะห์การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา

นางสาวอังสนา เพชรศักดิ์วงศ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2555

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

AN ANALYSIS OF AN EXACT INFERENCE OF A GAMMA MODEL

Miss Angsana Petsakvong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Statistics

Department of Statistics

Faculty of Commerce and Accountancy

Chulalongkorn University

Academic Year 2012

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบ

แกมมา

โดย

นางสาวอังสนา เพชรศักดิ์วงศ์

สาขาวิชา

สถิติ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัย
ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี
(รองศาสตราจารย์ ดร.พสุ เดชะรินทร์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุกพล ดุรงค์วัฒนา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. อัครินทร์ ไพบูลย์พานิช)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร. นุรีย์ วิวัฒน์วัฒนา)

อังกษนา เพชรศักดิ์วงศ์: การวิเคราะห์การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา. (AN ANALYSIS OF AN EXACT INFERENCE OF A GAMMA MODEL) อ.ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์, 94 หน้า.

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการหาเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความ
เชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ และเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขต
ความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า วิธีในการหาเขตความเชื่อมั่นที่
แท้จริงของตัวแบบแกมมานี้จะขึ้นกับการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอรฺนอฟ โดยการวิจัยนี้จะอาศัย
คุณสมบัติของการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง และค่าพารามิเตอร์แสดงอัตรา
ตามลำดับ ดังนี้ (0.5,0.5), (3,0.5) และ (3,2) ขนาดตัวอย่างเป็น 10, 30 และ 100 ที่ระดับความ
เชื่อมั่นคือ 0.95 และ 0.99

จากผลการวิเคราะห์ พบว่า ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขตและแถบที่วัดได้จากวิธี
แท้จริงจะใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99 ตามลำดับ และความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์
ที่วัดได้จากวิธีแท้จริงจะใกล้เคียงกับความเชื่อมั่นที่กำหนด มากกว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัด
ได้จากวิธีลู่อู่เข้า

ภาควิชา.....สถิติ.....ลายมือชื่อ.....
สาขาวิชา.....สถิติ.....ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....
ปีการศึกษา.....2555.....

5481726026 : MAJOR STATISTICS

KEYWORDS : Gamma distribution/ Confidence set/ Confidence bands/ Empirical confidence

ANGSANA PETAHVONG: AN ANALYSIS OF AN EXACT INFERENCE OF A GAMMA MODEL. ADVISOR : ASST. PROF.SEKSAN KIATSUPAIBUL, Ph.D., 94 pp.

The purpose of this research is to study the method of finding an exact confidence set and a confidence band of a standard two parameter gamma model and to compare the empirical confidences of the confidence sets and the confidence bands obtained from the exact method and a standard asymptotic method. This method of finding an exact confidence set of a gamma model is based on Kolmogorov-Smirnov tests. The research investigates the properties of the confidence sets and confidence bands of the gamma distribution when the shape parameters and the rate parameters, respectively, are (0.5, 0.5), (3, 0.5) and (3, 2), and when the sample sizes are 10, 30 and 100, at the confidence level of 0.95 and 0.99.

From the analysis, the empirical confidences of the confidence sets and the confidence bands derived from the exact method provide confidence levels approximately 0.95 and 0.99, respectively, and the confidences from the exact method is closer to the target confidences than those from the standard asymptotic method.

Department :Statistics..... Student's Signature.....
 Field of Study :Statistics..... Advisor's Signature.....
 Academic Year :2012.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลือ และการเอาใจใส่จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสกสรร เกียรติสุไพบูรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำปรึกษาตลอดจนช่วยเหลือตรวจสอบ แก้ไขข้อบกพร่องต่างๆเป็นอย่างดีมาโดยตลอด จนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา อาจารย์ ดร.อักรินทร์ ไพบูรณ์พานิช และ อาจารย์ ดร.นุวีร์ วิวัฒน์วัฒนา ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาสละเวลามาสอบและให้คำแนะนำที่ดีและมีประโยชน์ในการปรับปรุงงานของผู้วิจัยต่อไป และขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่กรุณาถ่ายทอดความรู้ให้แก่ผู้วิจัยจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณสมาชิกในครอบครัวทุกคน ที่ให้การสนับสนุนด้านการศึกษา ให้ความรักและความอบอุ่นแก่ผู้วิจัยจนสำเร็จการศึกษา รวมทั้งเพื่อนๆร่วมหลักสูตรที่เป็นกำลังใจและคอยช่วยเหลือเรื่องต่างๆมาโดยตลอด

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูป.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	2
1.4 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย.....	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 การแจกแจงแกมมา.....	4
2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด.....	7
2.3 การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟสำหรับ ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง.....	8
2.4 ความสัมพันธ์ของ เขตความเชื่อมั่น เขตการยอมรับสมมติฐาน และ การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ.....	11
2.5 ฟังก์ชันควอนไทล์.....	14
2.6 การสร้างเขตและแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมา.....	14
2.6.1 การพัฒนาทฤษฎีของการหาเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง.....	14
2.6.2 ขอบเขตของเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง.....	16
2.6.3 แถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา.....	18
2.6.4 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังของตัวแบบแกมมา.....	19

	หน้า
2.7 การสร้างเซตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าของตัวแบบเกมมา.....	19
2.8 การวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์.....	23
2.9 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด.....	24
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	25
3.1 แผนการดำเนินการวิจัย.....	25
3.2 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย.....	26
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	34
4.1 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จาก เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง.....	35
4.2 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จาก เซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า.....	37
4.3 ผลการศึกษาการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและ เซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า.....	40
4.4 ผลการศึกษาการหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังและช่วงความเชื่อมั่นของ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75.....	43
4.5 ผลการศึกษาการหาแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง และแบบลู่อู่เข้า.....	50
4.6 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง และแบบลู่อู่เข้า.....	53
4.7 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริง และแบบลู่อู่เข้า.....	54
4.8 ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด.....	56
4.9 ผลการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริง และวิธีลู่อู่เข้า กับความเชื่อมั่นที่กำหนด.....	61
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	64
5.1 สรุปการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่น ของตัวแบบเกมมา.....	64

5.2 สรุปการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าของตัวแบบเกมมา.....	65
5.3 ข้อเสนอแนะ	67
รายการอ้างอิง.....	68
ภาคผนวก.....	69
ภาคผนวก ก ตัวอย่างการใช้โปรแกรม R ในการดำเนินงานวิจัย.....	70
ภาคผนวก ข การตรวจสอบค่าขอบเขตบนที่ผิดปกติของช่วงความเชื่อมั่น ของค่าคาดหวัง.....	85
ภาคผนวก ค ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน.....	90
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	94

ตารางที่	หน้า
4.6	แสดงค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า.. 53
4.7	แสดงค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า. 54
4.8.1	แสดงค่าสถิติทดสอบและค่า p-value ของการทดสอบสัดส่วนความเชื่อมั่นของ เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า..... 57
4.8.2	แสดงค่าสถิติทดสอบและค่า p-value ของการทดสอบสัดส่วนความเชื่อมั่นของ แถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า..... 59
4.9	แสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบ ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า..... 62
4.10	แสดงลักษณะของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบ ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า..... 63
5.2	แสดงผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด..... 66

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
2.1	กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแบบแกมมา.....	6
2.2	กราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงของการแจกแจงแบบแกมมา.....	6
2.3	กราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้ $H_0 (F(x))$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ ($G_x(x)$).....	10
2.4	ความสัมพันธ์ที่เชตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร်นอฟมีความสอดคล้องกัน.....	13
2.5	ความสัมพันธ์ที่เชตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร်นอฟมีความขัดแย้งกัน.....	13
2.6	ตัวอย่างของลักษณะเชตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแบบลู่เข้า..	20
3.1	ผังงานแสดงขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยทั้งหมด.....	31
3.2	ผังงานแสดงขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงในแต่ละรอบ.....	32
3.3	ผังงานแสดงขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงในแต่ละรอบ.....	33
4.3.1	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$	41
4.3.2	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$	41
4.3.3	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$	41
4.3.4	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$	42
4.3.5	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$	42
4.3.6	แสดงรูปเชตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$	42

รูปที่	หน้า
4.5.1	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ 50
4.5.2	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$ 50
4.5.3	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$ 51
4.5.4	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ 51
4.5.5	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$ 51
4.5.6	แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$ 52
ข.1	แสดงกราฟ ecdf เทียบกับแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง 87
ข.2	แสดงจุด (β^*, k^*) ในเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง 88
ข.3	กราฟ cdf เทียบกับแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง และกราฟ pdf ที่มีพารามิเตอร์เท่ากับ β^* และ k^* 89
ค.1	แสดงเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของข้อมูลความทนทานของลูกปืน 92
ค.2	แสดงแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงของข้อมูลความทนทานของลูกปืน 93

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการอนุมานเชิงสถิติ ช่วงความเชื่อมั่นเป็นสิ่งที่มีความสำคัญในการประมาณค่าแบบช่วงของพารามิเตอร์ของประชากร เนื่องจากช่วยให้การประมาณค่ามีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น โดยมีระดับความเชื่อมั่น เป็นตัวระบุถึงโอกาสที่ช่วงของค่าประมาณที่ได้นั้น จะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์เสมอ

สำหรับการประมาณแบบช่วงของพารามิเตอร์ของประชากร $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ที่อยู่ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ ใน k มิติ นั้น เราจะได้เป็นเซตของจุดที่อยู่ใน k มิติ บางครั้งเซตของจุดเหล่านี้อาจล้อมรอบด้วยรูปร่างลักษณะใดลักษณะหนึ่ง โดยเซตของจุดเหล่านี้ จะเรียกว่า บริเวณความเชื่อมั่น หรือ เซตความเชื่อมั่น นั่นคือเป็นบริเวณหรือเซตที่ประกอบด้วยทุกๆค่าของพารามิเตอร์ ซึ่งจะยอมรับได้ภายใต้สมมติฐานว่าง ของการทดสอบที่มีระดับนัยสำคัญ α นอกจากนี้ เซตความเชื่อมั่นที่ถูกสร้างจากพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้ ยังสามารถนำมาประยุกต์ เพื่อบ่งบอกถึงขอบเขตระดับความไม่แน่นอนของฟังก์ชันการแจกแจงที่ประมาณจากข้อมูล ซึ่งเรียกว่า แถบความเชื่อมั่น และในขณะเดียวกันแถบความเชื่อมั่นนี้ ยังให้การอนุมานบนฟังก์ชันควอนไทล์ได้ แต่ขั้นตอนวิธีในการหาเซตความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ใน k มิติ ให้มีระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ $1 - \alpha$ นั้น มักมีความยุ่งยากและซับซ้อน

อย่างไรก็ตาม แนวทางที่ดีแนวทางหนึ่งในการหาเซตความเชื่อมั่น คือ การใช้การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ ถึงแม้ว่าการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟนี้ จะมีจุดด้อยในเรื่องกำลังการทดสอบที่น้อยกว่าการทดสอบอื่นๆก็ตาม แต่การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟนี้ กลับมีความน่าสนใจในบางประเด็น คือการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ จะขึ้นกับฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมของข้อมูลที่สังเกตได้ (Empirical cumulative distribution function) ดังจะพบได้จากงานวิจัยของ Kanofsky และ Srinivasan(1972) และงานวิจัยของ Srinivasan และ Wharton(1975) ที่ได้้นำการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟนี้ มาประยุกต์ใช้กับการหาแถบความเชื่อมั่นสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงสะสม และสำหรับการแจกแจงแบบไวบูลล์ตามลำดับ นอกจากนี้ Hayter และ Kiatsupaibul(2013) ได้้นำการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟนี้ มาสร้างเซตความเชื่อมั่นของ 2 พารามิเตอร์ในตัวแบบไวบูลล์ ที่มีการระบุระดับความเชื่อมั่นที่แท้จริง

ไว้เท่ากับ $1-\alpha$ ซึ่งจะนำไปสู่การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบไวบูลล์ โดยใช้วิธีโปรแกรมเชิงเส้น ในการแก้สมการหาเซตความเชื่อมั่น ซึ่งเป็นวิธีที่ช่วยลดความซับซ้อนในการหาเซตความเชื่อมั่นให้มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยสนใจพิจารณากรณีตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ แต่จากการสังเกตของผู้วิจัยพบว่า กรณีตัวแบบแกมมานี้ จะไม่สามารถใช้วิธีโปรแกรมเชิงเส้น ในการหาเซตความเชื่อมั่นตามแนวคิดของ Hayter และ Kiatsupaibul (2013) เนื่องจากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแบบแกมมา จะอยู่ในรูปอัตราส่วนของฟังก์ชันแกมมาที่ไม่สมบูรณ์ ที่ไม่สามารถจัดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้

ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะศึกษาวิธีการอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา และการหาแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา โดยทำการวิเคราะห์ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ระหว่างเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงกับเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาวิธีการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา
2. เพื่อเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ระหว่างเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า
3. เพื่อเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่น

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้กระทำภายใต้ขอบเขตดังนี้

1. ศึกษาการหาเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์
2. ศึกษาข้อมูลที่มีการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์คือ (k, β) ต่างๆ ดังนี้
 - 2.1 $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$
 - 2.2 $k = 3$ และ $\beta = 0.5$
 - 2.3 $k = 3$ และ $\beta = 2$
3. ศึกษาภายใต้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 30 และ 100

4. ระดับความเชื่อมั่นที่ใช้ในการวิจัยเท่ากับ 0.95 และ 0.99
5. จำนวนรอบการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์เท่ากับ 1000 รอบ

1.4 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรในลักษณะที่บอกช่วงๆหนึ่งที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ด้วยระดับความเชื่อมั่นระดับหนึ่ง
2. เซตความเชื่อมั่น (Confidence Set) หรืออาจเรียกว่าบริเวณความเชื่อมั่น (Confidence Region) คือเซตหรือบริเวณที่ประกอบด้วยทุกๆค่าของพารามิเตอร์ ซึ่งจะยอมรับได้ภายใต้สมมติฐานว่างที่ใช้ในการทดสอบขนาด α
3. แถบความเชื่อมั่น (Confidence Band) คือ ขอบเขตระดับความไม่แน่นอนของฟังก์ชันการแจกแจงที่ประมาณจากข้อมูล

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อเป็นแนวทางในการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง เซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า และแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา
2. เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สนใจเลือกหาวิธีการหาเซตหรือแถบความเชื่อมั่นที่เหมาะสมสำหรับตัวแบบแกมมา ระหว่างวิธีที่แท้จริงและวิธีแบบลู่อู่เข้า

บทที่ 2

ทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้มีทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้อง คือ การแจกแจงแกมมา การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมาโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด การทดสอบโคโลโมโกรอฟ – สเมอร์นอฟสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ความสัมพันธ์ของเซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคโลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ ฟังก์ชันควอนไทล์ การสร้างเซตและแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมา การสร้างเซตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าของตัวแบบแกมมา การวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ และการทดสอบสัดส่วนของประชากร ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดตามลำดับ ดังต่อไปนี้

2.1 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งมีพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) $k > 0$ และพารามิเตอร์แสดงอัตรา (rate parameter) $\beta > 0$ ซึ่ง β เป็นพารามิเตอร์ผกผันกับพารามิเตอร์แสดงขนาด (scale parameter) $\theta > 0$ ก็คือ $\beta = \frac{1}{\theta}$ ถ้า X = การแจกแจงของเวลาที่ต้องคอยจนกว่าจะเกิดเหตุการณ์ n เหตุการณ์ หรือเขียนแทนได้โดย $X \sim \text{Gamma}(k, \beta)$ จะได้ว่า การแจกแจงแกมมาเป็น การแจกแจง shape-rate ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (Probability Density Function; PDF) อยู่ในรูป

$$f(x, k, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function; CDF) อยู่ในรูป

$$\Pr(X \leq x) = F(x; k, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x} dx \quad ; k > 0, \beta > 0$$

ซึ่ง Olkin, Gleser และ Derman (1994) จัดให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นได้ดังนี้

ให้ $V = \beta X$ จะได้

$$F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\{\beta X \leq v\} = P\left\{X \leq \frac{v}{\beta}\right\} = \int_0^{v/\beta} \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x} dx$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก X ให้เป็น $Z = \beta x$ จะได้

$$F_V(v) = \int_0^v \frac{z^{k-1} e^{-z}}{\Gamma(k)} dz$$

นั่นคือจะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมในรูปที่ง่ายขึ้น ดังนี้

$$\Pr(X \leq x) = F(x; k, \beta) = \frac{\gamma(k, \beta x)}{\Gamma(k)} ; k > 0, \beta > 0$$

เมื่อ $\gamma(k, \beta x)$ เป็นฟังก์ชันแกมมาที่ไม่สมบูรณ์แบบขอบล่าง (lower incomplete gamma function)

โดย
$$\gamma(k, \beta x) = \int_0^{\beta x} z^{k-1} e^{-z} dz$$

สำหรับค่าของ $\Gamma(k)$ นั้นเรียกว่า ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function) นิยามโดย

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0 \text{ โดยทั่วไปแล้ว } \Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)$$

ถ้า $k =$ จำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\Gamma(k) = (k-1)!$

และ $k = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

โดยมีค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน ดังนี้ $E(X) = \frac{k}{\beta}$ และ $Var(X) = \frac{k}{\beta^2}$

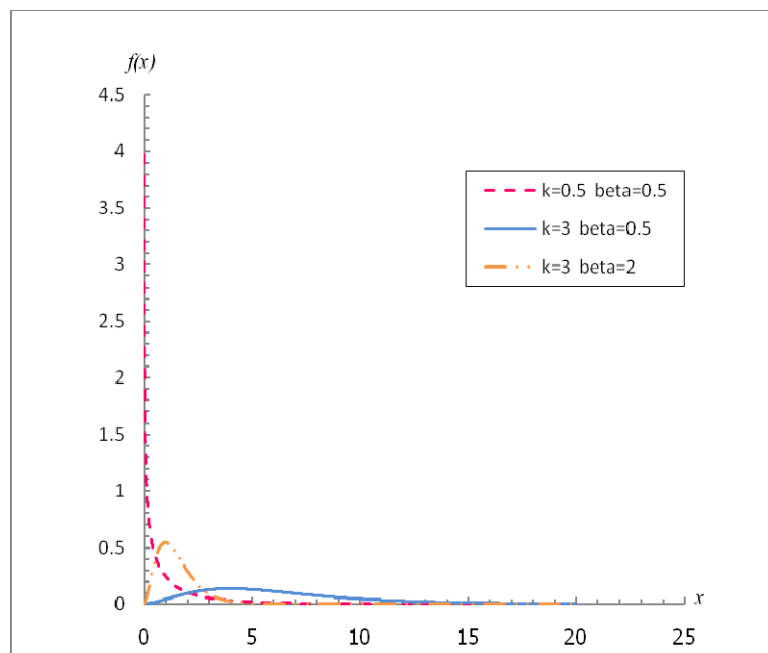
จากขอบเขตการวิจัยที่กำหนดให้มีการแจกแจงแบบแกมมาด้วยค่าพารามิเตอร์ต่างๆ 3 กรณี คือ

- $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$

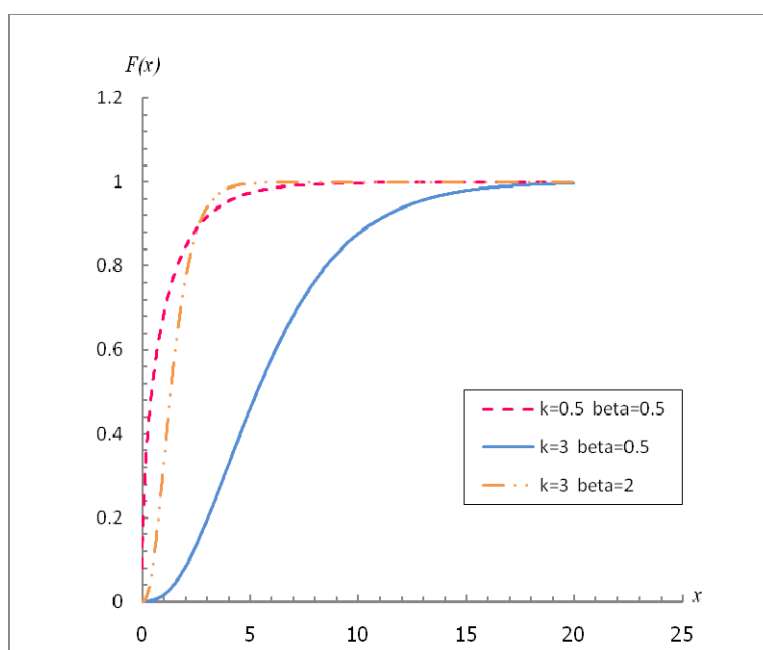
- $k = 3$ และ $\beta = 0.5$

- $k = 3$ และ $\beta = 2$

สามารถแสดงรูปฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงของการแจกแจงแบบแกมมาภายใต้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ 3 กรณีข้างต้น ได้ดังนี้



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบแกมมา



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงของการแจกแจงแบบแกมมา

2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมาโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $f(X; k, \beta) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} X^{k-1} e^{-\beta X}; k > 0, \beta > 0$ ฟังก์ชันความควรจะเป็น (likelihood function) ของตัวอย่างสุ่มขนาด n คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของความน่าจะเป็นร่วมของ X_1, X_2, \dots, X_n โดยที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ k, β ซึ่งฟังก์ชันความควรจะเป็น เขียนแทนด้วย $L(k, \beta)$ ดังนี้

$$L(k, \beta) = \prod_{i=1}^n p(X_i | k, \beta) = p(X_1 | k, \beta) p(X_2 | k, \beta) \dots p(X_n | k, \beta)$$

ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimator) ของพารามิเตอร์ k และ β คือ \hat{k} และ $\hat{\beta}$ ที่ทำให้ฟังก์ชันความควรจะเป็นมีค่าสูงที่สุด ซึ่ง MIURA (2011) หาค่าได้จาก

$$\frac{\partial}{\partial k} \log L(k, \beta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial k} \log p(X_i | k, \beta) = 0$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log L(k, \beta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} \log p(X_i | k, \beta) = 0$$

