บทที่ 2
การเลียนแบบระบบ

2.1 คำนำ

ในการศึกษาธรรมชาติและผลตอบของระบบ, หากไม่สร้างระบบจริงขึ้นมาก่อน ทางออกที่จะทำก็คือ การศึกษาจากการจำลองระบบของกระบวนการด้วยระบบอื่น เช่นระบบไฟฟ้า หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์, ในระบบไฟฟ้านั้น การสร้างภาพจำลองสามารถกระทำได้ง่ายและรวดเร็ว แต่อาจมีความยุ่งยากในเรื่องของการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์, ตัวแปรอินพุท หรือตัวแปรป้อน ซึ่งปัญหาอยู่ที่การจัดหา กล่าวคือ จะสามารถหาอุปกรณ์ทางอิเลคทรอนิคส์ที่มีค่าคุณสมบัติทางไฟฟ้าเทียบเท่ากับขนาดของพารามิเตอร์ในระบบจริงได้หรือไม่. การสร้างระบบจำลองโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นมีความยากมากกว่า เพราะต้องเลือกใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ที่เหมาะสม และโปรแกรมแต่ละเรื่องก็ต้องใช้ตัวแปรที่เกี่ยวข้องมากมาย. การคำนวณแต่ละขั้นตอนต้องเลือกวิธีคำนวณให้ถูกต้อง มิฉะนั้นอาจทำให้คำตอบที่ได้ผิดไป. นอกจากนั้น, โปรแกรมคอมพิวเตอร์ยังไม่สามารถให้ผู้ใช้มองเห็นและสัมผัสกระบวนการได้, กล่าวคือไม่มีปุ่ม, สวิทซ์, หน้าปัทม์, โครงร่างของแผงควบคุม และองค์ประกอบต่างๆ ให้สามารถสัมผัสได้จริง และที่สำคัญการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ยังใช้เวลามากอีกด้วย. ข้อได้เปรียบของโปรแกรมคอมพิวเตอร์คือสามารถสร้างให้ศึกษาพารามิเตอร์ได้มากมายและมีความยืดหยุ่น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สูงกว่า นอกจากนั้นหากโปรแกรมได้รับการสร้างดี, สวยงาม และสื่อความหมายกับผู้ใช้ได้ดี, การเข้า/ออกสะดวก ฯลฯ ก็จะสามารถนำไปใช้เป็นโปรแกรมช่วยสอนได้อีกด้วย.

2.1.1 การเลียนแบบระบบด้วยวงจรไฟฟ้า

การเลียนแบบระบบด้วยวงจรไฟฟ้านั้น จะกระทำโดยแทนอุปกรณ์ต่างๆ ด้วยชิ้นส่วนอุปกรณ์ (componant) ทางไฟฟ้าหรืออิเลคทรอนิคส์ ดังตัวอย่างในตารางที่ 2.1.

ตารางที่ 2.1 ชิ้นส่วนอุปกรณ์ทางอิเลคทรอนิคส์ที่ใช้ในการเลียนแบบระบบ

ส่วนของระบบ	ชิ้นส่วน / อุปกรณ์ทางอิเลคทรอนิคส์
ถังเก็บของเหลว, ที่สะสมความร้อน	คาปาซิเตอร์
อัตราการไหลของของมวล, อัตราการส่งผ่านความร้อน	กระแสไฟฟ้า
ระดับของเหลว, อุณหภูมิ	โวลเตจ
ปั๊ม, แท่งให้ความร้อน, หม้อไอน้ำ	แหล่งจ่ายไฟฟ้า
วาล์ว, ฉนวนความร้อน	ตัวต้านทาน
วาล์วทางเดียว	ไดโอด
การต้านทานการรั่วซึม	วงจรข่าย R--C, ข่าย R--L --C
ตัวควบคุมแบบต่างๆ	วงจรจริงหรือเลียนแบบตัวควบคุม
ค่าป้อน, สัญญาณรบกวน	เครื่องกำเนิดสัญญาณไฟฟ้า

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.1.2 การเลียนแบบระบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

