บทที่ 3
การวิเคราะห์แบบพลศาสตร์

3.1 การวิเคราะห์แบบพลศาสตร์

ในการวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ของโครงสร้างโดยทั่วไป มีลักษณะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ (Linear Differential Equation) ลำดับที่ 2 ดังสมการที่ (1)

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{U}} + \underline{C}\,\underline{\dot{U}} + \underline{K}\,\underline{U} = \underline{R} \qquad (1)$$

เมื่อ $\underline{M}$, $\underline{C}$, $\underline{K}$ เป็นเมตริกซ์ของมวล ความหน่วง และ สตีฟเนสของโครงสร้าง ตามลำดับ

$\underline{R}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงกระทำภายนอก สำหรับผลของแผ่นดินไหวจะมีค่าเท่ากับ $\underline{M\ddot{U}_g}$

$\underline{U},\underline{\dot{U}},\underline{\ddot{U}},\underline{\ddot{U}_g}$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ ความเร็ว อัตราเร่งสัมพันธ์ และ อัตราเร่งเนื่องจากแผ่นดินไหวตามลำดับ

ในการวิเคราะห์สมการข้างต้น สามารถที่ทำได้ 2 วิธี คือ

1 วิธีอินติเกรตโดยตรง (Direct Integration Method)

2 วิธีวิเคราะห์โหมด (Mode Analysis Method)

3.2 วิธีอินติเกรตโดยตรง

ในการอินติเกรตโดยตรง เป็นการวิเคราะห์โดยวิธีการอินติเกรตทีละขั้น(Step- by-Step)โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปสมการ ซึ่งมีพื้นฐานในการอินติเกรตโดยตรง 2 แนวทาง

แนวทางแรก เป็นการพิจารณาผลที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์พลศาสตร์ที่เวลา t ใดๆ ในช่วง Δt ซึ่งเหมือนกับการวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์ ซึ่งจะได้ผลในการคำนวณทุกช่วงเวลา

แนวทางสอง เป็นการวิเคราะห์ที่พิจารณาถึงการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ ความเร็ว และ อัตราเร่งในช่วงเวลา Δt ซึ่งความเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่ ความเร็ว และอัตราเร่งในแต่ละช่วงเวลาจะถูกเก็บสะสมไว้ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ในที่สุด โดยที่ให้ U_o , $\dot{U}_o$, $\ddot{U}_o$ เป็นการเคลื่อนที่ ความเร็ว และ อัตราเร่ง ที่เวลา $t = 0$ ในช่วงเวลาตั้งแต่ $t = 0$ ถึง $t = T$ สามารถที่จะหาผลลัพธ์ โดยทำการแบ่งเวลาออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน ($\Delta t = T / n$) และทำการอินติเกรตที่เวลา $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, t, t + \Delta t, \ldots, T$ ก็จะได้ผลลัพธ์ในแต่ละช่วงเวลาที่ต้องการ วิธีอินติเกรตโดยตรงนี้ มีวิธีที่มีประสิทธภาพ ดังต่อไปนี้ วิธีผลต่างกึ่งกลาง(Central Difference Method) วิธีวิลสัน (Wilson θ Method) วิธีนิวมาร์ค (Newmark Method)

ซึ่งมีรายละเอียดแตกต่างกันไป

3.3 วิธีวิเคราะห์โหมด

เป็นวิธีที่จะทำการเปลี่ยนสมการแบบพลศาสตร์ ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความสัมพันธ์ขึ้นแก่กัน(Coupled)ให้อยู่ในรูปของสมการที่ไม่ขึ้นแก่กัน(Uncoupled) โดยที่แต่ละโหมดของการสั่น (Mode of Vibration) แยกจากกัน และอาจพิจารณาเพียงบางโหมด(Mode)ที่สนใจ ซึ่งมีประสิทธิภาพในการประหยัดเวลา การที่จะแยกแต่ละโหมดจะสามารถหาโดยการวิเคราะห์ผลการตอบสนองการสั่นอย่างอิสระที่ปราศจากตัวหน่วง (Undamped Free Vibration Response)

