

ผลการสิ้นไถลของวัสดุพอลิเมอร์สำหรับการไหลเคลือบเส้นลวด

นางสาวปิยมาภรณ์ อุตมั่ง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2554

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)

are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

SLIP EFFECTS OF A POLYMERIC MATERIAL FOR WIRE-COATING FLOWS

Miss Piyamabhorn Uttamung

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computational Science

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2011

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

ผลการสิ้นไกลของวัสดุพอลิเมอร์สำหรับการไหลเคลือบเส้น
ลวด

โดย

นางสาวปิยมาภรณ์ อุตมั่ง

สาขาวิชา

วิทยาการคณนา

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวางกูร

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สาตราวาหา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวางกูร)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.บำรุง พ่วงเกิด)

ปียมภรณ์ อุตมั่ง : ผลการลื่นไถลของวัสดุพอลิเมอร์สำหรับการไหลเคลือบเส้นลวด.
(SLIP EFFECTS OF A POLYMERIC MATERIAL FOR WIRE-COATING FLOWS)
อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวางกูร, 86 หน้า.

การจำลองการไหลเคลือบเส้นลวดของของไหลวิสโคอีลาสติกได้ถูกนำมาพิจารณา
สำหรับกรณีการบวมตัวที่มีแรงลาก กรณีของตายแบบเพอร์ชเซอร์ทูลิ่ง และกรณีของตายแบบ
ทิวบ์ทูลิ่ง โดยการประยุกต์ใช้สมการเนเวียร์-สโตกส์ และสมการองค์ประกอบแพนเทียนแทน
เนอร์สำหรับตัวแบบของการไหลแบบช้าๆ การคำนวณตำแหน่งผิวอิสระทั้งแบบมีผลกระทบของ
ความเร็วลื่นไถลและไม่มีผลกระทบของความเร็วลื่นไถลได้ถูกวิเคราะห์ในระบบพิกัดทรงกระบอก
การคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลขหาได้จากระเบียบวิธีขั้นประกอบเซมิอิมพลีซิทีแกลอรัคิน
เพอร์ชเซอร์คอร์เรคชัน (Semi-implicit TGPC) ตามเวลา ผลเฉลยสำหรับการไหลอย่างช้าๆ ที่ไม่มี
การบีบอัดตัวใน 2 มิติได้นำมาเสนอโดยละแรงโน้มถ่วงของโลก ผลที่ได้จากการจำลองการไหล
เคลือบเส้นลวดนำไปเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่พิจารณาผลกระทบของการลื่นไถลที่ผนังตาย และ
ในงานวิจัยนี้ใช้วิธี เกรเดียนต์รีคัพเวอริความเร็วและวิธีสายกระแสอัปวิน/เพ็ทโทรฟ-กาเลอร์คิน
(SUPG) เข้าช่วยทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีความราบเรียบ และมีการปรับโครงข่ายของโดเมนที่ใช้ใน
การศึกษาหลังจากคำนวณค่าความเร็ว เพื่อทำนายเส้นทางผิวอิสระ พบว่าการลื่นไถลที่ผนังตายมี
ผลทำให้อัตราการบวมตัว ความเค้นเฉือน อัตราเฉือน อัตรายืด และความดันลดมีค่าลดลง เมื่อ
เปรียบเทียบกับปัญหาเดียวกันที่ไม่มีผลกระทบของการลื่นไถล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชา..... วิทยาการคณนา..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....
ปีการศึกษา..... 2554.....

5172364823 : MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEYWORDS : SLIP EFFECT / SLIP COEFFICIENT / DIE-SWELL / WIRE-COATING / PTT

PIYAMABHORN UTTAMUNG : SLIP EFFECTS OF A POLYMERIC MATERIAL FOR WIRE-COATING FLOWS.

ADVISOR : ASST. PROF. VIMOLRAT NGAMARAMVARANGGUL, Ph.D., , 86 pp.

The simulation of viscoelastic fluid for wire-coating flow has been considered for die-swell with drag, pressure- and tube-tooling cases via application of Navier-Stokes and Phan-Thien/Tanner constitutive equations for the creeping flow model. The computation of free surfaces after die with and without slip velocity at die wall is analyzed in a axisymmetric coordinate system. Numerical solutions are computed by a time marching semi-implicit Taylor-Galerkin pressure-correction finite element method (Semi-implicit TGPC). The solutions for axisymmetry incompressible creeping flow in the absence of body forces are presented. The wire-coating simulations are compared with the results of no slip input. This research uses the velocity gradient recovery and the streamline-upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) techniques to stabilize the converge solutions. The mesh beyond die is re-localized after velocity field and free surface calculations in order to predict free surface path. The slip velocity at die-wall reduces the swelling ratio, shear stress, shear rate, extensional rate and pressure drop when compare with the same problems with no-slip condition.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature

Field of Study : Computational Science..... Advisor's Signature

Academic Year : 2011.....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวางกูร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ สำหรับความกรุณาของท่านที่ได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา ต่างๆ ทั้งในด้านการศึกษา การทำงานวิจัย ตลอดจนสละเวลาอันสำคัญยิ่งของท่านในการตรวจสอบ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สาตราหา ประธานกรรมการ สอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุสรณ์ ขนวีระยุทธ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ อาจารย์ ดร.บำรุง พ่วงเกิด กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย ที่ได้ให้คำแนะนำ คำปรึกษา และความรู้ ตลอดจนการทำงานวิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์และถูกต้องยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ชิตชนก เหลือสินทรัพย์ รองศาสตราจารย์ ดร.สุชาดา ศิริพันธุ์ และศูนย์วิจัย Advanced Virtual and Intelligent Computing Center (AVIC) สำหรับความอนุเคราะห์ให้ใช้ศูนย์วิจัยและเครื่องคอมพิวเตอร์ Hewlett Packard Unix (HP-UX) ใน การทำงานวิจัยและประมวลผลจนสำเร็จลุล่วง

ขอขอบคุณคุณสายธาร เทนอิสสระ คุณก่อกิจ ธีราโมกษ์ และคุณนวลลักษณ์ ทองจับ ตลอดจนเพื่อนๆ ปริญญาโทวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกคน สำหรับคำปรึกษา คำแนะนำและความช่วยเหลือ ในการทำงานวิจัย

ท้ายที่สุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา พี่น้อง ครอบครัวทิพนันท์ และ ครอบครัวอุ้มมั่ง ที่คอยเป็นกำลังใจ ให้คำปรึกษา และช่วยเหลือสนับสนุนผู้วิจัยในทุกๆ ด้านมาโดย ตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูตาบูชา แต่บิดามารดา ครูอาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฌ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	5
1.2 วิธีดำเนินงานและขอบเขตของการวิจัย.....	5
1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	5
2 กลศาสตร์ของไหลและสมการพื้นฐาน.....	6
2.1 ประเภทของการไหล.....	6
2.2 กฎการอนุรักษ์.....	10
2.2.1 กฎการอนุรักษ์มวล.....	10
2.2.2 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม.....	12
2.3 การไหลแบบวิสโคเมตริก.....	13
2.3.1 การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย.....	13
2.3.2 การไหลแบบยืด.....	14
2.3.3 อัตราเฉือนและอัตราการดึง.....	17
2.4 สมการองค์ประกอบ.....	18
2.4.1 ตัวแบบแมกซ์เวลล์.....	18
2.4.2 ตัวแบบออลดรอยด์-ปี.....	19
2.4.3 ตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์.....	19
2.5 ระบบไร้หน่วย.....	21
3 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.....	24
3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ.....	24
3.2 ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับ.....	26
3.3 หลักการเขมิมิพลิซิทเทย์เลอร์กาลีเลอ์คินเพรชเซอร์คอร์เรคชัน.....	31
3.3.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการควบคุม.....	31
3.3.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการองค์ประกอบ.....	32
3.4 ระเบียบวิธีทำซ้ำจาโคบี.....	34
3.5 ระเบียบวิธีไฮเลสกี.....	35
3.6 ระเบียบวิธีทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน.....	36
3.7 หลักการสายกระแสฮอปวิน/เพ็ทโทรฟ-กาลีเลอ์คิน.....	37
3.8 เกรเดียนต์รีคัพเวอร์รี่.....	37
3.9 ตำแหน่งผิวอิสระ.....	38
3.10 ภาพฉายของผิวอิสระ.....	39
3.11 กฎการเลื่อนไหลแพนเทียน.....	40

บทที่	หน้า
3.12 เกณฑ์การลู่เข้า.....	41
4 การบวมตัวและการไหลเคลือบลวด.....	42
4.1 การบวมตัวของการไหลที่มีแรงลาก.....	42
4.1.1 ข้อกำหนดของปัญหา.....	42
4.1.2 ผลที่ได้รับ.....	43
4.2 การไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง.....	54
4.2.1 ข้อกำหนดของปัญหา.....	54
4.2.2 ผลที่ได้รับ.....	55
4.3 การไหลเคลือบลวดชนิดทิวบ์ทูลิ่ง.....	63
4.3.1 ข้อกำหนดของปัญหา.....	63
4.3.2 ผลที่ได้รับ.....	64
5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.....	74
5.1 สรุปผลงานวิจัย.....	74
5.2 ข้อจำกัดและเงื่อนไขของงานวิจัย.....	74
5.3 ข้อเสนอแนะ.....	75
รายการอ้างอิง.....	76
ภาคผนวก ก การไหลแบบวงแหวน.....	81
ภาคผนวก ข เงื่อนไขขอบที่ทางเข้าตายสำหรับความเค้น.....	83
ภาคผนวก ค การแสดง $(\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^{\square} + \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} = \vec{D} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \vec{D}$	84
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	86

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
3.1	แสดงค่าพิกัดในแกนหลักของชั้นประกอบสามเหลี่ยมแบบ 6 โหนด.....	38
4.1	ข้อมูลรายละเอียดชิ้นประกอบย่อยของปัญหาการบวมตัวของการไหลที่มีแรงลาก.....	43
4.2	เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการบวมตัวของการไหลที่มีแรงลากที่ไม่พิจารณาการสิ้น ไหลที่ผนังตาย และพิจารณาการสิ้นไหลที่ผนังตาย.....	53
4.3	ข้อมูลรายละเอียดชิ้นประกอบย่อยของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง.....	54
4.4	เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งและปัญหาการ บวมตัวของการไหลที่มีแรงลาก.....	62
4.5	ข้อมูลรายละเอียดชิ้นประกอบย่อยของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่ง.....	66
4.6	เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่งและเพรชเซอร์ทูลิ่ง....	72

สารบัญญภาพ

ภาพที่		หน้า
1.1	แสดงลักษณะตายแบบเพรชเซอร์ทูลิ่ง.....	1
1.2	แสดงลักษณะตายแบบทิวบ์ทูลิ่ง.....	2
2.1	ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนของของไหลทิกโอโทรปิค.....	7
2.2	ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนของของไหลรีโอเพคติก.....	8
2.3	ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนสำหรับของไหลนิวโตเนียนและของไหลนอนนิวโตเนียนที่มีความหนืดไม่ขึ้นกับเวลา.....	9
2.4	ปริมาตรควบคุมสำหรับกฎการอนุรักษ์มวลในระบบพิกัดทรงกระบอก.....	10
2.5	ความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดยืดดึงและอัตราการดึงของพอลิเมอร์หลอมเหลวในการไหลแบบยืด.....	15
3.1	แสดงโดเมนย่อยสำหรับระเบียบวิธีผลต่างอันดับ.....	24
3.2	การแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบย่อยแบบต่างๆ.....	27
3.3	ชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม 6 โหนด และตัวแปรไม่รู้ค่าที่แต่ละโหนด.....	27
3.4	แสดงชั้นประกอบของการบวมตัว.....	39
3.5	แสดงการปรับค่าความเร็วที่ตำแหน่งผิวอิสระ.....	40
4.1	แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการบวมตัวของสารไหลที่มีแรงลาก.....	42
4.2	ลักษณะปัญหาการบวมตัวของสารไหลที่มีแรงลาก.....	43
4.3	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของสารไหลที่มีแรงลากที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่บริเวณผนังตาย.....	44
4.4	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$	45
4.5	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $II_{crit} = 100$	48
4.6	ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรผันอันดับที่สองที่มากที่สุดบริเวณภายในตายและบริเวณปลายตาย....	50
4.7	ปัญหาการบวมตัวของสารไหลที่มีแรงลาก: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี.....	51
4.8	แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง.....	54
4.9	ลักษณะปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง.....	54
4.10	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของสารไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่บริเวณผนังตาย.....	55
4.11	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$	56
4.12	ค่าความแปรผันอันดับที่สองสูงสุด เมื่อกำหนด $II_{crit} = 9000$ และแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การเลื่อนไหล.....	58
4.13	ปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี.....	60
4.14	แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่ง.....	63
4.15	ลักษณะปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่ง.....	63
4.16	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของสารไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่งที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่บริเวณผนังตาย.....	64
4.17	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$	65
4.18	ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $II_{crit} = 2000$	67
4.19	ปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดทิวบ์ทูลิ่ง: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี.....	70
ก.1	การไหลแบบวงแหวน.....	81

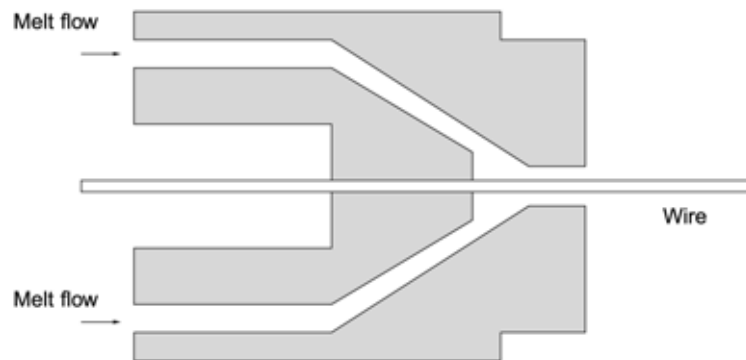
บทที่ 1

บทนำ

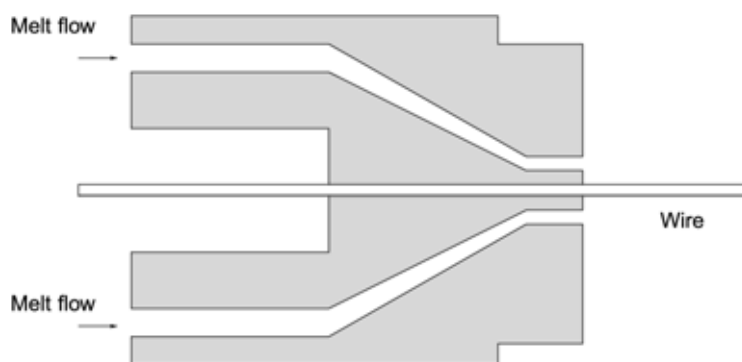
(Introduction)

ปัจจุบันนี้ทุกบ้านทุกครัวเรือนมีการใช้ภาชนะใส่อาหารที่ทำจากพลาสติกเป็นจำนวนมาก รวมถึงถุงพลาสติกที่ใช้ในร้านค้าเพื่อนำอาหารกลับบ้าน นอกจากนี้ยังมีการผลิตท่อพีวีซีที่ใช้ในการส่งน้ำประปาไปตามบ้านเรือนทุกครัวเรือน และการใช้ไฟฟ้าผ่านลวดสายไฟ ซึ่งชิ้นงานเหล่านี้ได้มาจากกระบวนการขึ้นรูปพอลิเมอร์ (polymer processing) โดยนำพอลิเมอร์หลอมเหลวมาผลิตเป็นชิ้นงานต่างๆ ผ่านกระบวนการขึ้นรูปพอลิเมอร์ที่ใช้ในโรงงานอุตสาหกรรมหลายกระบวนการด้วยกัน เช่น การฉีด (injection) การเป่า (blowing) การหล่อขึ้นรูป (moulding) และการอัดรีด (extrusion) สำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดในกระบวนการอัดรีดเป็นปัญหาที่นำมาพิจารณาในงานวิจัยนี้ เริ่มจากการใส่เม็ดพลาสติกเข้าในเครื่องอัดรีด จากนั้นเกลี่ยวนในเครื่องอัดจะหมุนเพื่อให้เม็ดพลาสติกเกิดการเสียดสีกันจนเกิดความร้อนส่งผ่านไปยังเม็ดพลาสติกอื่นๆ ทำให้เม็ดพลาสติกละลายกลายเป็นพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลเคลื่อนที่ผ่านแม่พิมพ์ (die) แล้วเกิดการบวมตัว ซึ่งการบวมตัวมีลักษณะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับความเร็วของพอลิเมอร์หลอมเหลว ถ้าความเร็วนั้นมีค่ามากก็จะนำไปสู่พฤติกรรมของการเสียรูปทรงของพอลิเมอร์ (melt fracture) หรือลักษณะรอยฟันฉลาม (sharkskin) ที่บริเวณผิวของชิ้นงาน

แม่พิมพ์ที่ใช้ในกระบวนการอัดรีดของการเคลือบลวดสายไฟมี 2 ลักษณะ คือ แบบเพรชเซอร์ทูลลิง (pressure-tooling) และแบบทิวบ์ทูลลิง (tube-tooling) สำหรับการเคลือบลวดสายไฟแบบเพรชเซอร์ทูลลิง พอลิเมอร์หลอมเหลวจะไหลมาเคลือบลวดภายในตายและผิวอิสระของลวดสายไฟที่เคลือบด้วยพอลิเมอร์จะบวมตัวหลังออกจากตาย ซึ่งตายประเภทนี้จะใช้กับการเคลือบลวดสายไฟเปลือยหรือลวดสายไฟขนาดเล็ก ดังรูปที่ 1.1 ส่วนการเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบ์ทูลลิง พอลิเมอร์หลอมเหลวจะไหลมาเคลือบเส้นลวดนอกตายและเกิดการบวมตัวก่อนที่จะตกกระทบมาเคลือบลวดสายไฟ ดังรูปที่ 1.2 และตายทิวบ์ทูลลิงนี้ใช้สำหรับการเคลือบลวดสายไฟขนาดใหญ่ หรือการเคลือบรวมลวดสายไฟเส้นเล็กๆหลายเส้นรวมเป็นเส้นเดียวกัน ดังนั้นลวดสายไฟแบบต่างๆ ที่ได้จากกระบวนการเคลือบลวดสายไฟแบบอัดรีดจึงเป็นที่ต้องการอย่างมากของตลาด ทำให้โรงงานผลิตลวดสายไฟมีความต้องการผลิตลวดสายไฟออกมาให้มีปริมาณมากในราคาถูกเพื่อตอบสนองความต้องการ



รูปที่ 1.1 แสดงลักษณะตายแบบเพรชเซอร์ทูลลิง



รูปที่ 1.2 แสดงลักษณะตายแบบทิวบ์ทูลิ่ง

ของตลาด แต่ยังคงคุณภาพความคงทนของผลิตภัณฑ์ จึงเป็นเหตุให้โรงงานทั้งหลายต้องหาวัสดุใหม่ๆ ในราคาถูกลงมาทดแทน แต่เนื่องจากการทดลองจริงที่ใช้ในการหาวิธีที่เหมาะสมสำหรับการผลิตลวด สายไฟ รวมถึงการเลือกใช้ชนิดของพอลิเมอร์ที่นำมาเคลือบและการออกแบบตายต้องใช้เวลาในการ ทดลองนานและเสียค่าใช้จ่ายสูง เพื่อเป็นการประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายจึงใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ในการจำลองปัญหาการไหลเคลือบลวดสายไฟขึ้นและใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย เพื่อ ช่วยในการทำนายการไหลเคลือบเส้นลวด หาชนิดพอลิเมอร์ที่เหมาะสมรวมถึงตายที่ใช้ใน กระบวนการอัดรีด และเนื่องจากการศึกษานี้เป็นการศึกษาเชิงอุตสาหกรรมจึงมีผู้สนใจศึกษากันอย่าง แพร่หลาย โดยในปีค.ศ.1970 Richardson [1] เริ่มต้นศึกษาปัญหาแบบสถิต-สถิตของของไหลนิวโต เนียนในกระบวนการอัดรีด โดยการไหลเป็นการไหลแบบช้าๆ (creeping flow) ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าไม่มี แรงตึงผิว (surface tension) ที่ผิวอิสระมาก และไม่พิจารณาแรงโน้มถ่วง (no gravity) จาก การศึกษาของเขาพบว่าที่บริเวณออกจากตายจะมีค่าความเค้นเฉือนสูงจึงเรียกจุดนี้ว่าจุดเอกฐาน (singular point) ซึ่งที่จุดนี้จะมีความเร็วของการไหลและแรงเข้ากระทำสูง ในปีเดียวกัน Tanner [2] ศึกษาปัญหาการบวมตัวของบริเวณที่ออกจากตายของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติกเพื่อ ประมาณค่าตำแหน่งของสายกระแสที่บริเวณผิวอิสระในกระบวนการอัดรีด โดยเปรียบเทียบผลที่ได้ จากการคำนวณเชิงตัวเลขหลายๆ วิธีและผลการทดลอง ต่อมาในปีค.ศ.1974 Nickell และคณะ [3] ได้ศึกษาปัญหาการบวมตัวของของไหลนอนิวโตเนียนที่มีการไหลแบบช้าๆ โดยใช้ระเบียบวิธีขึ้น ประกอบอันตะในการหาผลเฉลยของผิวอิสระ และเปรียบเทียบปัญหาสถิต-สถิตกับปัญหาการบวมตัว การศึกษาปัญหาการบวมตัวโดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะจึงได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก โดย ในปีค.ศ.1979 Chang และคณะ [4] ได้ใช้วิธีเศษทศกัณฑ์แบบวิธีการจัด (collocation method) และ วิธีกาลเลอร์คิน (Galerkin's method) สำหรับระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการศึกษาปัญหาการ บวมตัวของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก ในปีค.ศ.1980 และ 1982 Crochet และ Keuning [5,6] ศึกษาการบวมตัวที่ปลายตายของของไหลนิวโตเนียนและของไหลนอนิวโตเนียนโดย ใช้ตัวแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwell model) และใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการหาผลเฉลย และเปลี่ยนสมการองค์ประกอบเป็นตัวแบบออลดรอยด์-ปี [7] ในปีค.ศ.1991 Beverly และ Tanner [8] ได้ใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะกับปัญหาในกระบวนการอัดรีดของของไหลนิวโตเนียน โดยศึกษาในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดรูปทรงกระบอกสามมิติ

การศึกษาปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดเริ่มขึ้นในปีค.ศ.1978 Caswell และ Tanner [9] ได้ทำการศึกษาลักษณะของสายที่ใช้เคลือบลวดสายไฟโดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ ต่อมาในปีค.ศ.1986 และ 1988 Mitsoulis และคณะ [10,11] ได้ศึกษาการไหลเคลือบเส้นลวดสายไฟความเร็วสูงกับโพลีเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (low-density polyethylene, LDPE) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขขึ้นประกอบอันตะและทำการปรับผลเฉลยให้ราบเรียบด้วยเทคนิคสายกระแสอัปวิน/เพ็ทโทรฟ-กาเลอร์คิน (streamline-upwind/Petrov-Galerkin technique, SUPG) โดยอาศัยตัวแบบพาวเวอร์ลอว์ (power law model) ภายใต้สมมติฐานทั้งที่อุณหภูมิคงที่และไม่คงที่ ซึ่งทำการเปรียบเทียบผลกับการทดลอง ต่อมาในปีค.ศ.1996 Gunter และคณะ [12] ได้พิจารณาการไหลแบบยึดของของไหลวิสโคอีลาสติกด้วยตัวแบบองค์ประกอบชนิดออลดรอยด์-บี (Oldroyd-B constitutive model) และชนิดแพนเทียนแทนเนอร์ (Phan-Thien/Tanner constitutive model, PTT) ใน 3 ลักษณะ คือ การไหลแบบซิงค์ (sink flow) การไหลที่มีผิวอิสระลาดเอียง (model draw-down) และการไหลแบบลาดเอียง (conical section draw-down) ซึ่งการไหลทั้ง 3 ลักษณะนี้เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบูลลิง (tube-tooling) และในปีค.ศ.1998 Mutlu และคณะ [13] ได้ศึกษาในส่วนของกระบวนการเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบูลลิง (tube-tooling) ซึ่งเป็นการไหลเคลือบลวดสายไฟของของไหลประเภทวิสโคอีลาสติก เมื่อระบบมีอุณหภูมิเท่ากัน (non-isothermal) ด้วยวิธี couple และ decouple และในปีค.ศ.1998 Matallah และคณะ [14] ได้ศึกษาโดยใช้ตัวแบบองค์ประกอบชนิดแพนเทียนแทนเนอร์ โดยพิจารณาทั้งแบบค่าเวลาผ่อนคลาย (relaxation time) ค่าเดียว (single mode) และแบบหลายค่า (multi-mode) เพื่อทำนายพฤติกรรมของการไหลเคลือบลวดสายไฟในเครื่องมือแบบทิวบูลลิง ภายใต้สมมติฐานที่ว่าของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) อุณหภูมิไม่มีการเปลี่ยนแปลง (isothermal flow) และไม่มีผลกระทบของการลื่นไถล (no slip) ที่บริเวณผนังภายในตาย ต่อมาในปีค.ศ.2010 Ngamaramvaranggul และ Thenissara [15] ได้ทำการศึกษาต่อโดยคำนวณหาพื้นผิวอิสระทั้งระนาบด้านบนและด้านล่างของการไหลเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบูลลิง เพื่อวิเคราะห์หาจุดคอนแทรกชัน (contraction point) ซึ่งเป็นจุดแรกที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากดาวยมาปะทะลวดสายไฟที่ต้องการเคลือบ

จากการศึกษาปัญหาการบวมตัวและปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวด พบว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีค่าคลาดเคลื่อนจากผลการทดลองจริง เนื่องจากการคำนวณที่ให้ผลว่าแรงที่ใช้ผลักของไหลมีค่ามากจะทำให้เกิดการบวมตัวมาก แต่จากการทดลองจริงพบว่าการบวมตัวไม่ได้มีค่าสูงขึ้นดังการคำนวณนั้น และในความเป็นจริงความเร็วของของไหลที่บริเวณผนังภายในตายไม่ได้มีค่าเป็นศูนย์จริง หรือกล่าวคือโดยธรรมชาติแล้วอนุภาคของของไหลที่อยู่ติดกับผนังนั้นก็เคลื่อนที่ด้วยความเร็วค่าหนึ่งเช่นกัน จากแนวความคิดนี้จึงทำให้เกิดการศึกษาปัญหาการลื่นไถลขึ้นโดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังตายให้ความเร็วของของไหลไม่เป็นศูนย์ โดยเริ่มต้นในปีค.ศ.1980 Silliman และ Scriven [16] ศึกษาปัญหาการไหลของของไหลนิวโตเนียนโดยใช้แนวความคิดที่ว่า การลื่นไถลและแรงตึงผิวมีผลต่อผิวอิสระของของไหล ต่อมาในปีค.ศ.1988 Phan-Thien [17] นำผลการทดลองของ Ramamurthy [18] ที่ศึกษาปัญหาการลื่นไถลไว้ในปีค.ศ.1986 มาศึกษาต่อโดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบขอบด้วยตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ผลการศึกษาพบว่าความเค้นที่บริเวณผนังตายมีค่าสูงมากและความเร็วลื่นไถลนั้นมีผลต่ออัตราการบวมตัวของของไหล ปี