หากข้ามการกล่าวถึงการเลือกตัวคอมพิวเตอร์ และภาษาที่จะใช้เขียนโปรแกรมแล้ว สิ่งต่อไปคือ การสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ที่จะใช้คำนวณ ค่าของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง. การสร้างสมการทางคณิตศาสตร์นั้น มักใช้สมการอนุรักษ์มวล และ/หรือ สมการอนุรักษ์พลังงานซึ่งมักเขียนในรูปของ สมการดิฟเฟอเรนเชียล โดยเทียบกับเวลาของการเดินระบบ ดังสมการที่ (2.1).

$$\left[\frac{\text{ปริมาณของ S ที่สะสมในระบบ}}{\text{เวลา}}\right] = \left[\frac{\text{S ที่ไหลเข้าสู่ระบบ}}{\text{เวลา}}\right] - \left[\frac{\text{S ที่ไหลออกจากระบบ}}{\text{เวลา}}\right] \qquad (2.1)$$

โดยที่ S คือ ปริมาณพื้นฐาน เช่น

มวลรวม

มวลขององค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่ง

พลังงานบริสุทธิ์

โมเมนตัม

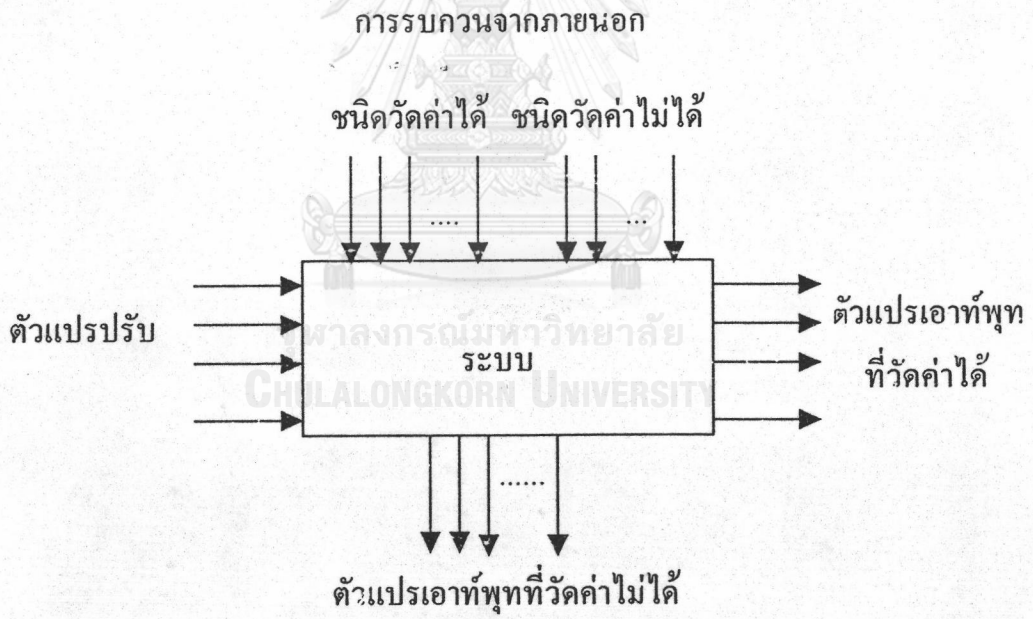
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.2 การเลียนแบบระบบด้วยสมการทางคณิตศาสตร์

การเลียนแบบระบบด้วยสมการทางคณิตศาสตร์นั้น เริ่มจากการสังเกต เช่น ตั้งสมมติฐานว่า ระบบมีพฤติกรรมอย่างไร ที่เวลาใด ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการเลือกตัวแปรที่จะควบคุม หรือศึกษาการสร้างสมการเพื่อควบคุมหรือศึกษาตัวแปร เราสามารถทำได้ 2 วิธี คือจากการทดลอง (Experimental approach) และจากทฤษฎี (Theoretical approach) .

2.2.1 การสร้างสมการจากการทดลอง

กระบวนการใดๆ ก็ตามสามารถเขียนเป็นผังที่แสดงตัวแปรกลุ่มต่าง ๆ ได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ตัวแปรอินพุท และ เอาท์พุท ในกระบวนการ.