จาก
$$\frac{\partial}{\partial k} \log p(X_i | k, \beta) = \log \beta - \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \log(X)$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log p(X_i | k, \beta) = \frac{k}{\beta} - X$$

จะได้
$$n \log \beta - n \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \sum_{i=1}^n \log(X_i) = 0$$

และ
$$\frac{nk}{\beta} - \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ α คือ

$$\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} - \log \hat{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i) - \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

โดย $\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} - \log \hat{k}$ เป็น monotonic function ของ \hat{k} ซึ่งสามารถแก้หา \hat{k} ได้

และ ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ β คือ
$$\hat{\beta} = \frac{\hat{k}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$$

2.3 การทดสอบโคลโมโกรอฟ – สเมอร์นอฟสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

การทดสอบโคลโมโกรอฟ – สเมอร์นอฟ เป็นการทดสอบว่าข้อมูลที่ได้มานั้นมีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดหวังหรือไม่ ซึ่งได้แนวคิดมาจากการสร้างกราฟ Q-Q plot โดยมีหลักการของสถิติทดสอบคือ การวัดระยะห่างที่สุทธระหว่างกราฟของ $G_X(x)$ และ $F(x)$ ซึ่ง $G_X(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ (Empirical cumulative distribution function) และ $F(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้ H_0 (Hypothesized distribution function) โดยสมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$H_0 : F(x) = G_X(x)$$

$$H_1 : F(x) \neq G_X(x)$$

หรือ

H_0 : ไม่มีความแตกต่างระหว่างการแจกแจงของข้อมูลเชิงประจักษ์กับการแจกแจงที่คาดหวังไว้

H_1 : มีความแตกต่างระหว่างการแจกแจงของข้อมูลเชิงประจักษ์กับการแจกแจงที่คาดหวังไว้

ซึ่งมีขั้นตอนในการทดสอบ ดังนี้

1. เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก เมื่อ n คือจำนวนค่าสังเกต โดยกำหนดให้ $x_{(i)}$ แทนค่าสังเกตที่น้อยที่สุดเป็นลำดับที่ i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$
2. คำนวณค่าสถิติทดสอบ $D \equiv \text{Supremum}_x |G_X(x) - F(x)|$ ซึ่งมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

จากเซตข้อมูล $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ในการทดสอบสมมติฐาน H_0 ค่าของ X_i ที่เป็นไปได้ในช่วงของ r ที่แตกต่างกัน คือ

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k) \text{ เมื่อ } x_0 = -\infty, x_k = +\infty$$

พิจารณาที่ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง $X_i^d, i = 1, 2, \dots, n$ จะนิยามได้ว่า

$$X_i^d = j \text{ ถ้า } X_i \text{ อยู่ในช่วง } (x_{j-1}, x_j)$$

สมมติฐานว่าง จึงได้ว่า

$$P(X_i^d = j) = F(x_j) - F(x_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, r$$

จากการสังเกตที่ค่า X_1, X_2, \dots, X_n จึงให้ $G_X(x)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิง
ประจักษ์ ซึ่งนิยามได้ดังนี้

$$G_X(x) = \frac{\text{number of } j; X_j \leq x}{n}$$

นั่นคือ $G_X(x)$ จะเป็นสัดส่วนของค่าที่สังเกตได้ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x

ตัวอย่าง ถ้า $n=3, x_1=3, x_2=5, x_3=1$ แล้วจะได้ $x_{(1)}=1, x_{(2)}=3, x_{(3)}=5$

สามารถเขียน $G_X(x)$ ในรูปนี้ได้คือ

$$G_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & \text{if } x_{(1)} \leq x < x_{(2)} \\ \vdots & \\ \frac{i}{n} & \text{if } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \\ \vdots & \\ 1 & \text{if } x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

จะเห็นว่า $G_X(x)$ เป็นค่าคงที่ภายในช่วง $(x_{(i-1)}, x_{(i)})$ และจะกระโดดทีละ $\frac{1}{n}$ ที่จุด
 $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ และเนื่องจาก $F(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นของ x ที่มีขอบเขตที่มีค่า
เท่ากับ 1 จึงแบ่งคิดเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าสูงสุดของ $G_X(x) - F(x)$ ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่าจะเกิดขึ้น ณ จุด

$x_{(i)}; i=1, 2, \dots, n$ (ดังรูปที่ 2.3) นั่นคือ

$$\text{Supremum}_x \{G_X(x) - F(x)\} = \text{Supremum}_{i=1, 2, \dots, n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \right\}$$

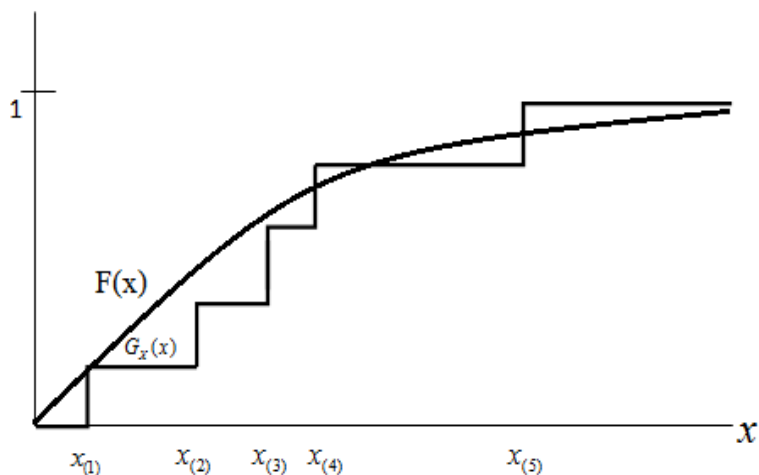
กรณีที่ 2 ค่าสูงสุดของ $F(x) - G_X(x)$ ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่าจะเกิดขึ้นก่อน ณ จุด

กระโดด $x_{(i)}; i=1, 2, \dots, n$ (ดังรูปที่ 2.3) นั่นคือ

$$\text{Supremum}_x \{F(x) - G_X(x)\} = \text{Supremum}_{i=1, 2, \dots, n} \left\{ F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 D &= \sup_x |G_x(x) - F(x)| \\
 &= \sup \left\{ \sup \{G_x(x) - F(x)\}, \sup \{F(x) - G_x(x)\} \right\} \\
 &= \sup \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}), F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}, i = 1, 2, \dots, n \right\}
 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.3 กราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้ $H_0 (F(x))$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์ ($G_x(x)$)

3. หาค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α และขนาดตัวอย่างเท่ากับ n หรือแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $d_{\alpha,n}$
4. ถ้าค่าสถิติ $D \geq d_{\alpha,n}$ จะปฏิเสธ H_0 นั่นคือ การแจกแจงของข้อมูลเชิงประจักษ์แตกต่างจากการแจกแจงที่คาดหวังไว้ ถ้าค่าสถิติ $D < d_{\alpha,n}$ จะไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือการแจกแจงของข้อมูลเชิงประจักษ์ตรงกับจากการแจกแจงที่คาดหวังไว้

2.4 ความสัมพันธ์ของ เขตความเชื่อมั่น เขตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบ โคลโมโกรอฟ-สเมอร်นอฟ

Hayter และ Kiatsupaibul (2013) ให้ $X = (X_1, \dots, X_n)$ คือเซตของค่าสังเกตที่เป็นอิสระกันจากฟังก์ชันการแจกแจง $F(x; \theta)$ เมื่อพารามิเตอร์ $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ อยู่ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ ใน k มิติ วิธีที่เป็นที่รู้จักกันดีของการหาเขตความเชื่อมั่นขนาด $1-\alpha$ สำหรับ θ จะขึ้นอยู่กับ 2 สิ่ง คือเขตความเชื่อมั่นและการทดสอบสมมติฐาน สำหรับทุกๆค่าของ θ ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ ให้เขตการยอมรับ $A(\theta)$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$P(X \in A(\theta)) = 1 - \alpha$$

เมื่อการแจกแจงของ X จะถูกระบุด้วยค่าพารามิเตอร์ θ เขตการยอมรับสมมติฐาน $A(\theta_0)$ สามารถที่จะมีได้ ถ้าเป็นบริเวณยอมรับการทดสอบสมมติฐานที่มีระดับนัยสำคัญเท่ากับ α ของ $H_0 : \theta = \theta_0$ นั่นคือ

$$\{\theta : X \in A(\theta)\}$$

ก็คือเขตความเชื่อมั่นสำหรับ θ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$

เขตความเชื่อมั่น $A(\theta)$ นั้นจะมีไม่จำกัด จนกว่าจะครอบคลุมความน่าจะเป็นขนาด $1-\alpha$ และเขตความเชื่อมั่นนี้จะมีรูปแบบลักษณะที่แตกต่างไปตามค่าพารามิเตอร์ θ ซึ่งจะนำเอาการทดสอบโคลโมโกรอฟ - สเมอร်นอฟ มาใช้ในการบอกเขตการยอมรับสมมติฐาน $A(\theta)$ ดังนั้นแต่ละ θ ใน Θ จะมีเขตการยอมรับสมมติฐานดังนี้

$$A(\theta) = \left\{ X : \sup_x |G_X(x) - F(x; \theta)| \leq d_{\alpha, n} \right\} \text{----- (2.1)}$$

เมื่อ $G_X(x)$ คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของข้อมูล X เชิงประจักษ์

$d_{\alpha, n}$ คือจุดวิกฤติของโคลโมโกรอฟ - สเมอร်นอฟ

หรือสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้ จาก

$$\sup_x |G_X(x) - F(x; \theta)| \leq d_{\alpha, n}$$

กรณีที่ 1 : $G_X(x) \geq F(x; \theta)$

$$G_X(x) - F(x; \theta) \leq d_{\alpha, n} \quad ; G_X(x) = \frac{i}{n}$$

$$\frac{i}{n} - F(X_{(i)}; \theta) \leq d_{\alpha, n}$$

$$F(X_{(i)}; \theta) \geq \frac{i}{n} - d_{\alpha, n} \quad \text{----- (2.2)}$$

กรณีที่ 2 : $G_X(x) \leq F(x; \theta)$

$$F(x; \theta) - G_X(x) \leq d_{\alpha, n} \quad ; G_X(x) = \frac{i-1}{n}$$

$$F(X_{(i)}; \theta) - \frac{i-1}{n} \leq d_{\alpha, n}$$

$$F(X_{(i)}; \theta) \leq \frac{i-1}{n} + d_{\alpha, n} \quad \text{----- (2.3)}$$

ดังนั้น จาก (2.2) และ (2.3) จึงได้ว่า

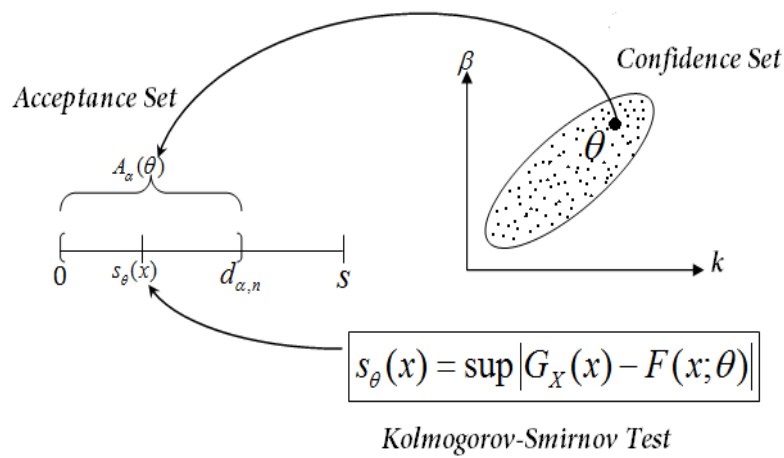
$$\boxed{\frac{i}{n} - d_{\alpha, n} \leq F(X_{(i)}; \theta) \leq \frac{i-1}{n} + d_{\alpha, n}}$$

เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ เป็นค่าที่เรียงลำดับแล้วของตัวแปรสุ่ม X_i

นอกจากนี้ เราสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของเซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอรโนฟ เป็น 2 ลักษณะความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1. ความสัมพันธ์ที่เซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอรโนฟ มีความสอดคล้องกัน

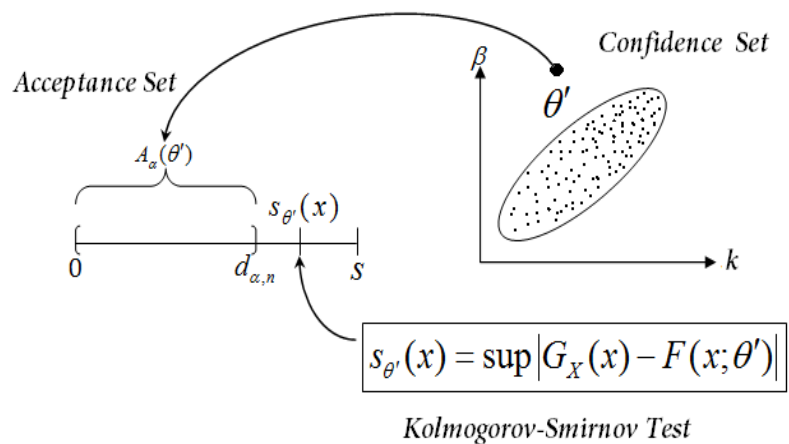
กล่าวคือ เซตความเชื่อมั่นให้ค่าพารามิเตอร์ที่จะยอมรับได้ภายใต้สมมติฐานว่างของการทดสอบที่มีระดับนัยสำคัญเท่ากับ α และเมื่อใช้การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอรโนฟ จะพบว่าสถิติทดสอบนี้ทำให้ค่าของข้อมูล x ตกอยู่ในบริเวณการยอมรับสมมติฐาน (โดยงานวิจัยนี้ สนใจศึกษาเฉพาะกรณีนี้เท่านั้น) แสดงความสัมพันธ์ได้ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ความสัมพันธ์ที่เซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอ์นอฟมีความสอดคล้องกัน

2. ความสัมพันธ์ที่เซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอ์นอฟ มีความขัดแย้งกัน

กล่าวคือ เซตความเชื่อมั่นให้ค่าพารามิเตอร์ที่จะยอมรับได้ภายใต้สมมติฐานว่างของการทดสอบที่มีระดับนัยสำคัญเท่ากับ α แต่เมื่อใช้การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอ์นอฟ จะพบว่าสถิติทดสอบนี้ไม่ได้ทำให้ค่าของข้อมูล x ตกอยู่ในบริเวณการยอมรับสมมติฐาน แสดงความสัมพันธ์ได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ที่เซตความเชื่อมั่น เซตการยอมรับสมมติฐาน และการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอ์นอฟมีความขัดแย้งกัน

2.5 ฟังก์ชันควอนไทล์ (Quantile Function)

ฟังก์ชันควอนไทล์ (quantile function) คือการผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม
นิยาม ฟังก์ชันควอนไทล์ที่สอดคล้องกับ c.d.f. เมื่อ F เป็นฟังก์ชันจากช่วง $(0,1)$ ไปสู่
 จำนวนจริง $Q_F : (0,1) \rightarrow \mathfrak{R}$ นั่นคือ

$$Q_F(p) = \inf \{x \in \mathfrak{R} : F(x) \geq p\} \text{ for } 0 < p < 1$$

คุณสมบัติของฟังก์ชันควอนไทล์ที่น่าสนใจ มีดังนี้

1. ถ้า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่เพิ่มขึ้น (Strictly increasing continuous function) บน
 จำนวนจริง

$$Q_F = F^{-1}$$

2. ถ้า F เป็น c.d.f. ใดๆ และ $0 < p < 1$ จะได้ว่า

$$F(Q_F(p)-) \leq p \leq F(Q_F(p))$$

3. $p \leq F(x) \Leftrightarrow Q_F(p) \leq x, 0 < p < 1$

2.6 การสร้างเซตและแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมา

Hayter และ Kiatsupaibul (2013) ได้พัฒนาทฤษฎีที่เป็นวิธีใหม่ซึ่งเป็นการคำนวณแบบ
 ตรงไปตรงมาของการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ซึ่งมี
 รายละเอียดดังต่อไปนี้

2.6.1 การพัฒนาทฤษฎีของการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

พิจารณาการแจกแจงแบบแกมมาด้วยพารามิเตอร์แสดงรูปร่างเท่ากับ k และ
 พารามิเตอร์แสดงอัตราเท่ากับ β แทนด้วย $\Gamma(k, \beta)$ ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงคือ

$$F(x; k, \beta) \text{ ----- (2.4)}$$

ให้ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาแบบมาตรฐาน (standard gamma distribution function)
 แทนด้วย

$$F_k(x) = F(x; k, 1) \quad \text{----- (2.5)}$$

จะได้ความสัมพันธ์ที่น่าสนใจจาก (2.4) และ (2.5) ดังนี้

ให้
$$X \sim \Gamma(k, \beta)$$

และ
$$Y = cX \sim \Gamma\left(k, \frac{\beta}{c}\right)$$

$$F\left(x; k, \frac{\beta}{c}\right) = P(Y \leq x) = P(cX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{c}\right) = F\left(\frac{x}{c}; k, \beta\right)$$

จะเห็นว่า
$$F\left(x; k, \frac{\beta}{c}\right) = F\left(\frac{x}{c}; k, \beta\right)$$

$$F(x; k, 1) = F\left(\frac{x}{\beta}; k, \beta\right)$$

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$F(\beta x; k, 1) = F(x; k, \beta)$$

หรือ

$$F_k(\beta x) = F(x; k, \beta)$$

ให้ฟังก์ชันควอนไทล์ของการแจกแจงแกมมาแบบมาตรฐานคือ $\Gamma(k, 1)$ แทนด้วย $\Gamma_k(p)$ นั่นคือ

$$F(\Gamma_k(p); k, 1) = p$$

และจาก (2.1) ให้ $\theta = (k, \beta)$ การทดสอบโคดโมโกรอฟ-สเมอรโนฟขนาด α ของข้อมูลที่มาจากการแจกแจงแกมมานี้ จะมีบริเวณการยอมรับสมมติฐาน คือ

$$\left\{ X : \sup_x |G_x(x) - F(x; k, \beta)| \leq d_{\alpha, n} \right\}$$

เมื่อให้ $1 \leq i \leq n$ และ $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ เป็นค่าที่เรียงลำดับแล้วของตัวแปรสุ่ม X_i ซึ่งมีปริภูมิพารามิเตอร์คือ $S = \{(k, \beta) : k \geq 0, \beta \geq 0\}$ ดังนั้น เซตความเชื่อมั่นที่

แท้จริงสามารถสร้างขึ้นได้ ซึ่งจะเป็นค่าของ (k, β) และจะเป็นสับเซตของ S ที่ขึ้นกับสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร်นอฟ ดังนี้

$$\frac{i}{n} - d_{\alpha,n} \leq F(X_{(i)}; k, \beta) \leq \frac{i-1}{n} + d_{\alpha,n}$$

แต่จากความสัมพันธ์ $F(\beta x; k, 1) = F(x; k, \beta)$ จะได้

$$\Gamma_k \left(\max \left\{ \frac{i}{n} - d_{\alpha,n}, 0 \right\} \right) \leq X_{(i)} \beta \leq \Gamma_k \left(\min \left\{ \frac{i-1}{n} + d_{\alpha,n}, 1 \right\} \right) \quad ; 1 \leq i \leq n$$

เมื่อ k ถูกกำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ค่าของ β ก็คือ

$$\beta \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\Gamma_k \left(\max \left\{ \frac{i}{n} - d_{\alpha,n}, 0 \right\} \right)}{X_{(i)}}, \frac{\Gamma_k \left(\min \left\{ \frac{i-1}{n} + d_{\alpha,n}, 1 \right\} \right)}{X_{(i)}} \right) \quad \text{----- (2.6)}$$

เมื่อ

$$L(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\Gamma_k \left(\max \left\{ \frac{i}{n} - d_{\alpha,n}, 0 \right\} \right)}{X_{(i)}},$$

และ

$$U(k) = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\Gamma_k \left(\min \left\{ \frac{i-1}{n} + d_{\alpha,n}, 1 \right\} \right)}{X_{(i)}}$$

แล้วเซตความเชื่อมั่นจะประกอบด้วยค่าของ k ที่ทำให้ $L(k) \leq U(k)$ ซึ่ง $\beta \in [L(k), U(k)]$ ของค่า k เหล่านี้ ฉะนั้นจะสามารถหาค่า C_α ที่แทนเซตความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ได้

2.6.2 ขอบเขตของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

จากสมการ (2.6) สามารถบ่งบอกว่าเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีขอบเขตใน β นอกจากนี้ยังสามารถบอกขอบเขตบนของพารามิเตอร์ k ได้ดังนี้

พิจารณา $i_1 < i_2$ และข้อมูล $X_{(i_1)} < X_{(i_2)}$ โดยที่ $0 < \frac{i_1}{n} - d_{\alpha,n}$ และ $\frac{i_2-1}{n} + d_{\alpha,n} < 1$ (ซึ่งจะมีเซตของจุดข้อมูลที่เป็นไปตามสมบัตินี้เสมอสำหรับเซตข้อมูลที่นำมาใช้) แล้วก็ยังมีความเป็นไปได้ (ภายใต้เงื่อนไข $L(k) \leq U(k)$) ซึ่งมีความจำเป็นที่

$$\frac{\Gamma_k\left(\frac{i_1}{n} - d_{\alpha,n}\right)}{X_{(i_1)}} \leq \frac{\Gamma_k\left(\frac{i_2-1}{n} + d_{\alpha,n}\right)}{X_{(i_2)}}$$