ค.ศ.1992 Hatzikirakos และ Dealy [19] ได้ศึกษาการลื่นไหลในกระบวนการอัดรีดของของไหลพอลิเอธิลีนที่มีความหนาแน่นสูง (high density polyethylene, HDPE) จากผลการศึกษาของเขาได้ว่าการลื่นไหลที่บริเวณผนังตายมีอิทธิพลต่อผิวอิสระของของไหลที่ออกจากตายเป็นอย่างมาก โดยพบว่าเมื่อค่าความเค้นเฉือนสูงถึงค่าหนึ่งจะทำให้ผิวอิสระของของไหลเกิดลักษณะเป็นรอยฟันฉลาม (sharkskin) และเมื่อสูงมากขึ้นเกินระดับหนึ่งจะทำให้ผิวอิสระของของไหลนั้นเกิดการเสีรูปร่างไป (melt fracture) และต่อมาในปีค.ศ.1998 Den Doelder และคณะ [20] ได้ศึกษาผนังตายที่มีการลื่นไหลสำหรับตัวแบบต่างๆ ของสมการองค์ประกอบของพอลิเมอร์หลอมเหลว ในปีค.ศ.2000 Ngamaramvaranggul และ Webster [21] ได้ใช้ขั้นตอนวิธีเทอร์กาเลอร์คินและระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการศึกษาปัญหาสถิต-สลิปและปัญหาการบวมตัวของของไหลนิวโตเนียน นอกจากนี้ยังศึกษาปัญหาการบวมตัวของของไหลนอนนิวโตเนียนด้วยตัวแบบออลดรอยด์-บี หลังจากนั้นอีก 2 ปีต่อมา Ngamaramvaranggul และ Webster [22,23] ได้ศึกษาปัญหาการไหลเคลือบหลอดสายไฟแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งและแบบทิว์ทูลิ่งของของไหลวิสโคอีลาสติกด้วยตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ เพื่อคำนวณหาพื้นผิวอิสระบริเวณระนาบด้านบน และพบว่าของไหลวิสโคอีลาสติกที่มีความหนืดสูงจะมีอัตราการบวมตัวสูง

สำหรับงานวิจัยนี้จะจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดด้วยสมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ เพื่อทำนายผิวอิสระที่มีผลกระทบจากการลื่นไหลหลังจากพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากตาย และหาผลเฉลยของปัญหาที่จำลองขึ้นโดยใช้หลักการเชิงตัวเลขที่เรียกว่า ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (finite element method) โดยคำนึงถึงปัจจัยต่างๆ ที่มีผลต่อผิวอิสระ เช่น ความดัน ความเร็ว ความหนืดของพอลิเมอร์หลอมเหลว ความเร็วของเส้นลวด และความเร็วของพอลิเมอร์ที่ผนังตาย ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) ของไหลราบเรียบ (laminar flow) ระบบมีอุณหภูมิเท่ากัน (isothermal system) ไม่ขึ้นกับเวลา (steady state) และไม่พิจารณาผลของแรงโน้มถ่วง (no gravity) โดยมีเนื้อหาต่อกันจากบทนี้ อีก 4 บท ดังนี้

บทที่ 2 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานของกลศาสตร์ของไหลด้านต่างๆ ประเภทของการไหลที่จำแนกด้วยหลักเกณฑ์ต่างๆ ประเภทของของไหลแบบนิวโตเนียนและแบบนอนนิวโตเนียน อธิบายเกี่ยวกับสมการควบคุมที่ได้มาจากกฎการอนุรักษ์มวลและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการองค์ประกอบที่ใช้อธิบายสมบัติของของไหลที่นำมาพิจารณาในงานวิจัยนี้ รวมไปถึงการแปลงสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบให้อยู่ในระบบไร้หน่วยเพื่อนำไปใช้ในการหาผลเฉลย

บทที่ 3 กล่าวถึงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำมาใช้ในการหาผลเฉลย เช่น ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะและหลักการเคมีอิมพลิซิท์เทอร์กาเลอร์คินเพรชเซอร์คอร์เรคชันที่ใช้ในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ระเบียบวิธีทำซ้ำจาโคบีที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของความเร็วและความเค้น ระเบียบวิธีโซเลสกีที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของความดัน หลักการสายกระแสฮัพวิน/เพ็ทโทรฟ-กาเลอร์คินในการปรับความราบเรียบของผิวอิสระ รวมไปถึงเกรเดียนต์รีคัพเวอร์ในการปรับค่าผลเฉลยให้มีความถูกต้องและแม่นยำ

บทที่ 4 กล่าวถึงการศึกษาผลกระทบของการลื่นไหลของของไหลวิสโคอีลาสติกด้วยตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์กับปัญหาการบวมตัวของของไหลที่มีแรงดึง การไหลเคลือบเส้นลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง การไหลเคลือบเส้นลวดชนิดทิว์ทูลิ่ง

บทที่ 5 กล่าวถึงผลสรุปของการวิจัย รวมไปถึงข้อจำกัดและเงื่อนไขต่างๆ ในการศึกษา งานวิจัย และข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษางานวิจัยต่อไปในอนาคต

1.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย (Objective)

จำลองปัญหาการบวมตัวและการลื่นไถลของของไหลวิสโคอีลาสติก และจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดในขั้นตอนกระบวนการอัดรีดด้วยตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์ เพื่อทำนายผิวอิสระที่มีผลกระทบจากการลื่นไถลของการไหลเคลือบเส้นลวดในกระบวนการอัดรีด

1.2 วิธีการดำเนินงานและขอบเขตของการวิจัย (Procedure and outline)

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานพลศาสตร์ของไหล
2. ศึกษาระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ
3. พัฒนาระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวด
4. จำลองปัญหาและพัฒนาโปรแกรม
5. ทดสอบโปรแกรม แก้ไขข้อผิดพลาดในการคำนวณ และปรับปรุงผลที่ได้รับ
6. วิเคราะห์สรุปผลที่ได้ และเขียนวิทยานิพนธ์

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ (Profit)

1. ทำให้เกิดความเข้าใจลักษณะทางกายภาพของของไหลวิสโคอีลาสติก และการไหลเคลือบเส้นลวด
2. สามารถจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดที่มีผลกระทบจากการลื่นไถลด้วยตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์

บทที่ 2

กลศาสตร์ของไหลและสมการพื้นฐาน (Fluid Mechanics and Basic Equation)

การศึกษากลศาสตร์ของไหลเป็นการศึกษาสถิตศาสตร์ของไหล (fluid statics) และพลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) การศึกษาสถิตศาสตร์ของไหลหรือเรียกว่าไฮดรอสแตติกส์ (hydrostatics) เป็นการศึกษาของไหลที่อยู่นิ่งหรือในภาวะสมดุล รวมทั้งศึกษาเงื่อนไขของของไหลในภาวะสมดุล และการนำของไหลไปใช้งาน เช่น ไฮดรอลิก (hydraulics) ส่วนการศึกษาพลศาสตร์ของไหลเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีแรงเข้ากระทำและแรงที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของของไหล นอกจากนี้ยังมีการศึกษาอีกศาสตร์ที่เรียกว่ารีโอโลยี (rheology) ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ใช้อธิบายการไหลของของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของไหลไปตามภาชนะที่บรรจุ รวมเข้ากับแนวความคิดทฤษฎีหลักของจลนศาสตร์ (kinematics) โดยพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลและไมคำนึงถึงแรงเข้ากระทำ แต่จะพิจารณาเรื่องของอนุภาค สายกระแส ความเร็ว อัตราเร่ง รวมถึงชนิดของการไหลประเภทต่างๆ แนวความคิดทฤษฎีอีกส่วนคือ กฎการอนุรักษ์ (conservation law) อันได้แก่การอนุรักษ์แรง ความเค้น และพลังงาน แนวความคิดทฤษฎีส่วนสุดท้ายคือ สมการองค์ประกอบ (constitutive equation) ซึ่งจะกล่าวเกี่ยวกับพฤติกรรมและลักษณะของของไหล

2.1 ประเภทของการไหล (Classification of flow)

เมื่อพิจารณาการไหลของของไหล พบว่าการไหลมีรูปแบบลักษณะหลายแบบขึ้นกับปัจจัยของสิ่งแวดล้อม และสมบัติของของไหล ดังนั้นจึงจำแนกการไหลได้หลายแบบตามเกณฑ์ ดังนี้

2.1.1 จำแนกการไหลตามการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหล ได้เป็น 2 ประเภท คือ การไหลที่บีบอัดตัวได้ (compressible flow) และการไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ (incompressible flow) เมื่อพิจารณาของไหลออกเป็นของเหลวและแก๊สแล้วพบว่าการไหลของแก๊สเป็นการไหลที่บีบอัดตัวได้ นั่นคือความหนาแน่นของของไหลมีการเปลี่ยนแปลง แต่มีข้อยกเว้นในกรณีที่มีการไหลของแก๊สมีอัตราความเร็วต่ำกว่าเสียงมากๆ จึงพิจารณาการไหลของแก๊สเป็นการไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ ส่วนการไหลของของเหลวเป็นการไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ยกเว้นบางสภาวะของของเหลว เช่น การเกิดโพรงในของเหลว หรือการระเหยตัวของน้ำ พบว่าการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของเหลวมีผลต่อการไหลจึงพิจารณาการไหลเป็นการไหลที่บีบอัดตัวได้

2.1.2 จำแนกการไหลตามระดับความเร็วของการไหล ได้เป็น 2 แบบ คือ การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) เป็นการไหลที่ของไหลในชั้นของไหลหนึ่งๆ จะเคลื่อนที่ไปในชั้นของไหลนั้นตลอดการไหล อนุภาคจะเคลื่อนที่ในทิศทางแน่นอนและไม่มีการตัดกันของอนุภาค เมื่อเกิดการสั่นไถลของชั้นของไหลหนึ่งบนอีกชั้นของไหลหนึ่งจะไม่เกิดการหมุนวน และอีกแบบคือการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ซึ่งมีอัตราความเร็วในการไหลสูง อนุภาคของของไหลไม่เป็นระเบียบและมีการเคลื่อนที่ในทิศทางไม่แน่นอน

2.1.3 จำแนกการไหลตามประเภทความหนืด การไหลที่มีความหนืด (viscous flow) คือ การไหลที่มีความเร็วขึ้นอยู่กับแรงเสียดทานที่เกิดขึ้น เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือน (shear stress, τ) กับอัตราเฉือน (shear rate, $\dot{\gamma}$) ตามสมการความหนืดของนิวตัน (Newton's equation of viscosity) ดังนี้

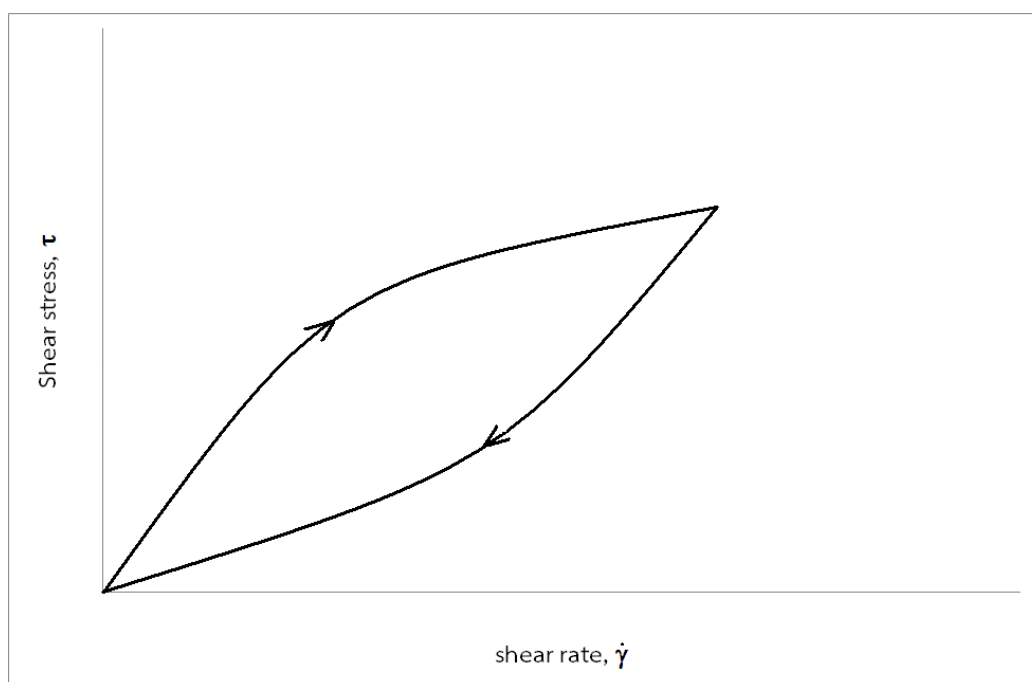
$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

เมื่อ μ คือ ความหนืดเฉือน (shear viscosity) มีค่าคงตัวเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราเฉือน

ของไหลแบ่งตามความหนืดได้เป็น 2 ประเภท คือ ของไหลที่เป็นไปตามสมการความหนืดของนิวตันเรียกว่า ของไหลนิวโตเนียน (Newtonian fluid) ได้แก่ ของไหลที่มีโมเลกุลขนาดเล็ก เช่น น้ำ น้ำมัน สารละลายเจือจาง เป็นต้น ส่วนของไหลที่มีสมบัติไม่เป็นไปตามสมการความหนืดของนิวตัน กล่าวคือ ความหนืดเฉือนเปลี่ยนไปเมื่อมีการเปลี่ยนอัตราเฉือน เรียกว่า ของไหลนอนนิวโตเนียน (non-Newtonian fluid) พิจารณาความหนืดของของไหลนอนนิวโตเนียนเทียบกับเวลาตาม Tanner [2] และ Morton-Jones [24] จะแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

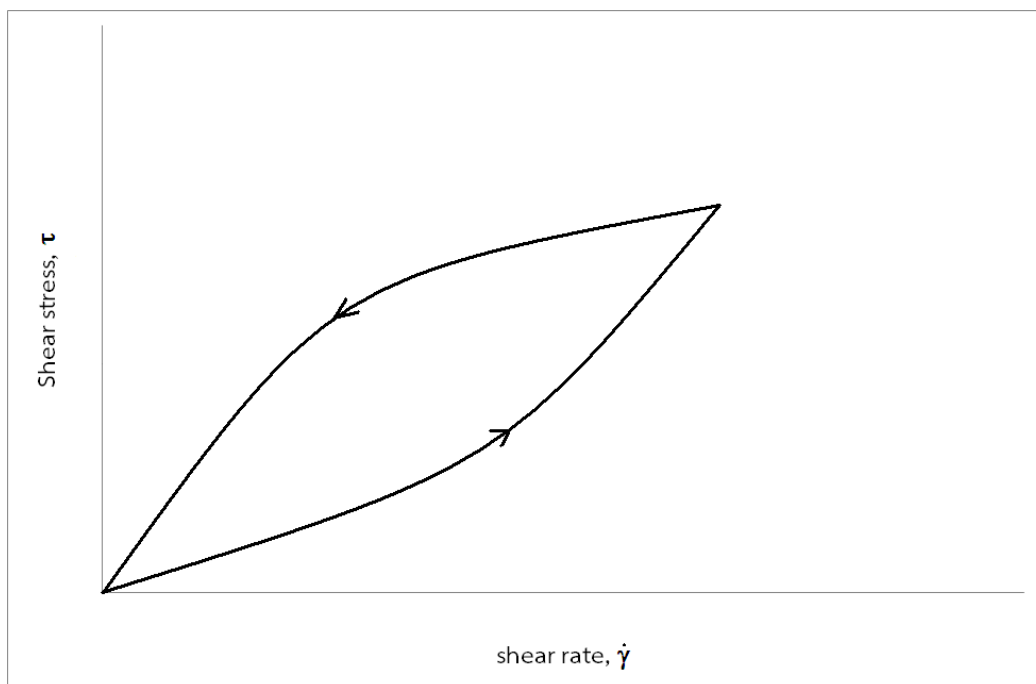
1. ของไหลนอนนิวโตเนียนที่ขึ้นกับเวลา (time-dependent non-Newtonian fluid) ได้แก่

- ของไหลทิกโอโทรปิก (thixotropic fluid) ซึ่งมีความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนเป็นไปตามเวลา เมื่อแรงกระทำต่อของไหลประเภทนี้นานขึ้น ความหนืดเฉือนจะมีค่าลดลงจนเข้าสู่ค่าคงตัวค่าหนึ่ง เนื่องจากความเครียดเฉือนที่เพิ่มขึ้นไปทำลายพันธะยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลหรืออนุภาคของของไหลจึงทำให้ความหนืดมีค่าลดลง แต่เมื่อหยุดการให้แรงกระทำพบว่าอนุภาคของของไหลเริ่มจับตัวกันและทำให้ความหนืดมีค่าเพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 2.1 พบว่าค่าความเค้นเฉือนที่อัตราเฉือนค่าหนึ่ง ระหว่างการเพิ่มอัตราเฉือนขึ้นมาให้ถึงค่านั้น จะมีค่ามากกว่าความเค้นเฉือนในระหว่างการลดอัตราเฉือนให้ลงมาถึงค่านั้น



รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนของของไหลทิกโอโทรปิก

- ของไหลรีโอเพคติก (rheopectic fluid) เป็นของไหลที่คล้ายคลึงกับของไหลทิกโอโทรปิก แต่ต่างกันตรงค่าความเค้นเฉือนในขณะที่เพิ่มอัตราเฉือนมีค่าน้อยกว่าความเค้นเฉือนในขณะลดอัตราเฉือน เมื่อเปรียบเทียบที่อัตราเฉือนเดียวกัน ดังรูปที่ 2.2 กล่าวคือ ของไหลประเภทนี้จะมี ความหนืดเฉือนเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าคงตัวค่าหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปจนทำให้แรงกระทำต่อของไหลนั้นเพิ่มขึ้น



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนของของไหลรีโอเพคติก

2. ของไหลนอนนิวโตเนียนที่ไม่ขึ้นกับเวลา (time-independent non-Newtonian fluid) เป็นของไหลที่มีความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนไม่ขึ้นกับเวลาเมื่อมีแรงมากระทำ โดยอัตราเฉือนสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{du}{dy} = \dot{\gamma} = f(\tau) \quad (2.2)$$

จากสมการ (2.2) จะพบว่าอัตราเฉือนเป็นฟังก์ชันของความเค้นเฉือน ซึ่งมีรูปแบบของฟังก์ชันแบ่งได้เป็น 3 กลุ่มใหญ่ๆ ดังนี้

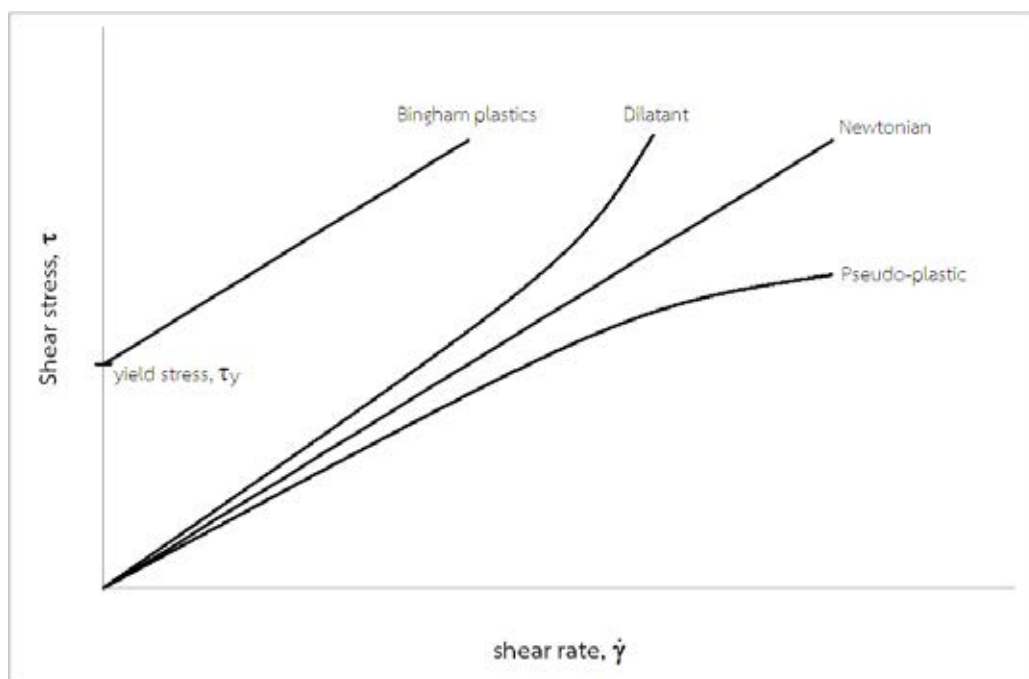
กลุ่มที่ 1 พลาสติกบิงแฮม (Bingham plastics) เป็นของไหลที่มีแรงมากระทำสูงถึงค่าหนึ่งที่เราเรียกว่า ความเค้นจุดคราก (yield stress, τ_y) แล้วทำให้พฤติกรรมการไหลเหมือนของไหลนิวโตเนียน ดังรูปที่ 2.3 หรือแสดงความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนได้ตามสมการดังต่อไปนี้

$$\tau - \tau_y = \mu_p \dot{\gamma}, \quad \tau > \tau_y \quad (2.3)$$

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \tau < \tau_y$$

โดยที่ μ_p คือ ความหนืดของพลาสติก

ตัวอย่างของไหลในกลุ่มนี้ คือ ยาสีฟัน ซอสมะเขือเทศ จาระบี ไขมันสัตว์ สีนํ้ามัน และโคลน เป็นต้น



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือนสำหรับของไหลนิวโตเนียนและของไหลนอนนิวโตเนียนที่มีความหนืดไม่ขึ้นกับเวลา

กลุ่มที่ 2 ซูโดพลาสติก (pseudo-plastic or shear-thinning fluid) เป็นของไหลที่มีอัตราเฉือนเพิ่มขึ้น เมื่อความหนืดลดลง หรือยิ่งกววนเร็วยิ่งไหลง่าย เช่น น้ำผลไม้เข้มข้น กาวน้ำใส พอลิเมอร์ที่ได้จากธรรมชาติ พอลิเมอร์หลอมเหลว เป็นต้น สมการทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการทดลองที่ใช้แสดงสมบัติความเค้นของของไหลกลุ่มนี้ คือ

$$\tau = k|\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma} \quad (2.4)$$

เรียกสมการ (2.4) ว่า ตัวแบบพาวเวอร์-ลอว์ ที่มีดัชนีการไหล (power law index) n เป็นค่าคงตัวที่มีค่าน้อยกว่า 1 และค่าคงตัวการไหล (consistency constant) k เป็นค่าคงตัวที่แสดงความหนืด (viscous) ถ้า k มีค่ามากแสดงว่าของไหลมีความหนืดมาก นอกจากตัวแบบพาวเวอร์-ลอว์แล้วยังมีตัวแบบอื่นๆ ที่ใช้ ได้แก่ ตัวแบบบอลดรอยด์-ปี ตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ เป็นต้น ดังรายละเอียดในหัวข้อ 2.4

กลุ่มที่ 3 ไดเลแทนท์ (dilatant or shear-thickening fluid) เป็นของไหลที่มีอัตราเฉือนเพิ่มขึ้น เมื่อความหนืดเพิ่มขึ้น หรือยิ่งกววนเร็วยิ่งหนืด เนื่องจากแรงที่เข้ากระทำต่อของไหลทำให้พันธะระหว่างโมเลกุลของของไหลรวมตัวเข้าด้วยกันหรือเกี่ยวพันกันหนาแน่นขึ้น ตัวอย่างของไหลในกลุ่มนี้ คือ น้ำแป้ง น้ำดินชั้น เจลพิวซี เป็นต้น พฤติกรรมความเค้นของของไหลกลุ่มนี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ (2.4) เช่นเดียวกับของไหลซูโดพลาสติก เพียงแต่ใช้ค่าคงตัว n ที่มากกว่า 1

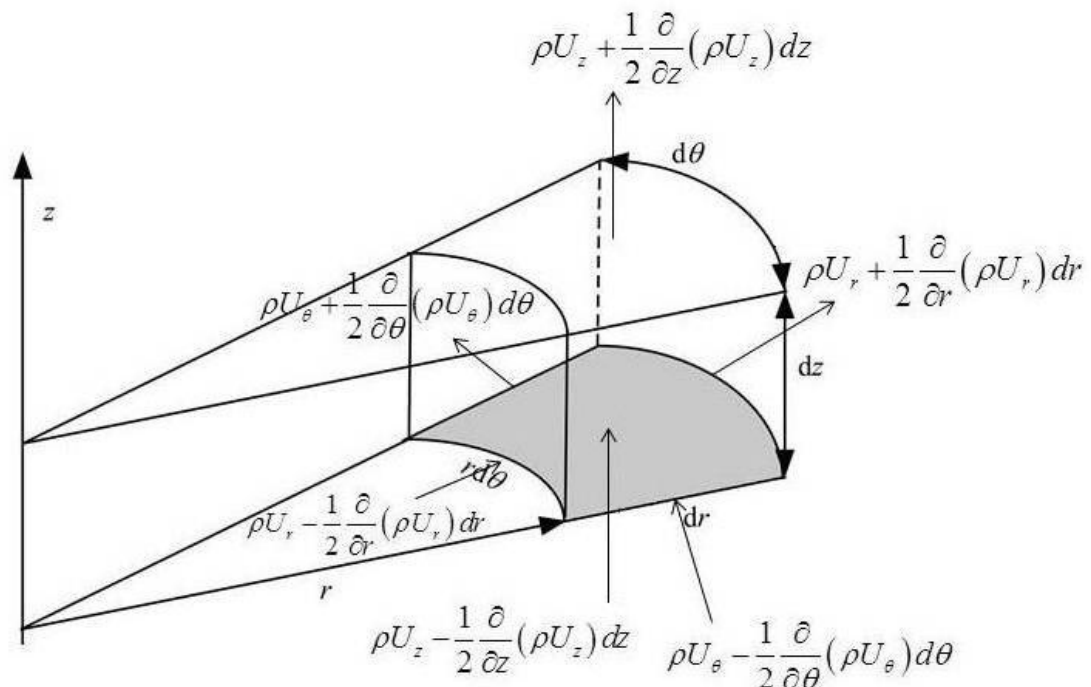
2.1.4 จำแนกการไหลตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา แบ่งเป็น 2 แบบ คือ การไหลในสภาวะคงตัว (steady flow) จะเป็นการไหลในสภาวะที่ค่าเฉลี่ยของความเร็ว ความดัน หรือพารามิเตอร์ของการไหลต่างๆ ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ตรงกันข้ามกับการไหลในสภาวะไม่คงตัว (unsteady flow) ที่พารามิเตอร์ค่าต่างๆ มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เปลี่ยนไป

2.2 กฎการอนุรักษ์ (Conservation law)

ความรู้พื้นฐานและกฎต่างๆเกี่ยวกับการไหลของของไหลในวิชากลศาสตร์ของไหล ได้แก่ กฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) นำไปสู่ สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) ซึ่งนำไปสู่ สมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ประกอบด้วยนิพจน์ของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ที่ขึ้นกับปริภูมิ (space) และเวลา (time) และกฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy)

2.2.1 กฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass)

จากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวล กล่าวว่า การไหลของของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมใดๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลสุทธิที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลที่ไหลเข้าลบออกจากอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม