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าตัวแปรอินพุท จะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ ตัวแปรปรับและการรบกวนจากภายนอก (External Disturbance) ที่มีทั้งแบบที่วัดได้และวัดไม่ได้. ส่วนตัวแปรเอาท์พุท ก็มีทั้งแบบที่วัดได้และวัดไม่ได้. ตัวแปรในแต่ละกลุ่มมีหลายตัว, ระบบเลียนแบบที่ดีจะเกิดจากสมการที่มาจากการพิจารณาตัวแปรจนครบถ้วน หรือมากตัวที่สุด. และตัวแปรที่ถูกละเลยไม่พิจารณาต้องเป็นตัวแปรที่แน่ใจว่าส่งผลต่อระบบและตัวแปรอื่นน้อยมาก. การพิจารณาตัวแปรที่ส่งผลต่อระบบ หรือตัวแปรตัวอื่นน้อย จะทำให้การเลียนแบบยากขึ้น แต่อาจให้คำตอบที่มีนัยสำคัญไม่ต่างจากการพิจารณาตัวแปรที่สำคัญเพียงไม่กี่ตัว.

การสร้างสมการจากการทดลองนั้น จะกระทำต่อเมื่อมีชุดปฏิกรณ์หรือกระบวนการอยู่แล้ว หรือกระบวนการนี้สามารถสร้างขึ้นได้ง่าย รวดเร็ว และเสียค่าใช้จ่ายน้อย. เราทราบการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเอาท์พุท หรือตัวแปรใดที่เราสนใจได้ โดยการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอื่น เช่นตัวรบกวน หรือ ตัวแปรปรับ แล้ววัดค่าตัวแปรที่เราสนใจที่เวลาต่างๆ, ในการกระทำเช่นนี้, เราควรจะทำการทดลองหลายๆ ครั้งกับตัวแปรทุกตัว ซึ่งอาจไม่สะดวกในการปฏิบัติและเสียค่าใช้จ่ายมาก แต่วิธีนี้จะให้ค่าผลตอบของระบบที่เป็นจริงเสมอ. ขั้นตอนต่อไปคือ การสร้างสมการจากค่าของตัวแปรแต่ละคู่ ทีละคู่ที่ได้จากการทดลองดังกล่าว. การสร้างสมการอาจทำได้หลายอย่าง เช่นการระบุโมเดล (Identification) หรือการเฉลี่ยความผิดพลาดของความสัมพันธ์โดยสมมติให้เป็นความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นเป็นต้น.