เนื่องจาก $\Gamma(k,1)$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ k และมีความแปรปรวนเท่ากับ k และเมื่อ k มีขนาดใหญ่จะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ จึงได้ว่า

$$\Gamma_k\left(\frac{i_1}{n} - d_{\alpha,n}\right) \approx k + c_1\sqrt{k}$$

และ

$$\Gamma_k\left(\frac{i_2-1}{n} + d_{\alpha,n}\right) \approx k + c_2\sqrt{k}$$

สำหรับ k มีขนาดใหญ่ ส่วนคอนสแตนต์ c_1 และ c_2 มาจากการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน โดยที่ $c_1 = z_{\frac{i_1}{n} - d_{\alpha,n}}$ และ $c_2 = z_{\frac{i_2-1}{n} + d_{\alpha,n}}$ ดังนั้นจึงจำเป็นที่

$$\frac{k + c_1\sqrt{k}}{X_{(i_1)}} \leq \frac{k + c_2\sqrt{k}}{X_{(i_2)}}, \quad \text{----- (2.7)}$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\frac{k + c_1\sqrt{k}}{k + c_2\sqrt{k}} \leq \frac{X_{(i_1)}}{X_{(i_2)}} < 1$$

พบว่า เมื่อ k ยิ่งมีขนาดใหญ่ จะทำให้ค่าด้านซ้ายมือยิ่งเข้าใกล้ 1 และจะไม่มีค่าที่เป็นไปได้ของ β ดังนั้น การหาเซตความเชื่อมั่นจะสามารถหาขอบเขตสำหรับค่า k ได้

จาก (2.7) เราจะสามารถหาค่า k ที่มากที่สุดได้ โดยการหาค่า k ที่ต่ำที่สุดของค่า k ที่ได้มาจากการแก้สมการ (2.7) ทุกๆค่าที่เป็นไปได้ของ $X_{(i_1)}$ และ $X_{(i_2)}$ เมื่อ $i_1 < i_2$ โดยค่า k ของทุกๆค่าสามารถหาได้จากสมการดังนี้

จาก

$$\frac{k + c_1\sqrt{k}}{X_{(i_1)}} = \frac{k + c_2\sqrt{k}}{X_{(i_2)}}$$

$$kX_{(i_2)} + c_1X_{(i_2)}\sqrt{k} = kX_{(i_1)} + c_2X_{(i_1)}\sqrt{k}$$

$$(X_{(i_2)} - X_{(i_1)})k = (c_2X_{(i_1)} - c_1X_{(i_2)})\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k} = \frac{(c_2X_{(i_1)} - c_1X_{(i_2)})}{(X_{(i_2)} - X_{(i_1)})}$$

จะได้

$$k = \left(\frac{(c_2X_{(i_1)} - c_1X_{(i_2)})}{(X_{(i_2)} - X_{(i_1)})} \right)^2$$

สำหรับค่า k ที่ต่ำที่สุด ก็คือค่า k ที่ทำให้เงื่อนไข $L(k) \leq U(k)$ เป็นจริง

2.6.3 แถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา

ให้ $p \in (0,1)$ และ x_p แทนฟังก์ชันควอนไทล์ที่ p ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ x_p ก็คือ

$$\min_{(k,\beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta) \leq x_p \leq \max_{(k,\beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta)$$

การหาค่า $\min_{(k,\beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta)$ และ $\max_{(k,\beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta)$ จะสามารถหาค่าได้ในแบบ 1 มิติ เพราะว่า ค่า k กำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จาก

$$F(x; k, \beta) = F_k(\beta x)$$

จะได้

$$g_k(\beta) = F^{-1}(p; k, \beta) = \frac{\Gamma_k(p)}{\beta}$$

ฉะนั้น ที่แต่ละค่าของพารามิเตอร์ k , $g_k(\beta)$ ก็คือค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $L(k)$ และ $U(k)$ ตามลำดับ ขอบเขตความเชื่อมั่นของ x_p จึงเปลี่ยนรูปเป็นดังนี้

$$\min_{(k,\beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta) = \min_{k \ni L(k) \leq U(k)} \frac{\Gamma_k(p)}{U(k)}$$

$$\max_{(k, \beta) \in C_\alpha} F^{-1}(p; k, \beta) = \max_{k \in L(k) \leq U(k)} \frac{\Gamma_k(p)}{L(k)}$$

ดังนั้น การสร้างแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมา จะหาได้โดยการหาช่วงความเชื่อมั่นของ x_p เมื่อ $0 < p < 1$ นอกจากนี้ยังสามารถหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับควอนไทล์ของการแจกแจงแกมมาได้ด้วย เช่น มัชยฐาน ขอบล่างและขอบบนของควอนไทล์ เป็นต้น

2.6.4 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังของตัวแบบแกมมา

$$\text{จาก} \quad X \sim \Gamma(k, \beta)$$

$$\text{และ} \quad E(X) = \frac{k}{\beta}$$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง หาจากค่าต่ำสุดของ $\frac{k}{U(k)}$ บนค่า k ทุกค่าในเขตความเชื่อมั่น ส่วนขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง หาจากค่าสูงสุดของ $\frac{k}{L(k)}$ ทุกค่า k

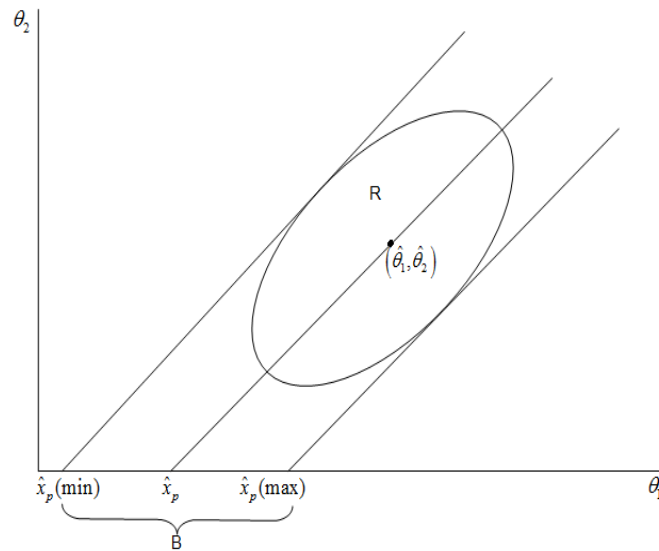
2.7 การสร้างเขตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าของตัวแบบแกมมา

Cheng และ Iles (1983) ได้นำเสนอวิธีมาตรฐานในการสร้างเขตความเชื่อมั่นแบบ 2 พารามิเตอร์พร้อมกัน ด้วยการใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบลู่อู่เข้า ที่ขึ้นกับการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งได้นำไปใช้กับการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ θ ได้แก่ การแจกแจงปกติ การแจกแจงค่าสุดขีด การแจกแจงล็อกนอร์มอล และการแจกแจงไวบูลล์ มีหลักการและแนวคิดเบื้องต้น ดังนี้

1. สร้าง $100(1-\alpha)\%$ ของบริเวณความเชื่อมั่น R (รูปที่ 2.6) สำหรับเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ θ ที่ไม่ทราบค่า
2. หาแถบความเชื่อมั่น B (รูปที่ 2.6) ซึ่งพิจารณากราฟ $y = F(x; \theta)$ ในบริเวณ (x, y) แล้วดูค่าเวกเตอร์พารามิเตอร์ θ ที่แปรผันไปในบริเวณความเชื่อมั่น ส่วนการกำหนดขอบเขตต่ำสุดและขอบเขตสูงสุดของแถบความเชื่อมั่น จะใช้ควอนไทล์ที่ p ก็คือ x_p นิยามดังนี้

$$P(X \leq x_p) = F(x_p; \theta) = p$$

และพิจารณาว่า x_p มีการแปรผันไปอย่างไร เมื่อ p กำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง และ θ แปรผันไปในบริเวณ R นอกจากนี้ที่ค่าของ p ให้ค่ามา 1 คู่ คือค่า $\hat{x}_p(\min)$ และ $\hat{x}_p(\max)$ ซึ่งจะอยู่ตามเส้นสัมผัสของวงรี R ที่ขนานกัน แสดงได้ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ตัวอย่างของลักษณะเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแบบลู่อู่เข้า

จากการนำวิธีดังกล่าวข้างต้น มาประยุกต์ใช้กับการหาเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าของตัวแบบเกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ โดยให้ $X \sim \Gamma(k, \beta)$ และ $\theta = (k, \beta)$ นั่นคือให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเกมมา ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม แทนด้วย $F(x; \theta)$ ที่เวกเตอร์ θ เป็นพารามิเตอร์ที่เราไม่ทราบค่า 2 ตัว บริเวณ R (รูปที่ 2.6) หรือเซตความเชื่อมั่นนี้ จะหาได้จากสถิติทดสอบ ดังนี้

$$Q(\theta) = (\hat{\theta} - \theta)^T I (\hat{\theta} - \theta)$$

ซึ่ง $Q(\theta)$ เป็นตัวแปรไคสแควร์แบบลู่อู่เข้าด้วยระดับของศาความเสรีเท่ากับ 2

โดย I แทน เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ ซึ่ง $I = -E(\partial^2 \ln L / \partial \theta_i \partial \theta_j)$

ให้เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ คือ $\theta = \begin{bmatrix} k \\ \beta \end{bmatrix}$

ให้เวกเตอร์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$

ให้ฟังก์ชันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม แทนด้วย $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

จะได้
$$Q(k, \beta) = a(\hat{k} - k)^2 + 2b(\hat{k} - k)(\hat{\beta} - \beta) + d(\hat{\beta} - \beta)^2$$

ดังนั้นที่ระดับความเชื่อมั่น $100(1 - \alpha)\%$ สามารถหาขอบเขตของเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่เป็นรูปวงรีได้จาก
$$Q(k, \beta) = \chi_{\alpha, 2}^2$$

ดังนั้น เมื่อ k กำหนดเป็นค่าคงที่ จะได้ขอบเขตของ β คือ

$$\hat{\beta}_{\min} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k} - k) - \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha, 2}^2)}}{2d}$$

$$\hat{\beta}_{\max} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k} - k) + \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha, 2}^2)}}{2d}$$

พิสูจน์ จาก

$$Q(k, \beta) = \chi_{\alpha, 2}^2$$

$$a(\hat{k} - k)^2 + 2b(\hat{k} - k)(\hat{\beta} - \beta) + d(\hat{\beta} - \beta)^2 - \chi_{\alpha, 2}^2 = 0 \text{ ----- (2.8)}$$

จากสมการ(2.8) สามารถจัดในรูประบบสมการกำลังสอง $AX^2 + BX + C = 0$ ได้คือ

ให้ $A = d$, $B = 2b(\hat{k} - k)$, $C = a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha, 2}^2$, $X = \hat{\beta} - \beta$ นั่นคือ

$$\hat{\beta} - \beta = \frac{-2b(\hat{k} - k) \pm \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha, 2}^2)}}{2d}$$

กรณี $\beta < \hat{\beta}$; $\hat{\beta} - \beta > 0$ นั่นคือ $\beta = \hat{\beta}_{\min}$, $k = \hat{k}_{\min}$; $\hat{k} - k > 0$

$$\text{จะได้ } \hat{\beta} - \hat{\beta}_{\min} = \frac{-2b(\hat{k} - k) - \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

$$\hat{\beta}_{\min} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k} - k) - \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

กรณี $\beta > \hat{\beta}$; $\hat{\beta} - \beta < 0$ นั่นคือ $\beta = \hat{\beta}_{\max}$, $k = \hat{k}_{\max}$; $\hat{k} - k < 0$

$$\text{จะได้ } -(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{\max}) = \frac{2b(\hat{k} - k) + \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

$$\hat{\beta}_{\max} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k} - k) + \sqrt{4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

สำหรับขอบเขตของพารามิเตอร์ k ที่คือ $\hat{k}_{\min}, \hat{k}_{\max}$ ก็คือค่า k ที่ทำให้ $\hat{\beta}_{\min} = \hat{\beta}_{\max}$ นั่นคือค่า k ที่ทำให้ $4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2) = 0$

$$\text{ดังนั้น } \hat{k}_{\min} = \hat{k} - \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}^2}{ad - b^2}},$$

$$\hat{k}_{\max} = \hat{k} + \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}^2}{ad - b^2}}$$

$$\text{พิสูจน์ จาก } 4b^2(\hat{k} - k)^2 - 4d(a(\hat{k} - k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2) = 0$$

$$b^2(\hat{k} - k)^2 - ad(\hat{k} - k)^2 + d\chi_{\alpha,2}^2 = 0$$

$$b^2(\hat{k} - k)^2 - ad(\hat{k} - k)^2 = -d\chi_{\alpha,2}^2$$

$$(\hat{k} - k)^2(b^2 - ad) = -d\chi_{\alpha,2}^2$$

$$(\hat{k} - k)^2 = \frac{-d\chi_{\alpha,2}^2}{(b^2 - ad)}$$

$$(\hat{k} - k) = \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}^2}{(ad - b^2)}}$$

กรณี $k < \hat{k}$; $\hat{k} - k > 0$ นั่นคือ $k = \hat{k}_{\min}$

จะได้

$$\hat{k}_{\min} = \hat{k} - \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}^2}{ad - b^2}},$$

กรณี $k > \hat{k}$; $\hat{k} - k < 0$ นั่นคือ $k = \hat{k}_{\max}$

จะได้

$$\hat{k}_{\max} = \hat{k} + \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}^2}{ad - b^2}}$$

เนื่องจากทราบขอบเขตของ β และขอบเขตของ k เมื่อ p กำหนดเป็นค่าคงที่ จะสามารถหาแถบความเชื่อมั่นของ $\hat{x}_p(\min)$ และ $\hat{x}_p(\max)$ ได้

2.8 การวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์

ในการประมาณความเชื่อมั่นจะขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นที่ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง โดยถ้าพบว่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แสดงว่าช่วงที่สร้างขึ้นมีความเชื่อมั่นตามที่กำหนด โดยวัดได้ดังนี้

ทำการจำลองข้อมูลจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด แทนด้วย θ เป็นจำนวน r รอบ

ให้ t_i แทน การเกิดเหตุการณ์ที่ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ θ ตก

อยู่ในรอบการจำลองที่ i

โดยถ้า $t_i = 1$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ใน

รอบการจำลองที่ i

$t_i = 0$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะไม่มีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่

ในรอบการจำลองที่ i

ดังนั้น $c = \sum_{i=1}^r \frac{t_i}{r}$ คือความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์

2.9 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

ถ้าสุ่มการจำลองขนาด n จากการจำลองทั้งหมดขนาด N ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลที่แบ่งเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่มีลักษณะตามต้องการ ได้แก่ ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ในรอบการจำลองนั้นๆ และกลุ่มที่ไม่มีลักษณะตามต้องการ คือ ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะไม่มีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ในรอบการจำลองนั้นๆ จะได้ว่า ค่าสัดส่วนของตัวอย่างที่มีลักษณะตามต้องการ คือ $\hat{p} = \frac{t_i}{n}$ เมื่อ t_i คือ จำนวนตัวอย่างที่มีลักษณะตามต้องการ โดยหากต้องการดูว่าสัดส่วนของตัวอย่างแตกต่างจากสัดส่วนที่ใช้เป็นเกณฑ์หรือไม่ จะมีสมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ ดังนี้

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

โดย p_0 เป็นระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากการอาศัยทฤษฎีขีดจำกัดกลางจะได้ว่า ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ค่าสัดส่วนของตัวอย่าง \hat{p} จะมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ p และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{pq}{n}$ จะได้ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน ภายใต้ H_0 คือ

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

โดยมีบริเวณวิกฤติ คือ $|z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ หรือ $p\text{-value} \leq \alpha$

การสรุปผล คือ หากปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ซึ่งจะสรุปได้ว่า พบหลักฐานทางสถิติว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบไม่เท่ากับความเชื่อมั่นที่กำหนด

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีเป้าหมายเพื่อศึกษาวิธีการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบเกมมา และเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบเกมมาที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่อู่เข้า

ในงานวิจัยนี้จะใช้สัญลักษณ์

k_{\min_e}, k_{\min_a} แทน ค่าต่ำสุดของพารามิเตอร์แสดงรูปร่างในเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ตามลำดับ

k_{\max_e}, k_{\max_a} แทน ค่าสูงสุดของพารามิเตอร์แสดงรูปร่างในเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ตามลำดับ

$\beta_{\min_e}, \beta_{\min_a}$ แทน ค่าต่ำสุดของพารามิเตอร์แสดงอัตราในเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ตามลำดับ

$\beta_{\max_e}, \beta_{\max_a}$ แทน ค่าสูงสุดของพารามิเตอร์แสดงอัตราในเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ตามลำดับ

การวิเคราะห์ข้อมูลทั้งหมดทำบนโปรแกรม R เวอร์ชัน 2.15.2 โดยวิเคราะห์ครอบคลุมตามขอบเขตของการวิจัย ในบทนี้จะกล่าวถึงแผนการดำเนินการวิจัยและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย ตามลำดับ

3.1 แผนการดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาสถานการณ์จำลองที่มีความแตกต่างกัน 36 สถานการณ์เพื่อใช้ในการศึกษาและใช้เปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีการอนุมานที่แท้จริงและวิธีแบบลู่อู่เข้า โดยจะมีรูปแบบเงื่อนไข ดังนี้

1. ตัวแบบเกมมาที่ใช้ในการวิจัยคือ ตัวแบบเกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์
2. ข้อมูลที่นำมาศึกษามีการแจกแจงเกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์คือ (k, β) ต่างๆ ดังนี้
 - 2.1 $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$
 - 2.2 $k = 3$ และ $\beta = 0.5$
 - 2.3 $k = 3$ และ $\beta = 2$

3. ขนาดของตัวอย่างเท่ากับ 10, 30 และ 100
4. ระดับความเชื่อมั่นที่ใช้ในการวิจัยเท่ากับ 0.95 และ 0.99
5. จำนวนรอบการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์เท่ากับ 1000 รอบ

3.2 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาวิธีการหาเขตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่เข้า
2. จำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงแกมมา โดยมีพารามิเตอร์ตามที่กำหนด
3. นำข้อมูลที่จำลองขึ้นมาหาเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังและแถบความเชื่อมั่นจากเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง พร้อมทั้งช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ซึ่งมีขั้นตอนอย่างละเอียดตามลำดับ ดังนี้

3.1 เขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

3.1.1 เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก คือ $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

3.1.2 จัดข้อมูล $x_{(i_1)}$ และ $x_{(i_2)}$ เป็นคู่ ซึ่งจะมี $\binom{n}{2} = z$ คู่ที่เป็นไปได้

3.1.3 หาค่าวิกฤต $d_{\alpha,n}$ ของสถิติโคโลโมโกรอฟจากโปรแกรม R

3.1.4 คำนวณค่าควอนไทล์ c_1 และ c_2 ของทุกๆคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดย

$$c_1 = z_{\frac{i_1 - d_{\alpha,n}}{n}} \quad \text{และ} \quad c_2 = z_{\frac{i_2 - 1}{n} + d_{\alpha,n}}$$

3.1.5 คำนวณค่า k_1, k_2, \dots, k_z ของทุกๆคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

$$\text{โดย} \quad k_i = \left(\frac{(c_2 X_{(i_2)} - c_1 X_{(i_1)})}{(X_{(i_2)} - X_{(i_1)})} \right)^2 ; i = 1, 2, \dots, z$$

3.1.6 หาค่า $k_{\max_e} = \min(k_1, k_2, \dots, k_z)$

3.1.7 กำหนดค่า k_{\min_e} เริ่มต้นเท่ากับ 0.01 และเพิ่มค่า k ทีละ 0.01 จนกระทั่ง

$$\text{ถึงค่า} \quad k_{\max_e} \quad \text{จะได้} \quad k_e = (k_{\min_e}, \dots, k_{\max_e})$$

3.1.8 นำ k แต่ละค่า ใน k_e มาคำนวณค่า $L(k)$ และ $U(k)$ โดย

$$L(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\Gamma_k \left(\max \left\{ \frac{i}{n} - d_{\alpha, n}, 0 \right\} \right)}{X(i)},$$

$$U(k) = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\Gamma_k \left(\min \left\{ \frac{i-1}{n} + d_{\alpha, n}, 1 \right\} \right)}{X(i)}$$

3.1.9 ปรับค่าพารามิเตอร์ k_{\min_e} และ k_{\max_e} ใหม่ โดยเอาเฉพาะค่า k ใน k_e ที่ทำให้เงื่อนไข $L(k) \leq U(k)$ เป็นจริง

3.1.10 จะได้เขตความเชื่อมั่นของ (k, β) คือ ค่าของ k ใน k_e ที่ให้ $L(k) \leq U(k)$ ซึ่ง $\beta \in [L(k) = \beta_{\min_e}, U(k) = \beta_{\max_e}]$ ของค่า k ที่ปรับแล้วนี้

3.1.11 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง โดยการสร้างกราฟระหว่าง (β, k)

3.2 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง $\left(\frac{k}{\beta} \right)$

3.2.1 หาขอบเขตล่างได้จาก $\min_{k \ni L(k) \leq U(k)} \frac{k}{U(k)}$

3.2.2 หาขอบเขตบนได้จาก $\max_{k \ni L(k) \leq U(k)} \frac{k}{L(k)}$

3.3 แถบความเชื่อมั่นจากเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง (อาศัยการอนุมานบนฟังก์ชันควอนไทล์) และจะได้ช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ด้วย

3.3.1 กำหนดค่าความน่าจะเป็น (p) เริ่มต้นเท่ากับ 0.05 และเพิ่มค่าทีละ 0.05 จนกระทั่งมีค่าเท่ากับ 0.95 ซึ่งจะมีค่าความน่าจะเป็น (p) ทั้งหมด 19 ค่า

3.3.2 หากควอนไทล์ของการแจกแจงแกมมา โดยที่ k คือ k ใน k_e ที่ทำให้ $L(k) \leq U(k)$ จะได้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของ x_p คือ

ขอบเขตล่างของ x_p ($\hat{x}_p(\min)$) คือ

$$\min \frac{\Gamma_k(p)}{U(k)} ; k \ni L(k) \leq U(k) \text{ และ } \beta \in U(k)$$

ขอบเขตบนของ x_p ($\hat{x}_p(\max)$) คือ

$$\max \frac{\Gamma_k(p)}{L(k)} ; k \ni L(k) \leq U(k) \text{ และ } \beta \in L(k)$$