รูปที่ 2.4 ปริมาตรควบคุมสำหรับกฎการอนุรักษ์มวลในระบบพิกัดทรงกระบอก

ของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 มีความหนาแน่น ρ และมีความเร็ว $\vec{U} = \hat{e}_r U_r + \hat{e}_\theta U_\theta + \hat{e}_z U_z$ เมื่อ $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ และ \hat{e}_z เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน r, θ และ z

ตามลำดับ โดยที่ U_r, U_θ, U_z เป็นความเร็วในแนวแกน r, θ และ z ตามลำดับ แยกพิจารณาการอนุรักษ์มวลเป็นนิพจน์ได้ดังนี้

นิพจน์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในปริมาตรควบคุม คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r d\theta dr dz$$

นิพจน์ของอัตราการไหลสุทธิของมวลที่ผ่านผิวควบคุม พิจารณาดังนี้

อัตราการไหลของมวลผ่านแต่ละผิวควบคุม คือ

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } -r \text{ คือ } & - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \frac{dr}{2} \right] \left[U_r - \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \frac{dr}{2} \right] \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \\ & = -\rho U_r r d\theta dz + \rho U_r \frac{dr}{2} d\theta dz \end{aligned}$$

$$+ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + U_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$$

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } +r \text{ คือ } & \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \frac{dr}{2} \right] \left[U_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \frac{dr}{2} \right] \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \\ & = \rho U_r r d\theta dz + \rho U_r \frac{dr}{2} d\theta dz \end{aligned}$$

$$+ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + U_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$$

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } -\theta \text{ คือ } & - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} \right] \left[U_\theta - \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} \right] dr dz \\ & = -\rho U_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) \frac{d\theta}{2} dr dz + U_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} dr dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } +\theta \text{ คือ } & \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} \right] \left[U_\theta + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} \right] dr dz \\ & = \rho U_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) \frac{d\theta}{2} dr dz + U_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{2} dr dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } -z \text{ คือ } & - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[U_z - \left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right) \frac{dz}{2} \right] r d\theta dr \\ & = -\rho U_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + U_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} r d\theta dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ผิวควบคุม } +z \text{ คือ } & \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[U_z + \left(\frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right) \frac{dz}{2} \right] r d\theta dr \\ & = \rho U_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + U_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} r d\theta dr \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณา dr เป็นค่าน้อยๆ จะได้ว่า $(dr)^2$ มีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ เช่นเดียวกับ $d\theta$ และ dz ซึ่งสามารถตัดนิพจน์ที่มี $(d\theta)^2$ และ $(dz)^2$ เป็นตัวประกอบทิ้ง

รวมอัตราการไหลของมวลที่ผ่านแต่ละด้านของผิวควบคุม จะได้

$$\left[\rho U_r + r \left\{ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + U_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \right\} + \left\{ \rho \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) + U_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \right\} + r \left\{ \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + U_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right\} \right] dr d\theta dz$$

เมื่อจัดรูปใหม่ ได้เทอมของอัตราการไหลสุทธิของมวลที่ผ่านผิวควบคุม คือ

$$\left[\rho U_r + r \frac{\partial}{\partial r} (\rho U_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho U_\theta) + r \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z) \right] dr d\theta dz$$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎการอนุรักษ์มวลในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\rho U_r + r \frac{\partial}{\partial r} (\rho U_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho U_\theta) + r \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z) + r \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

แทนค่า $\frac{\partial}{\partial r} (r \rho U_r) = \rho U_r + r \frac{\partial}{\partial r} (\rho U_r)$ ลงในสมการ (2.5) และหารด้วย r จะได้

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho U_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

หรือเขียนสมการ (2.6) อีกรูปได้เป็น

$$\nabla \cdot \rho \vec{U} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

โดยที่ตัวดำเนินการเวกเตอร์ $\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

เรียกสมการ (2.7) ว่า สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) เมื่อพิจารณาของไหลเป็นแบบไม่บีบอัดตัว นั่นคือของไหลมีความหนาแน่นคงตัว ($\rho = \text{constant}$) ดังนั้น สมการ (2.7) จะเขียนได้เป็น

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.8)$$

2.2.2 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum)

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกล่าวว่า ถ้ามีแรงลัพธ์มากระทำกับมวลที่อยู่นิ่ง จะทำให้เกิดความเร่งที่ทำให้มวลนั้นเคลื่อนที่ไปในทิศทางของแรงลัพธ์ที่มากระทำนั้น แรงลัพธ์ที่มากระทำจะประกอบด้วยแรงวัตถุ (body force) f_r, f_θ และ f_z และแรงผิว (surface force) เช่น ความดัน (pressure) p , ความเค้นฉาก (normal stress) $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ และ σ_{zz} , ความเค้นเฉือน (shear stress) $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ และ τ_{rz} เป็นต้น ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในระบบพิกัดทรงกระบอก [27,57] คือ

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{T} - \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} - \nabla p + \rho \vec{g} \quad (2.9)$$

เมื่อ \vec{T} คือเทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตรา (extra stress tensor) และ \vec{g} คือค่าเวกเตอร์ความเร่งจากแรงโน้มถ่วงของโลก และเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีผลกระทบต่อระบบปัญหาที่ศึกษาน้อยมาก เมื่อเทียบกับแรงที่มากระทำอื่นๆ เช่น ความดัน หรือความเค้น ดังนั้นในการศึกษาวิจัยจึงไม่นำแรงโน้มถ่วงของโลกมาพิจารณา ดังนั้นสมการ (2.9) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{T} - \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} - \nabla p \quad (2.10)$$

สำหรับของไหลนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตรา คือ

$$\tilde{T} = 2\mu_N \tilde{D}$$

และ

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{U} + \nabla \bar{U}^\dagger)$$

เมื่อ μ_N คือ ความหนืดของของไหลนิวโตเนียน และ \tilde{D} คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (rate of deformation tensor)

สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตรา คือ

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}$$

เมื่อ $\tilde{\tau}$ คือ ความเค้นของพอลิเมอร์

2.3 การไหลแบบวิสโคเมตริก (Viscometric flow)

การศึกษาพฤติกรรมความหนืดในการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวโดยทั่วไปแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ คือ การไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงเฉือนหรือการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (simple shear flow) ซึ่งเป็นการไหลที่มีความสำคัญอย่างมากเพราะเป็นการไหลในกระบวนการอัดรีดหรือกระบวนการขึ้นรูปต่างๆ และการไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงดึงหรือการไหลแบบยืด (elongational flow) ซึ่งเป็นการไหลที่มีความสำคัญในกระบวนการเป่าขวดหรือกระบวนการผลิตฟิล์ม ลักษณะของการไหลทั้ง 2 รูปแบบมีดังนี้

2.3.1 การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (simple shear flow)

การไหลแบบเฉือนอย่างง่ายเป็นการไหลที่เกิดจากแรงเฉือน ดังนั้นต้องมีผนังหรือผิวการไหลเข้ามาเกี่ยวข้อง [26] ซึ่งการไหลในรูปแบบนี้สามารถแบ่งออกเป็นการไหลที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของแผ่นประกบคู่ด้วยความเร็วที่แตกต่างกัน (flow between moving plates) โดยพิจารณาแผ่นประกบคู่ที่มีแผ่นหนึ่งเคลื่อนที่และอีกแผ่นหยุดนิ่งโดยมีพอลิเมอร์หลอมเหลวอยู่ระหว่างกลาง จึงได้ว่าพอลิเมอร์หลอมเหลวที่อยู่ติดแผ่นที่เคลื่อนที่มีความเร็วสูงสุด และความเร็วจะลดลงเมื่อเข้าไปใกล้แผ่นที่อยู่กับที่ ดังนั้นความเค้นเฉือนจึงมีความสำคัญมาก ตัวอย่างการไหลในรูปแบบนี้ คือ การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวในช่วงเกลียวหนอนของเครื่องอัดรีด เมื่อผนังของเครื่องมือทำหน้าที่เป็นแผ่นประกบที่อยู่กับที่ ในขณะที่เกลียวหนอนทำหน้าที่เป็นแผ่นประกบที่เคลื่อนที่ เมื่อเกลียวหนอนเริ่มหมุนจะทำให้เกิดแรงเฉือนขึ้นกับพอลิเมอร์หลอมเหลวที่อยู่ในเครื่องอัดรีด การไหลอีกแบบของการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายคือการไหลในท่อที่มีความแตกต่างของความดัน (pressure-driven flow) ซึ่งการไหลประเภทนี้เกิดขึ้นเมื่อมีความแตกต่างของความดันภายในท่อ กล่าวคือพอลิเมอร์จะไหลจากปลายท่อที่มีความดันสูงไปสู่ปลายท่อที่มีความดันต่ำกว่า และพบว่าบริเวณผนังท่อจะเกิดแรงเฉือนมากที่สุดแล้วจึงลดน้อยลงจนมีค่าต่ำสุดที่บริเวณกลางท่อทำให้บริเวณผนังท่อที่มีความเร็วของพอลิเมอร์หลอมเหลวน้อยที่สุดและเพิ่มมากขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่บริเวณกึ่งกลางท่อ ตัวอย่างการไหลในรูปแบบนี้ คือ การไหลของน้ำประปาจากสถานีจ่ายที่มีแรงดันสูงกระจายสู่บ้านเรือนที่มีแรงดันต่ำกว่า หรือการไหลหมุนเวียนของเลือดที่ออกจากหัวใจที่มีแรงดันสูงไปสู่ส่วนต่างๆ ของร่างกายที่มีแรงดันต่ำ

พิจารณาระบบพิกัดฉากสำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายที่เกี่ยวกับเครื่องวัด พบว่า ความเร็วสามารถเขียนได้ในรูป

$$u_x = \dot{\gamma}y$$

และ

$$u_y = u_z = 0$$

โดยที่

$$\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dy}$$

ดังนั้นผลต่างของความเค้นฉากปฐมภูมิ (primary normal stress) N_1 และความเค้นฉากทุติยภูมิ (secondary normal stress) N_2 แสดงได้ในรูปความเค้นฉาก ดังนี้

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \dot{\gamma}^2 \varphi_1(\dot{\gamma})$$

และ

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\gamma}^2 \varphi_2(\dot{\gamma})$$

เมื่อ

τ_{xx} เป็นความเค้นฉากในทิศทางแกน x

τ_{yy} เป็นความเค้นฉากในทิศทางแกน y

τ_{zz} เป็นความเค้นฉากในทิศทางแกน z

φ_1 เป็นสัมประสิทธิ์ของความเค้นฉากปฐมภูมิ

φ_2 เป็นสัมประสิทธิ์ของความเค้นฉากทุติยภูมิ

ซึ่งสัมประสิทธิ์ความเค้นฉากทั้งปฐมภูมิและทุติยภูมิต่างเป็นฟังก์ชันวัสดุ (material function) ของ อัตราการเฉือนเช่นเดียวกับความหนืดเฉือน [27] [28] โดยกำหนดความเค้นเฉือนเป็น

$$\tau_{xy} = \dot{\gamma} \mu_s(\dot{\gamma})$$

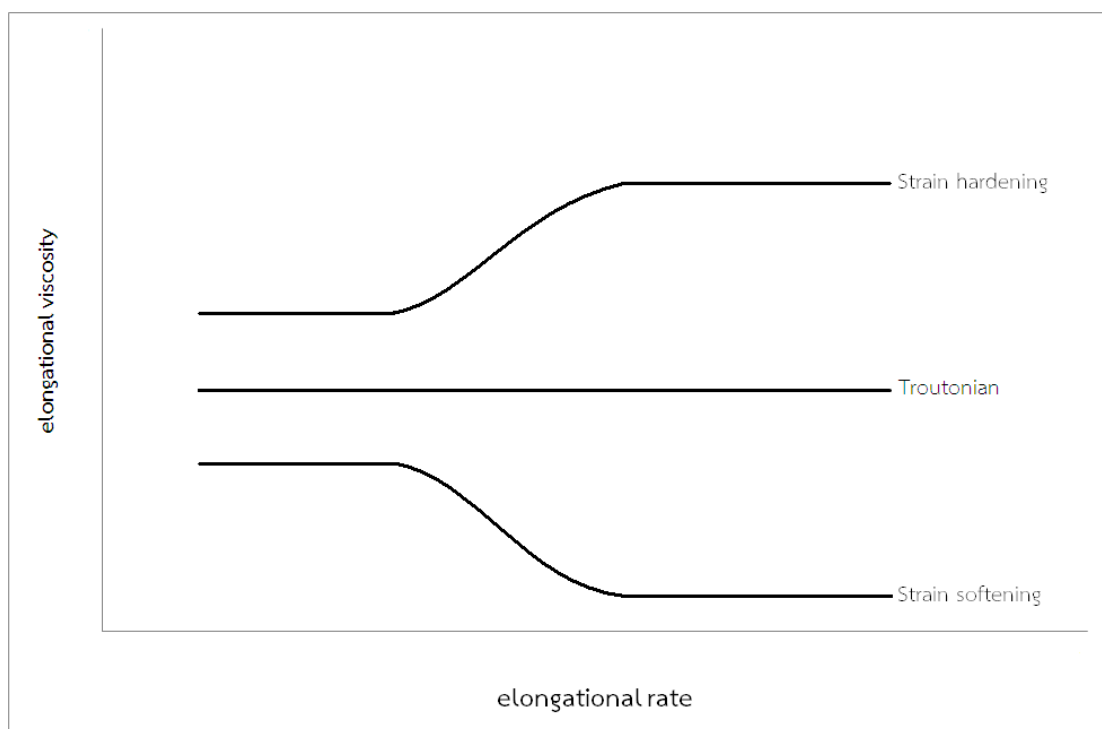
สำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายส่วนใหญ่พิจารณาผลต่างของความเค้นฉากปฐมภูมิเป็นหลักซึ่งเป็นตัวบอกริมาณความยืดหยุ่น (elasticity) ของของไหลเช่นเดียวกับความเค้นเฉือนกู้คืน

(recoverable shear) $\frac{N_1}{2\tau_{xy}}$ ที่มีค่ามากกว่า 0.5 แล้วจะทำให้ของไหลมีความยืดหยุ่นสูง

2.3.2 การไหลแบบยืด (elongational or extensional flow)

การไหลแบบยืดเป็นการไหลที่พอลิเมอร์หลอมเหลวได้รับแรงกระทำจนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะที่ยืดออกจากกัน สำหรับการไหลรูปแบบนี้ไม่ต้องอาศัยผิวสัมผัสหรือผนังในระหว่างการไหล หรือบางครั้งอาจเรียกได้ว่าเป็นการไหลของผิวอิสระ (free surface flow) เมื่อเปรียบเทียบการไหลรูปแบบนี้กับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายที่กล่าวก่อนหน้าแล้วจะพบว่า การไหลแบบยืดจะมีการทดสอบและวิเคราะห์ยากกว่า แต่ในการศึกษาการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวจะพบว่า พฤติกรรมการยืดตัวของพอลิเมอร์หลอมเหลวมีความสำคัญอย่างมากในการอธิบายถึงลักษณะการ

ไหลและทำนายผิวอิสระของชิ้นงานที่ได้จากกระบวนการผลิตต่างๆ เช่น การผลิตฟิล์มโดยกระบวนการเป่า การฉีดพอลิเมอร์เข้าแม่พิมพ์ การผลิตชิ้นงานด้วยกระบวนการขึ้นรูปแบบสูญญากาศ รวมทั้งการเคลือบหลอดสายไฟ เป็นต้น ซึ่งเป็นกระบวนการที่สำคัญในอุตสาหกรรม จึงมีผู้สนใจศึกษาการไหลรูปแบบนี้อย่างกว้างขวาง เมื่อพิจารณาตามลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความหนืดจะสามารถแบ่งการไหลแบบยืดนี้ได้เป็น 3 ชนิด ดังรูปที่ 2.5 คือ



รูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดยืดดึงและอัตราการดึงของพอลิเมอร์หลอมเหลวในการไหลแบบยืด

1. การไหลชนิดเทร้าโตเนียน (troutonian flow)

มีลักษณะการไหลที่ค่าความหนืดยืดดึง (elongational viscosity) ของพอลิเมอร์หลอมเหลวไม่เปลี่ยนแปลงตามอัตราการดึง (elongation rate) พอลิเมอร์หลอมเหลวที่มีลักษณะการไหลแบบนี้ คือ polymethylmethacrylate (PMMA), polystyrene (PS), polycarbonate (PC) และ polyamide (PA) เป็นต้น

2. การไหลชนิดความแข็งแบบแรงดึง (strain hardening flow)

มีลักษณะการไหลที่ค่าความหนืดยืดดึงของพอลิเมอร์หลอมเหลวมีค่าเพิ่มสูงขึ้นอย่างมีขอบเขต เมื่ออัตราการดึงมีค่าสูงขึ้น พอลิเมอร์หลอมเหลวที่มีลักษณะการไหลแบบนี้ คือ low density polyethylene (LDPE) และ Polyisoprene เป็นต้น

3. การไหลชนิดความบางแบบแรงดึง (strain softening flow)

มีลักษณะการไหลที่มีค่าความหนืดยืดดึงของพอลิเมอร์หลอมเหลวลดต่ำลงอย่างมีขอบเขตเมื่ออัตราการดึงมีค่าสูงขึ้น พอลิเมอร์หลอมเหลวที่มีลักษณะการไหลแบบนี้ คือ high density polyethylene (HDPE) และ polypropylene (PP) เป็นต้น

ลักษณะของการผิดรูปที่เกิดจากการไหลแบบยืดมี 3 ลักษณะดังนี้

1. การไหลแบบยืดขยายแกนเดียว (uniaxial extension flow)

การไหลแบบขยายแกนเดียวนี้จะเกิดขึ้นเพียงทิศทางเดียว เช่น ปัญหาการยืดฟิลาเมนต์ [29] เป็นต้น

เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดฉาก อัตราการดึงจะอยู่ในรูป

$$\dot{\epsilon} = \frac{u_x}{x} = -2 \frac{u_y}{y} = -2 \frac{u_z}{z}$$

เมื่อจัดรูปใหม่จะได้ส่วนประกอบของความเร็วยู่ในรูป

$$u_x = \dot{\epsilon} x, \quad u_y = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} y, \quad u_z = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} z$$

และผลต่างความเค้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\epsilon} \mu_e (\dot{\epsilon})$$

เมื่อ

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

โดยที่ μ_e เป็นความหนืดแบบยืดขยาย (extensional viscosity) และเป็นค่าคงตัวบนช่วงกว้างของอัตรายืด มีความหนืดแบบยืดศูนย์ (zero-elongational viscosity) μ_e^0 เป็นค่าที่ได้มาจากการยืดศูนย์ (zero-elongation rate) และ $\mu_e^0 = 3\mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นความหนืดอัตราเฉือนศูนย์ของของไหลนิวตันเนียน (Newtonian zero-shear rate viscosity)

2. การไหลแบบยืดขยายแกนสองทาง (biaxial extensional flow)

การไหลแบบยืดขยายแกนสองทางนี้จะเป็นการไหลที่เกิดจากการยืดในสองทิศทางที่ตั้งฉากกัน เช่น กระบวนการเป่าขวด เป็นต้น

พิจารณาในระบบพิกัดฉาก อัตราการดึงจะอยู่ในรูป

$$\dot{\epsilon} = \frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y} = -\frac{u_z}{2z}$$

จัดรูปใหม่จะได้ส่วนประกอบความเร็วยู่ในรูป

$$u_x = \dot{\epsilon} x, \quad u_y = \dot{\epsilon} y, \quad u_z = -2\dot{\epsilon} z$$

ผลต่างความเค้นอยู่ในรูป

$$\tau_{zz} - \tau_{xx} = \tau_{zz} - \tau_{yy} = \dot{\epsilon} \mu_{eb} (\dot{\epsilon})$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

เมื่อ μ_{eb} เป็นความหนืดแบบยืดขยายแกนสองทาง (biaxial extensional viscosity) Walter [30] ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดแบบแกนเดียว และความหนืดแบบแกนสองทาง ดังนี้

$$\mu_{eb}(\dot{\epsilon}) = \mu_e(-2\dot{\epsilon})$$

3. การไหลแบบยืดขยายเชิงระนาบ (planar extensional flow)

การไหลแบบยืดขยายเชิงระนาบนี้เป็นการไหลที่ยืดแผ่นบางของของไหลในทิศทางเดียว เท่านั้น กล่าวคือ ความกว้างของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลง และความหนาของของไหลลดลง เช่น การผลิตฟิล์มหรือการผลิตแผ่นวัสดุต่างๆ เป็นต้น

เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดฉาก อัตราการดึงจะอยู่ในรูป

$$\dot{\epsilon} = \frac{u_x}{x} = -\frac{u_z}{z}, \quad u_y = 0$$

และเมื่อจัดรูปใหม่ จะได้ส่วนประกอบความเร็วอยู่ในรูป

$$u_x = \dot{\epsilon}x, \quad u_y = 0, \quad u_z = -\dot{\epsilon}z$$

และมีผลต่างความเค้นเป็น

$$\tau_{xx} - \tau_{zz} = \dot{\epsilon}\mu_{ep}(\dot{\epsilon})$$

เมื่อ μ_{ep} เป็นความหนืดแบบยืดขยายเชิงระนาบ (planar extensional viscosity)

2.3.3 อัตราเฉือนและอัตราการดึง (shear rate and elongational rate)

พิจารณาพฤติกรรมของการไหลของของไหลที่เป็นสารเดียวกันมีสมบัติอีลาสติกเท่ากันทุกทิศทาง เป็นแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic homogeneous isotropic fluid) ภายใต้การไหลของระบบที่มี อุณหภูมิเท่ากัน (isothermal system) ที่ศึกษาโดย Rivlin และ Eriksen [31] และต่อมา Reiner [32] ได้อธิบายรูปแบบทั่วไปของเทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตริ่งที่เป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปภายใต้สภาวะไม่อัดตัวไว้ดังนี้

$$\tilde{T} = 2\mu(\dot{\gamma}, \dot{\epsilon})$$

สำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย อัตราเฉือน คือ

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{II_d}$$

และอัตราการดึง คือ

$$\dot{\epsilon} = 3\frac{III_d}{II_d}$$

โดยที่ II_d และ III_d คือ ความแปรผันอันดับที่สองและอันดับที่สามของเทนเซอร์ (the second and third invariants) ของอัตราการผิดรูป (the rate of strain tensor) \tilde{D} ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ ความแปรผันอันดับที่สองและอันดับที่สาม คือ

$$II_d = \frac{1}{2} \text{trace}(\tilde{D}^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$III_d = \det \tilde{D} = -II_d$$

และเมื่อพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก (axisymmetric coordinate system) 2 มิติ ความแปรผันอันดับที่สองและอันดับที่สามอยู่ในรูป

$$II_d = \frac{1}{2} \text{trace}(\tilde{D}^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right]$$

$$III_d = \det \tilde{D} = \frac{u_r}{r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right]$$

2.4 สมการองค์ประกอบ (Constitutive equation)

พฤติกรรมการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียนสัมพันธ์กับความเค้นเฉือน (shear stress) ซึ่งเมื่อจำลองเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทำให้สามารถอธิบายลักษณะพฤติกรรมของความเค้นเฉือนของของไหลแต่ละชนิดที่นำมาศึกษาในแต่ละปัญหา ตัวแบบที่ใช้อธิบายลักษณะพฤติกรรมของของไหลอย่างแพร่หลายในปัจจุบันมีดังนี้

2.4.1 ตัวแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwell model)

Maxwell ศึกษาของไหลวิสโคอีลาสติก (viscoelastic fluid) และได้ประยุกต์ใช้กฎของฮุกส์ (Hooke's law) [33] ในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Maxwell [34] [35] โดยที่ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เขาสร้างขึ้นมี 2 ลักษณะ คือ

1. ตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาดไม่เชิงเส้น (non-linear upper convected Maxwell model) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D} \quad (2.11)$$

โดยที่

$$\overset{\nabla}{\tilde{T}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \tilde{T} - (\tilde{T} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger - \tilde{T} \cdot \nabla \vec{U} \quad (2.12)$$

2. ตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาล่างไม่เชิงเส้น (non-linear lower convected Maxwell model) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\Delta}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D} \quad (2.13)$$

โดยที่

$$\overset{\Delta}{\tilde{T}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \tilde{T} + (\tilde{T} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \tilde{T} \cdot \nabla \vec{U} \quad (2.14)$$

ตัวแบบแมกซ์เวลล์นี้ใช้อธิบายพฤติกรรมของของไหลนอนนิวโตเนียนที่มีความหนืดเกือบจะสอดคล้องกับกฎของนิวตัน ซึ่งมีคุณสมบัติคล้ายกับของไหลนิวโตเนียน ดังนั้นจึงไม่เหมาะที่จะนำมาใช้ในการอธิบายพฤติกรรมการไหลของของไหลวิสโคอีลาสติก

2.4.2 ตัวแบบออลดรอยด์-บี (Oldroyd-B model)

Oldroyd [36] ได้ศึกษาของไหลวิสโคอีลาสติกที่มีของไหลนิวโตเนียนเป็นตัวทำละลาย และได้พัฒนาตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาบอนไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D} \quad (2.15)$$

หลังจากนั้นทำการกระจายและจัดรูปสมการ ใหม่ ได้เป็นตัวแบบออลดรอยด์-บี ดังนี้

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{T}} = 2\mu \left(\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\tilde{D}} \right) \quad (2.16)$$

เมื่อ $\overset{\nabla}{\tilde{D}}$ คือเทนเซอร์อัตราการผลิตรูปพาบอน

μ คือความหนืดรวมและ $\mu = \mu_V + \mu_N$

λ_1 คือเวลาผ่อนคลาย (relaxation time)

λ_2 คือเวลาหน่วง (retardation time) และ $\lambda_2 = \frac{\mu_N \lambda_1}{\mu}$

Paddon และ Holstein [37] ได้ทำการวิฤต (discretization) สมการ (2.15) ด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (finite different method) และต่อมา Crochet และ Keunings [7] ได้ทำการวิฤตด้วยระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับ (finite element method) จึงได้ตัวแบบอยู่ในรูป

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + \mu_N \tilde{D} \quad (2.17)$$

โดยที่

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2\mu_V \tilde{D} \quad (2.18)$$

ในปีค.ศ.2000 Ngamaramvaranggul และ Webster [38,39] ได้ใช้ตัวแบบออลดรอยด์-บีในการศึกษาปัญหาเคลือบลดแบบเพอร์ซอร์ทูลิ่งและทิวบ์ทูลิ่ง ต่อมาในปี 2008 Teeramoke และ Ngamaramvaranggul [40] ได้จำลองปัญหากระบวนการอัดรีดในการผลิตยาโดยใช้ตัวแบบออลดรอยด์-บี

ตัวแบบออลดรอยด์-บีสามารถนำมาใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของของไหลวิสโคอีลาสติกบางประเภทได้ แต่ยังไม่สามารถใช้อธิบายพฤติกรรมของของไหลบางอย่างได้ รวมทั้งยังมีข้อจำกัดในการใช้

2.4.3 ตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ (Phan-Thien/Tanner model)