วิธีวิเคราะห์โหมดสามารถแบ่งเป็น 2 แบบ

แบบแรกวิธีรวมโหมด (Mode Superposition Method) หลังจากที่โหมดต่างๆได้ถูกแยก วิธีนี้สามารถที่จะรวมแต่ละโหมดโดยรวมโดยตรง (Superposition)

แบบสองวิธีค่ามากที่สุดของผลตอบสนอง ซึ่งจะพิจารณาค่าแรงและการเคลื่อนที่ที่มากที่สุดของโครงสร้าง โดยจะถูกวิเคราะห์ และรวมกันโดยวิธีที่เหมาะสม

3.3.1 การเปลี่ยนฐานในรูปแบบการเคลื่อนที่ (Change of Base to Modal Generalized Displacements)

กำหนดให้ $\underline{U}$ เป็นการเคลื่อนที่

$$\underline{U}(t) = \underline{\phi}\,\underline{X}(t) \qquad (2)$$

เมื่อ $\underline{\phi}$ เป็นเมตริกซ์ของการแปลง (Transformation Matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด $n * n$ ที่เป็นเมตริกซ์ที่จะถูกหา

$\underline{X}$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ทั่วไป (Generalized Displacements)

ซึ่งเมื่อนำสมการ (2) แทนในสมการ (1) และ คูณ ϕ^T เข้าข้างหน้าทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\underline{\overline{M}}\,\underline{\ddot{X}}(t) + \underline{\overline{C}}\,\underline{\dot{X}}(t) + \underline{\overline{K}}\,\underline{X}(t) = \underline{\overline{R}}(t) \qquad (3)$$

เมื่อ

$$\underline{\overline{M}} = \underline{\phi}^T\,\underline{M}\,\underline{\phi}$$

$$\underline{\overline{C}} = \underline{\phi}^T\,\underline{C}\,\underline{\phi}$$

$$\underline{\overline{K}} = \underline{\phi}^T\,\underline{K}\,\underline{\phi}$$

$$\underline{\overline{R}} = \underline{\phi}^T\,\underline{R}$$

เมตริกซ์ของการแปลง $\underline{\phi}$ ถูกหาได้โดยอาศัยสมการการสั่นไหวอย่างอิสระที่ปราศจากความหน่วง

ดังนี้ สมการจะเป็น

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\,\underline{U} = \underline{0} \qquad (4)$$

ซึ่งมีผลลัพธ์ในรูป $\underline{U} = \underline{\phi}\,\sin\omega(t-t_o)$ (5)

เมื่อ $\underline{\phi}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาด n

t เป็นเวลาที่เปลี่ยนไป

t_o เป็นเวลาที่คงที่

ω เป็นความถี่ของการสั่นไหวแบบอิสระ

แทนค่าสมการ (5) ลงในสมการ (4) จะได้

$$\underline{K}\,\underline{\phi} = \omega^2\,\underline{M}\,\underline{\phi} \qquad (6)$$

สมการที่(6) เป็นการแก้ปัญหาเจาะจง (Eigenproblem)ให้ผลลัพธ์ n ชุด $(\omega_1^{\,2},\underline{\phi}_1),\ldots(\omega_n^{\,2},\underline{\phi}_n)$ ซึ่งค่าเวคเตอร์เจาะจง (Eigenvector) $\underline{\phi}$ มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของเมตริกซ์ของมวล (M - Orthonormalized)

$$\underline{\phi}_i^{\,T}\,\underline{M}\,\underline{\phi}_j = 1 \quad , \quad i = j$$

$$= 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$0 \leqslant \omega_1^{\,2} < \omega_2^{\,2} < \ldots < \omega_n^{\,2}$$