2.2.2 การสร้างสมการจากทฤษฎี

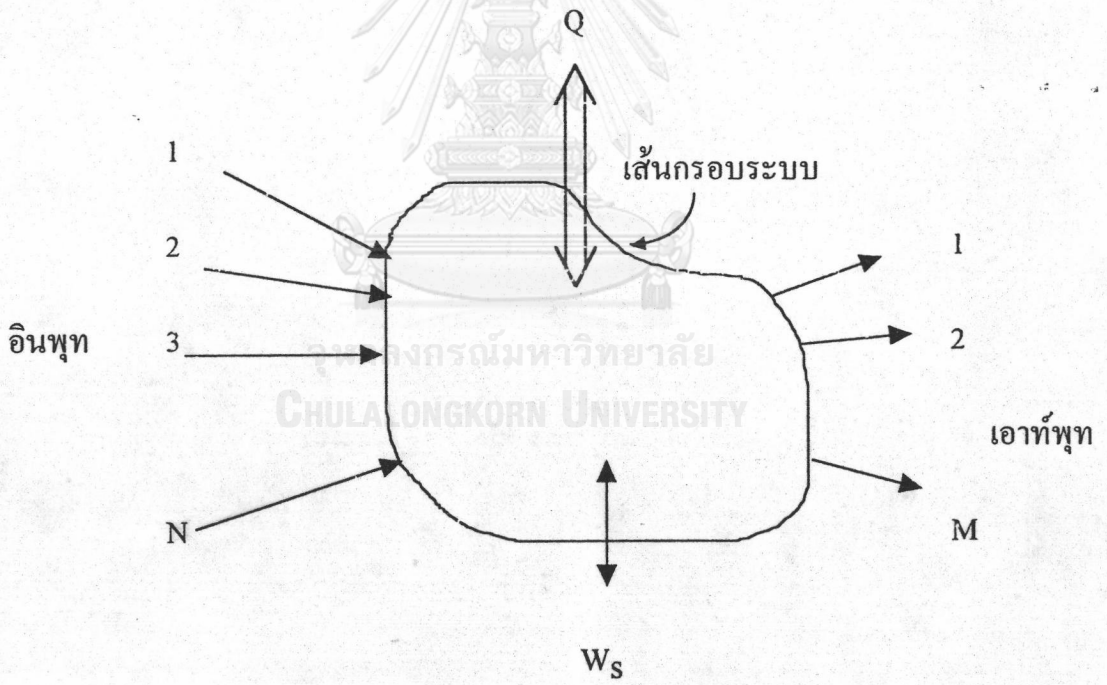
ในกรณีที่การสร้างระบบต้นแบบทำได้ยาก หรือสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมาก เราจำเป็นที่จะต้องเลียนแบบระบบด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ที่เขียนขึ้นโดยอาศัยกฎเกณฑ์ต่างๆ ตามทฤษฎี. ผู้เขียนสมการจะต้องทราบว่าตัวแปรใดสัมพันธ์กับตัวแปรใด และส่งผลต่อตัวแปรหรือระบบด้วยปัจจัยมากน้อยเพียงใด. การเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องของอุปกรณ์หรือปรากฏการณ์ต่างๆ ในกระบวนการนั้น จะเขียนในรูปของสมการพีชคณิต หรือมิฉะนั้นก็เป็นสมการอนุรักษ์ (เทียบกับเวลา) ซึ่งแล้วแต่ว่าจะศึกษาระบบในลักษณะสถิตหรือพลวัต (Static or dynamic behavior) ยิ่งต้องการให้การคาดเดาหรือผลตอบถูกต้องมากเท่าใด เราก็ต้องพิจารณาจำนวนตัวแปร และจำนวนคู่ของตัวแปรมากขึ้นเท่านั้น. ในแง่ของการออกแบบการควบคุมระบบ, อาจพิจารณาเฉพาะตัวแปรสำคัญๆ ที่ส่งผลกระทบโดยตรงและรุนแรงต่อตัวแปรจำนวนมากๆ ที่เราจะศึกษา แต่หากเป็นเรื่องของการเรียนรู้หรือการวิจัยปรากฏการณ์ใหม่ๆ ที่ละเอียดอ่อนมากๆ แล้ว การพิจารณาตัวแปรจำนวนมากๆ ทั้งที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องกับตัวแปรที่จะศึกษา ก็ยิ่งเป็นประโยชน์ต่อการเข้าใจธรรมชาติของระบบมากขึ้นเท่านั้น.

2.3 สมการพลวัตของกระบวนการ

ในการศึกษาหรือเลียนแบบระบบนั้น มักจะใช้สมการทางคณิตศาสตร์แบบพลวัต เพราะจะทำให้สามารถเลียนแบบได้คล้ายกระบวนการจริง. สมการแบบพลวัตก็คือ สมการที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง (อาจจะเป็นหลายตัวแปรได้ แต่จะไม่นำมาใช้

ในการเลียนแบบระบบ) เทียบกับเวลา หรือเป็นที่รู้จักกันดีในชื่อของสมการอนุพันธ์เทียบกับเวลานั่นเอง. การใช้สมการแบบพลวัตสามารถเลียนแบบระบบได้คล้ายระบบจริง เพราะไม่มีระบบจริงใดที่จะให้ผลตอบที่สมบูรณ์ในทันทีที่เกิดการรบกวนระบบ แต่จะค่อย ๆ ตอบสนอง, การตอบสนองเร็วหรือช้าขึ้นกับค่าคงตัวเวลา, อันดับ, ฯลฯ ของระบบ. และในเรื่องของการควบคุมระบบ ตัวควบคุมจะไม่รอจนกระทั่งระบบคงที่ แต่จะกระทำต่อเนื่องไปตลอดเวลา ซึ่งหากใช้สมการแบบสถิตย์ จะไม่สามารถเลียนแบบระบบที่มีการควบคุมได้เลย.