ในปีค.ศ.1977 Phan-Thien และ Tanner [41,42] ได้พัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของของไหลวิสโคอีลาสติกได้ดีขึ้น หลังจากนั้นในปีค.ศ.1984 Davies และคณะ [43] และ Keuning และ Crochet [44] ได้นำตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ไปใช้กับการศึกษาการไหลหดตัวแบบ 4:1 ทั้งนี้ Bird และคณะ [45] ยังใช้ตัวแบบแพนเทียนในการอธิบายพฤติกรรมของไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวในพลศาสตร์ของไหล ต่อมาในปีค.ศ.1988 Phan-Thien [17] ได้ใช้ตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ในการศึกษาผลกระทบของการลื่นไหลบริเวณผนังตายของปัญหาการบวมตัว และ 4 ปีต่อมา [46] เขาได้นำไปใช้กับการศึกษาปัญหากระบวนการขึ้นรูป (forming process) ซึ่งในปีค.ศ.1996 Gunter และคณะ [12] ได้นำตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์มาใช้กับปัญหาการไหลของ

ของไหลวิสโคอีลาสติก และใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการแก้ปัญหา ต่อมาในปีค.ศ.1998 Mutlu และคณะ [13,47] ได้ศึกษาปัญหาการไหลเคลือบลด โดยใช้ตัวแบบแผนเทียบสำหรับเวลาผ่อนคลายหนึ่งค่า (single mode) ซึ่งใช้ทั้งหลักการคู่ควบ (couple scheme) หมายถึงหลักการคำนวณระบบสมการหลายตัวแปรโดยคำนวณหาตัวแปรเหล่านั้นไปพร้อมๆ กัน และหลักการไม่คู่ควบ (decouple scheme) หมายถึงการหาตัวแปรหนึ่งเสร็จแล้วจึงไปหาตัวแปรอื่นต่อไปในการแก้ปัญหา เช่นเดียวกับการแก้ปัญหาของ Matallah และคณะ [14] ที่ใช้ทั้งสองหลักการในการหาผลเฉลยของปัญหาการไหลเคลือบลด แต่ในการแก้ปัญหา คณะของเขาใช้การแยกหาค่าความเค้นก่อน และต่อมาในปีค.ศ.2000 Matallah และคณะ [48,49] ใช้ตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์สำหรับเวลาผ่อนคลายหนึ่งค่า และสำหรับเวลาผ่อนคลายหลายค่าในการศึกษาปัญหาการไหลเคลือบลด นอกจากนี้ยังมีผู้นำตัวแบบนี้ไปใช้อีกมากมาย เช่น งานของ [15,23]

เทนเซอร์ความเค้นเอกซ์ตราของตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์สำหรับเวลาผ่อนคลายหนึ่งค่า (single relaxation time) มีสมการดังนี้

$$\vec{T} = \vec{\tau} + 2\mu_N \vec{D} \quad (2.19)$$

$$f \vec{\tau} + \lambda_1 \overset{\circ}{\vec{\tau}} = 2\mu_V \vec{D} \quad (2.20)$$

โดยที่

$$\overset{\circ}{\vec{\tau}} = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \nabla \vec{\tau} + \frac{\xi}{2} \overset{\Delta}{\vec{\tau}} \quad (2.21)$$

จากสมการ (2.12) และ (2.14) จัดรูปสมการ (2.21) ได้เป็น

$$\overset{\circ}{\vec{\tau}} = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[(\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} \right] \quad (2.22)$$

แทนค่าสมการ $(\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} = \vec{D} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \vec{D}$ (ดูในภาคผนวก ค) ลงในสมการ (2.22) จะได้

$$\overset{\circ}{\vec{\tau}} = \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi (\vec{D} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \vec{D}) \quad (2.23)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (2.23) ลงในสมการ (2.20) และเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะได้

$$\lambda_1 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = 2\mu_V \vec{D} - f \vec{\tau} - \lambda_1 \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[(\vec{D} \cdot \vec{\tau}) + (\vec{D} \cdot \vec{\tau})^\dagger \right] \right\} \quad (2.24)$$

โดยที่ฟังก์ชัน f จะมี 3 รูปแบบดังนี้

1. สมการเชิงเส้น (linear model) คือ

$$f = 1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} \text{trace}(\vec{\tau}) \quad (2.25)$$

2. สมการกำลังสอง (quadratic model) คือ

$$f = 1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} \text{trace}(\vec{\tau}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} \text{trace}(\vec{\tau}) \right]^2 \quad (2.26)$$

3. สมการเลขชี้กำลัง (exponential model) คือ

$$f = \exp \left[\frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} \text{trace}(\vec{\tau}) \right] \quad (2.27)$$

โดยที่

$$\text{trace}(\tilde{\tau}) = \sum_i \tau_{ii}$$

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัญหาการไหลเคลือบลดโดยใช้ตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์แบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบ ดังนี้

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{T} - \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} - \nabla p \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.29)$$

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D} \quad (2.30)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = 2\mu_v \tilde{D} - f \tilde{\tau} - \lambda_1 \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger \right] \right\} \quad (2.31)$$

เมื่อ

$$f = \exp \left[\frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_v} \text{trace}(\tilde{\tau}) \right]$$

และมีความหนืดเฉือน (μ_s) เป็นฟังก์ชันของอัตราเฉือน ($\dot{\gamma}$) และ มีความหนืดขยาย (μ_e) เป็นฟังก์ชันของอัตราการขยาย ($\dot{\varepsilon}$) ซึ่งอยู่ในรูป

$$\mu_s(\dot{\gamma}) = \mu_N + \frac{\mu_v f}{f^2 + \xi(2-\xi)\lambda_1^2 \dot{\gamma}^2}$$

และ

$$\mu_e(\dot{\varepsilon}) = 3\mu_N + \frac{2\mu_v}{f - 2(1-\xi)\lambda_1 \dot{\varepsilon}} + \frac{\mu_v}{f + (1-\xi)\lambda_1 \dot{\varepsilon}}$$

2.5 ระบบไร้หน่วย (Non-dimensional system)

พิจารณาสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบในระบบไร้หน่วย เพื่อสะดวกในกานำผลไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง หรือนำผลไปเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของผู้อื่น การกำหนดตัวแปรแบบไร้หน่วย (non-dimensional variables) ของตัวแปรต่างๆ คือ r^* , z^* , \vec{U}^* , p^* , t^* , \tilde{T}^* , μ^* , λ^* , $\dot{\gamma}^*$, ∇^* , $\frac{\partial}{\partial t^*}$ เกิดจากการหาอัตราส่วนของค่าที่มีหน่วยต่อตัวประกอบลักษณะเฉพาะ (characteristic factor) ของแต่ละค่านั้นๆ ซึ่งมีการกำหนดดังนี้

$$\text{การกระจัดในทิศทางของแกน } r \text{ คือ } r^* = \frac{r}{L}$$

$$\text{การกระจัดในทิศทางของแกน } z \text{ คือ } z^* = \frac{z}{L}$$

$$\text{เวกเตอร์ความเร็ว คือ } \vec{U}^* = \frac{\vec{U}}{V}$$

$$\text{ความดัน คือ } p^* = \frac{L}{\mu_0 V} p$$

$$\text{เวลา คือ } t^* = \frac{V}{L} t$$

$$\text{เทนเซอร์ความเค้น คือ } \tilde{T}^* = \frac{L}{\mu_0 V} \tilde{T}$$

$$\text{ค่าความหนืด คือ } \mu^* = \frac{1}{\mu_0} \mu$$

$$\text{ค่าเวลาผ่อนคลาย คือ } \lambda^* = \frac{V}{L} \lambda$$

$$\text{ค่าอัตราการเฉือน คือ } \dot{\gamma}^* = \frac{L}{V} \dot{\gamma}$$

$$\text{ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ คือ } \nabla^* = L \nabla$$

$$\text{ตัวดำเนินการ คือ } \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{L}{V} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} = L \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} = L^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = L \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} = L^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

โดยที่

L คือความยาวลักษณะเฉพาะ (characteristic length) มีหน่วยเป็น m

V คือความเร็วลักษณะเฉพาะ (characteristic velocity) มีหน่วยเป็น m/s

μ_0 คือความหนืดอ้างอิง (reference viscosity) มีหน่วยเป็น Pa.s หรือ kg/(m.s)

และมีค่าเท่ากับผลรวมของความหนืดของตัวทำละลายกับความหนืดของพอลิเมอร์ ($\mu = \mu_N + \mu_V$)

เปลี่ยนสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบให้อยู่ในระบบไร้หน่วย โดยการแทนค่าตัวแปรไร้หน่วยลงในสมการ (2.28), (2.29), (2.30) และ (2.31) ดังนี้

พิจารณาสมการควบคุม (2.28)

$$\rho \frac{V}{L} \frac{\partial}{\partial t^*} (V \vec{U}^*) = \frac{1}{L} \nabla^* \cdot \frac{\mu_0 V}{L} \tilde{T}^* - \rho V \vec{U}^* \cdot \frac{1}{L} \nabla^* V \vec{U}^* - \frac{1}{L} \nabla^* \frac{\mu_0 V}{L} p^* \quad (2.32)$$

$$\rho \frac{V^2}{L} \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} = \frac{\mu_0 V}{L^2} \nabla^* \cdot \tilde{T}^* - \frac{\rho V^2}{L} \vec{U}^* \cdot \nabla^* \vec{U}^* - \frac{\mu_0 V}{L^2} \nabla^* p^* \quad (2.33)$$

นำ $\frac{L^2}{\mu_0 V}$ คูณตลอดทั้งสมการ (2.33) จะได้

$$\frac{\rho V L}{\mu_0} \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} = \nabla^* \cdot \tilde{T}^* - \frac{\rho V L}{\mu_0} \vec{U}^* \cdot \nabla^* \vec{U}^* - \nabla^* p^* \quad (2.34)$$

กำหนดให้ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) $Re = \frac{\rho V L}{\mu_0}$ เป็นตัวบ่งบอกลักษณะการไหลของของ

ไหลซึ่งขึ้นกับความเร็วในการไหลของของไหล และแปรผกผันกับความหนืดของของไหล เมื่อตัวเลขเรย์โนลด์มีค่าต่ำกว่า 1500 การไหลจะเป็นแบบราบเรียบ และหากตัวเลขเรย์โนลด์มีค่ามากกว่า 1500 การไหลจะเป็นแบบปั่นป่วน

ดังนั้นสมการ (2.34) สามารถเขียนในรูปที่มีตัวเลขเรย์โนลด์ได้ดังนี้

$$\text{Re} \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} = \nabla^* \cdot \vec{T}^* - \text{Re} \vec{U}^* \cdot \nabla^* \vec{U}^* - \nabla^* p^* \quad (2.35)$$

และทำการกำจัดเครื่องหมาย * ออกเพื่อความง่ายในการเขียน ดังนั้นระบบไร้หน่วยของสมการควบคุมสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\text{Re} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{T} - \text{Re} \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} - \nabla p \quad (2.36)$$

เช่นเดียวกันกับสมการ (2.29), (2.30) และ (2.31) เมื่อทำให้อยู่ในรูปแบบของสมการในระบบไร้หน่วยจะได้

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.37)$$

$$\vec{T} = \vec{\tau} + 2\mu_N \vec{D} \quad (2.38)$$

$$\text{We} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu_V \vec{D} - f\vec{\tau} - \text{We} \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[(\vec{D} \cdot \vec{\tau}) + (\vec{D} \cdot \vec{\tau})^\dagger \right] \right\} \quad (2.39)$$

เมื่อกำหนดให้ตัวเลขไวเซนเบิร์ก (Weissenberg number) $\text{We} = \frac{\lambda V}{L}$ เป็นตัวบ่งบอกความยืดหยุ่นของของไหลซึ่งจะแปรผันกับเวลาผ่อนคลาย (relaxation time)

บทที่ 3

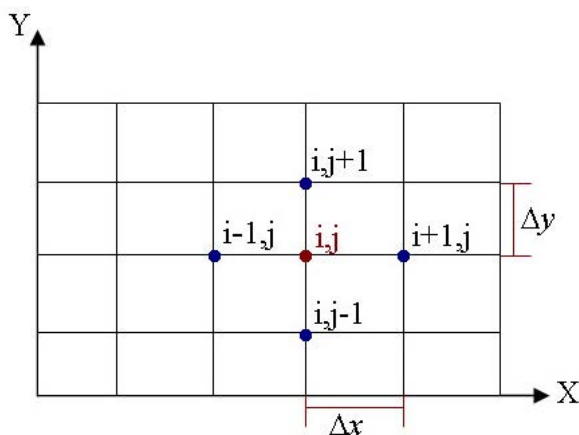
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

การศึกษาปัญหาทางด้านการไหลส่วนใหญ่มีการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปัญหาลักษณะต่างๆ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือสมการเชิงปริพันธ์ (integral equation) และพบว่าตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนี้อยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น (non-linear equation) ทำให้ปัญหาที่ศึกษาไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ได้ หรือการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหานี้อาจหาได้ลำบาก ดังนั้น การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เข้ามาช่วยหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) จึงเป็นแนวทางในการหาผลเฉลยของปัญหา ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำมาใช้เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยมีหลายวิธีด้วยกัน เช่น ระเบียบวิธีขึ้นประกอบขอบ (boundary element method) ระเบียบวิธีปริมาตรอิสระ (finite volume method) ระเบียบวิธีผลต่างอิสระ (finite difference method) และระเบียบวิธีขึ้นประกอบอิสระ (finite element method) เพื่อการเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสมกับปัญหาที่ศึกษา ควรคำนึงถึงความแม่นยำอย่างสูง และเวลาที่ใช้อย่างสั้น

สำหรับการศึกษาปัญหาการไหลเคลือบผิวที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (non-linear partial differential equation) ของตัวแปรที่ต้องการหา ได้แก่ ความเร็ว ความดัน และความเค้น เป็นต้น ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ มีดังนี้

3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอิสระ (Finite difference method)

ระเบียบวิธีผลต่างอิสระเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีแรกๆ ที่นำมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาการนำความร้อนของวัสดุ ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่น และปัญหาการไหล เป็นต้น โดยระเบียบวิธีนี้จะแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยๆ ที่เรียกว่า กริดสม่ำเสมอ (uniform grid) ซึ่งประกอบไปด้วยโหนดต่างๆ ที่มีการบอกพิกัด ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงโดเมนย่อยสำหรับระเบียบวิธีผลต่างอิสระ

ทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) ของนิพจน์ความเร็วที่โหนด $(i+1, j)$ ตามแนวแกน x จะได้

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} + O(h^3) \quad (3.1)$$

และทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) ของนิพจน์ความเร็วที่โหนด $(i-1, j)$ จะได้

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} + O(h^3) \quad (3.2)$$

เมื่อ $u_{i,j}$ คือความเร็วที่โหนด (i, j) ซึ่งพิจารณาเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1. สูตรผลต่างแบบไปข้างหน้า (forward difference formula)

สมการ (3.1) สามารถจัดรูปใหม่ ได้เป็นสูตรสำหรับหาค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งมีค่าความผิดพลาด $O(h)$ เป็น

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \quad (3.3)$$

พิจารณานิพจน์ความเร็วที่โหนด $(i+2, j)$ ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.1) แล้วนำไปบวกกับสมการ (3.1) ซึ่งคูณด้วยสอง จากนั้นจัดรูปใหม่ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่มีค่าความผิดพลาด $O(h)$ เป็น

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} + O(h) \quad (3.4)$$

2. สูตรผลต่างแบบย้อนหลัง (backward difference formula)

สมการ (3.2) สามารถจัดรูปใหม่ ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งมีค่าความผิดพลาด $O(h)$ เป็น

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (3.5)$$

และในทำนองเดียวกันกับสูตรผลต่างแบบไปข้างหน้า จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่มีค่าความผิดพลาด $O(h)$ เป็น

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \quad (3.6)$$

3. สูตรผลต่างแบบตรงกลาง (central difference formula)

นำสมการ (3.1) ลบด้วยสมการ (3.2) แล้วจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งมีค่าความผิดพลาด $O(h^2)$ เป็น

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (3.7)$$

และเมื่อนำสมการ (3.1) บวกด้วยสมการ (3.2) แล้วจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งมีค่าความผิดพลาด $O(h^3)$ เป็น

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(h^3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^3) \quad (3.8)$$

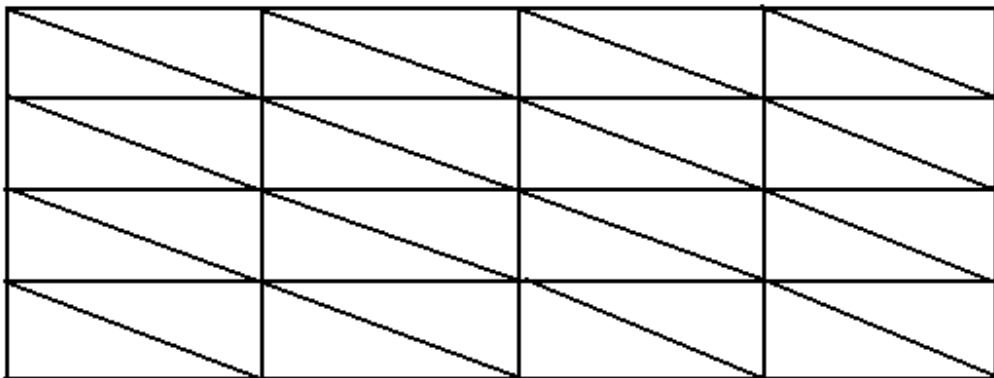
3.2 ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite element method)

ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาทางวิศวกรรม เช่น การวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของการขับเคลื่อน อากาศยาน อาคาร และโครงสร้างของสะพาน การวิเคราะห์ฟลักซ์ของความร้อน ฟลักซ์ของแม่เหล็ก ปัญหาการรั่วซึม และปัญหาการไหล เป็นต้น

แนวความคิดพื้นฐานของระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะเริ่มจากการวิเคราะห์ที่โครงสร้างอากาศยานชั้นสูง ในปีค.ศ.1956 Turner และคณะได้ออกนุพัทธ์สติฟเนสเมทริกซ์ (stiffness matrix) สำหรับเสา คานรับน้ำหนัก และขึ้นประกอบต่างๆ ขึ้นมา คำศัพท์ “finite element” สร้างขึ้นและใช้ครั้งแรกโดย Clough ในปีค.ศ.1960 ในต้นทศวรรษที่ 60 วิศวกรใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการประมาณค่าผลเฉลยสำหรับสมการความเค้น สมการการไหลของของไหล สมการความร้อน นอกจากนี้ Zienkiewicz และ Cheung ได้เขียนหนังสือเล่มแรกเพื่อแนะนำระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในปีค.ศ.1965 และได้นำวิธีการนี้มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหล [50] ที่พวกเขาเขียนขึ้น ต่อมาการวิเคราะห์ขึ้นประกอบอันตะถูกนำมาใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้นและการผิดรูปปร่าง หลังจากนั้นได้มีผู้ศึกษาใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการหาผลเฉลยสำหรับปัญหาต่างๆ อย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบันเนื่องจากวิธีนี้สามารถให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำสูง ศึกษาเพิ่มเติมที่ [51,52]

การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะประกอบด้วย 5 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้

1. การสร้างขึ้นประกอบย่อย (mesh generation) สามารถแบ่งเป็นขึ้นประกอบย่อยสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3.2 แล้วแต่กรณีของปัญหา สำหรับงานวิจัยนี้ได้แบ่งโดเมนออกเป็นขึ้นประกอบแบบสามเหลี่ยม (triangle element) โดยแต่ละขึ้นประกอบมี 6 โหนด (node) ในแต่ละโหนดจะมีตัวแปรไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ปรากฏอยู่



(ก) ขึ้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม

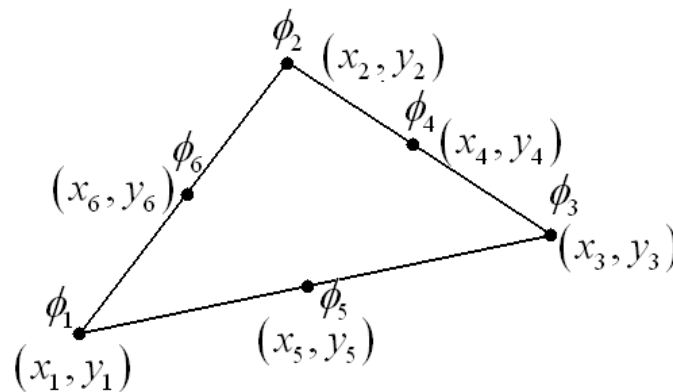
(ข) ชั้นประกอบย่อยสี่เหลี่ยม

รูปที่ 3.2 การแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบย่อยแบบต่างๆ: (ก) ชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม, (ข) ชั้นประกอบย่อยสี่เหลี่ยม

2. การสร้างสมการการประมาณค่าบนแต่ละชั้นประกอบ พิจารณาค่าความเร็วของการไหลของของไหลผ่านโดเมนที่แบ่งเป็นชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม 6 โหนด ดังรูปที่ 3.3 โดยแต่ละโหนดเป็นตำแหน่งของความเร็วที่ไม่รู้ค่า คือ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$ ดังนั้นสมการการประมาณค่าบนชั้นประกอบแบบสามเหลี่ยมนี้คือ

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) \phi_i$$

เมื่อ $N_i(x, y)$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างของชั้นประกอบสามเหลี่ยม 6 โหนด



รูปที่ 3.3 ชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม 6 โหนด และตัวแปรไม่รู้ค่าที่แต่ละโหนด

ในงานวิจัยนี้ใช้ฟังก์ชันรูปร่างใน 2 ลักษณะ คือ ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นสำหรับการประมาณค่าความดัน และฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองสำหรับการประมาณค่าความเร็วและความเค้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น (linear shape function)

การประมาณค่าความดันใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นคำนวณกับชิ้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม 3 โหนด โดยใช้การแปลงระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ (axisymmetric coordinate system) (r, z) ให้อยู่ในระบบพิกัดมาตรฐาน (ξ, η) ซึ่งมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\begin{aligned} r &= \varphi_1(\xi, \eta)r_1 + \varphi_2(\xi, \eta)r_2 + \varphi_3(\xi, \eta)r_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \varphi_i r_i \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} z &= \varphi_1(\xi, \eta)z_1 + \varphi_2(\xi, \eta)z_2 + \varphi_3(\xi, \eta)z_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \varphi_i z_i \end{aligned}$$

เมื่อ ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, \eta) &= \xi \\ \varphi_2(\xi, \eta) &= \eta \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \end{aligned}$$

โดยที่ $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = 1$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นเทียบกับ ξ และ η ได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} &= 1 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} &= -1 \end{aligned}$$

ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสอง (quadratic shape function)

การประมาณค่าความเร็วและความเค้นใช้ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองคำนวณกับชิ้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม 6 โหนด โดยใช้การแปลงระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ ให้อยู่ในระบบพิกัดมาตรฐาน (ξ, η) ซึ่งมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\begin{aligned} r &= \varphi_1(\xi, \eta)r_1 + \varphi_2(\xi, \eta)r_2 + \varphi_3(\xi, \eta)r_3 + \varphi_4(\xi, \eta)r_4 + \varphi_5(\xi, \eta)r_5 + \varphi_6(\xi, \eta)r_6 \\ &= \sum_{i=1}^6 \varphi_i r_i \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} z &= \varphi_1(\xi, \eta)z_1 + \varphi_2(\xi, \eta)z_2 + \varphi_3(\xi, \eta)z_3 + \varphi_4(\xi, \eta)z_4 + \varphi_5(\xi, \eta)z_5 + \varphi_6(\xi, \eta)z_6 \\ &= \sum_{i=1}^6 \varphi_i z_i \end{aligned}$$

เมื่อ ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสอง คือ

$$\varphi_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$\varphi_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$\varphi_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

โดยที่ $\sum_{i=1}^6 \varphi_i = 1$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองเทียบกับ ξ และ η ได้

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = -3 + 4\xi + 4\eta$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = -1 + 4\xi$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} = -1 + 4\eta$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} = 4(1 - 2\xi - \eta)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} = -4\xi$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi} = 4\eta$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \eta} = 4\xi$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi} = -4\eta$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \eta} = 4(1 - \xi - 2\eta)$$

กำหนดให้ N_i เป็นฟังก์ชันรูปร่างที่โหนด i ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $r(\xi, \eta)$ และ $z(\xi, \eta)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

และ

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้จาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix) J คือ

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $J_{11} = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$

$$J_{12} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

$$J_{21} = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$J_{22} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนโหนดในชั้นประกอบย่อย
นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

แทนค่า $J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$ ลงในสมการ

จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

3. การใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weight residual method) ในการลดค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่า โดยใช้ระเบียบวิธีกาลอร์คิน (Galerkin method) มาประยุกต์ใช้ในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการขึ้นประกอบอันตะ (finite element equation)

4. การนำสมการขึ้นประกอบอันตะของทุกๆ ขึ้นประกอบรวมเข้าด้วยกันเป็นระบบสมการ (system of equations)

5. การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จากระบบสมการที่ได้ในขั้นที่ 4 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้ากับระบบสมการ และจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์

$$\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$$

เมื่อ \tilde{A} เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix)

\vec{x} เป็นเวกเตอร์ตัวแปร (variable vector)

\vec{b} เป็นเวกเตอร์ค่าคงตัว (constant vector)

เนื่องจากระบบสมการในงานวิจัยนี้เวกเตอร์ตัวแปรที่ต้องการหา มี 3 ค่า ได้แก่ ความเร็ว ความเค้น และความดัน สำหรับกรณีของความเร็วจึงใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำ ที่เรียกว่า วิธีการทำซ้ำจาโคบี (Jacobi iterative method) โดยเริ่มจากการกำหนดค่าเริ่มต้นแล้ว คำนวณค่าที่ต้องการไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าที่คำนวณได้เข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนดไว้ แต่กรณีการหาค่าของความดันใช้ระเบียบวิธีโชเลสกี (Choleski's method)

3.3 หลักการเคมีอิมพลีซิทเทย์เลอร์กาลเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรคชัน (Semi-implicit Taylor-Galerkin/pressure correction scheme, Semi-implicit TGPC)

หลักการเคมีอิมพลีซิทเทย์เลอร์กาลเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรคชัน คือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น สำหรับการประยุกต์ใช้ STGFEM กับสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบมีดังนี้

3.3.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการควบคุม (numerical method for governing equation)

จากสมการควบคุม (2.36) และ (2.37)

ทำการกระจายนิพจน์ความเร็วโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \frac{\partial \vec{U}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{U}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (3.9)$$

จากหลักการเวลาครึ่งขั้น (half time step)

$$\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{U}^{n+1} + \vec{U}^n) \quad (3.10)$$

หรือเขียนได้เป็น

$$\vec{U}^{n+1} = 2\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n \quad (3.11)$$

จากนั้นแทนค่า \vec{U}^{n+1} กลับลงในสมการ (3.9) และทำการกระจายนิพจน์โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1 จะได้

$$\frac{\partial \vec{U}^n}{\partial t} = \frac{2}{\Delta t} \left(\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n \right) \quad (3.12)$$

ใช้หลักการเคมีอิมพลีซิท (semi-implicit) ในการปรับนิพจน์การแพร่ (diffusion term) จะได้

$$\nabla \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} \left(\nabla \cdot \vec{T}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \vec{T}^n \right) \quad (3.13)$$

แทนค่าสมการ (3.12) และสมการ (3.13) กลับลงไปในสมการ (2.36) จะได้

$$\frac{2 \operatorname{Re}}{\Delta t} \left(\bar{U}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{U}^n \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} - \nabla \cdot \tilde{T}^n \right) + \left(\nabla \cdot \tilde{T} - \operatorname{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} - \nabla p \right)^n \quad (3.14)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (3.9) เทียบกับเวลาได้

$$\frac{\partial \bar{U}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial^2 \bar{U}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (3.15)$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (3.10) เทียบกับเวลาได้

$$\frac{\partial \bar{U}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} \right) \quad (3.16)$$