โดยที่ $\underline{\phi}_i$ เป็นเวคเตอร์ของรูปแบบของโหมด (Mode Shape) ลำดับที่ i

ω_i เป็นความถี่ของการสั่นไหวแบบอิสระลำดับที่ i

ดังนั้นสมการที่ (4) จะได้คำตอบ n คำตอบ

$$\underline{\phi}_i \sin\omega_i\,(t-t_o) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

เมื่อกำหนดให้ $\underline{\Phi} = [\,\underline{\phi}_1,\underline{\phi}_2,\ldots,\underline{\phi}_n\,]$

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^{\,2} & & & & \\ & \omega_2^{\,2} & & & \\ & & \omega_3^{\,2} & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \omega_n^{\,2} \end{bmatrix}$$

สำหรับคำตอบ n คำตอบ จะเป็นดังสมการที่ (7)

$$\underline{K}\,\underline{\Phi} = \underline{M}\,\underline{\Phi}\,\underline{\Omega}^2 \qquad (7)$$

โดย $\underline{\Phi}^T\,\underline{K}\,\underline{\Phi} = \underline{\Omega}^2$, $\underline{\Phi}^T\,\underline{K}\,\underline{\Phi} = \underline{I}$

ดังนั้น สมการที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ทั่วไปในโหมดต่างๆ(Modal Generalized Displacememts) จะเป็นดังนี้

$$\ddot{\underline{X}}\,(t) + \underline{\phi}^{T}\,\underline{C}\,\underline{\phi}\,\dot{\underline{X}}\,(t) + \underline{\Omega}^{2}\;\underline{X}\,(t) \;=\; \underline{\phi}^{T}\,\underline{R}\,(t) \qquad (8)$$

ถ้าเวลา $t = 0$ กำหนดให้ $\underline{U}\,(0) = \underline{U}o$ และ $\dot{\underline{U}}\,(0) = \dot{\underline{U}}o$

จะได้ว่า $\underline{X}o = \underline{\phi}^{T}\,\underline{M}\,\underline{U}o$, $\underline{X}o = \underline{\phi}^{T}\,\underline{M}\,\underline{U}o$

จากสมการ (8) สมมุติค่าเมตริกซ์ C มีค่าดังนี้

$$\underline{\phi}^{T}_{i}\,\underline{C}\,\underline{\phi}_{j} \;=\; 2\,\omega_{i}\,\xi_{i}\,\delta_{ij}$$

เมื่อ ξ_i เป็นค่าการสูญเสียพลังงาน

$\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$

$= 0$ เมื่อ $i \neq j$

ซึ่งจากสมการที่ (7) สามารถที่ใช้สมการดูแฮมเมล (Duhamal Integral) หาการเคลื่อนที่ในแต่ละโหมดและรวมกันโดยตรง (Superposition) ก็จะได้ค่าการเคลื่อนที่ U (t) ซึ่งเป็นการวิเคราะห์รวมโหมด(Mode Superposition Method)

3.4 วิธีค่าสูงสุดของการตอบสนอง (Response Spectrum Method)

วิธี ค่าสูงสุดของการตอบสนอง (Response Spectrum) โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับการวิเคราะห์ผลตอบสนองของแผ่นดินไหว เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ได้สมการดังนี้

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{u}}^{t} + \underline{C}\,\dot{\underline{u}} + K\,\underline{u} \;=\; 0 \qquad (9)$$

เมื่อ $\underline{M}$ เป็นเมตริกซ์มวลที่กระทำเป็นจุด (Lumped Mass)

$\underline{C}$ เป็นเมตริกซ์ของความหน่วง

$\underline{K}$ เป็นเมตริกซ์ของสตีฟเนส

$\ddot{\underline{u}}^{t}$ เป็นความเร่งเนื่องจากการเคลื่อนที่ทั้งหมด

$\dot{\underline{u}}$ เป็นความเร็วสัมพัทธ์

$\underline{u}$ เป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์

$$\ddot{\underline{u}}^{t} \;=\; \ddot{\underline{u}} \;+\; \{1\}\,\ddot{u}_{g}$$