3.3.3 แถบความเชื่อมั่นหาค่าได้จากการสร้างกราฟระหว่าง x กับ $F(x)$

4. นำข้อมูลที่จำลองขึ้นมาหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง และแถบความเชื่อมั่นจากเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า พร้อมทั้งช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ซึ่งมีขั้นตอนอย่างละเอียดตามลำดับ ดังนี้

4.1 เขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า

4.1.1 ประเมินค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$

4.1.2 หาผกผันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $= \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

4.1.3 คำนวณค่า k_{\min_a} และ k_{\max_a} จาก

$$k_{\min_a} = \hat{k} - \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}}{ad-b^2}}, \quad k_{\max_a} = \hat{k} + \sqrt{\frac{d\chi_{\alpha,2}}{ad-b^2}}$$

4.1.4 กำหนดค่า k_{\min_a} เป็นค่าเริ่มต้นเท่ากับ 0.01 และเพิ่มค่า k ทีละ 0.01

จนกระทั่งถึงค่า k_{\max_a} จะได้ $\underline{k}_a = [k_{\min_a}, \dots, k_{\max_a}]$

4.1.5 นำ k แต่ละค่า ใน \underline{k}_a มาคำนวณค่า β_{\min_a} และ β_{\max_a} จาก

$$\beta_{\min_a} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k}-k) - \sqrt{4b^2(\hat{k}-k)^2 - 4d(a(\hat{k}-k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

$$\beta_{\max_a} = \hat{\beta} + \frac{2b(\hat{k}-k) + \sqrt{4b^2(\hat{k}-k)^2 - 4d(a(\hat{k}-k)^2 - \chi_{\alpha,2}^2)}}{2d}$$

4.1.6 จะได้เขตความเชื่อมั่นของ (k, β) คือ ค่าของ k ใน \underline{k}_a

ซึ่ง $\beta \in [\beta_{\min_a}(k), \beta_{\max_a}(k)]$ ของค่า k เหล่านี้

4.1.7 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง โดยการสร้างกราฟระหว่าง (β, k)

4.2 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง $\begin{pmatrix} k \\ \beta \end{pmatrix}$

4.2.1 หาขอบเขตล่างได้จาก $\min \frac{k}{\beta_{\max_a}(k)} ; k \in \underline{k}_a$

4.2.2 หาขอบเขตบนได้จาก $\max \frac{k}{\beta_{\min_a}(k)} ; k \in \underline{k}_a$

- 4.3 แถบความเชื่อมั่นจากเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า (อาศัยการอนุมานบนฟังก์ชันควอนไทล์) และจะได้ช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัถยฐาน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ด้วย
- 4.3.1 กำหนดค่าความน่าจะเป็น (p) เริ่มต้นเท่ากับ 0.05 และเพิ่มค่าทีละ 0.05 จนกระทั่งมีค่าเท่ากับ 0.95 ซึ่งจะมีค่าความน่าจะเป็น (p) ทั้งหมด 19 ค่า
- 4.3.2 หาคควอนไทล์ของการแจกแจงแกมมา โดย
- ขอบเขตล่างของ x_p ($\hat{x}_p(\min)$) คือ
- $$\min F^{-1}(p; k, \beta) \quad ; k \in \underline{k}_a, \text{ และ } \beta \in \beta_{\max_a}(k)$$
- ขอบเขตบนของ x_p ($\hat{x}_p(\max)$) คือ
- $$\max F^{-1}(p; k, \beta) \quad ; k \in \underline{k}_a, \text{ และ } \beta \in \beta_{\min_a}(k)$$
- 4.3.3 แถบความเชื่อมั่นหาค่าได้จากการสร้างกราฟระหว่าง x กับ $F(x)$
5. วัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีที่แท้จริงจำนวน 1000 รอบ โดยในแต่ละรอบจะสุ่มข้อมูลชุดใหม่ทุกครั้ง และกำหนดพารามิเตอร์ k และ β คงที่
- 5.1 ขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นในแต่ละรอบ
- 5.1.1 นำค่าพารามิเตอร์ k มาเปรียบเทียบกับ k_{\min_e} และ k_{\max_e} โดย
- ถ้า $k_{\min_e} \leq k \leq k_{\max_e}$ จะทำข้อ 5.1.2 ต่อ แต่หากไม่เข้าเงื่อนไขจะให้ค่า t_i ของเซตความเชื่อมั่นรอบนั้นๆ เท่ากับ 0
- 5.1.2 หาค่า β_{\min_e} และ β_{\max_e} จากนั้นเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์ β โดย
- ถ้า $\beta_{\min_e} \leq \beta \leq \beta_{\max_e}$ จะให้ค่า t_i ของเซตความเชื่อมั่นของรอบนั้นๆ เท่ากับ 1
- 5.2 ขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นในแต่ละรอบ
- 5.2.1 หาค่า $F^{-1}(p; k, \beta)$ เมื่อ k, β คือพารามิเตอร์ที่กำหนด และ
- $$p \in [0.05, 0.95]$$
- โดยเพิ่มค่า p ทีละ 0.05
- 5.2.2 นำค่าในข้อ 5.2.1 มาเปรียบเทียบกับ $\hat{x}_p(\min)$ และ $\hat{x}_p(\max)$ ที่หาได้ในข้อ
- 3.3.2 โดยถ้า $\hat{x}_p(\min) \leq F^{-1}(p; k, \beta) \leq \hat{x}_p(\max)$ จะให้ค่า t_i ของแถบ

ความเชื่อมั่นของรอบนั้นๆ เท่ากับ 1 แต่ถ้าไม่เข้าเงื่อนไขจะให้ค่า t_i ของแถบความเชื่อมั่นของรอบนั้นๆ เท่ากับ 0

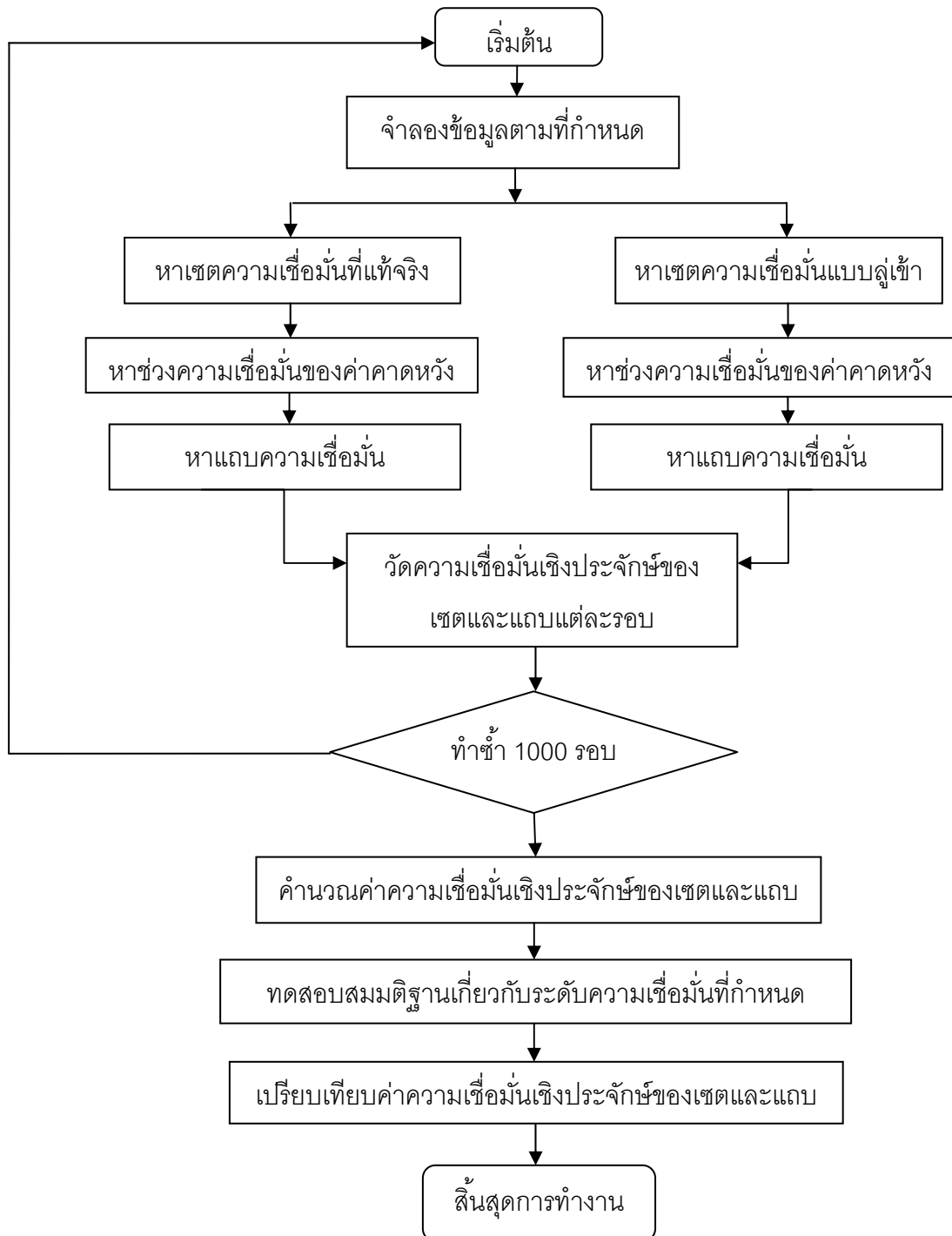
5.3 คำนวณความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์

$$c = \sum_{i=1}^r \frac{t_i}{r} ; r = 1000$$

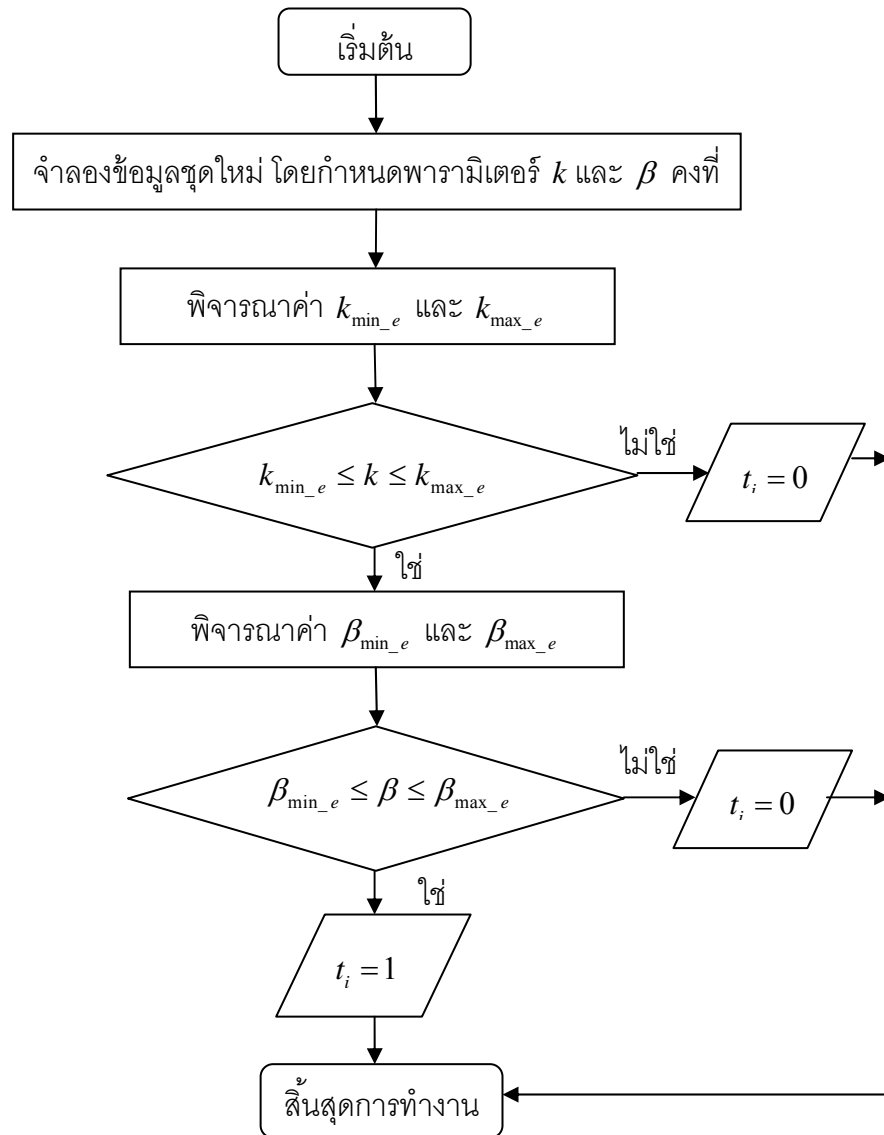
โดยถ้า $t_i = 1$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ (k, β) ตกอยู่ในรอบการจำลองที่ i
 $t_i = 0$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะไม่มีค่าพารามิเตอร์ (k, β) ตกอยู่ในรอบการจำลองที่ i

6. วัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีแบบลู่เข้าจำนวน 1000 รอบ โดยในแต่ละรอบจะสุ่มข้อมูลชุดใหม่ทุกครั้ง และกำหนดพารามิเตอร์ k และ β คงที่ ซึ่งมีหลักการของการวัดเช่นเดียวกับข้อ 5
7. ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด
8. เปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีที่แท้จริง และวิธีแบบลู่เข้าจากข้อ 5 และ ข้อ 6 กับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด
9. สรุปผลการวิจัย

รูปที่ 3.1 ผังงานแสดงขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยทั้งหมด ตั้งแต่ข้อ 2 - ข้อ 8

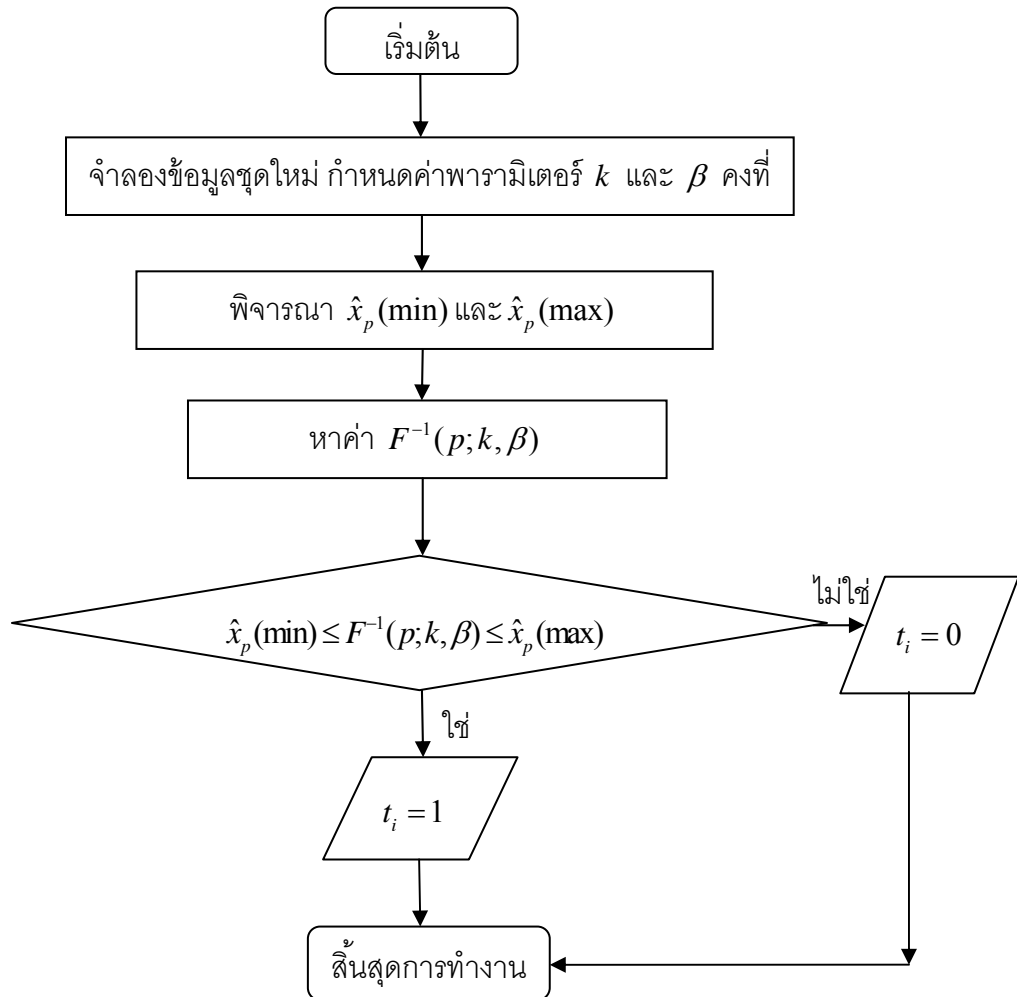


รูปที่ 3.2 ผังงานแสดงขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงในแต่ละรอบ



หมายเหตุ: ขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้าในแต่ละรอบมีลักษณะเช่นเดียวกัน แต่เปลี่ยนจาก k_{\min_e} และ k_{\max_e} เป็น k_{\min_a} และ k_{\max_a} ตามลำดับ และ β_{\min_e} และ β_{\max_e} เปลี่ยนเป็น β_{\min_a} และ β_{\max_a} ตามลำดับ

รูปที่ 3.3 ผังงานแสดงขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงในแต่ละรอบ



หมายเหตุ: ขั้นตอนการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีผู้เข้าในแต่ละรอบมีลักษณะเช่นเดียวกัน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา และเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาที่ได้จากวิธีที่แท้จริงและวิธีแบบลู่อู่เข้า โดยทำการจำลองข้อมูลต่างๆ ที่ใช้สำหรับการวิจัยครั้งนี้ด้วยโปรแกรม R

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการศึกษาและผลการเปรียบเทียบตามวัตถุประสงค์การวิจัยที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ซึ่งแต่ละวิธีในการหาเซตและแถบ ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาหรือการเปรียบเทียบนั้น จะมีการทดลองเหมือนกันตามขอบเขตการวิจัย โดยแต่ละวิธีจะมี 18 กรณีศึกษา ดังนี้

ระดับความ เชื่อมั่น $(1-\alpha)$	ค่าพารามิเตอร์ (k, β)		
	$k = 0.5, \beta = 0.5$	$k = 3, \beta = 0.5$	$k = 3, \beta = 2$
0.95	n=10,30,100		
0.99			

เนื่องจากทุกครั้งในการหาเซตและแถบจะประกอบด้วย 2 วิธี จึงมีทั้งสิ้น 36 กรณีศึกษา ซึ่งรายละเอียดการนำเสนอผลการวิจัยนี้จะแบ่งตามหัวข้อต่างๆ ตามลำดับ ดังนี้

- 4.1 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง
- 4.2 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า
- 4.3 ผลการศึกษาการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า
- 4.4 ผลการศึกษาการหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง และช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75
- 4.5 ผลการศึกษาการหาแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า
- 4.6 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า
- 4.7 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีที่แท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า
- 4.8 ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด
- 4.9 ผลการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีที่แท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า กับความเชื่อมั่นที่กำหนด

4.1 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จากเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

โดยจะแสดงผลของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และ β เมื่อ $k \in (k_{\min_e}, k_{\max_e})$ และ $\beta \in (\beta_{\min_e}, \beta_{\max_e})$ ที่ได้มาจากจุดที่เป็นจุดปิดของเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% ดังตารางที่ 4.1.1 และ 4.1.2 ตามลำดับ ดังนี้

ตารางที่ 4.1.1 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และ β จากเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	k_{\min_e}	k_{\max_e}	β_{\min_e}	β_{\max_e}
$k = 0.5$ $\beta = 0.5$	n=10	0.09	28.82	0.00	53.11
	n=30	0.21	2.31	0.06	3.06
	n=100	0.31	0.89	0.15	1.15
$k = 3$ $\beta = 0.5$	n=10	0.33	1335.99	0.02	209.20
	n=30	0.65	16.04	0.08	2.96
	n=100	1.32	7.02	0.21	1.36
$k = 3$ $\beta = 2$	n=10	0.33	1335.99	0.08	836.80
	n=30	0.65	16.04	0.31	11.85
	n=100	1.32	7.02	0.85	5.42

จากตาราง 4.1.1 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ทุกกรณีศึกษา จะมีช่วงความเชื่อมั่นที่แคบลงเมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น แบ่งพิจารณาผลตามลักษณะค่าของพารามิเตอร์ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

- พารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้น แต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง แต่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) และขนาดตัวอย่างมาก (n=100) และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง (n=30)

- 2) พารามิเตอร์ k เท่าเดิม แต่พารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเท่าเดิมทุกขนาดตัวอย่าง และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 3) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเพิ่มขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 4) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β ลดลง จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นลดลงทุกขนาดตัวอย่าง

ข้อสังเกต : กรณีที่ค่าพารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้นแต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะเห็นว่ามีผลต่อความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยตรง อาจเป็นผลกระทบจากการหาขอบเขตของค่าพารามิเตอร์ k ที่มากที่สุด ที่มีเงื่อนไขที่ขนาดตัวอย่างมากจะประมาณด้วยการแจกแจงปกติ ซึ่งตามปกติจะใช้เกณฑ์อย่างง่ายที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 ส่งผลให้ที่ขนาดตัวอย่างนี้มีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ที่แคบลง

ตารางที่ 4.1.2 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และ β จากเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	k_{\min_e}	k_{\max_e}	β_{\min_e}	β_{\max_e}
$k = 0.5$ $\beta = 0.5$	n=10	0.02	83.97	0.00	155.92
	n=30	0.16	4.83	0.02	6.38
	n=100	0.26	1.25	0.11	1.67
$k = 3$ $\beta = 0.5$	n=10	0.04	3915.95	0.00	613.29
	n=30	0.43	25.11	0.04	4.71
	n=100	1.07	8.83	0.16	1.73
$k = 3$ $\beta = 2$	n=10	0.04	3915.95	0.00	2453.16
	n=30	0.43	25.11	0.14	18.82
	n=100	1.07	10.3	0.65	6.9

จากตาราง 4.1.2 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ทุกกรณีศึกษา จะมีช่วงความเชื่อมั่นที่แคบลงเมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น แบ่งพิจารณาผลตามลักษณะค่าของพารามิเตอร์ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