นำสมการ (3.15) ซึ่งใช้ประมาณค่าที่มีความผิดพลาด $O(\Delta t)$ แทนลงในสมการ (3.16) จะได้

$$\frac{\partial \bar{U}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} \quad (3.17)$$

แทนสมการ (3.17) ลงในสมการ (3.9) ที่มีความคลาดเคลื่อน $O(\Delta t)$ จะได้

$$\frac{\partial \bar{U}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n) \quad (3.18)$$

พิจารณานิพจน์ความเร็วในครึ่งขั้นเวลาของสมการ (2.36) และใช้ (3.18) แต่ความดันไม่มีการพิจารณาเป็นครึ่งขั้นจึงพิจารณาไปข้างหน้าหนึ่งขั้นเพื่อเป็นการทำนาย (prediction) และจะกลับมาตามแก้ความเร็วในภายหลัง จะได้เป็น

$$\frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n) = \left(\nabla \cdot \tilde{T} - \operatorname{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n+1} \quad (3.19)$$

จากหลักการของแครงนิโคลสัน (Crank-Nicolson) สำหรับการประมาณค่าความดัน จะได้

$$p^{n+1} = (1 - \theta) p^n + \theta p^{n+1} \quad (3.20)$$

เมื่อ $0 \leq \theta \leq 1$

แทนค่าสมการ (3.20) ลงในสมการ (3.19) และเพิ่มนิพจน์ $\frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^* - \bar{U}^*)$ ในสมการ (3.19)

จัดรูปแบบสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n) + \frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^* - \bar{U}^*) = \left(\nabla \cdot \tilde{T} - \operatorname{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^n - \theta \nabla q^{n+1} \quad (3.21)$$

เมื่อ $q^{n+1} = p^{n+1} - p^n$

จากสมการ (3.21) ใช้ระเบียบวิธีการแบ่งแยก (split method) เพื่อหาผลเฉลย จะได้

$$\frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^* - \bar{U}^n) = \left(\nabla \cdot \tilde{T} - \operatorname{Re} \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^n \quad (3.22)$$

และ

$$\frac{\operatorname{Re}}{\Delta t} (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^*) = -\theta \nabla q^{n+1} \quad (3.23)$$

เมื่อพิจารณานิพจน์การแพร่ในสมการ (3.22) ในลักษณะเดียวกับการพิจารณาสมการ (3.13)

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t}(\vec{U}^* - \vec{U}^n) = \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{T}^* - \nabla \cdot \vec{T}^n) + \nabla \cdot \vec{T}^n - (\text{Re} \vec{U} \cdot \nabla \vec{U})^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^n \quad (3.24)$$

พิจารณาไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของสมการ (3.23) และจากสมการ (2.37) จะได้

$$\theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{U}^* \quad (3.25)$$

3.3.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการองค์ประกอบ (Numerical method for constitutive equation)

การพิจารณาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการองค์ประกอบสามารถทำได้เช่นเดียวกับการพิจารณาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้กับสมการควบคุม ดังนั้นจากสมการ (2.39) ทำการกระจายนิพจน์ความเค้นด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ร่วมกับหลักการเวลาครึ่งขั้นที่ครึ่งขั้นเวลา $n + \frac{1}{2}$ จะได้สมการ (2.39)

อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \frac{2We}{\Delta t} \left(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^n \right) = & \left[2\mu_v \tilde{D} - f \tilde{\tau} \right]^n \\ & - We \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (3.26)$$

และเมื่อพิจารณาที่เวลา $n+1$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{We}{\Delta t} \left(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^n \right) = & \left[2\mu_v \tilde{D} - f \tilde{\tau} \right]^{n+\frac{1}{2}} \\ & - We \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger \right] \right\}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

เมื่อแทนนิพจน์ $\vec{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}$ ลงในสมการ (3.14) (3.23) (3.24) (3.25) (3.26) และ (3.27) และจัดรูปใหม่ เขียนสรุปขั้นตอนการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1a คำนวณหาความเร็วและความเค้น

$$\begin{aligned} \frac{2\text{Re}}{\Delta t} \left(\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n \right) = & \left[\nabla \cdot (\tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}) - \text{Re} \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} - \nabla p \right]^n + \mu_N \cdot \nabla \left(\tilde{D}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{D}^n \right) \\ \frac{2We}{\Delta t} \left(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^n \right) = & \left[2\mu_v \tilde{D} - f \tilde{\tau} \right]^n \\ & - We \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi \left[\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger \right] \right\}^n \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 1b คำนวณหาความเร็วและความเค้น

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t} (\vec{U}^* - \vec{U}^n) = (\nabla \cdot \tilde{\tau} - \text{Re} \vec{U} \cdot \nabla \vec{U})^{n+\frac{1}{2}} + \left[\nabla \cdot (2\mu_N \tilde{D}) - \nabla p \right]^n + \nabla \cdot (\tilde{D}^* - \tilde{D}^n)$$

$$\frac{We}{\Delta t}(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^n) = [2\mu_v \tilde{D} - f \tilde{\tau}]^{n+\frac{1}{2}} - We \left\{ \vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \xi [\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger] \right\}^{n+\frac{1}{2}}$$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาความดัน

$$\theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{U}^*$$

เมื่อ $q^{n+1} = p^{n+1} - p^n$

ขั้นตอนที่ 3 นำความดันที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณเพื่อปรับความเร็วให้ถูกต้อง

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t} (\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^*) = -\theta \nabla q^{n+1}$$

สำหรับงานวิจัยนี้เลือกใช้ $\theta = 0.5$ เนื่องจาก ค่า $\theta = 0.5$ คือค่าที่ได้ทดสอบมาแล้วว่าให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับความเป็นจริงกับปัญหาที่เคยทำมาแล้ว

3.4 ระเบียบวิธีทำซ้ำจาโคบี (Jacobi iterative method)

กำหนดให้

$$\tilde{A} = \tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U}$$

เมื่อ \tilde{D} คือเมทริกซ์ทแยงของเมทริกซ์ A (diagonal matrix part of A) $\tilde{D} = [a_{ij}]$, $i = j$

\tilde{L} คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างของเมทริกซ์ A (lower-triangular matrix part of A)

$$\tilde{L} = [l_{ij}]$$

โดยที่ $l_{ij} = a_{ij}$, $i > j$ และ $l_{ij} = 0$, $i \leq j$

\tilde{U} คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนของเมทริกซ์ A (upper-triangular matrix part of A)

$$\tilde{U} = [u_{ij}]$$

โดยที่ $u_{ij} = a_{ij}$, $i < j$ และ $u_{ij} = 0$, $i \geq j$

ระบบสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้เป็น

$$\tilde{D}\vec{x} = (\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x} + \vec{b} \quad (3.28)$$

พิจารณาให้ $a_{ii} \neq 0$ ดังนั้น $\tilde{D}^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ii}} \right]$ จากสมการ (3.28) จะได้

$$\vec{x} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x} + \tilde{D}^{-1}\vec{b} \quad (3.29)$$

โดยวิธีการทำซ้ำจาโคบี จะได้เป็น

$$\vec{x}^k = \tilde{D}^{-1}(\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x}^{k-1} + \tilde{D}^{-1}\vec{b} \quad (3.30)$$

เมื่อ $k = 1, 2, 3, \dots$

นั่นคือ

$$x_i^k = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_{ij} x_j^{k-1}) + b_i}{a_{ii}} \quad (3.31)$$

3.5 ระเบียบวิธีโคเลสกี (Choleski's method)

สำหรับงานวิจัยนี้พบว่า step ที่ 2 ต้องการหาความดัน ดังนั้นเมื่อจัดระบบสมการเป็น $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ แล้วพบว่า $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^t$ จึงเป็นความสะดวกและรวดเร็วในการแก้ระบบสมการของ step ที่ 2 ด้วยวิธีการโคเลสกี ซึ่งการแก้ระบบสมการด้วยวิธีนี้ เมทริกซ์จะต้องเป็นแบบสมมาตร โดยจะทำการแยกเมทริกซ์ออกเป็น 2 เมทริกซ์ย่อยคูณกันคือ $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^t$ โดยที่

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(n-1)1} & l_{(n-1)2} & l_{(n-1)3} & l_{(n-1)4} & \dots & l_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

และ \tilde{L}^t เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ \tilde{L}

จากนั้นทำการแทนค่า $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^t$ ลงไปในระบบสมการเชิงเส้น จะได้สมการใหม่ซึ่งอยู่ในรูป

$$(\tilde{L}\tilde{L}^t)\tilde{x} = \tilde{b} \quad (3.32)$$

หรือ

$$\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b} \quad (3.33)$$

โดยที่

$$\tilde{y} = \tilde{L}^t\tilde{x} \quad (3.34)$$

ดังนั้นในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น จะสามารถทำได้โดยแก้ระบบสมการ (3.33) ก่อนด้วยการแทนค่าไปข้างหน้า (forward substitution) เพื่อทำการหาค่า \tilde{y} และหลังจากนั้นนำค่า \tilde{y} ที่ได้ไปแทนในระบบสมการ (3.34) เพื่อแทนค่าย้อนกลับ (backward substitution) หาค่า \tilde{x} จะได้ผลเฉลยที่ต้องการ สรุปขั้นตอนได้ดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์ \tilde{L} โดยที่สมาชิกของ \tilde{L} มีค่าดังนี้

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

และ

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} l_{ij}}{l_{ii}} \quad \text{โดยที่ } k = 2, 3, \dots, n \text{ และ } i = 2, 3, \dots, n-1$$

และ

$$l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}^2}$$

2. แก่ระบบสมการ (3.33) โดยการแทนค่าไปข้างหน้า จะได้ค่า y_i เป็น

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

และ

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}} \quad \text{โดยที่ } i = 2, 3, \dots, n$$

3. จากนั้นแทนค่า y_i ในสมการ (3.34) และแก้ระบบสมการ (3.34) ด้วยการแทนค่าย้อนกลับ จะได้ x_i เป็น

$$x_n = \frac{y_n}{l_{nn}}$$

และ

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j}{l_{ii}} \quad \text{โดยที่ } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

3.6 ระเบียบวิธีการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iterative method)

สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสันในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ($f(x) = 0$) โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ และมีวิธีการประมาณค่าผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นดังต่อไปนี้

พิจารณาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น 1 ของฟังก์ชัน $f(x)$

$$f(x_i^k) = f(x_i^{k-1}) + (x_i^k - x_i^{k-1}) f'(x_i^{k-1})$$

โดยที่ x_i^k และ x_i^{k-1} เป็นผลเฉลยในรอบที่ k และ $k-1$ ตามลำดับ

พิจารณา $f(x_i^k) = 0$ นั่นคือ $f(x_i^{k-1}) + (x_i^k - x_i^{k-1}) f'(x_i^{k-1}) = 0$ ดังนั้น

$$\Delta x_i = x_i^k - x_i^{k-1} = -\frac{f(x_i^{k-1})}{f'(x_i^{k-1})} \quad (3.35)$$

นั่นคือ

$$f'(x_i^{k-1})\Delta x_i = -f(x_i^{k-1}) \quad (3.36)$$

ตรวจสอบเกณฑ์การลู่เข้าของผลเฉลยที่ได้ในรอบที่ k และ $k-1$ ให้มีค่าน้อยกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับได้

3.7 หลักการสายกระแสอัปวินด์/เพ็ทโทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline-upwind/Petrov-Galerkin scheme, SUPG)

สำหรับการศึกษาปัญหาการไหลที่มีค่าตัวเลขเรย์โนลด์สูงๆ การลู่เข้าของผลเฉลยที่ได้จะไม่ราบเรียบและทำให้เสียเวลาในการคำนวณ ดังนั้นเพื่อเป็นการแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้นจึงทำการสร้างขึ้นประกอบย่อยให้มีขนาดเล็กลงแต่จะทำให้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นและเกิดปัญหาหน่วยความจำไม่พอ เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเพทรอฟเข้ามาช่วยปรับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกาเลอร์คินมาตรฐาน [39,53,54,55] เพื่อให้ผลเฉลยที่ได้มีความราบเรียบยิ่งขึ้น โดยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเพทรอฟ (Petrov weighting function) คือ

$$\phi_i^{Petrov} = \frac{\alpha^k \hat{u} \phi_{i,j}}{\|u\|}$$

โดยที่ α^k เป็นสเกลาร์พารามิเตอร์ที่มีค่าอยู่ในช่วง (0,1)

และจะได้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักอยู่ในรูป

$$\phi_i^{SUPG} = \phi_i + \phi_i^{Petrov}$$

เมื่อ ϕ_i เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกาเลอร์คินมาตรฐาน (standard Galerkin weighting function)

3.8 เกรเดียนตรีคัฟเวอรี (Gradient recovery)

การใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะคำนวณหาผลเฉลย พบว่ามีการคำนวณค่าจากโหนดร่วมกันระหว่างขึ้นประกอบย่อยจึงทำให้ผลเฉลยที่ได้ขาดความต่อเนื่อง ดังนั้น Mattallah และคณะ [56] ได้ใช้เทคนิควิธีเกรเดียนตรีคัฟเวอรีในการปรับค่าผลเฉลยที่แต่ละโหนดของโดเมนให้มีความถูกต้องและแม่นยำขึ้นและเร่งให้ผลเฉลยลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง โดยทำการปรับค่าเกรเดียนต์ความเร็วด้วยเทคนิควิธีเกรเดียนตรีคัฟเวอรี 3 ลักษณะดังนี้

1. ระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ (local direct method)
2. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินวงกว้าง (global Galerkin method)
3. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินเฉพาะที่ (local Galerkin method)

สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้เกรเดียนตรีคัฟเวอรีสำหรับระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ซึ่งจะสร้างเมทริกซ์ขนาดไม่ใหญ่นัก ทำให้ไม่สิ้นเปลืองหน่วยความจำในการคำนวณ โดยพิจารณาขึ้นประกอบเป็นแบบสามเหลี่ยม 6 โหนด จึงให้

$$u(x(\xi, \eta), t) = \sum_{i=1}^6 \phi_i(\xi, \eta) u_i(t)$$

ดังนั้น ส่วนประกอบเกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชั้นประกอบจะอยู่ในรูป

$$G_k^e(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t) \quad (3.37)$$

โดยที่ $k = 1, 2$ และ e เป็นชั้นประกอบย่อยที่กำลังพิจารณา

เมื่อแทนค่า u ลงในสมการ (3.37) จะได้เกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชั้นประกอบย่อยอยู่ในรูป

$$G_k^e(x(\xi_i, \eta_i), t) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \phi_i(\xi_i, \eta_i)}{\partial x_k} u_i(t)$$

โดยที่ ϕ_i เป็นฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองที่โหนด i และค่า ξ_i, η_i เป็นค่าพิกัดในแกนหลักซึ่งมีค่าดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าพิกัดในแกนหลักของชั้นประกอบสามเหลี่ยมแบบ 6 โหนด

i	ξ_i	η_i
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	0.5	0
5	0.5	0.5
6	0	0.5

เมื่อหาเกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชั้นประกอบย่อยได้แล้วให้นำเกรเดียนต์ความเร็วของทุกชั้นประกอบย่อยที่มีโหนดร่วมกันมาหาค่าเฉลี่ย

3.9 ตำแหน่งผิวอิสระ (Free surface location)

ของไหลที่ไหลออกนอกตาดแล้วทำให้เกิดการบวมตัว เนื่องจากแรงดันจากภายใน ดังนั้น รัศมีการไหลภายนอกตาดมากกว่ารัศมีการไหลภายในตาด จึงได้ อัตราการบวมตัว (swelling ratio) $\chi = \frac{R_j}{R}$ โดยที่ R_j เป็นรัศมีการไหลของของไหลภายนอกตาด และ R เป็นรัศมีการไหลภายในตาด หรือรัศมีการไหล ในการคำนวณหาตำแหน่งผิวอิสระเป็นการหาค่าการบวมตัว และการหาตำแหน่งผิวอิสระด้วยระเบียบวิธีการทำนายสายกระแส (streamline prediction method)

การทำนายตำแหน่งผิวอิสระที่เกิดจากการบวมตัวของของไหลภายนอกตาดสามารถศึกษาได้จากงานของ Crochet และคณะ [3] โดยมีเงื่อนไขขอบดังนี้

$$u_r n_r + u_z n_z = 0$$

$$t_r n_r + t_z n_z = S \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

$$t_r n_z - t_z n_r = 0$$

เมื่อ u_r, u_z เป็นความเร็วในทิศทางรัศมีและความเร็วในทิศทางแนวแกน ตามลำดับ

n_r, n_z เป็นส่วนประกอบแนวรัศมีและแนวฉากหนึ่งหน่วย (unit normal component) ที่ตำแหน่งผิวอิสระ

t_r, t_z เป็นแรงผิวที่ตั้งฉากกับพื้นผิว (surface force normal to surface)

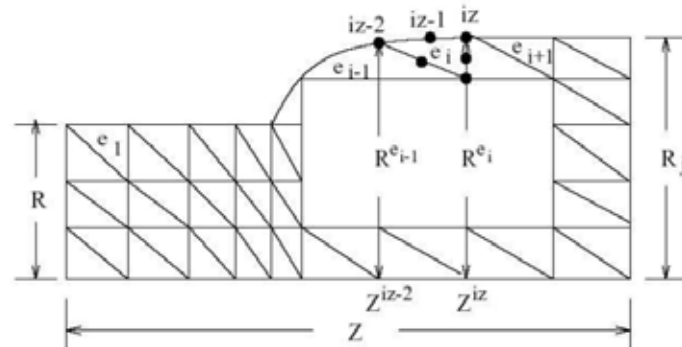
ρ_1, ρ_2 เป็นรัศมีความโค้งของผิวอิสระ (principal radii of curvature to surface)

S เป็นสัมประสิทธิ์แรงตึงผิว (surface tension coefficient)

จากเงื่อนไขขอบดังกล่าว จะได้รับสมการบวมตัวของของไหลภายนอกตายเป็น

$$r(z) = R + \int_{z=0}^{\infty} \frac{u_r(z)}{u_z(z)} dz$$

เมื่อ R เป็นรัศมีการไหลภายในตายหรือรัศมีของตาย



รูปที่ 3.4 แสดงขั้นตอนประกอบของการบวมตัว

เมื่อพิจารณาโดเมนของขั้นตอนประกอบในระเบียบวิธีขั้นตอนประกอบอันตะจากการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 3.4 ตำแหน่งผิวอิสระในแต่ละโหนดจะเป็น

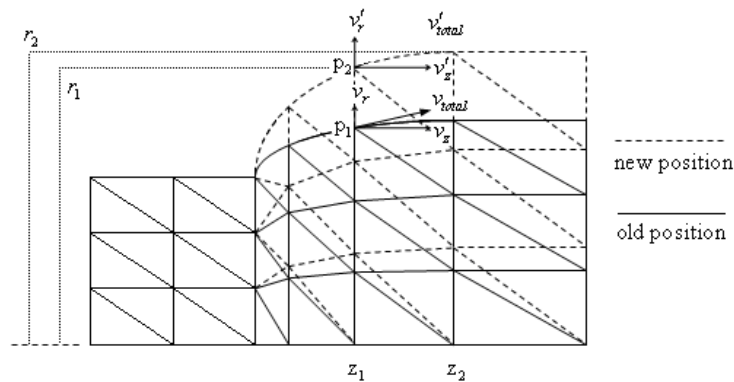
$$R^{e_i}(z) = R^{e_{i-1}} + \int_{z=z_{iz-2}}^{z_{iz}} \frac{u_r^{e_i}(z)}{u_z^{e_i}(z)} dz$$

และทำการหาค่าปริพันธ์โดยใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน(Simpson's 1/3 rule) ซึ่งใช้จุด 3 จุดในแต่ละขั้นตอนประกอบย่อยเพื่อประมาณค่าตั้งแต่ปลายตายจนถึง outlet จะได้ตำแหน่งผิวอิสระแต่ละโหนดอยู่ในรูป

$$R^{e_i}(z) = R^{e_{i-1}} + \frac{z_{iz} - z_{iz-2}}{6} \left[\frac{u_r^{e_i}(iz-2)}{u_z^{e_i}(iz-2)} + 4 \frac{u_r^{e_i}(iz-1)}{u_z^{e_i}(iz-1)} + \frac{u_r^{e_i}(iz)}{u_z^{e_i}(iz)} \right]$$

3.10 ภาพฉายของผิวอิสระ (Free surface reprojection)

หลังการคำนวณและปรับตำแหน่งผิวอิสระแล้ว พิกัดของแต่ละโหนดในโดเมนมีการเปลี่ยนแปลงไปจึงทำให้ค่าความเร็วที่คำนวณได้เป็นค่าความเร็วที่ตำแหน่งพิกัดเดิม ดังนั้นเพื่อการปรับค่าความเร็วที่ได้ให้สอดคล้องกับพิกัดใหม่ให้ใช้หลักการเวกเตอร์ภาพฉายที่ผิวอิสระ ดังหลักการที่ได้อธิบายต่อไป



รูปที่ 3.5 แสดงการปรับค่าความเร็วที่ตำแหน่งผิวอิสระ

จากรูปที่ 3.5 ได้ความสัมพันธ์ของความเร็วรวมเป็น

$$v_{total} = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$$

โดยที่ v_r, v_z, v_{total} คือค่าความเร็วในแนวแกน r, z และความเร็วรวมที่โหนด p_1 ที่ยังไม่ได้ปรับตำแหน่งผิวอิสระตามลำดับ

ให้ v'_r, v'_z, v'_{total} คือค่าความเร็วในแนวแกน r, z และความเร็วรวมที่โหนด p_2 ที่ได้ปรับตำแหน่งผิวอิสระเรียบร้อยแล้วตามลำดับ

เมื่อความเร็วที่โหนด p_2 คือ

$$v'_r = v_{total} \sin \theta$$

$$v'_z = v_{total} \cos \theta$$

โดยที่ θ เป็นมุมระหว่างแนวรัศมีและแนวแกน z ซึ่งมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\theta = \arctan \left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} \right)$$

3.11 กฎการลื่นไถลแพนเทียน (Phan-Thien slip rule)

Phan-Thien [17] ได้สร้างกฎการลื่นไถลเพื่อให้ความเร็วที่ผนังตายมีค่า ซึ่งก่อนการใช้กฎนี้ ความเร็วที่ผนังตายมีค่าเท่ากับศูนย์ หลักการนี้ให้พิจารณาค่าความเค้นเฉือนที่บริเวณผนังตายมีค่ามากกว่าความเค้นเฉือนวิกฤตและทำการปรับความเร็วที่ผนังตาย โดยเรียกว่าความเร็วลื่นไถล ซึ่งอยู่ในรูปของความเค้นเฉือนดังนี้

$$v_{slip} = v_{mean} \left[1 - \exp \left(-\alpha \frac{\tau}{\tau_{crit}} \right) \right] \quad (3.38)$$

โดยที่ v_{slip} คือ ค่าความเร็วลื่นไถลในแนวแกน ที่ผนังตาย

v_{mean} คือ ค่าความเร็วเฉลี่ย

α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่ผนังตาย

τ คือ ค่าความเค้นเฉือนที่บริเวณผนังตาย

τ_{crit} คือ ค่าความเค้นเฉือนวิกฤต

3.12 เกณฑ์การลู่เข้า (Convergence criterion)

เมื่อต้องการยุติการคำนวณหาค่าประมาณของผลเฉลยที่ลู่เข้าสู่ค่าหนึ่งให้ทำการเปรียบเทียบค่าผลเฉลยรอบที่ k กับรอบที่ $k-1$ ว่ามีผลแตกต่างกันน้อยกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณามีหลายรูปแบบ เช่น การหาค่าความคลาดเคลื่อนด้วยความผิดพลาดสัมบูรณ์ หรือความผิดพลาดสัมพัทธ์ หรือความผิดพลาดกำลังสองน้อยสุด เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้ใช้การหาความคลาดเคลื่อนด้วยความผิดพลาดสัมพัทธ์แบบอินฟินิตีโนอร์ม (infinity norm) หรือแมกซิมัมนอร์ม (maximum norm) และแบบสแควร์โนอร์ม (square norm) มาใช้เป็นเกณฑ์การลู่เข้า ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\|E(x)\|_{\infty} = \frac{\max \|x_i^k - x_i^{k-1}\|}{\max \|x_i^k\|} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

และ

$$\|E(x)\|_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i^{k-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k)^2}} \leq \varepsilon$$

เมื่อ k คือ time step

n คือ จำนวนตัวแปร

โดยที่ ε เป็นค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้ (stopping tolerance) ในงานวิจัยนี้ให้ $\varepsilon < 10^{-6}$ หากค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 แบบยังไม่ลู่เข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนดหรือมีค่ามากกว่าค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้ก็ให้ทำการย้อนกลับไปคำนวณใหม่จนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 แบบลู่เข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนดหรือมีค่าน้อยกว่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

บทที่ 4

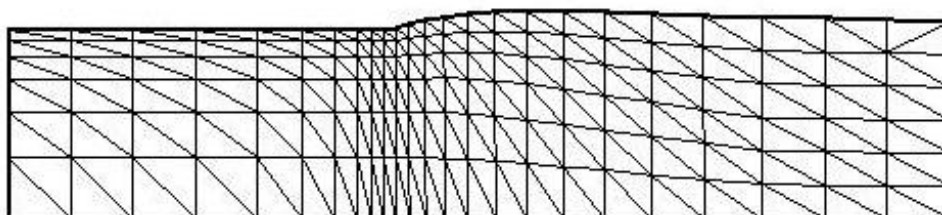
การบวมตัวและการไหลเคลือบสวด (Die-swell with Drag and Wire-coating Flow)

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาผลกระทบของการลื่นไหลที่บริเวณผนังตายของปัญหาการบวมตัวของ การไหลที่มีแรงลาก (die-swell with drag) และปัญหาการไหลเคลือบสวด สำหรับปัญหาการไหลเคลือบสวดจะพิจารณาดายแบบเพอร์เซอร์ทูลิ่งและแบบทิวบ์ทูลิ่ง ที่มีพอลิเมอร์หลอมเหลว HDPE หรือพอลิเอธิลีนที่มีความหนาแน่นสูงไหลผ่านตาย พอลิเมอร์หลอมเหลวชนิดนี้จัดเป็นกลุ่มของซูโดพลาสติกซึ่งเป็นของไหลนอนนิวโตเนียนที่ไม่ขึ้นกับเวลาชนิดวิสโคอีลาสติก และใช้สมการองค์ประกอบเป็นตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์รูปแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เนื่องจากพอลิเมอร์ที่ใช้ในการศึกษามีความเป็นอีลาสติกสูงจึงใช้ตัวแบบแพนเทียนแทนเนอร์ในการอธิบายพฤติกรรมของของไหลวิสโคอีลาสติก เนื่องจากตัวแบบนี้สามารถแทนลักษณะของไหลที่มีความยืดหยุ่นได้สูง โดยพิจารณาจากตัวเลขไวเซนเบิร์ก (We) เช่นในงานวิจัยนี้พิจารณาค่า We ได้สูงถึง 200 เมื่อเทียบกับตัวแบบอื่นๆ ที่แทนค่า We ได้ไม่ถึงร้อย และกำหนดค่าพารามิเตอร์ของ $\varepsilon = 1$, $\xi = 0$ และ $\mu_v = 0.99$ (ePTT(1, 0, 0.99)) [23] ความเร็วลื่นไหลที่ผนังตายพิจารณาตามกฎการลื่นไหลแพนเทียนเพราะนำค่าความเค้นเฉือนมาพิจารณาว่าบริเวณใดที่มีการปรับความเร็ว