ดังนั้น

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\,\dot{\underline{u}} + \underline{K}\,\underline{u} \;=\; \underline{P}_{eff}(t) \qquad (10)$$

เมื่อ $\underline{P}_{eff}(t) \;=\; -\,\underline{M}\,\{1\}\,\ddot{u}_{g}(t)$

$\{1\}$ เป็นเวคเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย

ทำการวิเคราะห์หาเวคเตอร์เจาะจงของแต่ละโหมดที่จะไปใช้วิเคราะห์จากสมการ (6) ก็จะ

สามารถเขียนสมการที่ (10) ในรูปแบบของสมการที่มีโหมดไม่ขึ้นแก่กัน (Uncoupled Modal Equation) ดังนี้

$$M_n \ddot{Y}_n + C_n \dot{Y}_n + K_n Y_n = P_n(t) \qquad (11)$$

เมื่อ M_n , C_n , K_n เป็นคุณสมบัติทั่วไปที่โหมด n

$$P_n(t) = \phi^T_n P_{eff}(t) = \mathcal{L}_n u_g(t)$$

$\mathcal{L}_n$ เป็นค่าประกอบของการกระตุ้นการเกิดแผ่นดินไหวในแต่ละโหมด (Modal Earthquake-Excitation Factor)

$$\mathcal{L}_n = \phi^T_n \underline{M} \{1\}$$

ดังนั้นผลตอบสนองในแต่ละโหมด

$$Y_n(t) = \mathcal{L}_n V_n(t) / (M_n \omega_n) \qquad (12)$$

เมื่อ $V_n(t)$ เป็นค่าการอินติเกรตผลตอบสนองของแผ่นดินไหวในแต่ละโหมด (Earthquake Response Integral)

$$V(t) = \int_0^t u_g(\tau)\exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin\omega(t-\tau)d\tau$$

ω_d เป็นค่าความถี่ของการสั่นไหวแบบมีการหน่วง

แต่เนื่องจากค่าอัตราการสูญเสียพลังงานของโครงสร้างมีค่าน้อย ความแตกต่างของ ω กับ ω_d จึงไม่แตกต่างกันมาก โดยที่การเคลื่อนที่สัมพัทธ์มีความสัมพันธ์กับค่าอินติเกรตผลตอบสนองของแผ่นดินไหวดังนี้

$$u(t) = 1/\omega \; V(t)$$

แต่สำหรับการวิเคราะห์ค่าสูงสุดผลตอบสนอง

$$u_{max} = 1/\omega \; Sv$$

$$Sv(\xi,\omega) = \left[\int_0^t ug(\tau)\exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin\omega(t-\tau)d\tau\right]_{max}$$

มีความสัมพันธ์กันดังนี้ $Sa = \omega Sv = \omega^2 Sd$

เมื่อ

Sv เป็นผลตอบสนองสูงสุดของความเร็วของการเกิดแผ่นดินไหว (Spectral Pseudovelocity Response)

Sa เป็นผลตอบสนองสูงสุดของความเร่งของการเกิดแผ่นดินไหว (Spectral Acceleration Response)

Sd เป็นผลตอบสนองสูงสุดของการเคลื่อนที่ของการเกิดแผ่นดินไหว(Spectral Displacement Response)

ซึ่งหลังจากได้ผลตอบสนองในแต่ละโหมดได้ดังสมการที่ (13) ก็จะสามารถหาค่าการเคลื่อนที่สัมพันธ์ได้ดังนี้

$$u_n(t) = \phi_n \mathcal{L}_n V_n(t)/(M_n \omega_n) \quad (13)$$

ในรูปเมตริกซ์ทุกโหมด $u(t) = \phi\, Y(t) = \phi\,\{\mathcal{L}_n V_n(t)\}/\{M_n \omega_n\}$