- 1) พารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้น แต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง แต่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) และขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$) และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$)
- 2) พารามิเตอร์ k เท่าเดิม แต่พารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเท่าเดิมทุกขนาดตัวอย่าง และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 3) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเพิ่มขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 4) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β ลดลง จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นลดลงทุกขนาดตัวอย่าง

ข้อสังเกต : กรณีที่ค่าพารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้นแต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะเห็นว่ามีผลต่อความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยตรง อาจเป็นผลกระทบจากการหาขอบเขตของค่าพารามิเตอร์ k ที่มากที่สุด ที่มีเงื่อนไขที่ขนาดตัวอย่างมากจะประมาณด้วยการแจกแจงปกติ ซึ่งตามปกติจะใช้เกณฑ์อย่างง่ายที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 ส่งผลให้ที่ขนาดตัวอย่างนี้มีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ที่แคบลง

4.2 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า

โดยจะแสดงผลของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และ β เมื่อ $k \in (k_{\min_e}, k_{\max_e})$ และ $\beta \in (\beta_{\min_e}, \beta_{\max_e})$ ที่ได้มาจากจุดที่เป็นจุดปิดของเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% ดังตารางที่ 4.2.1 และ 4.2.2 ตามลำดับ ดังนี้

ตารางที่ 4.2.1 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และ β จากเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	k_{\min_a}	k_{\max_a}	β_{\min_a}	β_{\max_a}
$k = 0.5$ $\beta = 0.5$	n=10	–	–	–	–
	n=30	0.30	0.97	0.31	1.01
	n=100	0.41	0.75	0.41	0.74
$k = 3$ $\beta = 0.5$	n=10	–	–	–	–
	n=30	1.29	5.20	0.23	0.89
	n=100	2.13	4.23	0.40	0.79
$k = 3$ $\beta = 2$	n=10	–	–	–	–
	n=30	1.29	5.20	0.88	3.56
	n=100	2.13	4.23	1.58	3.14

หมายเหตุ: – คือ ไม่พบค่าที่เข้าเงื่อนไขของเซตความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาที่ $k > 0, \beta > 0$

จากตาราง 4.2.1 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ทุกกรณีศึกษาในขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 100 จะมีช่วงความเชื่อมั่นที่แคบลงเมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ไม่พบค่าที่เข้าเงื่อนไขของการหาเซตความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ที่พารามิเตอร์ $k > 0$ และพารามิเตอร์ $\beta > 0$ แบ่งพิจารณาผลตามลักษณะค่าของพารามิเตอร์ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

- 1) พารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้น แต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง แต่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) และขนาดตัวอย่างมาก (n=100) และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง (n=30)
- 2) พารามิเตอร์ k เท่าเดิม แต่พารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเท่าเดิมทุกขนาดตัวอย่าง และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง

- 3) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเพิ่มขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 4) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β ลดลง จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นลดลงทุกขนาดตัวอย่าง

ข้อสังเกต : กรณีที่ค่าพารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้นแต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะเห็นว่ามีผลต่อความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยตรง ซึ่งแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง อาจเป็นผลจากเงื่อนไขที่วิธีแบบลู่อู่จะเหมาะกับขนาดตัวอย่างปานกลางถึงขนาดตัวอย่างมาก แต่ทั้งนี้พบว่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างมาก อาจเนื่องมาจากการไม่เป็นอิสระกันของข้อมูลคือไม่เข้าเงื่อนไขข้อสมมติเบื้องต้น

ตารางที่ 4.2.2 แสดงเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าของพารามิเตอร์ k และ β ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	k_{\min_a}	k_{\max_a}	β_{\min_a}	β_{\max_a}
$k = 0.5$ $\beta = 0.5$	n=10	–	–	–	–
	n=30	0.21	1.06	0.22	1.09
	n=100	0.38	0.78	0.31	0.83
$k = 3$ $\beta = 0.5$	n=10	–	–	–	–
	n=30	0.82	5.66	0.14	0.97
	n=100	1.88	4.48	0.35	0.83
$k = 3$ $\beta = 2$	n=10	–	–	–	–
	n=30	0.82	5.66	0.56	3.88
	n=100	1.88	4.48	1.40	3.33

หมายเหตุ: –คือ ไม่พบค่าที่เข้าเงื่อนไขของเขตความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาที่ $k > 0, \beta > 0$

จากตาราง 4.2.2 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ทุกกรณีศึกษาในขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 100 จะมีช่วงความเชื่อมั่นที่แคบลงเมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ไม่พบค่าที่เข้าเงื่อนไขของการหาเขตความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ที่พารามิเตอร์ $k > 0$ และพารามิเตอร์ $\beta > 0$ แบ่งพิจารณาผลตามลักษณะค่าของพารามิเตอร์ได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

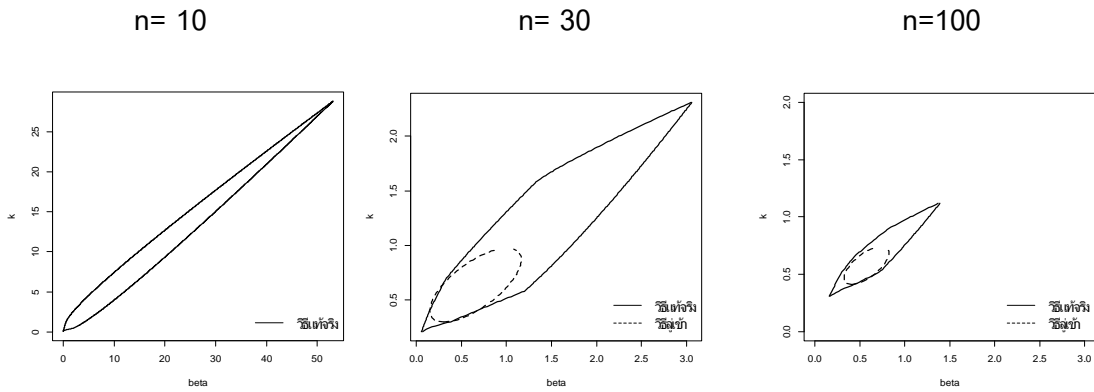
- 1) พารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้น แต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง แต่ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$) และขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$)
- 2) พารามิเตอร์ k เท่าเดิม แต่พารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเท่าเดิมทุกขนาดตัวอย่าง และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะกว้างขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 3) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β เพิ่มขึ้น จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นเพิ่มขึ้นทุกขนาดตัวอย่าง
- 4) พารามิเตอร์ k และพารามิเตอร์ β ลดลง จะพบว่า ทั้งช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ต่างก็มีความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นลดลงทุกขนาดตัวอย่าง

ข้อสังเกต : กรณีที่ค่าพารามิเตอร์ k เพิ่มขึ้นแต่พารามิเตอร์ β เท่าเดิม จะเห็นว่ามีผลต่อความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยตรง ซึ่งแคบลงที่ขนาดตัวอย่างปานกลางและขนาดตัวอย่างมาก อาจเป็นผลจากเงื่อนไขที่วิธีแบบลู่อู่เข้าจะเหมาะกับขนาดตัวอย่างปานกลางถึงขนาดตัวอย่างมาก

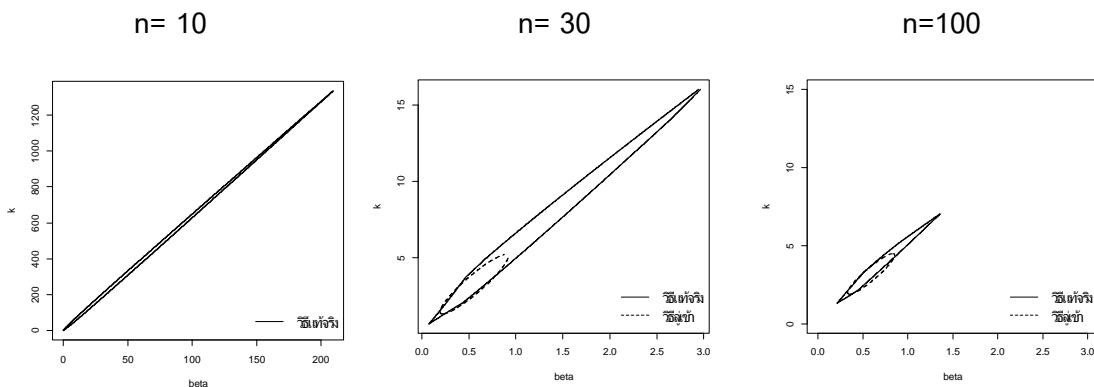
4.3 ผลการแสดงผลรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า

จะเปรียบเทียบรูปของเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ที่หาได้จากข้อ 4.1 และ ข้อ 4.2 โดยการพล็อตกราฟระหว่าง β และ k โดย β อยู่ในแกนนอน และ k อยู่ในแนวแกนตั้ง ดังรูปที่ 4.3.1- 4.3.6 ดังนี้

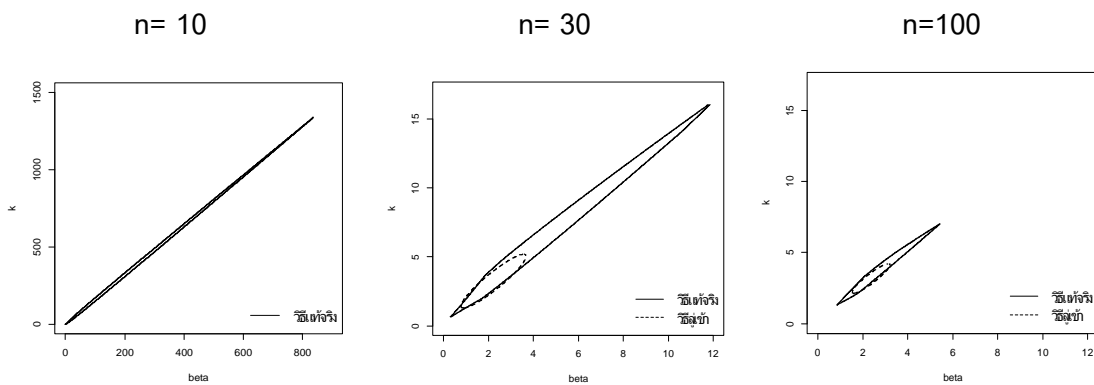
รูปที่ 4.3.1 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$



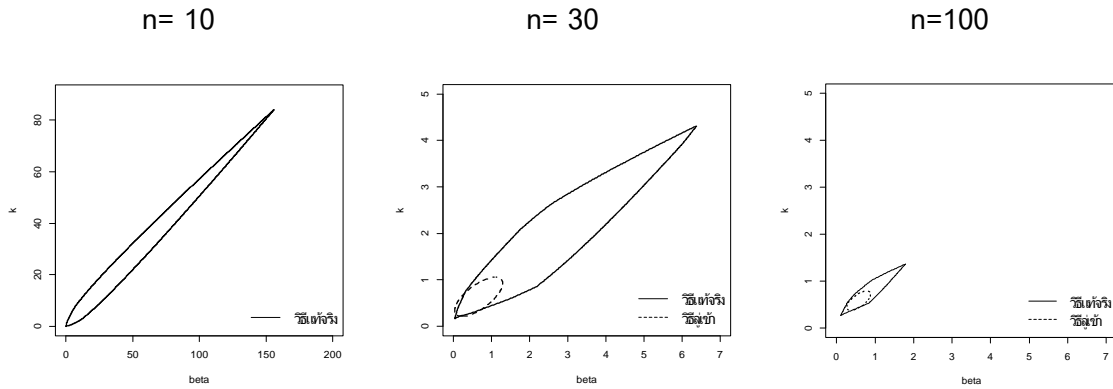
รูปที่ 4.3.2 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$



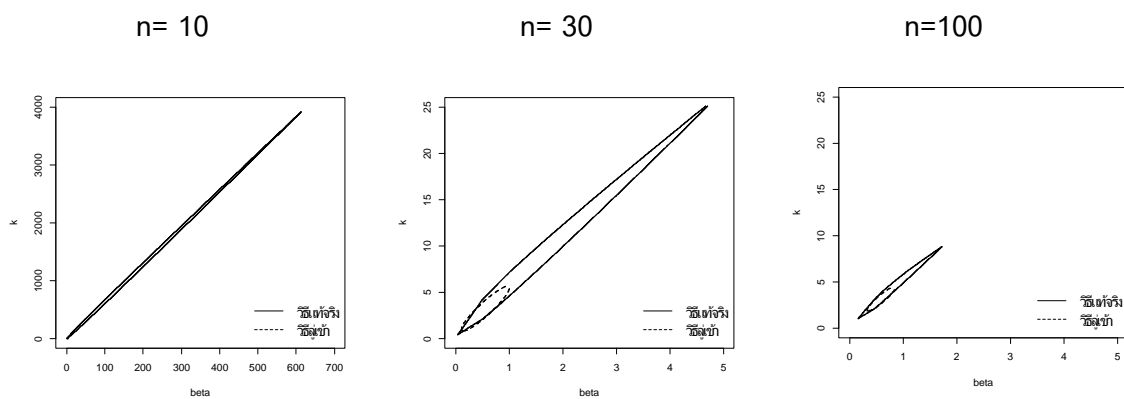
รูปที่ 4.3.3 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$



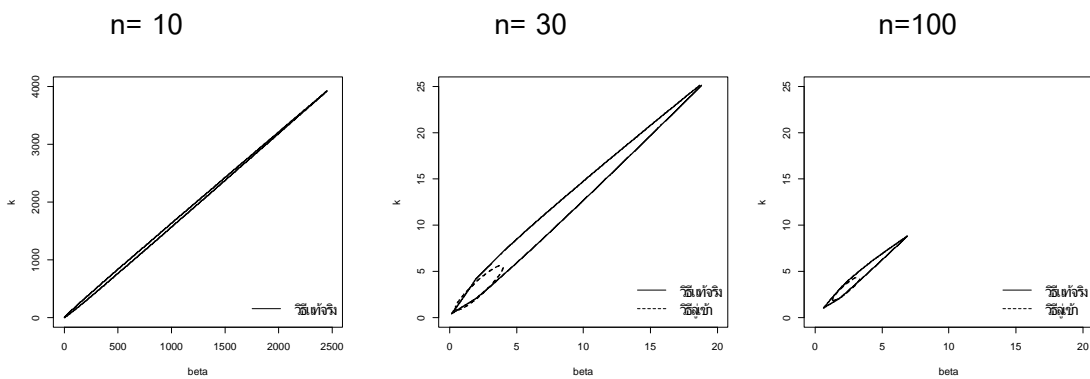
รูปที่ 4.3.4 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$



รูปที่ 4.3.5 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$



รูปที่ 4.3.6 แสดงรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$



จากรูปที่ 4.3.1-4.3.6 พบว่าเซตความเชื่อมั่นที่ได้จากทั้งวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่อู่เข้าจะเป็นรูปปิดทุกกรณีศึกษา โดยที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) จะให้เฉพาะเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงที่มีลักษณะผอมและยาวมาก เนื่องจากความกว้างของช่วงพารามิเตอร์ค่อนข้างกว้าง ส่วนที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$) จะให้เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีลักษณะยาวกว่าเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงที่ขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$) สำหรับเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าจะไม่ให้เซตความเชื่อมั่นที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) ส่วนที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$) จะให้เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีลักษณะเป็นวงรี และเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงที่มีลักษณะวงรีนี้จะมีขนาดเล็กลง เมื่อขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$) นอกจากนี้ ที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$) และที่ขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$) จะพบว่า เซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้ามีลักษณะเล็กกว่าและจะอยู่ภายในเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงทุกค่าพารามิเตอร์ที่ทำการศึกษา

4.4 ผลการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง และช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัธยฐาน และ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า

สัญลักษณ์ที่ใช้ในผลการศึกษาส่วนนี้ แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

k / β	แทนพารามิเตอร์ของค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ย
$F^{-1}(0.25)$	แทนพารามิเตอร์ของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25
$F^{-1}(0.50)$	แทนพารามิเตอร์ของมัธยฐาน
$F^{-1}(0.75)$	แทนพารามิเตอร์ของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

โดยจะแสดงค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของพารามิเตอร์ดังกล่าวข้างต้น ดังตารางที่ 4.4.1 - 4.4.6 ดังนี้

ตารางที่ 4.4.1 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 1$	0.2412	174.8954	–	–
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0002	0.8742	–	–
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.0828	1.8858	–	–
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.3171	49.0300	–	–
n=30				
$k / \beta = 1$	0.4834	3.6890	0.5818	2.8703
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0131	0.4984	0.0188	0.3587
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.1927	1.2219	0.1855	1.2808
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.6532	3.4998	0.7439	3.7427
n=100				
$k / \beta = 1$	0.7211	1.9490	0.7526	1.5157
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0480	0.2808	0.0589	0.2281
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.3394	0.8308	0.3265	0.7642
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.9602	2.3257	1.0011	2.0271

จากตารางที่ 4.4.1 พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันก็ให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

ตารางที่ 4.4.2 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 6$	4.6669	17.1153	–	–
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	0.5419	6.9162	–	–
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	4.2579	7.9800	–	–
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	5.7272	20.3285	–	–
n=30				
$k / \beta = 6$	4.6498	8.4530	4.4523	8.4696
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	1.3932	4.9090	1.8857	4.5989
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	3.9056	7.2348	3.6722	7.2386
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	6.1947	11.5488	5.9555	11.3973
n=100				
$k / \beta = 6$	4.8302	6.4733	4.0774	6.3080
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	2.2754	3.9246	2.5192	3.7219
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	4.1041	5.8268	4.1398	5.6124
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	6.3308	8.6299	6.1613	8.2937

จากตารางที่ 4.4.2 พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

ตารางที่ 4.4.3 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 1.5$	1.1667	4.2788	–	–
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.1355	1.7291	–	–
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	1.0645	1.9950	–	–
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.4318	5.0821	–	–
n=30				
$k / \beta = 1.5$	1.1625	2.1133	1.1131	2.1174
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.3483	1.2273	0.4714	1.1497
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	0.9764	1.8087	0.9181	1.8096
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.5487	2.8872	1.4889	5.1387
n=100				
$k / \beta = 1.5$	1.2075	1.6183	1.1768	1.5770
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.5688	0.9811	0.6298	0.9305
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	1.0260	1.4567	1.0350	1.4031
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.5827	2.1575	1.5403	2.0734

จากตารางที่ 4.4.3 พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันก็ให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

ตารางที่ 4.4.4 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 1$	0.1650	44639490000000**	–	–
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0000	1.1868	–	–
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.0444	3.1614	–	–
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.2204	721350200	–	–
n=30				
$k / \beta = 1$	0.3928	7.2976	0.5021	13.2522
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0039	0.5851	0.0042	0.6719
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.1337	1.4675	0.0943	4.3097
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.5414	5.2848	0.5812	16.1937
n=100				
$k / \beta = 1$	0.6314	2.4409	0.7045	1.7576
$F^{-1}(0.25) = 0.1015$	0.0299	0.3221	0.0433	0.2542
$F^{-1}(0.50) = 0.4549$	0.2971	0.9233	0.2812	0.8576
$F^{-1}(0.75) = 1.3233$	0.8431	2.6589	0.9274	2.3335

** คือ กรณีที่ค่าขอบเขตบนมีค่ามากผิดปกติ ศึกษารายละเอียดในภาคผนวก ข

จากตารางที่ 4.4.4 พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันก็ให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

ตารางที่ 4.4.5 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 6$	4.3108	11271990**	–	–
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	0.0000	7.3224	–	–
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	2.6628	8.3681	–	–
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	5.1907	123023.9000	–	–
n=30				
$k / \beta = 6$	4.2165	11.8827	3.9903	10.8618
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	0.8409	5.4174	1.1697	5.0403
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	3.5548	7.8102	2.9365	8.6578
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	5.6655	15.2652	5.4628	14.9163
n=100				
$k / \beta = 6$	4.5862	6.7485	4.5444	6.6263
$F^{-1}(0.25) = 3.4546$	2.0178	4.1071	2.3235	3.8571
$F^{-1}(0.50) = 5.3481$	3.8957	6.0763	3.9500	5.8529
$F^{-1}(0.75) = 7.8408$	6.1440	9.1329	5.9752	8.7590

** คือ กรณีที่ค่าขอบเขตบนมีค่ามากผิดปกติ ศึกษารายละเอียดในภาคผนวก ข

จากตารางที่ 4.4.5 พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

ตารางที่ 4.4.6 แสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$

พารามิเตอร์	วิธีแท้จริง		วิธีลู่อู่เข้า	
	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
n=10				
$k / \beta = 1.5$	1.0777	2817997**	–	–
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.0000	1.8306	–	–
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	0.6657	2.0920	–	–
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.2977	30755.9700	–	–
n=30				
$k / \beta = 1.5$	1.0541	2.9707	0.9976	2.7155
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.2102	1.3543	0.2924	1.2601
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	0.8887	1.9526	0.7341	2.1645
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.4164	3.8163	1.3657	3.7291
n=100				
$k / \beta = 1.5$	1.1465	1.6871	1.1361	1.6566
$F^{-1}(0.25) = 0.8636$	0.5044	1.0268	0.5809	0.9643
$F^{-1}(0.50) = 1.3370$	0.9739	1.5191	0.9875	1.4632
$F^{-1}(0.75) = 1.9602$	1.5360	2.2832	1.4938	2.1898