สมการคณิตศาสตร์แบบพลวัต เขียนขึ้นจากสมการอนุรักษ์ ดังที่กล่าวแล้วในสมการที่ (2.1).



รูปที่ 2.2 รูปทั่วไปของระบบ แสดงตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับภายนอกระบบ.

จากรูปที่ 2.2 เราจะสามารถเขียนสมการอนุรักษ์มวลเพื่อใช้ในการเลียนแบบได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\text{อัตราการสะสม}\\ \text{ของมวลในระบบ}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{อัตราการไหลของ}\\ \text{มวลสู่ระบบ}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{อัตราการไหลของ}\\ \text{มวลออกจากระบบ}\end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

ขั้นตอนต่อไปก็แปลงสมการ (2.2) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่เราจะศึกษา เช่น ถ้าอยากทราบความสัมพันธ์ของกลุ่มตัวแปร ปริมาณ, อัตราการไหลเข้า และไหลออกของสารผ่านระบบ ก็จะสามารถเขียนสมการ (2.2) ได้ดังนี้

$$\frac{d(\rho V}{dt} = \sum_{i=inlet} \rho_i F_i - \sum_{j=outlet} \rho_j F_j \qquad (2.3)$$

หรือถ้าหากต้องการศึกษาระดับของสารในระบบที่เป็นตัวเก็บสาร ก็สามารถเขียนข้างซ้ายของสมการที่ (2.3) ได้เป็น $\frac{d\rho Ah}{dt}$ หรือ $\frac{\rho dAh}{dt}$

$$\frac{\rho Adh}{dt} = \sum_{i=inlet} \rho_i F_i - \sum_{j=outlet} \rho_j F_j \qquad (2.4)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของสาร

A คือ พื้นที่หน้าตัดของถัง (ระบบ) , สมมติให้มีค่าคงที่

h คือ ระดับของสารในถังเทียบกับก้นถัง

F คือ อัตราการไหลเชิงปริมาตร (Volume flow rate)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ถ้าหากต้องการศึกษาตัวแปรมากกว่านี้ หรือตัวแปรในกลุ่มนี้ส่งผล หรือได้รับผลกระทบมาจากตัวแปรอื่น, สมการอนุรักษ์ก็ต้องถูกเขียนเพิ่มขึ้น, ในกรณีที่เป็นที่รู้อยู่แล้วว่าตัวแปรบางคู่ส่งผลถึงกัน ด้วยพลวัตที่น้อยมาก สมการอนุรักษ์อาจไม่จำเป็น แต่จะเขียนเป็นสมการพีชคณิตแทนได้.

2.4 โปรแกรมช่วยสอน

การที่จะให้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนหรือช่วยในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ แก่ผู้ใช้สิ่งที่ต้องคำนึงถึงอย่างมาก คือความน่าใช้และการสื่อความหมายระหว่างผู้ใช้กับผู้เขียนโปรแกรม. CAI ในยุคก่อน 10 ปี ที่แล้ว จะใช้วิธีถามตอบและบรรยายด้วยตัวหนังสือ (on-line-helping) ทำให้ผู้ใช้โปรแกรมเบื่อหน่ายได้ง่าย. และบางครั้งต้องการข้ามบทเรียนบางส่วนหรือเลิกเรียนก็กระทำได้ยาก ต่อมาเมื่อคอมพิวเตอร์มีความเร็วมากขึ้น หน่วยความจำมีราคาถูกลง และมีเครื่องมือในการพัฒนาโปรแกรมมากขึ้น, CAI ได้รับการพัฒนารูปแบบมาสู่การสื่อด้วยภาพ ทำให้ผู้ใช้เกิดความเพลิดเพลินในขณะที่เรียนรู้ไปด้วย.

Chulalongkorn University