แรงอิลาสติก (elastic force) $fs = \underline{K}u_n(t) = \underline{K}\phi Y(t)$

จากสมการ (8) ก็จะพบว่า $fs(t) = \underline{M}\phi\, \Omega^2 Y(t) = \underline{M}\phi\{\mathcal{L}_n \omega_n V_n(t)/M_n\}$

สำหรับแต่ละโหมด

$$fs_n(t) = \underline{M}\phi_n \mathcal{L}_n \omega_n V_n(t)/M_n \quad (14)$$

แรงเฉือนที่ฐาน
$$V_o(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{L}^2_n/M_n\, \omega_n V_n(t) \quad (15)$$

โมเมนต์ที่ฐาน
$$Mo(t) = \sum_{n=1}^{N} x_i\, fs_i(t) \quad (16)$$

เนื่องจากการวิเคราะห์โดยวิธีค่าสูงสุดของการตอบสนองจะพิจารณาผลที่มากที่สุด ดังนั้นค่าการเคลื่อนที่สัมพันธ์ได้ดังนี้

$$u_{n\,max} = \phi_n \mathcal{L}_n S_v(\xi_n,\omega_n)/(M_n \omega_n)$$

แรงอิลาสติก (elastic force) $fs_{n\,max} = \underline{M}\phi\{\mathcal{L}_n \omega_n S_a(\xi_n,\omega_n)/M_n\}$

ในการวิเคราะห์โดยวิธีผลตอบสนองสูงสุดนี้ ไม่สามารถที่จะนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการรวมกันโดยตรง(Mode Superposition) ซึ่งเพื่อที่จะได้รับค่าที่สมเหตุสมผลโดยการหาค่ารากที่สองผลรวมที่ยกกำลังของผลตอบสนองในแต่ละ Mode

$$V_{max} = \sqrt{(V_1)^2_{max} + (V_2)^2_{max} + \ldots.} \quad (17)$$

$$fs,max = \sqrt{(fs_1)^2_{max} + (fs_2)^2_{max} + \ldots} \quad (18)$$

ซึ่งจากค่าดังกล่าวก็สามารถทำการคำนวณหาค่าแรงภายใน อันได้แก่ แรงดัด แรงเฉือน และแรงในแนวแกนได้ตามต้องการ

3.5 วิธีสถิตศาสตร์เทียบเท่าตามวิธีของ UBC

3.5.1 แรงเฉือนทั้งหมดที่ฐาน

ในการวิเคราะห์แบบสถิตศาสตร์เทียบเท่านี้ แรงเฉือนทั้งหมดที่ฐานขึ้นอยู่กับพื้นที่ที่ได้รับผลจากแผ่นดินไหว, เงื่อนไขของดิน, คาบของโครงสร้างและระบบที่ต้านทานแรงทางด้านข้าง

ปี 1982 Uniform Building Code ได้ให้สูตรในการหาแรงเฉือนที่ฐานดังนี้

$$V = ZIKCSW \tag{19}$$

เมื่อ Z = ค่าสัมประสิทธิ์ความเข้มของแผ่นดินไหวที่ขึ้นอยู่กับโซนที่ได้รับผลจากแผ่นดินไหว

I = ค่าตัวประกอบสำคัญที่เกี่ยวกับการใช้อาคาร

K = ค่าสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับระบบในการต้านแรงทางด้านข้างในแนวราบ

C = ค่าสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับคาบของโครงสร้าง

S = ค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการกำทอนของโครงสร้างอาคารกับความถี่ธรรมชาติของแผ่นดินไหว

W = น้ำหนักบรรทุกคงที่ของโครงสร้างทั้งหมด(dead load)

ค่าของ Z,I และ K ถูกเลือกจากตารางที่ 3.1,3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