4.1 การบวมตัวของ การไหลที่มีแรงลาก (Die-swell with drag flow)

4.1.1 ข้อกำหนดของปัญหา (problem specification)

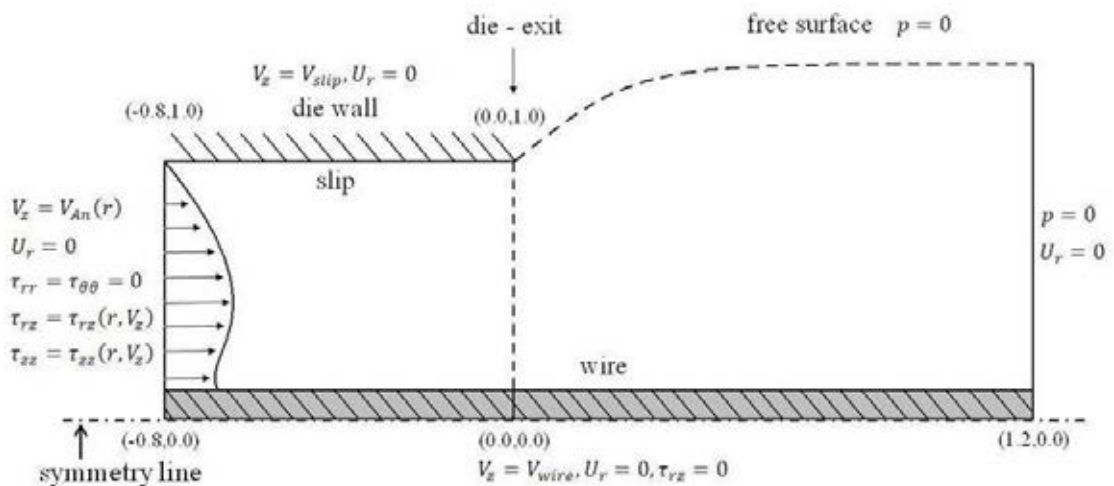
ศึกษาผลกระทบของการลื่นไหลที่บริเวณผนังตายของปัญหาการบวมตัวของ การไหลที่มีแรงลากซึ่งเป็นส่วนปลายตายของตายชนิดเพอร์เซอร์ทูลิ่งโดยพัฒนามาจากการศึกษาของ Baloch และคณะ [22] และแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นชั้นประกอบแบบละเอียดรูปสามเหลี่ยม 6 โหนดดังรูปที่ 4.1 และตารางที่ 4.1 ดังเงื่อนไขขอบรูปที่ 4.2 โดยที่ของไหลไหลเข้าบริเวณทางเข้าตาย (inlet) เป็นการไหลแบบวงแหวน (annular flow) ดังคำอธิบายในภาคผนวก ก และการไหลบริเวณทางออกเป็นแบบปลั๊ก (plug flow) ความเค้นเฉือนและความเค้นฉากที่ทางเข้าตายได้กำหนดค่าไว้ในภาคผนวก ข ความเร็วของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่เส้นสมมาตรของตายมีความเร็วเท่ากับความเร็วของลวดสายไฟคือ 1 หน่วย ความกว้างของตายเท่ากับ 1 หน่วย รัศมีของลวดสายไฟเท่ากับ 0.6 หน่วย ความยาวตายเท่ากับ 0.8 หน่วย และความยาวการไหลที่ไหลออกมาจากตายเท่ากับ 1.2 หน่วย ทั้งนี้ความเร็วของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่บริเวณผนังตายมีค่าเท่ากับความเร็วลื่นไหลตามกฎของแพนเทียน



รูปที่ 4.1 แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการบวมตัวของ การไหลที่มีแรงลาก

ตารางที่ 4.1 ข้อมูลรายละเอียดขึ้นประกอบย่อยของปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลาก

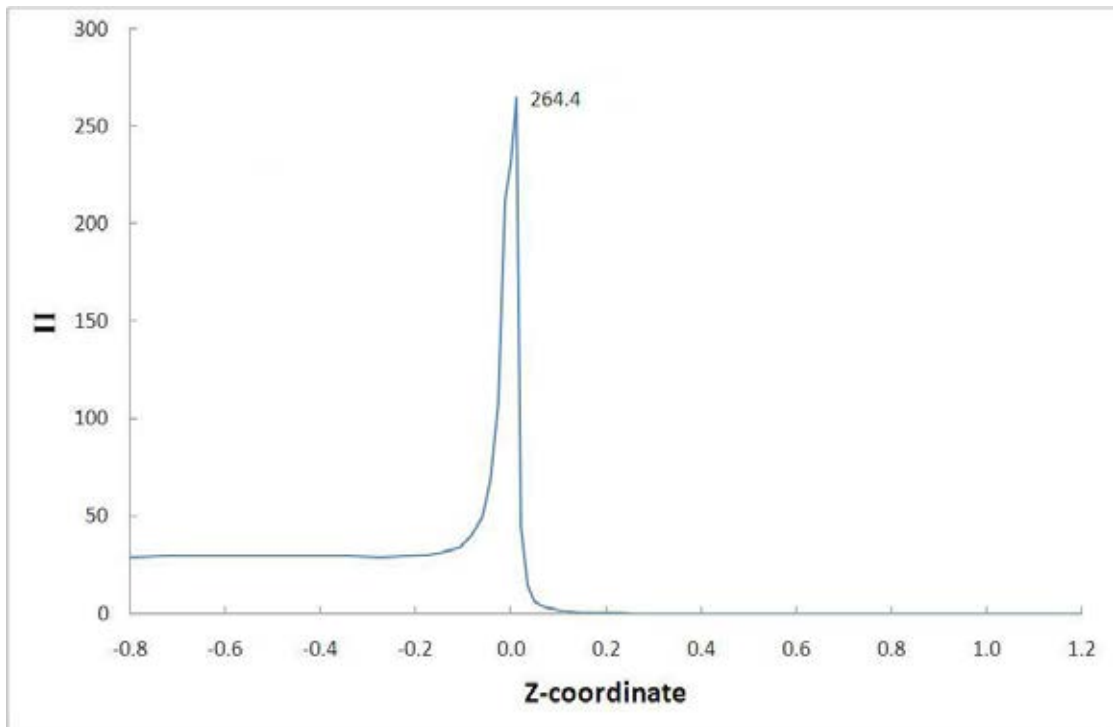
ชนิดขึ้นประกอบ	จำนวนขึ้นประกอบ	จำนวนโหนด	ดีกรีความอิสระ
ขึ้นประกอบสามเหลี่ยมแบบละเอียด	288	637	3997



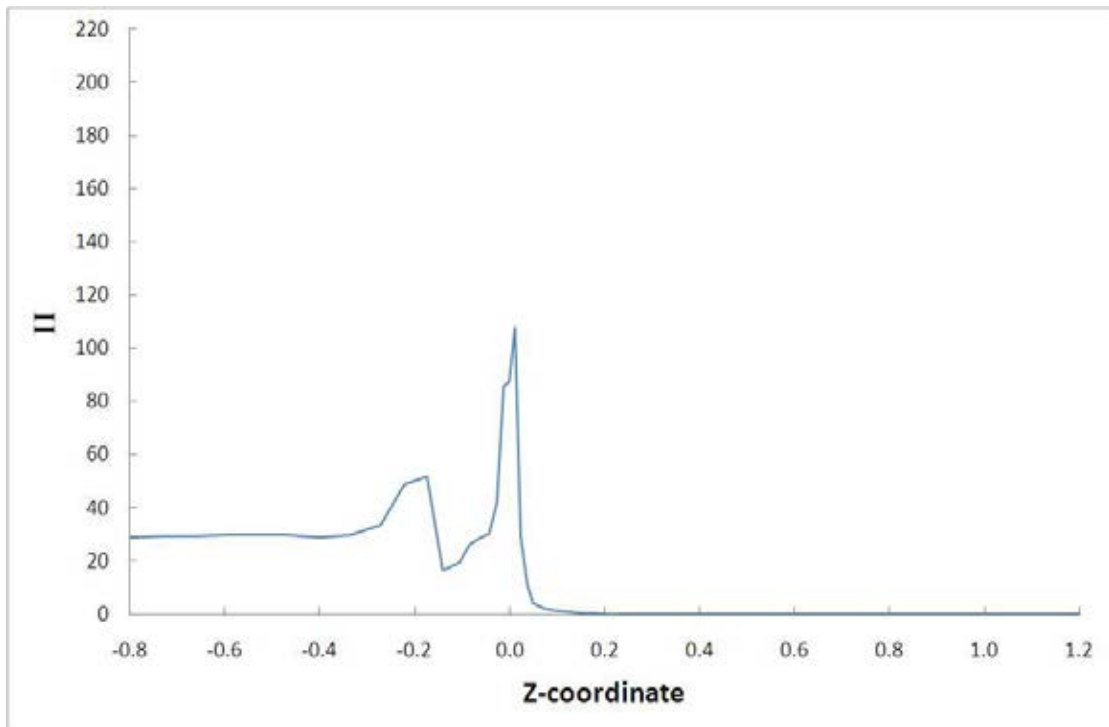
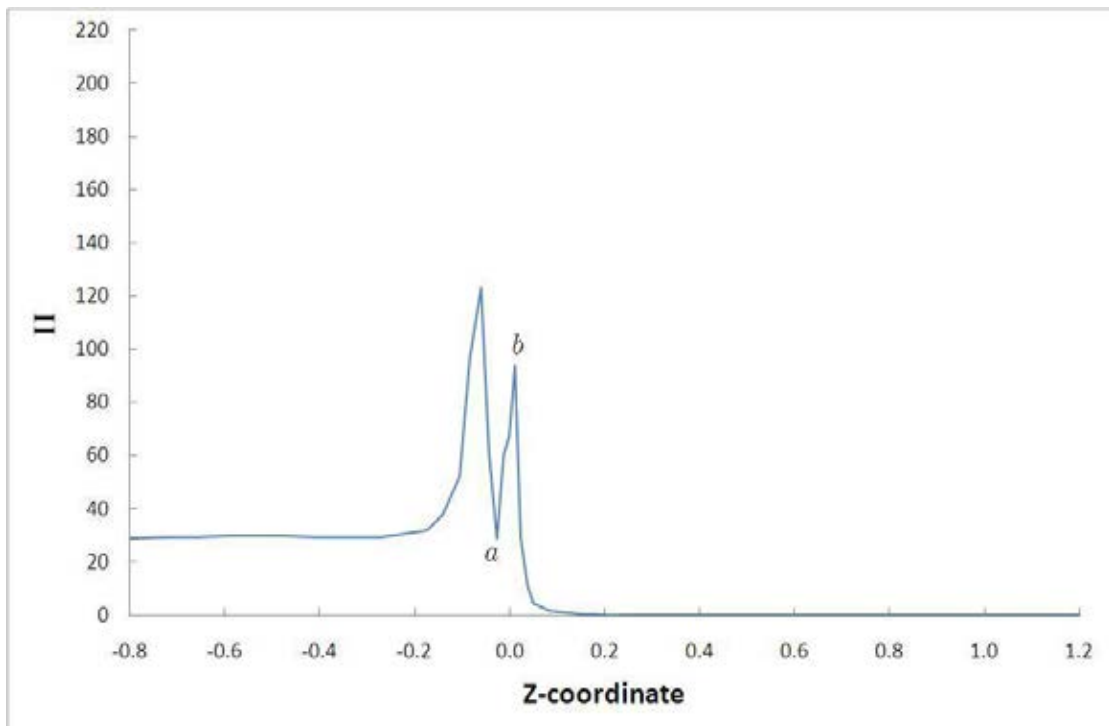
รูปที่ 4.2 ลักษณะปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลาก

4.1.2 ผลที่ได้รับ (Result)

เมื่อพิจารณาผลการศึกษาของ Baloch และคณะ [23] พบว่าที่บริเวณผนังภายในตายจะมีค่าความเค้นเฉือนสูงรวมทั้งมีค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์อัตราการผลิตรูป (II) สูงในลักษณะเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.3 จากกฎการลื่นไหลแพนเทียนพบว่าการหาความเร็วลื่นไหลคำนวณจากการใช้อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนและความเค้นเฉือนวิกฤต และเนื่องจากค่าความแปรผันอันดับที่สองเป็นค่าบอกขนาดของความเค้นเฉือน ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงใช้ค่าความแปรผันอันดับที่สองแทนค่าความเค้นเฉือน ในการคำนวณหาความเร็วลื่นไหลที่บริเวณผนังตายจากการเลือกใช้ค่าวิกฤตของความแปรผันอันดับที่สอง (II_{crit}) และค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไหลที่ผนังตาย (α) อย่างเหมาะสม การกำหนดค่าสองค่านี้ให้เริ่มจากการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไหลที่ผนังตาย และทำการเลือกค่าความแปรผันอันดับที่สองวิกฤตโดยพิจารณาจากรูปที่ 4.3 โดยใช้ค่า II_{crit} เท่ากับ 30, 60, 100 และ 150 เพื่อทำการคำนวณใหม่ ดังนั้นค่าความแปรผันอันดับที่สองที่ผนังตายและผิวอิสระจะมีการเปลี่ยนแปลงไปตามค่า II_{crit} ที่ใช้ ดังแสดงในรูปที่ 4.4

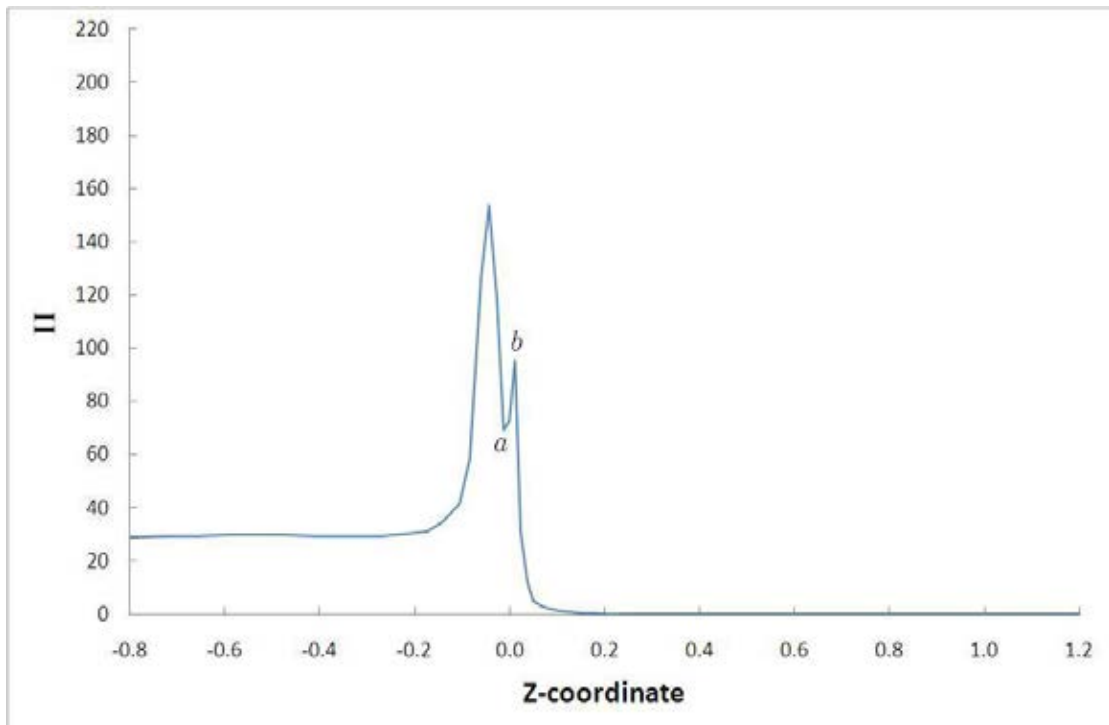
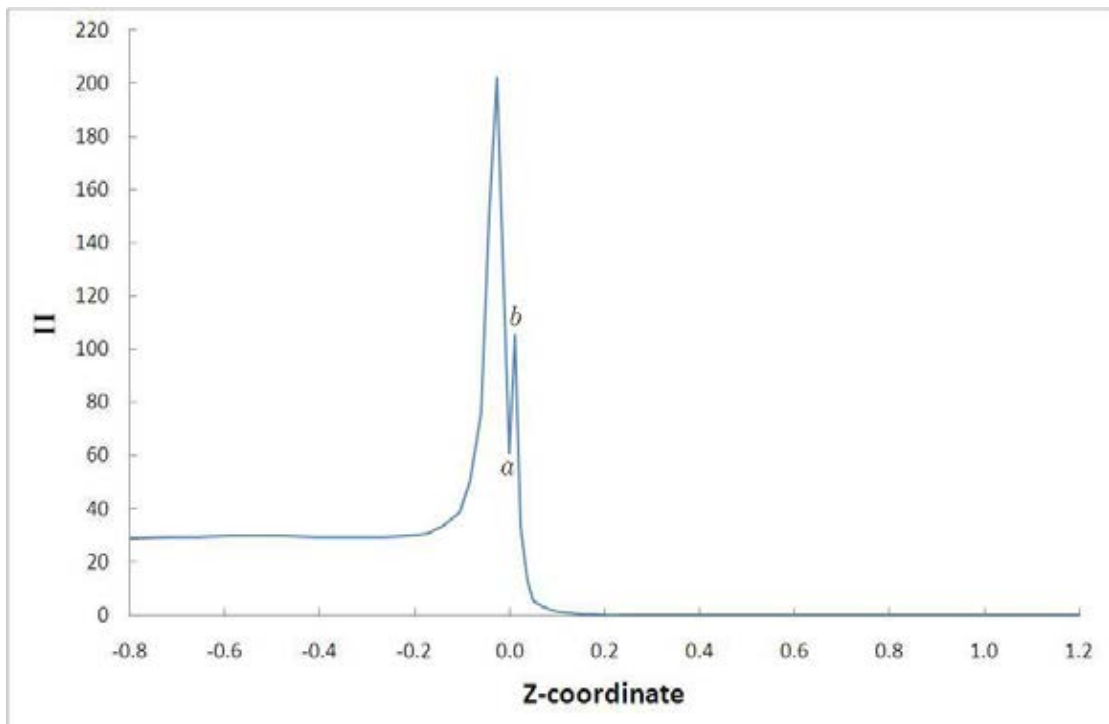


รูปที่ 4.3 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของคาร์โกลที่มีแรงลากที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่บริเวณผนังตาย

(ก) $H_{crit} = 30$ (ข) $H_{crit} = 60$

รูปที่ 4.4 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

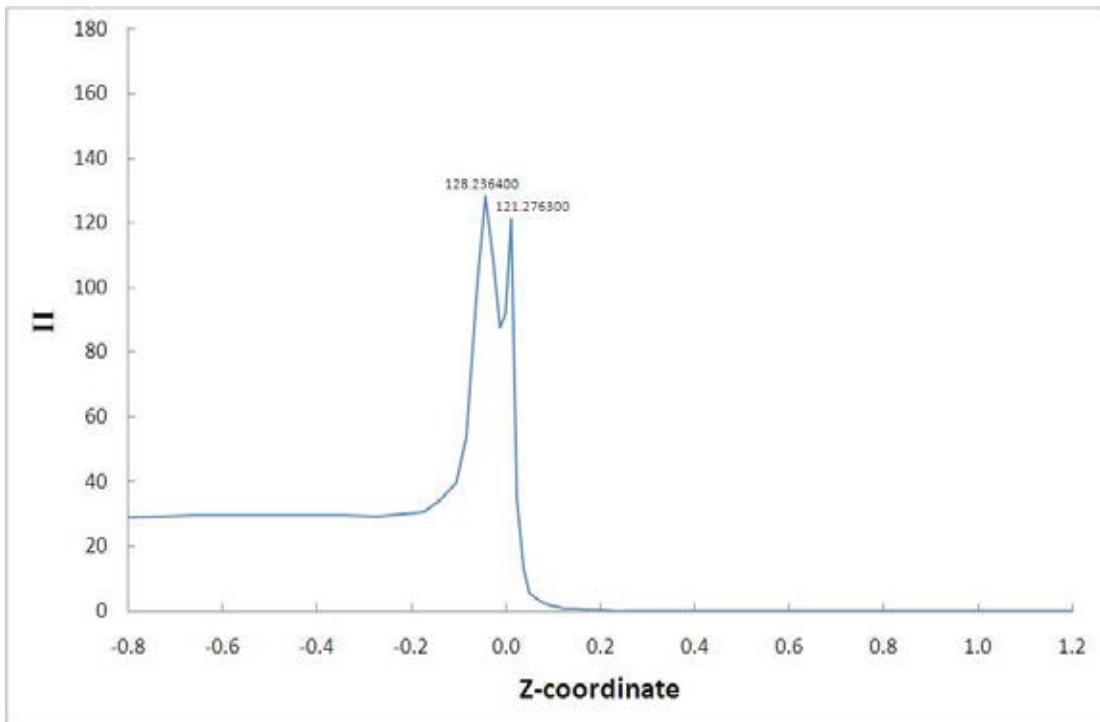
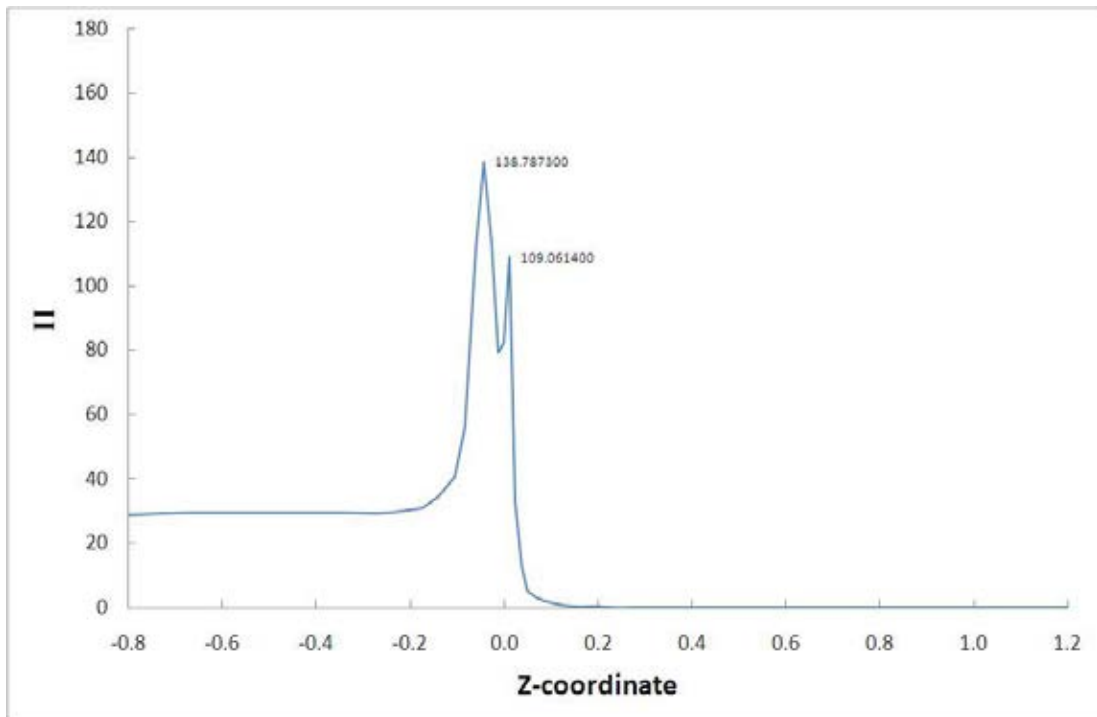
(ก) $H_{crit} = 30$, (ข) $H_{crit} = 60$, (ค) $H_{crit} = 100$ และ (ง) $H_{crit} = 150$

(ค) $H_{crit} = 100$ (ง) $H_{crit} = 150$

รูปที่ 4.4 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

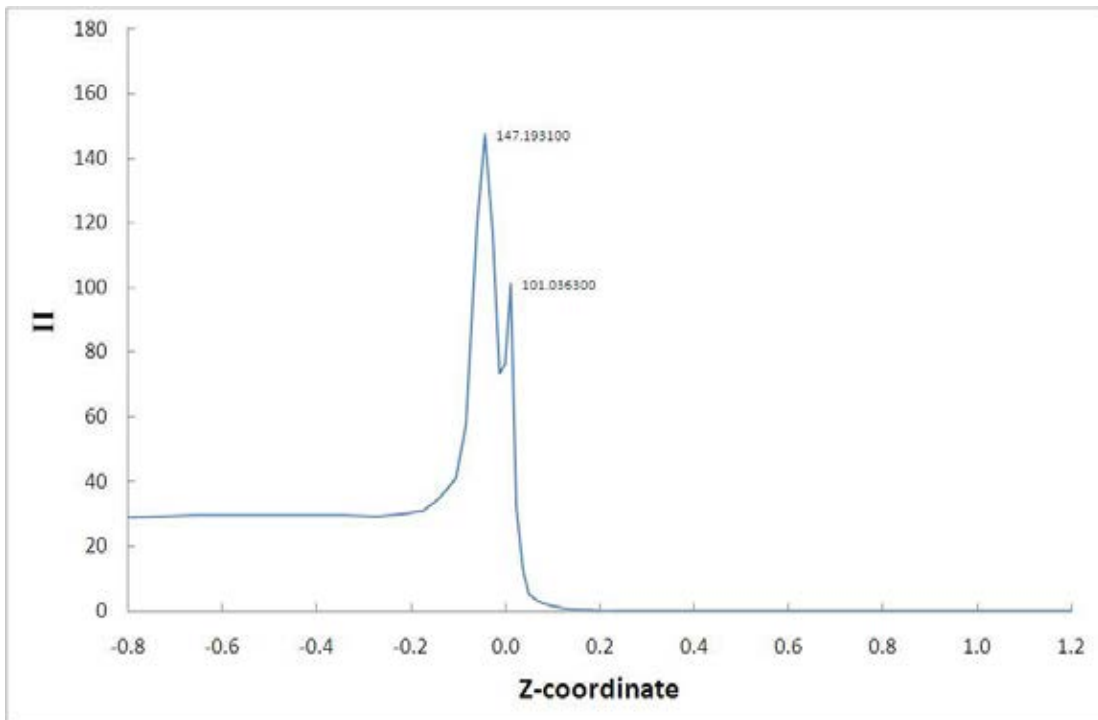
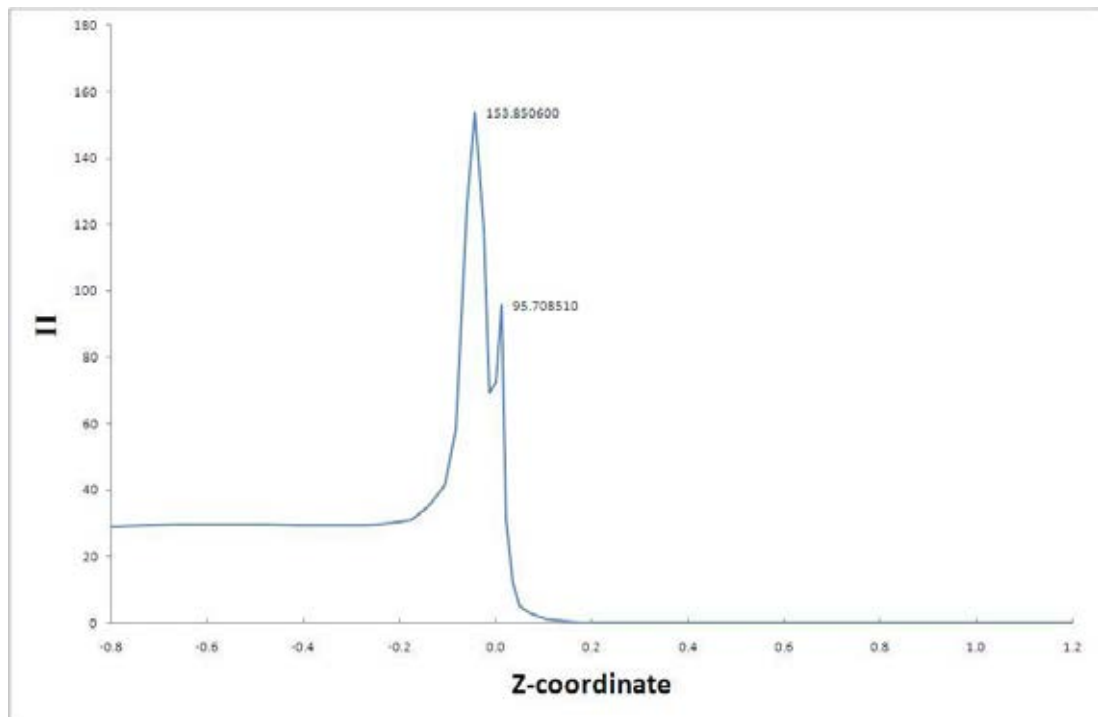
(ก) $H_{crit} = 30$, (ข) $H_{crit} = 60$, (ค) $H_{crit} = 100$ และ (ง) $H_{crit} = 150$