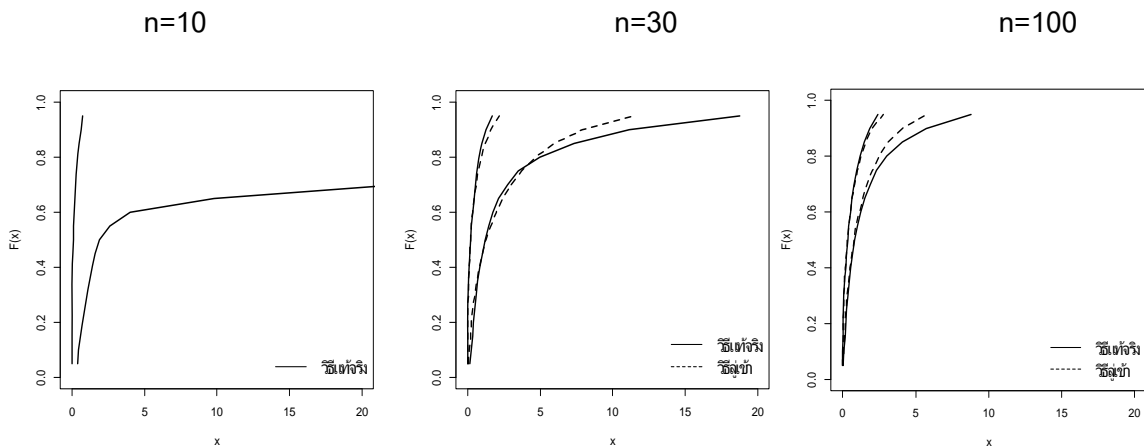
** คือ กรณีที่ค่าขอบเขตบนมีค่ามากผิดปกติ ศึกษารายละเอียดในภาคผนวก ข

จากตารางที่ 4.4.6 พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$ ช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวัง เปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 มัชยฐาน และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 75 ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าต่างกันให้ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นวิธีลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างน้อย (n=10) จะไม่ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากไม่สามารถหาเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างนี้ได้

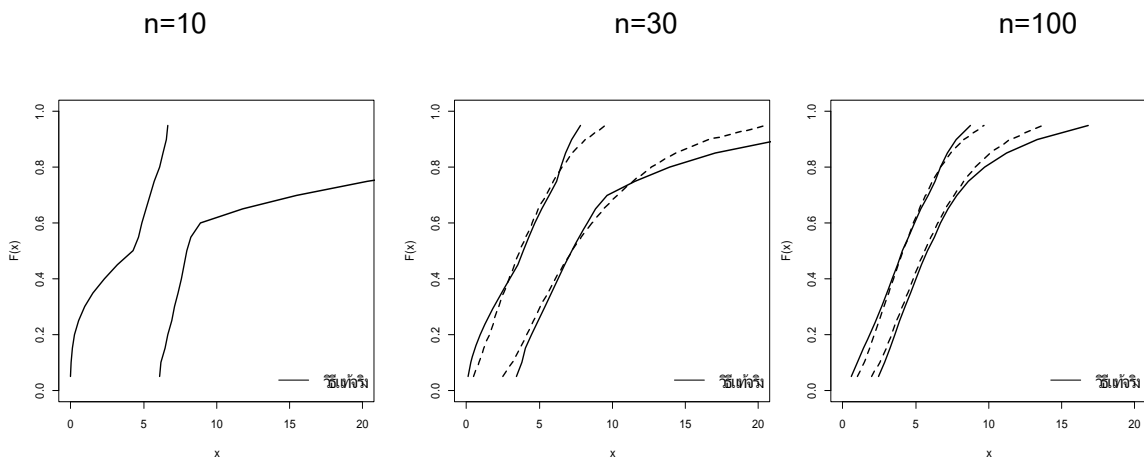
4.5 ผลการศึกษาการหาแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า

แถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ในที่นี้จะอาศัยการอนุมานบนฟังก์ชันควอนไทล์ คือหาจากค่าควอนไทล์ที่ p ซึ่งค่า p เริ่มต้นเท่ากับ 0.05 และเพิ่มค่า p ทีละ 0.05 จนกระทั่ง p เท่ากับ 0.95 จะได้ค่า p จำนวน 19 ค่า และหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดภายในเซตความเชื่อมั่น จากนั้นทำการพล็อตกราฟระหว่าง x (แกนนอน) และ $F(x)$ (แกนตั้ง) ได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.5.1-4.5.6 ดังนี้

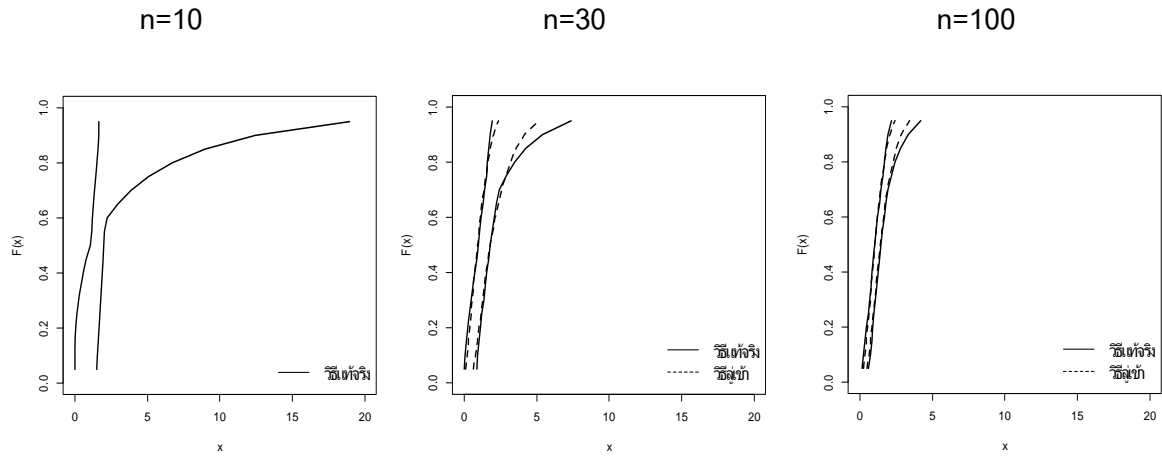
รูปที่ 4.5.1 แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$



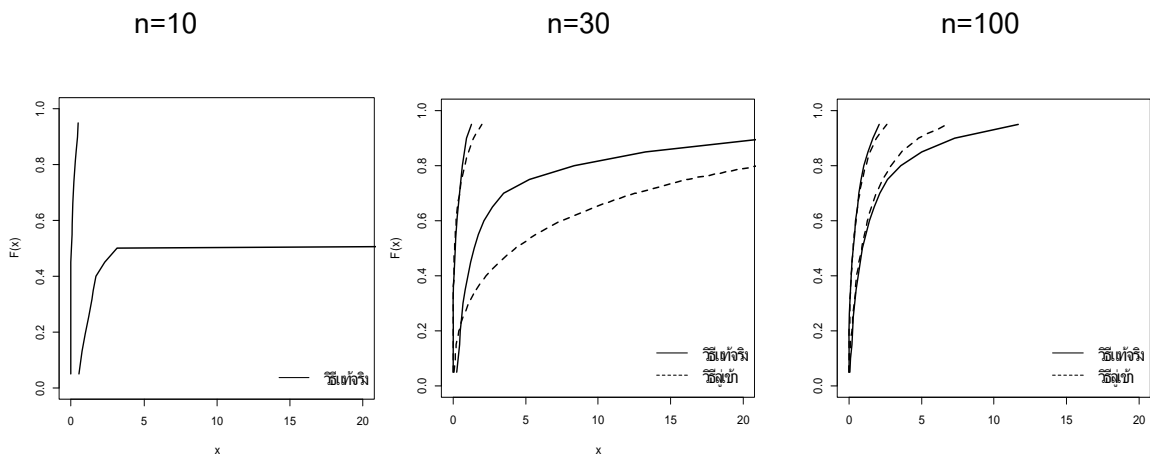
รูปที่ 4.5.2 แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$



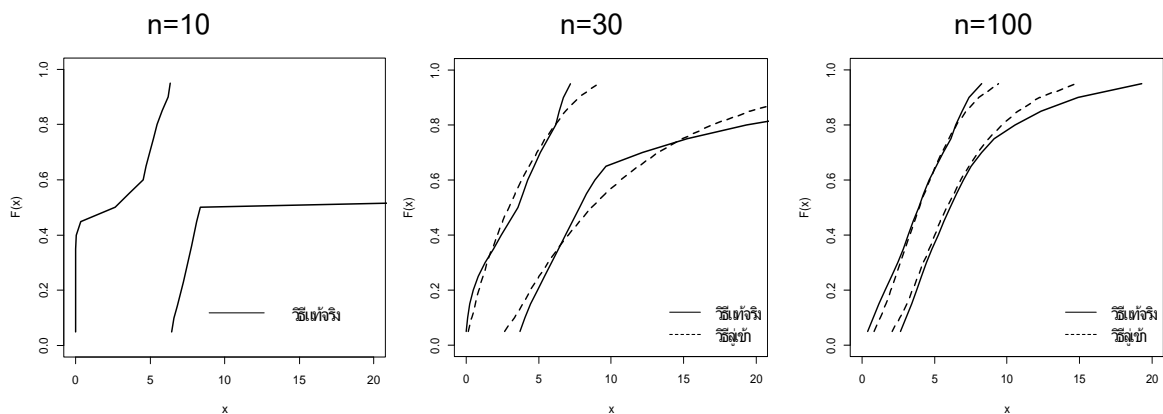
รูปที่ 4.5.3 แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$



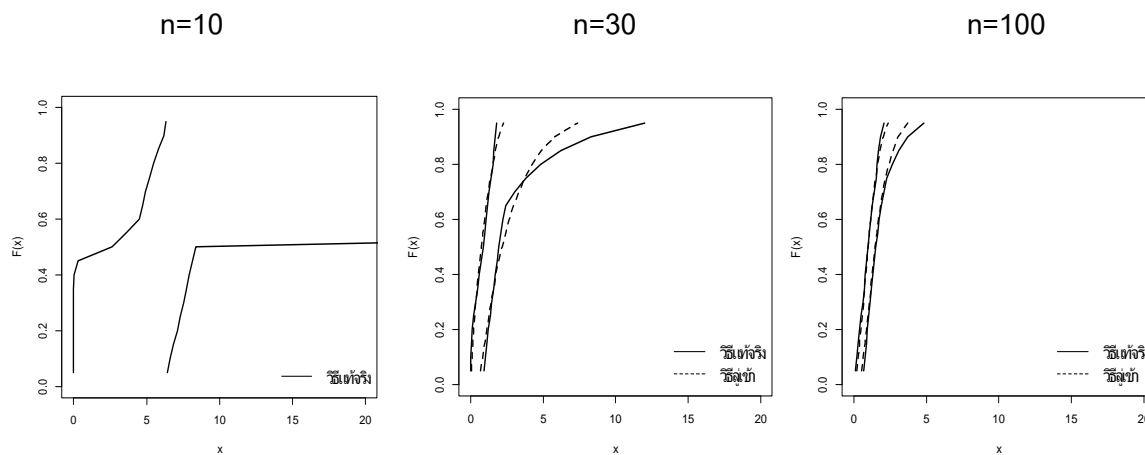
รูปที่ 4.5.4 แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5$ และ $\beta = 0.5$



รูปที่ 4.5.5 แสดงรูปแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 0.5$



รูปที่ 4.5.6 แสดงรูปแบบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% สำหรับการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์ $k = 3$ และ $\beta = 2$



จากรูปที่ 4.5.1- 4.5.6 พบว่า ที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) รูปแบบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าจะไม่สามารถหาได้ จะหาได้เฉพาะรูปแบบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นแท้จริง ซึ่งช่วงหางของแถบจะมีลักษณะหักออกทุกกรณีศึกษา โดยที่ขนาดตัวอย่างน้อย ($n=10$) จะหักออกเร็วกว่าที่ขนาดตัวอย่างปานกลาง ($n=30$) และขนาดตัวอย่างมาก ($n=100$) อีกทั้งเมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น ทั้งแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้าจะมีช่วงของแถบที่แคบลง ซึ่งแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าจะคล้ายคลึงกันในช่วงต้น แต่ช่วงปลายหรือช่วงหางจะค่อนข้างแตกต่างกัน

4.6 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า

จากการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์จำนวน 1000 รอบ จะได้ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเขตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า ดังตารางที่ 4.6 ดังนี้

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า

ระดับความ เชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาด ตัวอย่าง	ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเขต	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า
0.95	$k = 0.5, \beta = 0.5$	n=10	0.948	-
		n=30	0.934	0.98
		n=100	0.833	0.973
	$k = 3, \beta = 0.5$	n=10	0.958	-
		n=30	0.955	0.96
		n=100	0.957	0.972
	$k = 3, \beta = 2$	n=10	0.958	-
		n=30	0.955	0.963
		n=100	0.957	0.973
0.99	$k = 0.5, \beta = 0.5$	n=10	0.990	-
		n=30	0.985	0.99
		n=100	0.988	0.995
	$k = 3, \beta = 0.5$	n=10	0.994	-
		n=30	0.987	0.99
		n=100	0.994	0.993
	$k = 3, \beta = 2$	n=10	0.994	-
		n=30	0.987	0.991
		n=100	0.994	0.993

4.7 ผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า

จากการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์จำนวน 1000 รอบ จะได้ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่ได้เขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า ดังตารางที่ 4.7 ดังนี้

ตารางที่ 4.7 แสดงค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า

ระดับความ เชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาด ตัวอย่าง	ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบ	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า
0.95	$k = 0.5, \beta = 0.5$	n=10	0.945	–
		n=30	0.935	0.981
		n=100	0.853	0.976
	$k = 3, \beta = 0.5$	n=10	0.952	–
		n=30	0.958	0.965
		n=100	0.958	0.978
	$k = 3, \beta = 2$	n=10	0.952	–
		n=30	0.958	0.967
		n=100	0.958	0.977
0.99	$k = 0.5, \beta = 0.5$	n=10	0.981	–
		n=30	0.987	0.991
		n=100	0.991	0.996
	$k = 3, \beta = 0.5$	n=10	0.991	–
		n=30	0.987	0.994
		n=100	0.996	0.997
	$k = 3, \beta = 2$	n=10	0.991	–
		n=30	0.987	0.995
		n=100	0.996	0.996

จากตาราง 4.6 เมื่อทำการวัดความเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธี
 ลู่เข้า พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95 เมื่อทำการวัดความเชิงประจักษ์ของเซต
 ความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าจะยังไม่พบกรณีศึกษาใดที่วัดแล้วได้เท่ากับระดับความ
 เชื่อมั่น 0.95 พอดี สำหรับที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 เมื่อทำการวัดความเชิง
 ประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าจะพบกรณีศึกษาที่วัดแล้วได้เท่ากับระดับ
 ความเชื่อมั่น 0.99 พอดี โดยความเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นที่วัดได้จากวิธีแท้จริงจะพบใน
 กรณี $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 10$ ส่วนจากวิธีแบบลู่เข้าจะพบในกรณี $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 30$ และ
 กรณี $k = 3, \beta = 0.5, n = 30$

จากตาราง 4.7 เมื่อทำการวัดความเชิงประจักษ์ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและ
 วิธีลู่เข้า พบว่าที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 เมื่อทำการวัดความเชิงประจักษ์ของแถบ
 ความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าจะยังไม่พบกรณีศึกษาใดที่วัดแล้วได้เท่ากับระดับความ
 เชื่อมั่น 0.95 พอดี สำหรับที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 เมื่อทำการวัดความเชิง
 ประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าก็ยังไม่พบกรณีศึกษาใดที่วัดแล้วได้เท่ากับ
 ระดับความเชื่อมั่น 0.99 พอดีเช่นเดียวกัน

4.8 ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเชื่อมั่นที่กำหนด

ทั้งความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบ ทำการทดสอบสมมติฐาน โดยใช้วิธีทดสอบค่าสัดส่วนของความเชื่อมั่น (Binomial test)

เมื่อกำหนดให้

p คือ ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบที่วัดได้

p_0 คือ ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเท่ากับ 0.95 หรือ 0.99

α คือ ระดับนัยสำคัญ ซึ่งเท่ากับ 0.05 หรือ 0.01

n คือ ขนาดตัวอย่าง

สมมติฐาน คือ

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

การสรุปผล คือ จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ หรือ $p\text{-value} \leq \alpha$ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบที่วัดได้ไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่หากยอมรับสมมติฐาน H_0 จะสรุปได้ว่า ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบที่วัดได้เท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

โดยที่ผลการวิเคราะห์ของการทดสอบค่าสัดส่วนของประชากร ของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบ แสดงในรูปตาราง ดังตารางที่ 4.8.1 และ 4.8.2 ตามลำดับ ดังนี้

ตารางที่ 4.8.1 แสดงค่าสถิติทดสอบ และค่า p-value ของการทดสอบสัดส่วนความเชื่อมั่นของ
เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า

ระดับ ความ เชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาด ตัวอย่าง	Z		p-value	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า	วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า
0.95	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	-0.2902	–	0.7717	–
		n=30	-2.3215	4.3529	0.0203*	0.0000*
		n=100	-16.9761	3.3372	0.0000*	0.0008*
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	1.1608	–	0.2457	–
		n=30	0.7255	1.4510	0.4682	0.1468
		n=100	1.0157	3.1921	0.3098	0.0014*
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	1.1608	–	0.2457	–
		n=30	0.7255	1.8862	0.4682	0.0593
		n=100	1.0157	3.3372	0.3098	0.0008*
0.99	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	0.0000	–	1.0000	–
		n=30	-1.5891	0.0000	0.1120	1.0000
		n=100	-0.6356	1.5891	0.5250	0.1120
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	1.2713	–	0.2036	–
		n=30	-0.9535	0.0000	0.3404	1.0000
		n=100	1.2713	0.9535	0.2036	0.3404
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	1.2713	–	0.2036	–
		n=30	-0.9535	0.3178	0.3404	0.7506
		n=100	1.2713	0.9535	0.2036	0.3404

หมายเหตุ: * หมายถึง การทดสอบสมมติฐานที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ที่มีระดับนัยสำคัญ 0.05

** หมายถึง การทดสอบสมมติฐานที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ที่มีระดับนัยสำคัญ 0.01

จากตาราง 4.8.1 เมื่อทำการทดสอบค่าสัดส่วนของความเชื่อมั่นที่ได้จากการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์จำนวน 1000 รอบของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า พบว่า ทั้งการทดสอบสมมติฐานของเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ในบางกรณีศึกษา โดยกรณีที่พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรือก็คือกรณีที่ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 ได้แก่ กรณีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตที่ได้จากวิธีแท้จริงมีเพียง 2 กรณีศึกษาคือ กรณีที่ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 30$ และ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 100$ สำหรับกรณีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้าจะพบนัยสำคัญทางสถิติ ที่กรณีศึกษาเดียวกับที่พบในเซตที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้า และอีก 2 กรณีศึกษาคือ กรณีที่ $k = 3, \beta = 0.5, n = 100$ และ $k = 3, \beta = 2, n = 100$ ส่วนกรณีอื่นๆ ไม่พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 นั่นคือค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 สำหรับที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 จะไม่พบนัยสำคัญทางสถิติ ในทุกกรณีศึกษาทั้งความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า นั่นคือค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.99 ดังนั้นโดยสรุปภาพรวม พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง โดยส่วนใหญ่จะมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 แต่ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีลู่อู่เข้า โดยส่วนใหญ่จะมีค่าไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 แต่ ที่ระดับความเชื่อมั่นมากขึ้นคือเท่ากับ 0.99 ทั้งความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า โดยส่วนใหญ่จะมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.99

ตารางที่ 4.8.2 แสดงค่าสถิติทดสอบ และค่า p-value ของการทดสอบสัดส่วนประชากรของแถบความเชื่อมั่นที่ได้เขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า

ระดับความเชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	Z		p-value	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า	วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่เข้า
0.95	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	-0.7255	–	0.4682	–
		n=30	-2.1764	4.4980	0.0295*	0.0000*
		n=100	-14.0742	3.7725	0.0000*	0.0002*
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	0.2902	–	0.7717	–
		n=30	1.1608	2.1764	0.2457	0.0295*
		n=100	1.1608	4.0627	0.2457	0.0000*
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	0.2902	–	0.7717	–
		n=30	1.1608	2.4666	0.2457	0.0136*
		n=100	1.1608	3.9176	0.2457	0.0001*
0.99	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	-2.8604	–	0.0042**	–
		n=30	-0.9535	0.3178	0.3404	0.7506
		n=100	0.3178	1.9069	0.7506	0.0565
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	0.3178	–	0.7506	–
		n=30	-0.9535	1.2713	0.3404	0.2036
		n=100	1.9069	2.2247	0.0565	0.0261
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	0.3178	–	0.7506	–
		n=30	-0.9535	1.5891	0.3404	0.1120
		n=100	1.9069	1.9069	0.0565	0.0565

หมายเหตุ: * หมายถึง การทดสอบสมมติฐานที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ที่มีระดับนัยสำคัญ 0.05

** หมายถึง การทดสอบสมมติฐานที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ที่มีระดับนัยสำคัญ 0.01

จากตาราง 4.8.2 เมื่อทำการทดสอบค่าสัดส่วนของความเชื่อมั่นที่ได้จากการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์จำนวน 1000 รอบของแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและเซตความเชื่อมั่นแบบลู่อู่เข้า พบว่า ทั้งการทดสอบสมมติฐานของแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแบบลู่อู่เข้า พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรือก็คือกรณีที่ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 โดยกรณีที่พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ได้แก่ ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงมีเพียง 2 กรณีศึกษาคือ กรณีที่ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 30$ และ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 100$ สำหรับกรณีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้าจะพบนัยสำคัญทางสถิติในทุกกรณีศึกษา สำหรับที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 จะพบนัยสำคัญทางสถิติของค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงเพียง 1 กรณีศึกษา คือ กรณีที่ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 10$ นั่นคือค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่วัดได้ไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.99 ส่วนค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้า จะไม่พบนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ทุกกรณีศึกษา นั่นคือค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของแถบที่วัดได้เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.99 ดังนั้นโดยสรุปภาพรวมพบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง โดยส่วนใหญ่จะมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 แต่ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีลู่อู่เข้า โดยส่วนใหญ่จะมีค่าไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.95 แต่ที่ระดับความเชื่อมั่นมากขึ้นคือเท่ากับ 0.99 ทั้งความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า โดยส่วนใหญ่จะมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่น 0.99