ค่าของ C ถูกหาจากสูตร

$$C = 1/15\sqrt{T} \leq 0.12 \tag{20}$$

ค่าคาบของโครงสร้าง T (หน่วยเป็นวินาที) ถูกหาได้จากสูตร

$$T = 0.05h_n/\sqrt{D} \tag{21}$$

เมื่อ h_n = ค่าความสูงของโครงสร้าง (ฟุต)

D = ความกว้างในทิศทางของแผ่นดินไหว (ฟุต)

อาคารที่ประกอบขึ้นด้วยวัสดุที่มีความเหนียวและสามารถต้านทานแรงในแนวราบทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้รวมทั้งโครงสร้างมิได้เชื่อมต่อกับ โครงสร้างอื่นที่แข็งแรงกว่า ค่าคาบธรรมชาติของอาคารคำนวณได้จากสูตร

$$T = 0.1N \tag{22}$$

เมื่อ T = คาบธรรมชาติของโครงสร้างมีหน่วยเป็นวินาที

N = จำนวนชั้นของโครงสร้าง

ค่าของ S สามารถหาได้จากสูตรข้างล่าง แต่ไม่ควรน้อยกว่า 1.0

$$S = 1.0 + T/T_s - 0.5(T/T_s)^2 \quad \text{เมื่อ } T/T_s \leq 1.0 \qquad (23)$$

หรือ

$$S = 1.2 + 0.6T/T_s - 0.3(T/T_s)^2 \quad \text{เมื่อ } T/T_s > 1.0 \qquad (24)$$

เมื่อ T_s = คาบธรรมชาติของแผ่นดินไหว ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0.5 - 2.5 วินาที ถ้า T_s ไม่สามารถที่จะถูกหาได้ ค่าของ S ควรเป็น 1.5

ในงานวิจัยนี้ใช้ค่า S = 1.5

3.5.2 <u>การกระจายแรงด้านข้าง</u>

แรงสถิตศาสตร์เทียบเท่าทางด้านข้างมีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่ฐาน ซึ่งสามารถที่จะกระจายตลอดความสูงของโครงสร้างอาคารได้ดังนี้

$$V = F_t + \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad (25)$$

เมื่อ F_t = เป็นแรงกระทำเป็นจุดที่ส่วนบนของอาคาร ซึ่งสามารถหาได้จากสูตรดังนี้

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \quad \text{ถ้า } T > 0.7 \text{ วินาที} \qquad (26)$$

หรือ

$$F_t = 0 \quad \text{ถ้า } T \leq 0.7 \text{ วินาที} \qquad (27)$$

F_i = เป็นแรงด้านข้างที่กระทำที่ระดับพื้นที่ i

ดังนั้นแรงกระทำด้านข้าง F_x ที่กระทำที่ระดับพื้นซึ่งมีความสูง h_x จากพื้นดิน สามารถหาได้จากสูตรดังนี้

$$F_x = \frac{(V - F_t)W_x h_x}{\sum_{i=1}^{n} W_i h_i} \qquad (28)$$

เมื่อ h_i = ความสูงที่ระดับพื้น i เหนือพื้นดิน

W_i, W_x = ส่วนของมวล(น้ำหนัก)ที่ระดับพื้น i และ x ตามลำดับ

n = จำนวนชั้นของอาคาร

3.6 วิธีทำซ้ำในสเปซย่อย

ในการแก้ปัญหาเจาะจงนี้วิธีทำซ้ำในสเปซย่อยเป็นวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพมากในการใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์โดยมีขั้นตอนดังนี้