รูปที่ 4.4(ก) มีค่าความแปรผันอันดับที่สองภายในตายสูงขึ้นเล็กน้อยแล้วลดต่ำลงก่อนจะเพิ่มสูงขึ้นที่บริเวณปลายตาย ในขณะที่รูปที่ 4.4(ข) ค่าความแปรผันอันดับที่สองที่บริเวณภายในตายมีค่าสูงมากกว่าบริเวณปลายตายซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับในรูปที่ 4.4(ค) และรูปที่ 4.4(ง) แต่ค่าความแปรผันอันดับที่สองของรูปที่ 4.4(ข) และรูปที่ 4.4(ง) มีความแตกต่างของการเปลี่ยนแปลงก่อนออกปลายตาย $(b-a)$ มีค่ามากกว่ารูปที่ 4.4(ค) ซึ่งการที่ค่าความแปรผันอันดับที่สองมีการเปลี่ยนแปลงมากขึ้นไม่เป็นผลดีต่อการบวมตัวและอาจทำให้เกิดรอยฟืนฉลามที่ผิวของชิ้นงานได้ดังนั้นให้หลีกเลี่ยงการเกิดรอยฟืนฉลามเพื่อได้ชิ้นงานที่ใช้ได้จึงเลือกค่าความแปรผันอันดับสองวิกฤตที่เหมาะสมเป็น 100 จากนั้นทำการหาค่า α ที่เหมาะสมโดยทำการคำนวณใหม่อีกครั้งที่ค่า $II_{crit} = 100$ และแปรผันค่า α เป็น 0.55, 0.70, 0.85 และ 1.0 ผลที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 4.5 ลักษณะของค่าความแปรผันอันดับที่สองในรูปที่ 4.5 มีความคล้ายคลึงกันสำหรับค่า α ต่างๆ ที่นำมาพิจารณา โดยใช้ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรผันอันดับที่สองที่มากที่สุดบริเวณภายในตายและบริเวณปลายตาย ได้ผลดังแสดงในรูปที่ 4.6 และพบว่า ที่ค่า $\alpha = 0.7$ ให้ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรผันอันดับสองที่มากที่สุดบริเวณภายในตายและบริเวณปลายตายมีค่าต่ำที่สุด ดังนั้นค่าความแปรผันอันดับสองวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นไกลที่เหมาะสม คือ 100 และ 0.7 สุดท้ายนำค่าของ II_{crit} และ α ที่เหมาะสมมาหาผลเฉลยดังแสดงผลในรูปแบบของแถบสีสำหรับค่าต่างๆ ในรูปที่ 4.7 ซึ่งพบว่าความเร็วของการไหลในแนวแกน r มีค่าน้อยมากจนเกือบเป็นศูนย์ยกเว้นที่บริเวณปลายตายมีค่าสูงกว่าที่อื่นเพราะเกิดการบวมตัวขึ้นเมื่อไหลออกจากตายดังรูปที่ 4.7(ก) ส่วนการไหลเข้ามาในตายเป็นการไหลแบบวงแหวนทำให้ความเร็วในแนวแกน z มีค่าสูงสุดด้านล่างเกือบถึงบริเวณเส้นลวดดังรูปที่ 4.7(ข) สำหรับรูปที่ 4.7(ค) แสดงให้เห็นว่าความดันมีค่าสูงสุดที่ทางเข้าตายและค่อยๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ที่ทางออกตายเนื่องจากเกิดแรงเสียดทานด้านการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลว สำหรับอัตราเฉือนที่แสดงในรูปที่ 4.7(ง) มีค่าสูงสุดที่บริเวณปลายตาย เพราะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหลคือเกิดการบวมตัวขึ้น และบริเวณที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากตายและเกิดการบวมตัวมีค่าของอัตราการยืดสูงสุดดังแสดงในรูปที่ 4.7(จ) เนื่องจากสมมติฐานที่ให้พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลเป็นชั้นราบเรียบทำให้ความเค้นฉาก τ_{rr} มีค่าน้อยมากเกือบเป็นศูนย์ดังแสดงในรูปที่ 4.7(ฉ) ส่วนความเค้นเฉือน τ_{rz} แสดงในรูปที่ 4.7(ช) มีค่ามากที่สุดที่ทางเข้าตายบริเวณเส้นลวดเนื่องจากมีแรงลากทำให้พอลิเมอร์หลอมเหลวที่ติดกับเส้นลวดมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง และมีค่ามากบริเวณทางออกตายเพราะพอลิเมอร์หลอมเหลวเกิดการบวมตัวขึ้น และสำหรับความเค้นฉาก τ_{zz} มีค่าสูงสุดที่บริเวณผนังตายใกล้ปลายตายเนื่องจากพอลิเมอร์หลอมเหลวถูกลากไปโดยแรงของลวดตามแนวแกน z และถูกผลักออกจากตายด้วยแรงที่มาก ดังรูปที่ 4.7(ซ)

(ก) $\alpha = 0.55$ (ข) $\alpha = 0.70$

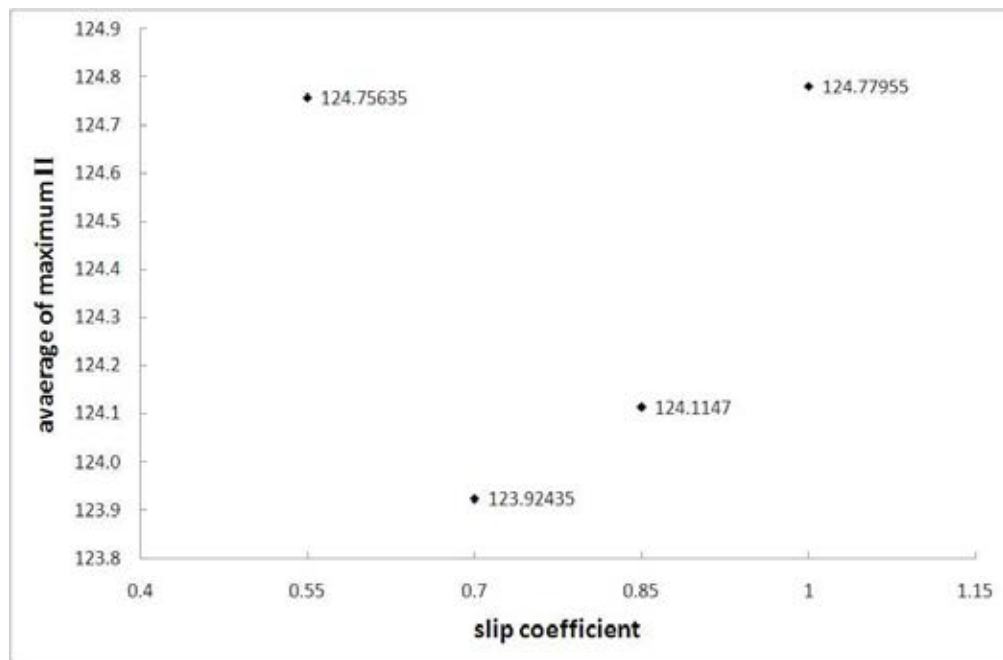
รูปที่ 4.5 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $II_{crit} = 100$:

(ก) $\alpha = 0.55$, (ข) $\alpha = 0.7$, (ค) $\alpha = 0.85$ และ (ง) $\alpha = 1.0$

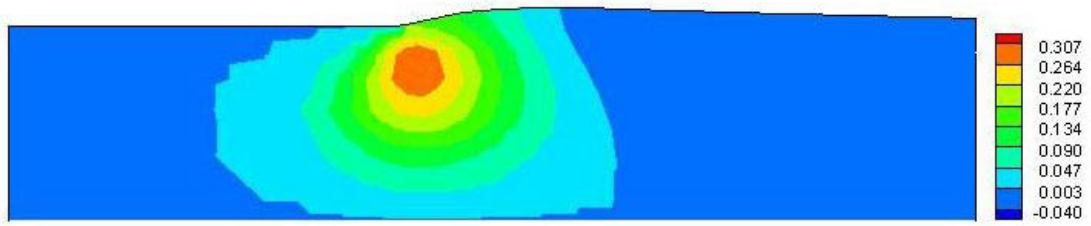
(ค) $\alpha = 0.85$ (ง) $\alpha = 1.0$

รูปที่ 4.5 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $II_{crit} = 100$:

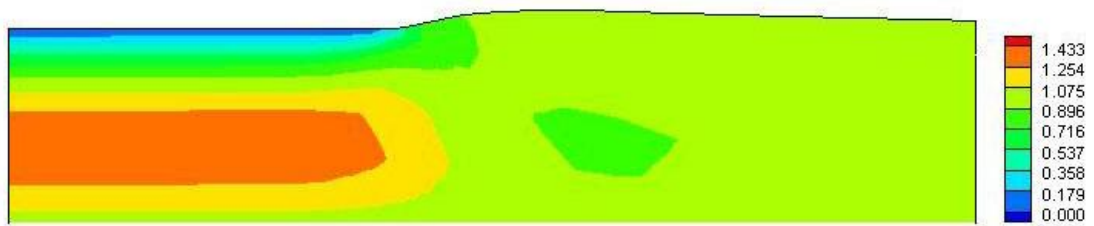
(ก) $\alpha = 0.55$, (ข) $\alpha = 0.7$, (ค) $\alpha = 0.85$ และ (ง) $\alpha = 1.0$



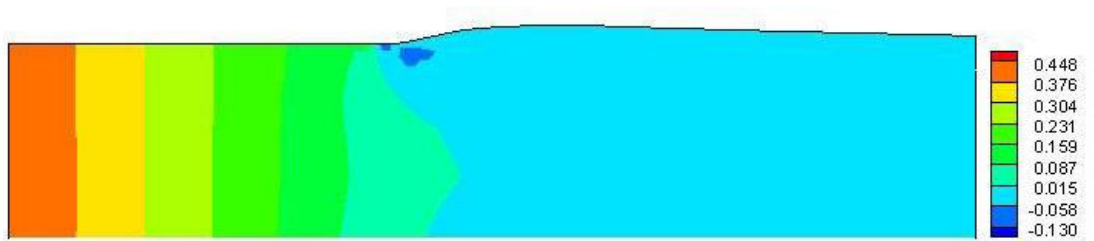
รูปที่ 4.6 ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรผันอันดับที่สองที่มากที่สุดบริเวณภายในตายและบริเวณปลายตาย



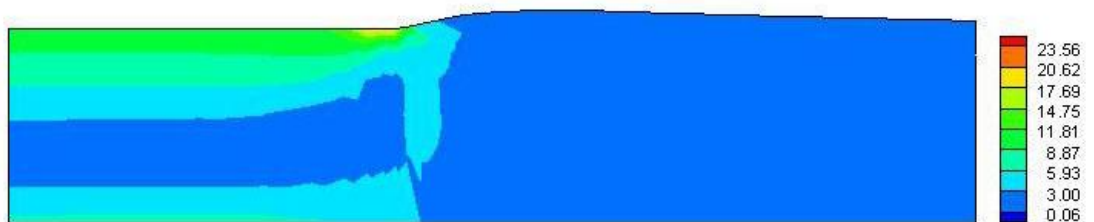
(ก) U_r



(ข) V_z



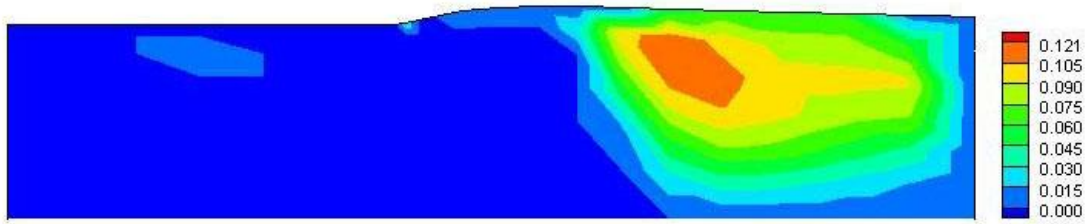
(ค) Pressure



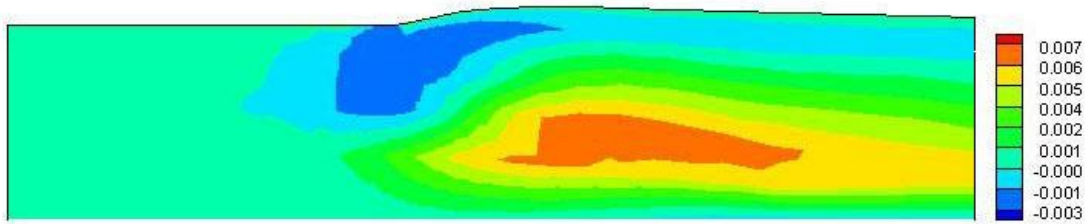
(ง) Shear-rate

รูปที่ 4.7 ปัญหาการบวมตัวของกรไหลที่มีแรงลาก: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี;

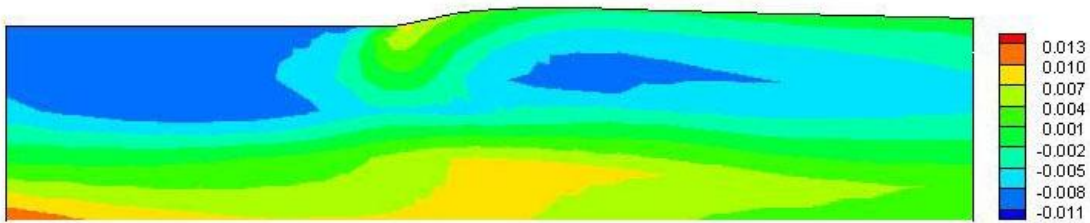
(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}



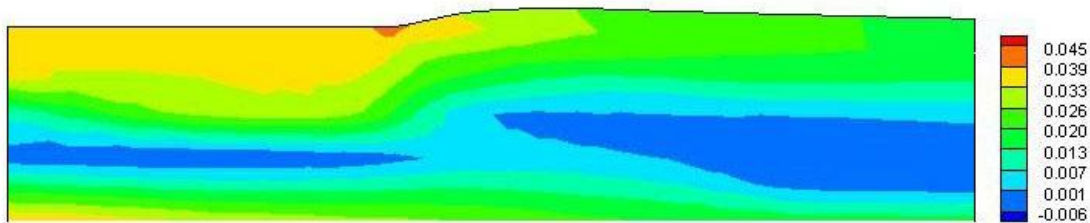
(จ) Extension-rate



(ฉ) τ_{rr}



(ช) τ_{rz}



(ซ) τ_{zz}

รูปที่ 4.7 ปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลาก: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี;

(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการบวมตัวของการไหลที่มีแรงลากที่ไม่พิจารณาการลื่นไถลที่ผนังตาย และพิจารณาการลื่นไถลที่ผนังตาย

ผลเฉลย	Baloch*	D. D.**
$\dot{\gamma}$ max	31.35	23.56
$\dot{\epsilon}$ max	0.144	0.121
Δp	0.462	0.448
τ_{rz} max	0.014	0.013
τ_{zz} max	0.041	0.045
χ	1.054	1.039

* ผลเฉลยจาก Baloch และคณะ [23]

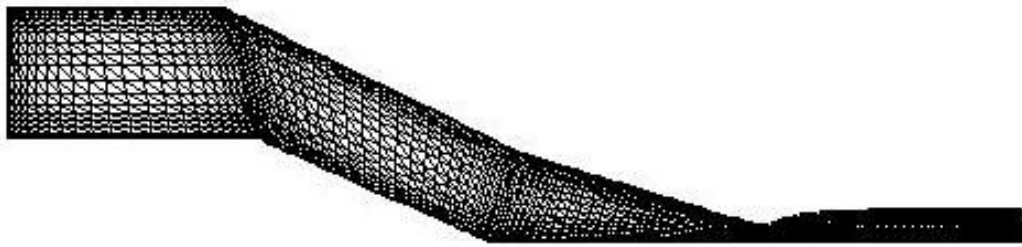
** ผลเฉลยจากปัญหาการบวมตัวของการไหลที่มีแรงลากที่พิจารณาผลกระทบของการลื่นไถลที่ผนังตายในงานวิจัยนี้

จากตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าผลเฉลยของปัญหาการบวมตัวของการไหลที่มีแรงลากระหว่างการไม่พิจารณาผลกระทบการลื่นไถลที่ผนังตายและการพิจารณาผลกระทบการลื่นไถลที่ผนังตาย พบว่าเมื่อเพิ่มเงื่อนไขการลื่นไถลบริเวณผนังตายเข้าไปทำให้อัตราเฉือน อัตรายืด และความดันลด (pressure drop) ลดลงส่งผลให้อัตราการบวมตัวลดลง และทำให้ค่าความแปรผันอันดับสองของอัตราการผิดรูปที่ผนังตายสูงสุดมีค่าลดลงจาก 264.4 ดังแสดงค่าในรูปที่ 4.3 เป็น 138.8 ดังแสดงค่าในรูปที่ 4.5(ข)

4.2 การไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง (Pressure-tooling wire-coating flow)

4.2.1 ข้อกำหนดของปัญหา (problem specification)

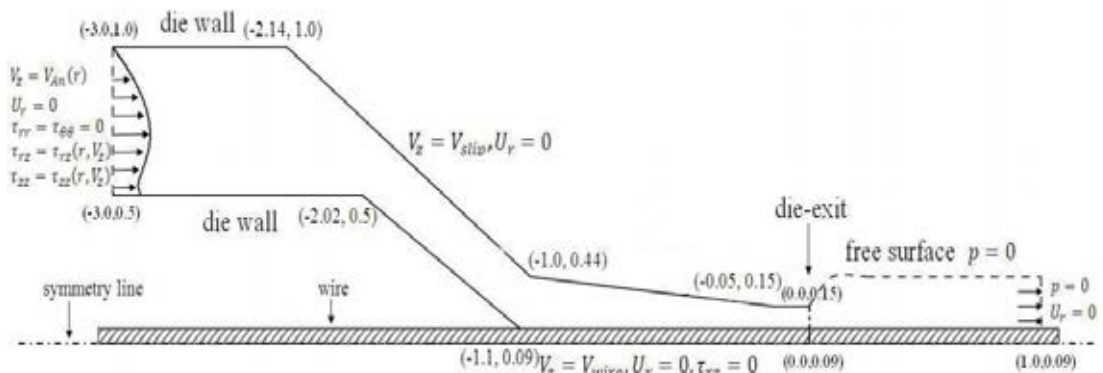
การศึกษาปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งเป็นการศึกษาต่อจาก Baloch และคณะ [23] ซึ่งแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยม แบบละเอียด ดังรูปที่ 4.8 และตารางที่ 4.3 โดยมีเงื่อนไขขอบของปัญหาดังรูปที่ 4.9 คือ การไหลที่เข้าด้ายเป็นการไหลแบบวงแหวนมีค่าความเร็วขึ้นกับรัศมี r ดังภาคผนวก ก ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าความเร็วที่ผนังด้ายไม่เป็นศูนย์ และการไหลที่ทางออกด้ายพัฒนาเป็นการไหลแบบพลัก ที่บริเวณเส้นสมมาตรความเร็วของพอลิเมอร์ที่ติดกับเส้นลวดมีความเร็วเท่ากับเส้นลวด คือ 1 ทางเข้าด้ายมีขนาดกว้าง 0.5 หน่วย ยาว 3 หน่วย ปลายด้ายมีความกว้าง 0.06 หน่วย และความยาวการไหลที่ไหลออกจากปลายด้ายมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย ความเค้นเฉือนและความเค้นฉากเป็นฟังก์ชันของรัศมี r และความเร็วในแนวแกน z (V_z) ดังกำหนดไว้ในภาคผนวก ข



รูปที่ 4.8 แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง

ตารางที่ 4.3 ข้อมูลรายละเอียดชั้นประกอบย่อยของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง

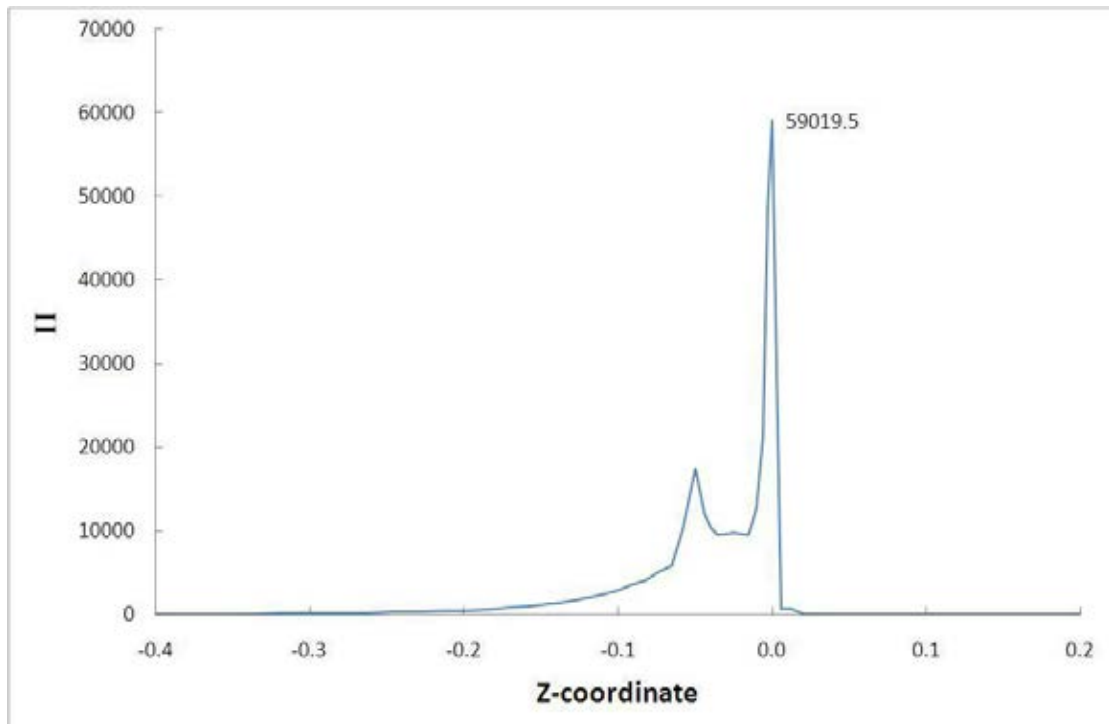
ชนิดชั้นประกอบ	จำนวนชั้นประกอบ	จำนวนโหนด	ดีกรีความอิสระ
ชั้นประกอบสามเหลี่ยมแบบละเอียด	3810	7905	49478



รูปที่ 4.9 ลักษณะปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง

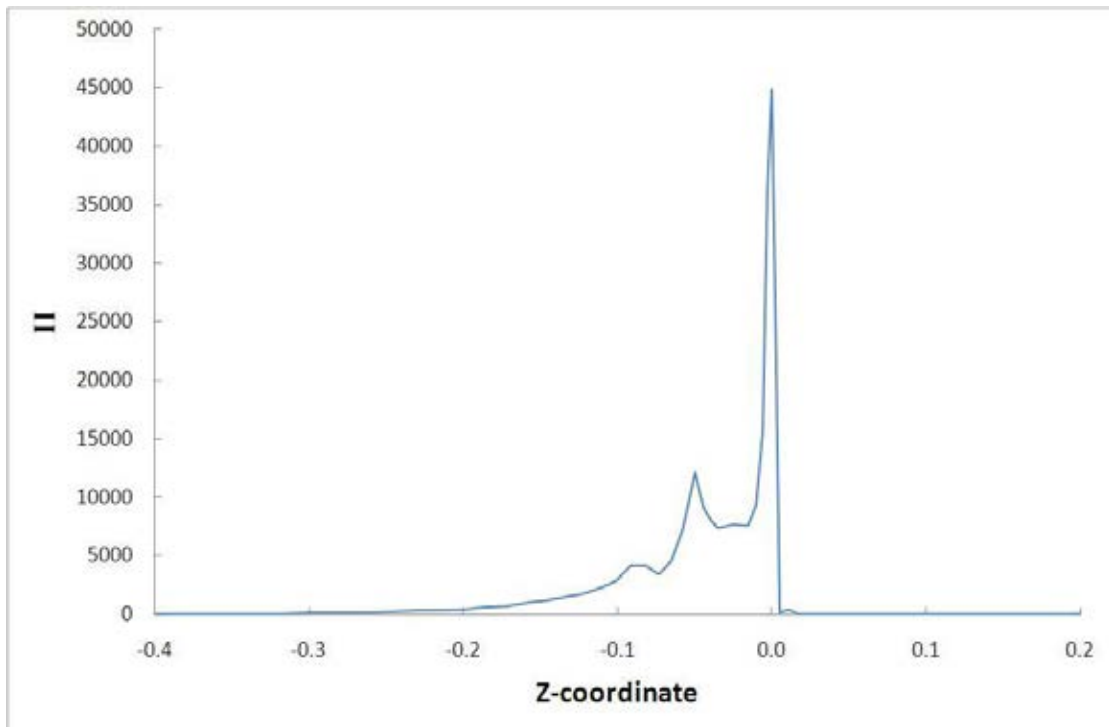
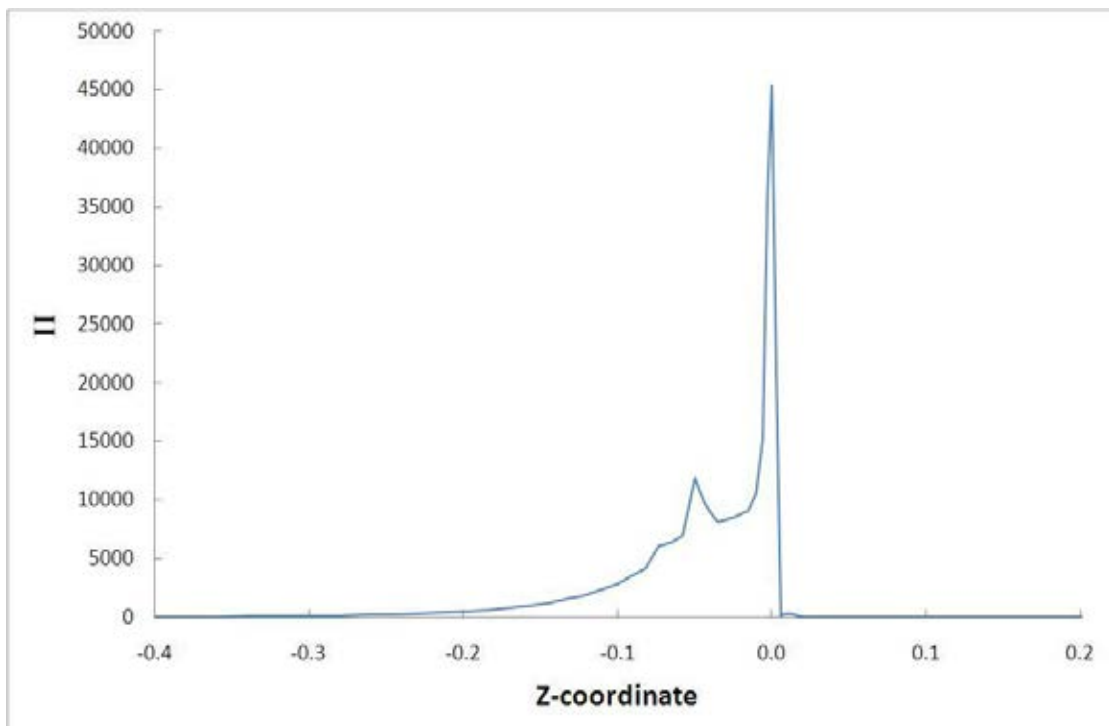
4.2.2 ผลที่ได้รับ (result)