4.9 ผลการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า กับความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากการทดสอบสมมติฐานในข้อ 4.8 เป็นเพียงการบอกว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ มีค่าเท่ากับหรือไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่การเปรียบเทียบในที่นี้จะเป็นการบอกได้ว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ มีค่ามากหรือน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่าใด โดยจะพิจารณาในรูปของเปอร์เซ็นต์ คือ ค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ ซึ่งก็คือค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ว่าแต่ละวิธีมีความคลาดเคลื่อนจากระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดโดยภาพรวมกี่เปอร์เซ็นต์ โดยเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน หาได้ดังนี้

กำหนดให้

C_{error}	แทน เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์
Δc_j	แทน ผลต่างระหว่างความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่ j กับความเชื่อมั่นที่กำหนด
$1 - \alpha$	แทน ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด
m	แทน จำนวนของค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบจากแต่ละวิธี (กรณีทีระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 จะใช้ $m = 6$ เพราะที่ $n=10$ ในวิธีแบบลู่อู่เข้าไม่สามารถให้ค่าเซตและแถบได้ แต่กรณีทีระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95 จะใช้ $m = 4$ เนื่องจากจะตัดค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่ต่ำกว่าผิดปกติของกรณีทีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.5, \beta = 0.5$ ที่ $n=30$ และ $n=100$)

เขียนแทนด้วยสมการ ดังนี้

$$C_{error} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{|\Delta c_j|}{(1 - \alpha)} \times 100 \right)}{m}$$

หากสูตรข้างต้นนี้ไม่ใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ จะได้ผลลัพธ์ที่มีทั้งค่าบวกและค่าลบ ซึ่งค่าบวกและค่าลบนี้ จะช่วยบอกลักษณะของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ ซึ่งมีสูตรการคำนวณดังนี้

$$C_{form} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\Delta c_j}{(1-\alpha)} \times 100 \right)}{m}$$

กำหนดให้

- C_{form} แทน ลักษณะของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ
 Δc_j แทน ผลต่างระหว่างความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่ j กับความเชื่อมั่นที่กำหนด
 $1-\alpha$ แทน ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด
 m แทน จำนวนค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบจากแต่ละวิธี
 ($m = 6$ เพราะที่ $n=10$ ในวิธีแบบลู่เข้าไม่สามารถให้ค่าเซตและแถบได้)

โดยจะสนใจเฉพาะเครื่องหมายที่ได้ ซึ่งมีความหมายดังนี้

- หมายถึง ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบต่ำกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด
(Underestimate)
- + หมายถึง ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบสูงกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด
(Overestimate)

ผลลัพธ์จากสูตรที่มีค่าสัมบูรณ์และไม่มีค่าสัมบูรณ์ แสดงดังตารางที่ 4.9 และ 4.10 ตามลำดับ ดังนี้

ตารางที่ 4.9 แสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า

ความเชื่อมั่นที่กำหนด	C_{error} ของเซตความเชื่อมั่น		C_{error} ของแถบความเชื่อมั่น	
	วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า	วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า
0.95(m=4)	0.632	1.789	0.842	2.289
0.99(m=6)	0.354	0.202	0.370	0.488

ตารางที่ 4.10 แสดงลักษณะของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่

ความเชื่อมั่นที่กำหนด	C_{form} ของเซตความเชื่อมั่น		C_{form} ของแถบความเชื่อมั่น	
	วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่	วิธีแท้จริง	วิธีลู่อู่
0.95(m=6)	-1.9123	+2.1228	-1.4035	+2.5263
0.99(m=6)	-0.0842	+0.2020	+0.0673	+0.4882

จากตารางที่ 4.9 พิจารณาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่ พบว่า เซตและแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้คลาดเคลื่อนจากระดับความเชื่อมั่น 0.95 อยู่ประมาณ 0.63% และ 0.84% ตามลำดับ ส่วนที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99 เซตและแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้คลาดเคลื่อนจากระดับความเชื่อมั่น 0.99 อยู่ประมาณ 0.35% และ 0.37% ตามลำดับ สำหรับเซตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่มีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้คลาดเคลื่อนจากระดับความเชื่อมั่น 0.95 อยู่ประมาณ 1.79% และ 2.29% ตามลำดับ ส่วนที่ระดับความเชื่อมั่น 0.99 เซตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่อู่มีความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้คลาดเคลื่อนจากระดับความเชื่อมั่น 0.99 อยู่ประมาณ 0.20% และ 0.49% ตามลำดับ

จากตารางที่ 4.10 พิจารณาลักษณะของความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่ พบว่า ที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95 จะมีลักษณะของทั้งเซตและแถบจากวิธีแท้จริงอยู่ภายใต้ความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่ลักษณะของทั้งเซตและแถบจากวิธีลู่อู่มากกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด และที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 จะมีลักษณะของเซตที่แท้จริงมากกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่แถบจากวิธีแท้จริงอยู่ภายใต้ความเชื่อมั่นที่กำหนด และลักษณะของทั้งเซตและแถบจากวิธีลู่อู่มากกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อศึกษาการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา และเพื่อเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า โดยจะเปรียบเทียบกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดตามขอบเขตการวิจัย โดยผลการวิจัยเหล่านี้แสดงไว้แล้วในบทที่ 4 ในบทนี้จึงทำการสรุปผลการวิจัยตามวัตถุประสงค์การวิจัย รวมทั้งข้อเสนอแนะที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย ตามลำดับ ดังนี้

5.1 สรุปการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา

จากการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของ 2 พารามิเตอร์ของตัวแบบแกมมานั้น จะสามารถหาได้จากคุณสมบัติของการแจกแจงแกมมา ซึ่งสามารถลดรูปได้เป็นฟังก์ชันของฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาแบบมาตรฐาน ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาการคำนวณเพียง 1 มิติ เนื่องจากพารามิเตอร์ k ถูกกำหนดให้คงที่ไว้ จึงเป็นวิธีที่ง่ายต่อการนำไปใช้

เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของ 2 พารามิเตอร์ของตัวแบบแกมมานี้ ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับ การหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าพารามิเตอร์แต่ละค่า ได้แก่ ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β รวมถึงการหาช่วงความเชื่อมั่นของฟังก์ชันของค่าพารามิเตอร์ เช่น ค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ยของตัวแบบแกมมา ซึ่งจะอาศัยการหาปริมาณที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ที่ต่ำสุดและสูงสุดตลอดเซตความเชื่อมั่น รวมถึงการสร้างแถบความเชื่อมั่นที่ขึ้นกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงแกมมา แม้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแบบแกมมาจะอยู่ในรูปอัตราส่วนของฟังก์ชันแกมมาที่ไม่สมบูรณ์ก็ตาม นั่นคือแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาแบบ 2 ข้างสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมจะหาจากปริมาณของ $F(x; k, \beta)$ ที่มากที่สุดและที่น้อยที่สุดบนเซตความเชื่อมั่น สำหรับแต่ละค่าของ x ซึ่งแถบความเชื่อมั่นนี้จะให้การอนุมานบนฟังก์ชันควอนไทล์ในขณะเดียวกันด้วย นั่นคือแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาแบบ 2 ข้างสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงสะสม จะให้ความเชื่อมั่นแบบ 2 ข้างของควอนไทล์ $F^{-1}(p; k, \beta); 0 \leq p \leq 1$ ในขณะเดียวกันด้วย

ทั้งนี้จากการศึกษาสรุปโดยภาพรวมได้ว่า ขนาดตัวอย่างจะมีผลทำให้การอนุมานที่แท้จริงแตกต่างจากวิธีแบบลู่อู่เข้า โดยที่ขนาดตัวอย่างน้อย การอนุมานที่แท้จริงจะมีอัตราความผิดพลาดน้อยกว่าจากวิธีแบบลู่อู่เข้า

5.2 สรุปการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้าของตัวแบบแกมมา

จากผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นจากทั้งสองวิธีจำนวน 1000 รอบ นำไปสู่ปัญหาการวิจัยที่ว่า ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบนี้นั้นมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือไม่ ผลสรุปจากการทดสอบสมมติฐาน ดังตารางที่ 5.2 โดยผลสรุปคือความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงส่วนใหญ่จะเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ทั้งระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95 และ 0.99 สำหรับความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้า ส่วนใหญ่จะเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.99 แต่ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้า ส่วนใหญ่จะไม่เท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95

จากผลการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่อู่เข้า กับความเชื่อมั่นที่กำหนดในรูปแบบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน นำไปสู่ปัญหาการวิจัยที่ว่า ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบนี้นั้นมีค่ามากหรือน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และมากกว่าหรือน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่าใด ซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 4.9 ซึ่งผลสรุปโดยภาพรวมคือ เซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงจะให้ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด มากกว่าเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้า อีกทั้งความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงส่วนใหญ่มีลักษณะความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ภายใต้ความเชื่อมั่นที่กำหนด (underestimate) ส่วนเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่อู่เข้าส่วนใหญ่มีลักษณะความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์มากกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด (overestimate)

ตารางที่ 5.2 แสดงผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

ระดับ ความ เชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาด ตัวอย่าง	เซต		แถบ	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่อ้าง	วิธีแท้จริง	วิธีลู่อ้าง
0.95	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	×	—	×	—
		n=30	✓	✓	✓	✓
		n=100	✓	✓	✓	✓
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	×	—	×	—
		n=30	×	×	×	✓
		n=100	×	✓	×	✓
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	×	—	×	—
		n=30	×	×	×	✓
		n=100	×	✓	×	✓
0.99	$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	n=10	×	—	✓	—
		n=30	×	×	×	×
		n=100	×	×	×	×
	$k = 3,$ $\beta = 0.5$	n=10	×	—	×	—
		n=30	×	×	×	×
		n=100	×	×	×	×
	$k = 3,$ $\beta = 2$	n=10	×	—	×	—
		n=30	×	×	×	×
		n=100	×	×	×	×

หมายเหตุ : ✓ หมายถึง การทดสอบสมมติฐานที่มีนัยสำคัญทางสถิติ

×

— หมายถึง กรณีที่ไม่สามารถหาค่าสถิติทดสอบได้

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. สามารถนำวิธีการคำนวณแบบใหม่ไปใช้ทดสอบว่าข้อมูลมาจากการแจกแจงแบบแกมมาหรือไม่ เนื่องจากถ้าทดสอบแล้วเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงไม่เป็นเซตว่าง ก็จะเป็นการระบุได้ว่าข้อมูลชุดนั้นมาจากการแจกแจงแบบแกมมา
2. การวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริง อาจมีการปรับความละเอียดของค่า $k \in [k_{\min_e}, k_{\max_e}]$ ที่เพิ่มขึ้นทีละ 0.01 (ดังหน้า 26) ให้มีความละเอียดมากยิ่งขึ้น เพื่อเป็นการปรับความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบจากวิธีแท้จริงที่น้อยกว่าระดับความเชื่อมั่น ให้มีค่าเพิ่มมากยิ่งขึ้น
3. ในงานวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษาการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ ซึ่งวิธีดังกล่าวสามารถขยายไปสู่การหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมาแบบ 3 พารามิเตอร์ได้

รายการอ้างอิง

- Cheng, R.C.H. and Iles,T.C. Confidence bands for cumulative distribution functions of continuous random variables. Technometrics 25 (1983):77- 86.
- Hayter,A.J. & Kiatsupaibul,S. Exact Inferences for a Weibull Model. Quality Engineering (2013).
- Hayter,A.J. & Kiatsupaibul,S. Exact Inferences for a Gamma distribution. Working paper(2013).
- Kanofsky,P. & Srinivasan,R. An Approach to the Construction of Parametric Confidence Bands on Cumulative Distribution Functions. Biometrika 59 (1972): 623-631.
- Kundu,D. & Manglick,A. Discriminating between the log-normal and gamma distributions. Journal of Applied Statistical Sciences (2004).
- Lawless,J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, New York, Wiley (1982).
- Miura,K. An Introduction to Maximum Likelihood Estimation and Information Geometry. Interdisciplinary Information Sciences 17(3) (2011): 155-174.
- Olkin, I. ,Gleser, L.J., & Derman, C. Probability Models and Applications, United States of America: Macmillan College Publishing (1994).
- Srinivasan,R. & Wharton,R.M. Confidence Bands for the Weibull Distribution. Technometrics 17 (1975): 375-380.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก

ตัวอย่างการใช้โปรแกรม R ในการดำเนินงานวิจัย

```
#####
# Confidence Set & Confidence Band : Exact Method & Asymptotic Method
#####
##Example Data from Simulation##
set.seed(473)
x<-rgamma(30,shape=3,rate=0.5)

#-----Exact Method-----#
## Define Confidece Set ##
x<-sort(x)
ii<-1:length(x)
allii<-t(combn(ii,2))
allpairs<-t(combn(x,2))
n<-length(x)
alpha<-0.05
pks<-function(s){
  return(1-.C("pkolmogorov2x", p = as.double(s),
  as.integer(n),PACKAGE="stats")$p)
}
dalphan<-uniroot(function(s){alpha-pks(s)},c(0,1))$root;
li<-((allii[,1]/n)-dalphan)
ui<-(((allii[,2]-1)/n)+dalphan)
c1<-qnorm(li)
c2<-qnorm(ui)
dat<-data.frame(x1=allpairs[,1],x2=allpairs[,2],li=li,ui=ui,c1=c1,c2=c2)
```

```

coef1<-dat[,c('x2')]-dat[,c('x1')]
coef2<-((dat[,c('c2')]*dat[,c('x1')])-(dat[,c('c1')]*dat[,c('x2')]))
kall<-(coef2/coef1)^2
kmax<-min(kall[!is.nan(kall)])
lb<-function(kval){
  loi<-((ii/n)-dalphan)
  wloi<-which(loi>0)
  loii<-loi[wloi]
  lb<-max(qgamma(loii,shape=kval,rate=1)/x[wloi])
  return(lb)
}
ub<-function(kval){
  upi<-(((ii-1)/n)+dalphan)
  wupi<-which(upi<1)
  upii<-upi[wupi]
  ub<-min(qgamma(upii,shape=kval,rate=1)/x[wupi])
  return(ub)
}
kvec_e<-seq(0.01,kmax,by=0.01)
lk<-sapply(kvec_e,lb)
uk<-sapply(kvec_e,ub)
index<-which(lk<=uk)
last<-function(index){tail(index,n = 1)}
kmin<-kvec_e[index[1]]
kmax<-kvec_e[max(index)]
betamin<-lk[index[1]]

```

```

betamax<-uk[last(index)]

list(kmin=kmin,kmax=kmax,betamin=betamin,betamax=betamax)

##Define Confidence of Mean ##
expectlk<-kvec_e[index]/lk[index]
expectuk<-kvec_e[index]/uk[index]
expectmin<-min(c(expectlk,expectuk))
expectmax<-max(c(expectlk,expectuk))
list(expectmin=expectmin,expectmax=expectmax)

##Define Confidence Band ##
pvec<-seq(0.05,0.95,by=0.05);
size<-length(pvec);
lvec_e<-rep(NA,length=size);
uvec_e<-rep(NA,length=size);
for(i in 1:length(pvec)){
  qgammavec1<-qgamma(pvec[i],shape=kvec_e[index],rate=1)/uk[index]
  qgammavec2<-qgamma(pvec[i],shape=kvec_e[index],rate=1)/lk[index]
  lvec_e[i]<-min(qgammavec1)
  uvec_e[i]<-max(qgammavec2)
}
uselvec<-c(lvec_e[1],lvec_e[5],lvec_e[10],lvec_e[15],lvec_e[19])
useuvec<-c(uvec_e[1],uvec_e[5],uvec_e[10],uvec_e[15],uvec_e[19])
cbind(uselvec)
cbind(useuvec)

```

```

#-----Asymptotic Method-----#

## Define Confidence Set ##

x<-sort(x)

library(MASS)

para<-fitdistr(x, "gamma")

para$vcov

solve(para$vcov)

khat=para[[1]][1][["shape"]]

betahat= para[[1]][2][["rate"]]

chi<-qchisq(0.95,2)

a<-solve(para$vcov)[1,1]

b<-solve(para$vcov)[1,2]

d<-solve(para$vcov)[2,2]

kmin<-khat-sqrt((d*chi)/((a*d)-(b^2)))

kmax<-khat+sqrt((d*chi)/((a*d)-(b^2)))

betamin<-betahat+((2*b*(khat-kmin))-sqrt((4*(b^2)*((khat-kmin)^2))-4*d*((a*(khat-
kmin)^2)-chi))))/(2*d)

betamax<-betahat+((2*b*(khat-kmax))+sqrt((4*(b^2)*((khat-kmax)^2))-4*d*((a*(khat-
kmax)^2)-chi))))/(2*d)

list(kmin=kmin,kmax=kmax,betamin=betamin,betamax=betamax)

kvec<-seq(kmin,kmax,by=0.01)

lowerbeta<-function(kvec){

  bemin<-betahat+((2*b*(khat-kvec))-sqrt((4*(b^2)*((khat-kvec)^2))-
  (4*d*((a*(khat-kvec)^2)-chi))))/(2*d)

  return(bemin)
}

```

```

    }
upperbeta<-function(kvec){
    bemax<-betahat+((2*b*(khat-kvec))+sqrt((4*(b^2)*((khat-kvec)^2)-
    (4*d*((a*(khat-kvec)^2)-chi)))))/(2*d)
    return(bemax)
}

lb<-sapply(kvec,lowerbeta)
ub<-sapply(kvec,upperbeta)

## Define Confidence of Mean ##
expectlb<-kvec/lb
expectub<-kvec/ub
expectmin<-min(c(expectlb,expectub))
expectmax<-max(c(expectlb,expectub))
list(expectmin=expectmin,expectmax=expectmax)

## Define Confidence Band ##
pvec<-seq(0.05,0.95,by=0.05);
size<-length(pvec);
lvec<-rep(NA,length=size);
uvec<-rep(NA,length=size);
realvec<-rep(NA,length=size);
for(i in 1:length(pvec)){
    qgammavec1<-qgamma(pvec[i],shape=kvec,rate=ub)
    qgammavec2<-qgamma(pvec[i],shape=kvec,rate=lb)
    lvec[i]<-min(qgammavec1)

```



```

      uvec[i]<-max(qgammavec2)
      realvec[i]<-qgamma(pvec[i],shape=3,rate=0.5)
    }
  uselvec<-c(lvec[1],lvec[5],lvec[10],lvec[15],lvec[19])
  useuvec<-c(uvec[1],uvec[5],uvec[10],uvec[15],uvec[19])
  cbind(uselvec)
  cbind(useuvec)
  ##Plot Confidence Set : Exact Method & Asymptotic Method ##
  plot(lk[index],kvec_e[index],type="l",xlab="",ylab="",lwd=2)
  lines(uk[index],kvec_e[index],type="l",lwd=2)
  title(xlab="beta")
  title(ylab="k")
  lines(lb,kvec,type="l",lty=2,lwd=2)
  lines(ub,kvec,type="l",lty=2,lwd=2)
  legend("bottomright", c("วิธีแก้จริง","วิธีลู่เข้า"), cex=1.5,lty=1:2, bty="n")

  ##Plot Confidence Band : Exact Method & Asymptotic Method ##
  windows()
  plot(lvec_e,pvec,xlab="",ylab="",xlim=c(0,20),ylim=c(0,1),type="l",lwd=2)
  lines(uvec_e,pvec,type="l",lwd=2)
  lines(lvec,pvec,xlab="",ylab="",xlim=c(0,20),ylim=c(0,1),type="l",lty=2,lwd=2)
  lines(uvec,pvec,type="l",lty=2,lwd=2)
  legend("bottomright", c("วิธีแก้จริง","วิธีลู่เข้า"), cex=1.5,lty=1:2, bty="n")

```

```
#####
# Empirical Confidence : Exact Method & Asymptotic Method
#####

#----- Exact Method-----#

## Function for Confidence Set & Confidence Band Measurement ##

confidence<-function(x,shape,rate,alpha){
  x<-sort(x)
  ii<-1:length(x)
  allii<-t(combn(ii,2))
  allpairs<-t(combn(x,2))
  n<-length(x)
  alpha<-alpha
  pks<-function(s){
    return(1-.C("pkolmogorov2x", p = as.double(s),
               as.integer(n),PACKAGE="stats")$p)
  }
  dalphan<-uniroot(function(s){alpha-pks(s)},c(0,1))$root
  li<-((allii[,1]/n)-dalphan)
  ui<-(((allii[,2]-1)/n)+dalphan)
  c1<-qnorm(li)
  c2<-qnorm(ui)
  dat<-data.frame(x1=allpairs[,1],x2=allpairs[,2],li=li,ui=ui,c1=c1,c2=c2)
  coef1<-dat[,c('x2')]-dat[,c('x1')]
  coef2<-((dat[,c('c2')]*)dat[,c('x1')])-(dat[,c('c1')]*)dat[,c('x2')])
  kall<-((coef2/coef1)^2
```

```

kmax<-min(kall[!is.nan(kall)])

lb<-function(kval){
  loi<-((ii/n)-dalphan)
  wloi<-which(loi>0)
  loii<-loi[wloi]
  lb<-max(qgamma(loii,shape=kval,rate=1)/x[wloi])
  return(lb)
}

ub<-function(kval){
  upi<-(((ii-1)/n)+dalphan)
  wupi<-which(upi<1)
  upii<-upi[wupi]
  ub<-min(qgamma(upii,shape=kval,rate=1)/x[wupi])
  return(ub)
}

kvec<-seq(0.01,kmax,by=0.01)
lk<-sapply(kvec,lb)
uk<-sapply(kvec,ub)
index<-which(lk<=uk)
last<-function(index){tail(index,n = 1)}
kmin<-kvec[min(index)]
kmax<-kvec[max(index)]
betamin<-lk[index[1]]
betamax<-uk[last(index)]

## Empirical Confidence of Confidence Set ##
codek<-ifelse((shape>=kmin)&(shape<=kmax),1,0)