กำหนดให้ $\underline{X}$ เป็นค่าสมมติของ ϕ

$$\underline{KX} = \underline{MX\Omega} \tag{29}$$

คูณด้วย $\underline{\Omega}^{-1}$ เข้าข้างหลังของทั้งสองข้าง

$$\underline{\bar{X}} = \underline{X\Omega}^{-1}$$

$$\underline{Y} = \underline{MX}$$

เมื่อ $\underline{\Omega}$ เป็นเมตริกซ์ในแนวทะแยงของ ω_i^2

จะได้ $\underline{K\bar{X}} = \underline{Y}$

โดยที่ $\underline{\bar{X}}$ จะมีเวคเตอร์อยู่ภายในเท่ากับจำนวนโหมดที่ต้องการ

เมื่อทำซ้ำ k ครั้ง ก็จะหาค่าโหมดเมตริกซ์ (Modal Matrix) $\underline{X}^{(k)}$ ได้

$$\underline{X}^{(k)} = \underline{\bar{X}}^{(k)}\underline{Q}^{(k)}$$

เมื่อ $\underline{Q}^{(k)}$ เป็นเวคเตอร์เจาะจงของการโปรเจคชั่นของมวลและสตีฟเนส

เมื่อพิจารณาที่ $\underline{\bar{X}}^{(k+1)}$ ก็จะสามารถเขียนสมการ (20) ได้เป็น

$$\underline{K\bar{X}}^{(k+1)} = \underline{\bar{Y}}^{(k)}$$

$$\underline{\bar{Y}}^{(k+1)} = \underline{M\bar{X}}^{(k+1)}$$

$$\underline{K}^{*(k+1)} = \underline{\bar{X}}^{T(k+1)}\underline{Y}^{(k)}$$

$$\underline{M}^{*(k+1)} = \underline{\bar{X}}^{T(k+1)}\underline{\bar{Y}}^{(k+1)}$$

เมื่อแทนค่าในสมการ (20) จะได้

$$\underline{K}^{*(k+1)}\underline{Q}^{(k+1)} = \underline{M}^{*(k+1)}\underline{Q}^{(k+1)}\underline{\Omega}^{(k+1)}$$

$$\underline{Y}^{(k+1)} = \underline{\bar{Y}}^{(k+1)}\underline{Q}^{(k+1)}$$

ก็จะหาค่าเวคเตอร์เจาะจงได้

$$\underline{X}^{(k+1)} = \underline{\bar{X}}^{(k+1)}\underline{Q}^{(k+1)}$$

โดยที่ $\underline{\Omega}^{(k+1)}$ เข้าสู่ $\underline{\Omega}$, $\underline{X}^{(k+1)}$ เข้าสู่ค่า ϕ เมื่อ k เข้าใกล้ ∞

โดยที่ค่า ω_i^2 ที่เข้าสู่ค่าคงที่จะอยู่ในช่วง

$$0.99\omega_1^{2(k)} < \omega_1^{2} < 1.01\omega_1^{2(k)}$$

3.7 ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์

ในโครงสร้างที่ประกอบด้วยโครงข้อแข็งเพื่อรับแรงกระทำด้านข้าง วิธีรวมสตีฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยทำการแบ่งโครงสร้างทั้งหมดออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ทำการคำนวณหาสตีฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนแต่ละอัน (Local Stiffness) แล้วนำสติฟเนสเมตริกซ์ย่อยทั้งหมดนี้รวมกันเป็นสตีฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างรวม(Global Stiffness)ตามลักษณะการเชื่อมโยง (Connectivity) ของชิ้นส่วนย่อย ในที่สุดแล้วได้สมการ

Rs} = [Ks] {rs} (30)

เมื่อ {Rs} = เวคเตอร์ของแรงที่กระทำบนโครงสร้าง

[Ks] = สตีฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างทั้งหมด

{rs} = เวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ของแต่ละขั้ว(Node)

จากสมการ (30) จะสามารถหา ค่าความต้านทานทางด้านข้างของโครงสร้าง (Lateral stiffness)ได้โดยการใส่แรงหนึ่งหน่วยกระทำกับโครงสร้าง แล้วทำการวิเคราะห์หาระยะที่เปลี่ยนไปของโครงสร้าง ซึ่งจะเป็นค่าเฟลกซิบิลิตีเมตริกซ์ [F] เมื่อทำการอินเวอร์สก็จะได้ค่าความต้านทานทางด้านข้าง