```

```

    if(!is.na(codek)){
        codeofk<-codek
    }
    else{
        codeofk<-0
    }
codeofkk<-codeofk
    if(codeofkk==1){
        lbnew<-lb(shape)
        ubnew<-ub(shape)
        code<-ifelse((rate>=lbnew)&(rate<=ubnew),1,0)
    }
    else{
        code<-0
    }
output1<-code
pvec<-seq(0.05,0.95,by=0.05);
size<-length(pvec);
lvec<-rep(NA,length=size);
uvec<-rep(NA,length=size);
realvec<-rep(NA,length=size);
for(i in 1:length(pvec)){
    qgammavec1<-qgamma(pvec[i],shape=kvec[index],rate=1)/uk[index]
    qgammavec2<-qgamma(pvec[i],shape=kvec[index],rate=1)/lk[index]
    lvec[i]<-min(qgammavec1)
    uvec[i]<-max(qgammavec2)
}

```

```

        realvec[i]<-qgamma(pvec[i],shape=shape,rate=rate)
    }
    ## Empirical Confidence of Confidence Band ##
    l<-1:length(pvec)
    out2<-ifelse((realvec[l]>=lvec[l])&(realvec[l]<=uvec[l]),1,0)
    output2<-prod(out2)
    ## Conclude empirical confidence ##
    result<-data.frame(set=output1,band=output2)
    return(result)
}

```

```

##Define Empirical Confidence both Set & Band ##
set.seed(473)
round=1000
answer<-as.data.frame(matrix(nrow =round , ncol = 2))
colnames(answer) <- c("set", "band")
for(r in 1:round){
    x<-rgamma(30,shape=3,rate=0.5)
    ans<-confidence(x,3,0.5,0.05)
    answer[r,1]<-ans[,1]
    answer[r,2]<-ans[,2]
    pie(c(r,round-r),radius=1,clockwise=T)
}
ti_set<-answer[[1]]
ti_band<-answer[[2]]
sumset<-sum(ti_set)

```

```

sumband<-sum(ti_band)

c_set<-sumset/round

c_band<-sumband/round

c_set

c_band

#----- Asymptotic Method-----#

## Function for Confidence Set & Confidence Band Measurement ##

confiasymp<-function(x,shape,rate,level){

  x<-sort(x)

  library(MASS)

  para<-fitdistr(x,"gamma")

  khat=para[[1]][1][["shape"]]

  betahat= para[[1]][2][["rate"]]

  chi<-qchisq(level,2)

  a<-solve(para$vcov)[1,1]

  b<-solve(para$vcov)[1,2]

  d<-solve(para$vcov)[2,2]

  kmin<-khat-sqrt((d*chi)/((a*d)-(b^2)))

  kmax<-khat+sqrt((d*chi)/((a*d)-(b^2)))

  betamin<-betahat+((2*b*(khat-kmin))-sqrt((4*(b^2)*((khat-kmin)^2)-
(4*d*((a*(khat-kmin)^2)-chi)))))/(2*d)

  betamax<-betahat+((2*b*(khat-kmax))+sqrt((4*(b^2)*((khat-kmax)^2)-
(4*d*((a*(khat-kmax)^2)-chi)))))/(2*d)

  ## Empirical Confidence of Confidence Set ##

  if((is.nan(betamin))||is.nan(betamax))=="TRUE"){

```

```

result<-data.frame(set="0",band="0")

return(result)
}
else{
  lowerbeta<-function(kval){
    bemin<-betahat+((2*b*(khat-kval))-sqrt((4*(b^2)*((khat-
      kval)^2))-(4*d*((a*(khat-kval)^2)-chi))))/(2*d)
    return(bemin)
  }
  upperbeta<-function(kval){
    bemax<-betahat+((2*b*(khat-kval))+sqrt((4*(b^2)*((khat-
      kval)^2))-(4*d*((a*(khat-kval)^2)-chi))))/(2*d)
    return(bemax)
  }
  kvec<-seq(kmin,kmax,by=0.01)
  lb<-sapply(kvec,lowerbeta)
  ub<-sapply(kvec,upperbeta)
  ## Empirical Confidence of Confidence band ##
  codek<-ifelse((shape>=kmin)&(shape<=kmax),1,0)
  if(!is.na(codek)){
    codeofk<-codek
  }
  else{
    codeofk<-0
  }
  codeofkk<-codeofk

```

```

if(codeofkk==1){
  lbnew<-lowerbeta(shape)
  ubnew<-upperbeta(shape)
  code<-ifelse((rate>=lbnew)&(rate<=ubnew),1,0)
}
else{
  code<-0
}
output1<-code
pvec<-seq(0.05,0.95,by=0.05)
size<-length(pvec)
lvec<-rep(NA,length=size)
uvec<-rep(NA,length=size)
realvec<-rep(NA,length=size)
for(i in 1:length(pvec)){
  qgammavec1<-qgamma(pvec[i],shape=kvec,rate=ub)
  qgammavec2<-qgamma(pvec[i],shape=kvec,rate=lb)
  lvec[i]<-min(qgammavec1)
  uvec[i]<-max(qgammavec2)
  realvec[i]<-qgamma(pvec[i],shape=shape,rate=rate)
}

## Empirical Confidence of Band ##
l<-1:length(pvec)
out2<-ifelse((realvec[l]>=lvec[l])&(realvec[l]<=uvec[l]),1,0)
output2<-prod(out2)
## Conclude empirical confidence ##
result<-data.frame(set=output1,band=output2)
return(result)

```



```
    }  
  }  
  ## Define Empirical Confidence Both Set & band ##  
  set.seed(473)  
  round=1000  
  answer<-as.data.frame(matrix(nrow =round , ncol = 2))  
  colnames(answer) <- c("set", "band")  
  for(r in 1:round){  
    x<-rgamma(30,shape=3,rate=0.5)  
    ans<-confiasymp(x,3,0.5,0.95)  
    answer[r,1]<-ans[,1]  
    answer[r,2]<-ans[,2]  
    pie(c(r,round-r),radius=1,clockwise=T)  
  }  
  ti_set<-answer[[1]]  
  ti_band<-answer[[2]]  
  sumset<-sum(ti_set)  
  sumband<-sum(ti_band)  
  c_set<-sumset/round  
  c_band<-sumband/round  
  c_set  
  c_band
```

ภาคผนวก ข

ภาคผนวก ข

การตรวจสอบค่าขอบเขตบนที่ผิดปกติของช่วงความเชื่อมั่นค่าคาดหวัง

จากบทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลข้อที่ 4.4 ในตารางที่ 4.4.4-4.5.6 ในกรณีที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ที่มีค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างต่างๆ ดังนี้ $k = 0.5, \beta = 0.5, n = 10$ และ $k = 3, \beta = 0.5, n = 10$ และ $k = 3, \beta = 2, n = 10$ ตามลำดับ โดยจากวิธีแท้จริงพบว่ามีค่าขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังมีค่ามากผิดปกติในกรณีเหล่านี้ ซึ่งผู้วิจัยจะทำการตรวจสอบผลลัพธ์ในส่วนนี้ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

กำหนดให้	ecdf	แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเชิงประจักษ์
	cdf	แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม
	pdf	แทน ฟังก์ชันความหนาแน่น

1) สร้างกราฟ ecdf ของข้อมูลที่มีพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างต่างๆตามที่กำหนด เปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นที่สร้างจากวิธีแท้จริง แสดงดังรูปที่ ข.1

2) กำหนดให้จุด (β^*, k^*) แทนด้วย จุดของค่าพารามิเตอร์ในเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริงทำให้เกิดค่าขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังมีค่ามากผิดปกติ โดยในที่นี้จะแสดงค่าของจุดนี้ไว้ด้วย และยังพล็อตจุดนี้ในรูปเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง ซึ่งจุดที่พล็อตจะแทนด้วยสัญลักษณ์ Δ แสดงดังรูปที่ ข.2 จากนั้นจะนำค่าพารามิเตอร์ β^* และ k^* เหล่านี้มาสร้าง cdf เพื่อเปรียบเทียบกับแถบความเชื่อมั่นที่สร้างจากวิธีแท้จริง นอกจากนี้ยังทำการสร้าง pdf เพื่อแสดงให้เห็นถึงลักษณะการแจกแจงที่มีค่าพารามิเตอร์แสดงอัตราเท่ากับ β^* และ ค่าพารามิเตอร์แสดงรูปร่างเท่ากับ k^* แสดงดังรูปที่ ข.3

จาก 1) และ 2) จะพบว่า ทั้ง ecdf ของข้อมูลที่มีค่าพารามิเตอร์ตามที่กำหนด และ cdf ของข้อมูลที่มีค่าพารามิเตอร์ β^* และ k^* จะอยู่ภายในขอบเขตของแถบความเชื่อมั่นที่สร้างจากวิธีแท้จริงทุกๆกรณี อีกทั้งลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าพารามิเตอร์ β^* และ k^* จะมีช่วงของหางที่ค่อนข้างยาว ดังนั้นจากหลักฐานเหล่านี้จึงเป็นการตรวจสอบได้ว่าค่าที่ผิดปกติของขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของค่าคาดหวังที่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าวข้างต้นเหล่านี้มีความเป็นไปได้

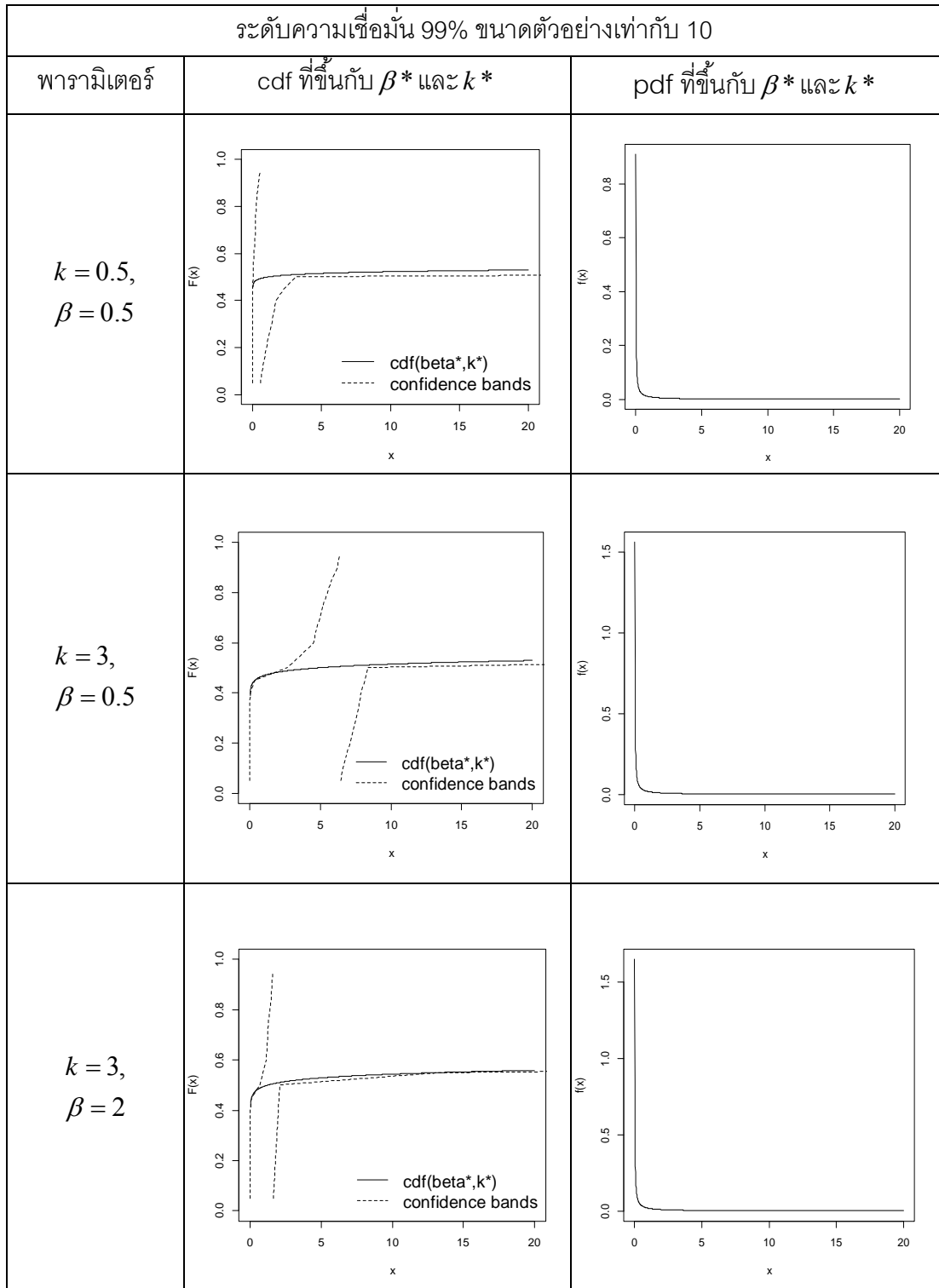
รูปที่ ข.1 แสดงกราฟ ecdf เทียบกับแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง

ระดับความเชื่อมั่น 99% ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10	
พารามิเตอร์	ecdf กับแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง
$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	
$k = 3,$ $\beta = 0.5$	
$k = 3,$ $\beta = 2$	

รูปที่ ข.2 แสดงจุด (β^*, k^*) ในเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

ระดับความเชื่อมั่น 99% ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10		
พารามิเตอร์	ค่า พารามิเตอร์ β^* และ k^*	จุด (β^*, k^*) ในเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง
$k = 0.5,$ $\beta = 0.5$	$\beta^* = 4.480338e-16$ $k^* = 0.02$	
$k = 3,$ $\beta = 0.5$	$\beta^* = 3.548619e-09$ $k^* = 0.04$	
$k = 3,$ $\beta = 2$	$\beta^* = 1.419448e-08$ $k^* = 0.04$	

รูปที่ ข.3 กราฟ cdf เทียบกับแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง และ กราฟ pdf ที่มีพารามิเตอร์เท่ากับ β^* และ k^*



ภาคผนวก ค

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน

เนื่องจากการแจกแจงแกมมาแกมมามากใช้สำหรับเวลาในกระบวนการใดๆ เช่น เวลาในการให้บริการ เวลาในการซ่อมเครื่องจักร ช่วงชีวิตของผลิตภัณฑ์ เวลานำ และเวลาระหว่างการเข้าเป็นต้น ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้ด้านการทดสอบเกี่ยวกับช่วงชีวิต ซึ่ง Lawless (1982) นำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับความทนทานของลูกปืนในการใช้งานจนกว่าจะชำรุดหรือไม่สามารถใช้งานได้ของเครื่องจักรเครื่องหนึ่ง โดยมีจำนวนรอบของการใช้งานจนกว่าจะชำรุดของลูกปืนแต่ละลูกทั้ง 23 ลูก (หน่วย: ล้านรอบ) ดังนี้ 17.88, 28.92, 33.00, 41.52, 42.12, 45.60, 48.80, 51.84, 51.96, 54.12, 55.56, 67.80, 68.44, 68.64, 68.88, 84.12, 93.12, 98.64, 105.12, 105.84, 127.92, 128.04, 173.40 ถึงแม้ว่า Kundu และ Manglick (2004) จะแสดงให้เห็นว่าข้อมูลชุดนี้เหมาะกับการแจกแจงแบบลิอคนอร์มอลมากกว่าการแจกแจงแกมมา โดยเปรียบเทียบจากการใช้ค่าอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (RML) ค่าความน่าจะเป็นของการคัดเลือกที่ถูกต้อง (PCS) และการใช้ระยะห่างของโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟก็ตาม แต่ผู้วิจัยสังเกตเห็นว่าค่าต่างๆเหล่านี้ ที่ได้จากทั้งสองการแจกแจงข้างต้นจะไม่แตกต่างกันมาก อีกทั้งขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงหยิบยกกรณีศึกษานี้มาใช้ในการวิเคราะห์การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา โดยจะสนใจวิเคราะห์ในประเด็นต่างๆ ดังนี้

ประเด็นที่ 1: ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบแกมมาหรือไม่

ประเด็นที่ 2: ที่ความเชื่อมั่น 95% ข้อมูลนี้มีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k อยู่ในช่วงใด และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β อยู่ในช่วงใด

ประเด็นที่ 3: ที่ความเชื่อมั่น 95% เครื่องจักรนี้มีช่วงของจำนวนรอบโดยเฉลี่ยของการใช้งานของลูกปืนจนกระทั่งลูกปืนชำรุดอยู่ในช่วงใด

ประเด็นที่ 4: ณ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 หรือมัธยฐาน ลูกปืนจะมีอายุการใช้งานจนกระทั่งชำรุดอยู่ในช่วงใด

สามารถหาคำตอบในประเด็นต่างๆ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

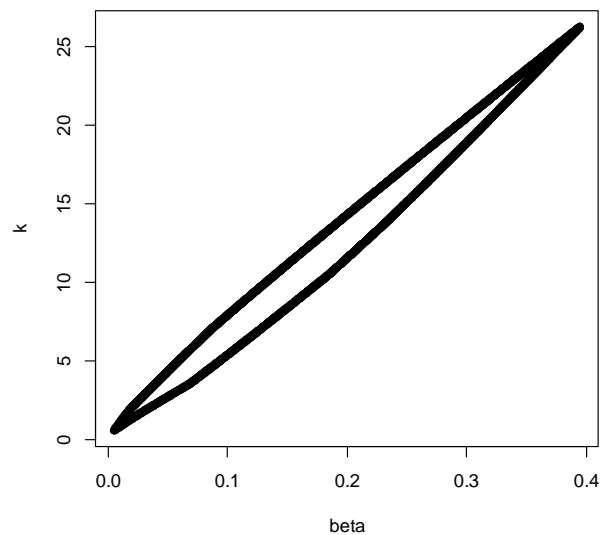
ประเด็นที่ 1: ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบแกมมาหรือไม่

การตรวจสอบว่าข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแกมมาหรือไม่นั้น จะพิจารณาจากการหาเซตความเชื่อมั่น ถ้าเซตความเชื่อมั่นไม่ว่างเปล่า ก็แสดงว่าข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแกมมา เนื่องจากข้อมูลจะตกอยู่ในบริเวณการยอมรับสมมติฐานที่เข้าเงื่อนไขที่ว่า

$$A(\theta) = \left\{ X : \sup_x |G_x(x) - F(x; \theta)| \leq d_{\alpha, n} \right\}$$

ซึ่งผลการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงดังรูปที่ ค.1 แสดงว่าเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงไม่เป็นเซตว่าง นั่นคือ ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแกมมา

รูปที่ ค.1 แสดงเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของข้อมูลความทนทานของลูกปืน



ประเด็นที่ 2: ที่ความเชื่อมั่น 95% ข้อมูลนี้มีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k อยู่ในช่วงใด และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β อยู่ในช่วงใด

นั่นคือการพิจารณาถึงช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k และช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ตามลำดับ ซึ่งจากรูปที่ ค.1 ก็จะได้ว่าที่ความเชื่อมั่น 95% จะมีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ k อยู่ในช่วง 0.636 ถึง 26.259 ล้านรอบ และที่ความเชื่อมั่น 95 % จะมีช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β เป็น 0.005 ถึง 0.395 ล้านรอบต่อหน่วยเวลา

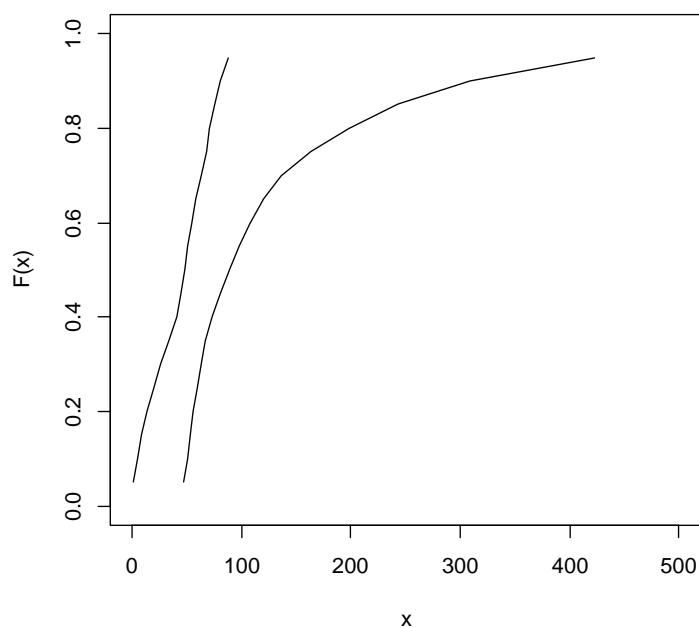
ประเด็นที่ 3: ที่ความเชื่อมั่น 95% เครื่องจักรนี้มีช่วงของจำนวนรอบโดยเฉลี่ยของการใช้งานของลูกปืนจนกระทั่งลูกปืนชำรุดอยู่ในช่วงใด

นั่นคือการพิจารณาถึงช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย $\frac{k}{\beta}$ ซึ่งหลังจากหาเขตความเชื่อมั่นได้แล้วจะสามารถหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่เครื่องจักรนี้มีจำนวนรอบโดยเฉลี่ยของการใช้งานของลูกปืนจนกระทั่งลูกปืนชำรุดอยู่ในช่วง 66.520 ถึง 119.155 ล้านรอบ

ประเด็นที่ 4: ณ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 หรือมัธยฐาน ลูกปืนจะมีอายุการใช้งานจนกระทั่งชำรุดอยู่ในช่วงใด

นั่นคือการพิจารณาถึง ช่วงความเชื่อมั่นของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ซึ่งหาได้จากการหาเขตความเชื่อมั่นที่แท้จริง แล้วนำมาสร้างแถบความเชื่อมั่น จะได้รูปแถบความเชื่อมั่นดังรูปที่ ค.2 ซึ่งจะได้ว่า ช่วงความเชื่อมั่นของมัธยฐาน คือ (47.520, 88.474) นั่นคือ จะมีลูกปืนที่มีอายุการใช้งานน้อยกว่า 47.520-88.474 ล้านรอบจนกว่าจะชำรุดอยู่ 50%

รูปที่ ค.2 แสดงแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงของข้อมูลความทนทานของลูกปืน



ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวอังสนา เพชรศักดิ์วงศ์ เกิดวันอาทิตย์ที่ 17 กรกฎาคม พ.ศ. 2531 สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2553 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (วท.ม.) สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2554