เมื่อพิจารณาผลการศึกษาของ Baloch และคณะ [23] ได้ค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของ การไหลเคลื่อนที่บนเส้นลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่ผนังตาย ดังแสดงในรูปที่ 4.10



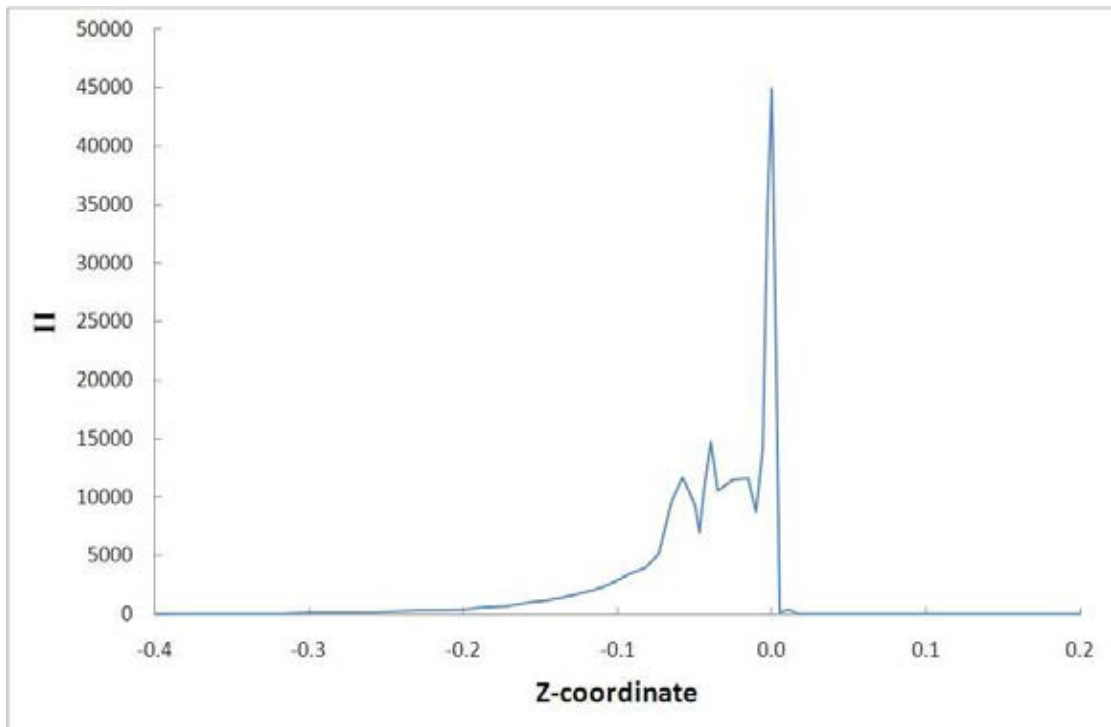
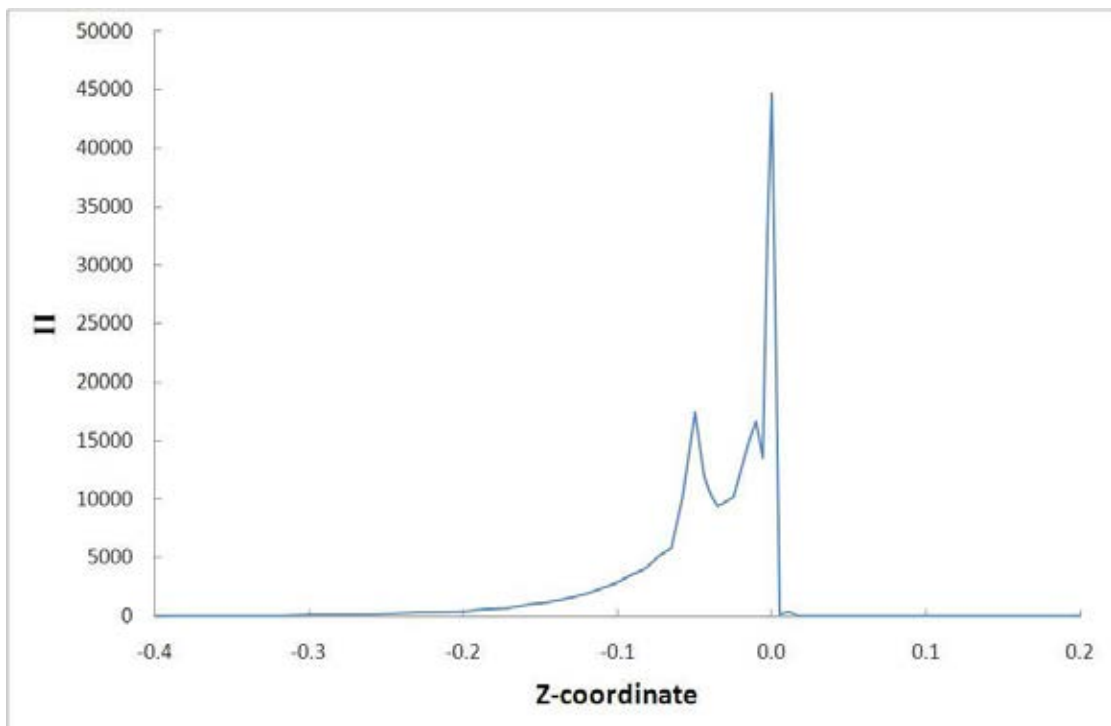
รูปที่ 4.10 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของ การไหลเคลื่อนที่บนเส้นลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งที่ไม่พิจารณาผลของการเลื่อนไหลที่บริเวณผนังตาย

ค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปมีค่าสูง จึงพิจารณาผลกระทบของการเลื่อนไหลโดยใช้กฎการเลื่อนไหลแพนเทียนที่บริเวณผนังตาย จากการเลือกพิจารณาค่าความแปรผันอันดับที่สอง 4 ค่า คือ 4500, 9000, 11000 และ 20000 และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การเลื่อนไหลที่ผนังตายเป็น 1.0 เพื่อทำการคำนวณอีกครั้งทำให้ได้ค่าความแปรผันอันดับที่สองดังรูปที่ 4.11

(ก) $H_{crit} = 4500$ (ข) $H_{crit} = 9000$

รูปที่ 4.11 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

(ก) $H_{crit} = 4500$, (ข) $H_{crit} = 9000$, (ค) $H_{crit} = 11000$ และ (ง) $H_{crit} = 20000$

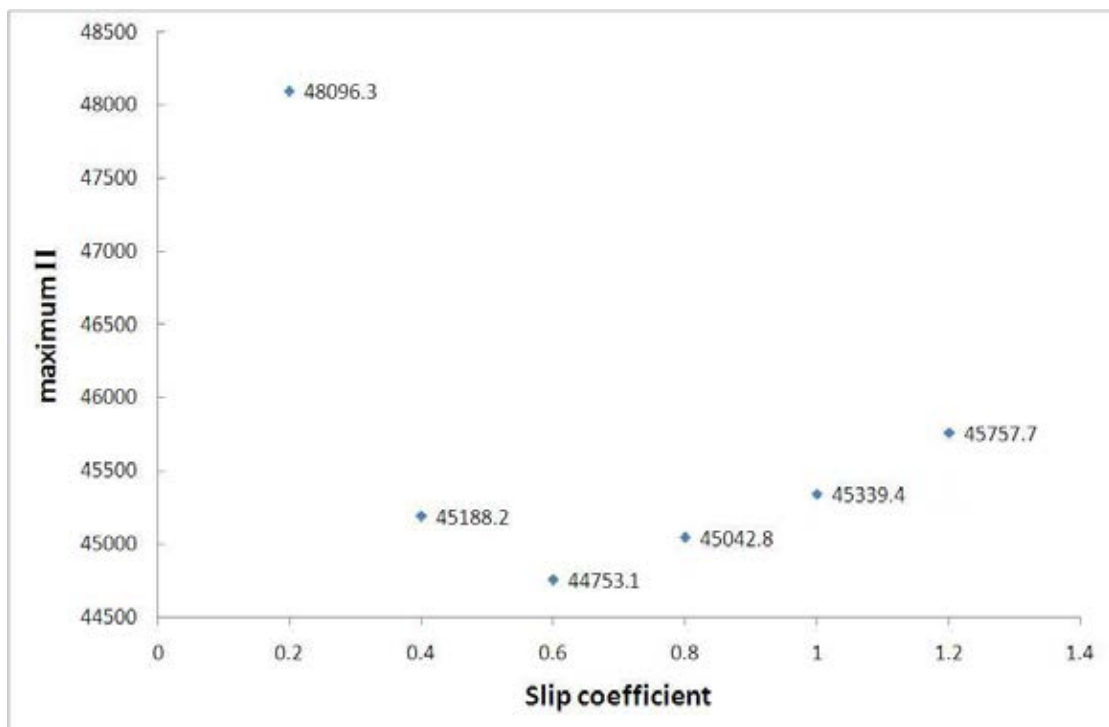
(ค) $H_{crit} = 11000$ (ง) $H_{crit} = 20000$

รูปที่ 4.11 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

(ก) $H_{crit} = 4500$, (ข) $H_{crit} = 9000$, (ค) $H_{crit} = 11000$ และ (ง) $H_{crit} = 20000$

ค่าความแปรผันอันดับที่สองเมื่อกำหนด $II_{crit} = 4500$ และ $II_{crit} = 9000$ ที่ผนังตาย บริเวณเข้าสู่ช่วงทางแคบก่อนถึงบริเวณทางออกตายมีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยก่อนจะเพิ่มมากขึ้นและมีค่าสูงสุดที่บริเวณปลายตายดังแสดงในรูป 4.11(ก) และรูป 4.11(ข) ส่วนค่าความแปรผันอันดับที่สองเมื่อกำหนดให้ $II_{crit} = 11000$ และ $II_{crit} = 20000$ มีความไม่ราบเรียบคล้ายการสั่นเล็กน้อยบริเวณ ช่วงทางแคบของตายก่อนออกสู่ปลายตาย และมีค่าสูงสุดที่บริเวณปลายตาย ดังแสดงในรูป 4.11(ค) และรูป 4.11(ง) ลักษณะการไม่ราบเรียบของค่าความแปรปรวนอันดับสองบริเวณผนังตายก่อนออกสู่ ปลายตายนี้อาจเกิดตำหนิขึ้นที่ชิ้นงานทำให้ผิวอิสระของพอลิเมอร์ที่เคลือบเส้นลวดขรุขระหรือเกิด รอยฟันฉลามได้ เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดรอยฟันฉลามและการเสียรูปทรงจึงเลือกค่าความแปรผันอันดับ ที่สองสำหรับ $II_{crit} = 9000$ เนื่องจากลักษณะกราฟของ $II_{crit} = 4500$ ใกล้เคียงกับลักษณะกราฟ ของ $II_{crit} = 9000$ แต่ค่า II ทางเข้าตายของ $II_{crit} = 9000$ มีความราบเรียบมากกว่า ดังนั้น ค่า ความแปรผันอันดับที่สองวิกฤตที่เหมาะสมสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งคือ 9000

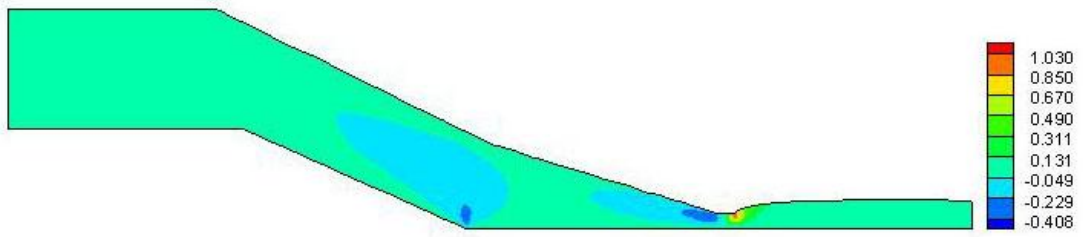
ใช้ค่าความแปรผันอันดับที่สองวิกฤตเป็น 9000 ในการพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถล ที่เหมาะสม โดยการคำนวณใหม่อีกครั้งด้วยค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลต่างๆ ที่เลือกใช้ คือ 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 และ 1.4 โดยแสดงผลการคำนวณเป็นค่าความแปรผันอันดับที่สองสูงสุดดังรูปที่ 4.12



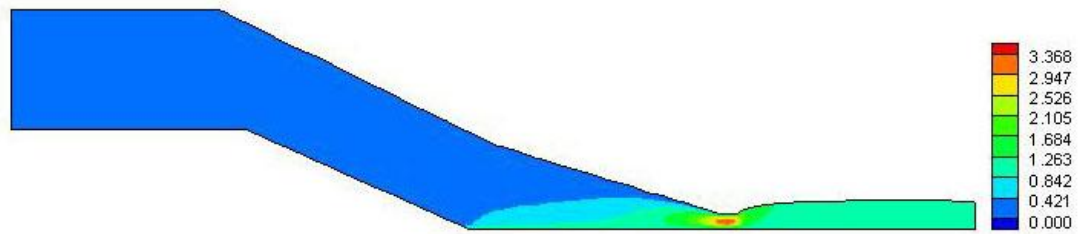
รูปที่ 4.12 ค่าความแปรผันอันดับที่สองสูงสุด เมื่อกำหนด $II_{crit} = 9000$ และแปรผันค่าสัมประสิทธิ์ การลื่นไถล

ค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่มีค่าเป็น 0.6 ให้ค่าความแปรผันอันดับที่สองสูงสุดน้อยกว่าค่า α อื่นๆ เนื่องจากค่าความแปรผันอันดับที่สองนี้เป็นตัวบ่งชี้ถึงอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล ดังนั้น ถ้าค่าความแปรผันอันดับที่สองสูง ของไหลมีโอกาสเกิดการเปลี่ยนรูปหรือผิดรูปสูง ดังนั้น เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองมีค่าเท่ากับ 0.6 ทำให้ชิ้นงานมีโอกาสเกิดการผิดรูปน้อยลง หรือผิวอิสระของลวดสายไฟที่เคลือบพอลิเมอร์หลอมเหลวแล้วขรุขระหรือเกิดรอยฟันฉลามน้อยที่สุด นั่นคือ ค่าความแปรผันอันดับที่สองวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่เหมาะสมสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบเพอร์ซอร์ทูลิ่งมีค่าเท่ากับ 9000 และ 0.6 ตามลำดับ

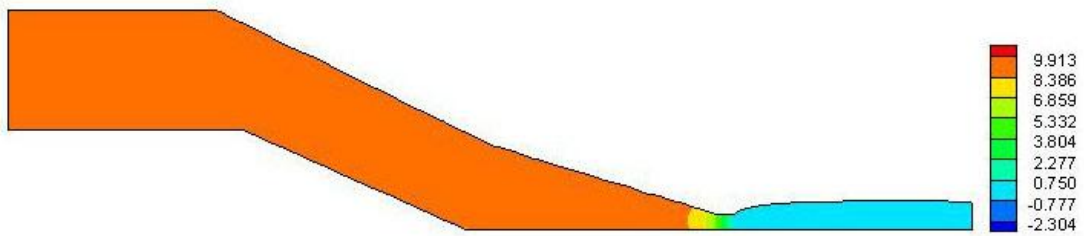
นำค่าความแปรผันอันดับที่สองวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่เหมาะสมมาคำนวณหาผลเฉลยแสดงผลลัพธ์เป็นแถบชั้นสีดังรูปที่ 4.13 ซึ่งพบว่าความเร็วในแนวแกน r ดังแสดงในรูปที่ 4.13(ก) มีค่าน้อยมากเกือบเป็นศูนย์เพราะกำหนดให้การไหลเป็นแบบราบเรียบ แต่มีค่ามากที่ปลายตายเนื่องจากพอลิเมอร์หลอมเหลวเกิดการบวมตัวขึ้น สำหรับความเร็วในแนวแกน z มีค่าเพิ่มขึ้นบริเวณใกล้เส้นลวด และมีค่าสูงสุดบริเวณทางแคบก่อนออกปลายตายดังแสดงในรูปที่ 4.13(ข) รูปที่ 4.13(ค) แสดงให้เห็นว่าความดันมีค่ามากเท่ากับ 9.9 ที่ทางเข้าตายและลดต่ำลงจนมีค่าเป็นศูนย์ที่ outlet อัตราเฉือนมีค่ามากที่สุดเท่ากับ 423.1 ที่ผนังตายบริเวณใกล้ทางออกตายดังรูปที่ 4.13(ง) อัตรายืดแสดงในรูปที่ 4.13(จ) มีค่าเพิ่มขึ้นที่บริเวณพอลิเมอร์หลอมเหลวสัมผัสเส้นลวดภายในตาย และมีค่าสูงสุดเท่ากับ 9.0 ที่จุดหักมุมก่อนเข้าทางแคบก่อนออกปลายตาย ความเค้นฉาก τ_{rr} และความเค้นเฉือน τ_{rz} มีค่าน้อยมากดังแสดงในรูปที่ 4.13(ฉ) และรูปที่ 4.13(ช) สำหรับความเค้นฉาก τ_{zz} ที่แสดงในรูปที่ 4.13(ซ) มีค่าเพิ่มสูงขึ้นที่บริเวณผนังปลายตายเนื่องจากพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลมารวมตัวกันมากที่บริเวณทางออกตาย และถูกผลักออกนอกตาย แต่มีค่าสูงสุดบริเวณที่พอลิเมอร์หลอมเหลวสัมผัสเส้นลวดภายในตาย



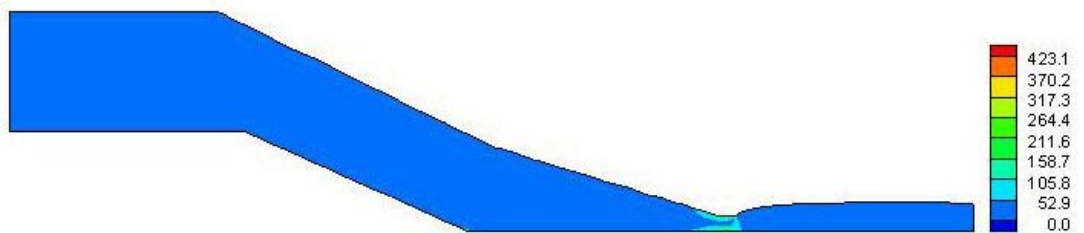
(ก) U_r



(ข) V_z



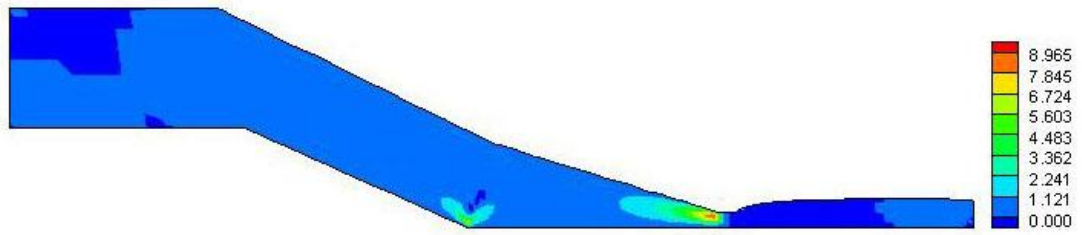
(ค) Pressure



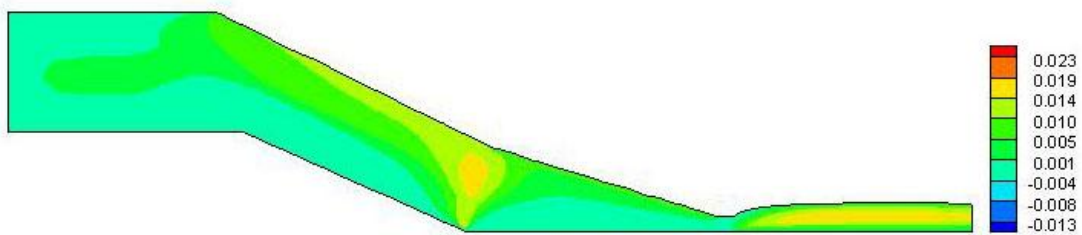
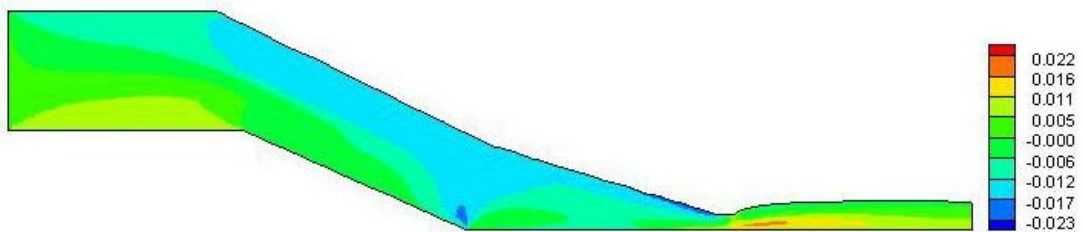
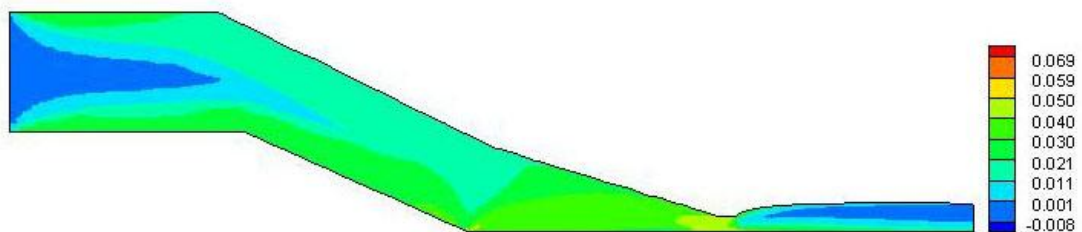
(ง) Shear-rate

รูปที่ 4.13 ปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพอร์เซอร์ทูลิ่ง: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสี;

(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}



(จ) Extension-rate

(ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}

รูปที่ 4.13 ปัญหาการไหลเคลื่อนที่ของของไหลนิวตัน: การแสดงผลด้วยแถบสี;

(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}

ตารางที่ 4.4 เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งและปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลาก

ผลเฉลย	Baloch*	P. T.**	D. D.***
$\dot{\gamma}$ max	461.7	423.1	23.6
$\dot{\epsilon}$ max	18.83	8.97	0.12
Δp	10.18	9.91	0.45
τ_{rz} max	0.025	0.022	0.013
τ_{zz} max	0.069	0.069	0.045
χ	1.405	1.390	1.039

* ผลเฉลยจาก Baloch และคณะ [23]

** ผลเฉลยจากปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งที่มีผลกระทบของการสั่นไถลที่ผนังตายของงานวิจัยนี้

*** ผลเฉลยจากปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลากที่มีผลกระทบของการสั่นไถลที่ผนังตายของงานวิจัยนี้

จากตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าผลเฉลยของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งระหว่างการไม่พิจารณาผลกระทบการสั่นไถลที่ผนังตายและการพิจารณาผลกระทบการสั่นไถลที่ผนังตาย พบว่าเมื่อเพิ่มเงื่อนไขการสั่นไถลบริเวณผนังตายเข้าไปทำให้อัตราเฉือน อัตรายืด และความดันลดลงส่งผลให้อัตราการบวมตัวลดลง และทำให้ค่าความแปรผันอันดับสองของอัตราการผิดรูปที่ผนังตายสูงสุดมีค่าลดลงจาก 59019.5 ดังแสดงค่าในรูปที่ 4.10 เป็น 44753.1 ดังแสดงค่าในรูปที่ 4.12 และพบว่าอัตราเฉือนและความดันลดของปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลากมีค่าน้อยกว่าอัตราเฉือนและความดันลดของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งประมาณ 20 เท่า และอัตรายืดของปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลากมีค่าน้อยกว่าอัตราเฉือนและความดันลดของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งประมาณ 80 เท่า ส่วนความเค้นฉากและความเค้นเฉือนของปัญหาการบวมตัวของท่อไหลที่มีแรงลากมีค่าน้อยกว่าความเค้นฉากและความเค้นเฉือนของปัญหาการไหลเคลือบลดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งเล็กน้อย

4.3 การไหลเคลือบลวดชนิดทิว์ทูลิ่ง (Tube-tooling wire-coating flow)

4.3.1 ข้อกำหนดของปัญหา (problem specification)

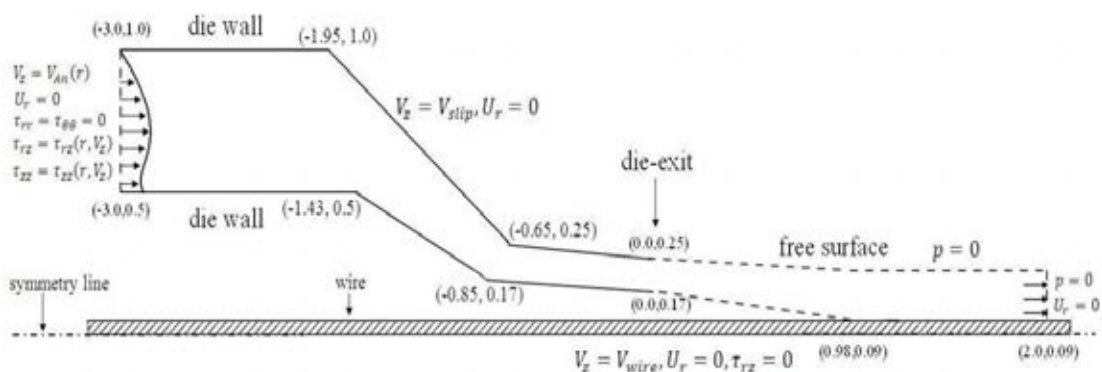
การศึกษาปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์ทูลิ่งเป็นการศึกษาต่อจาก Ngamaramvaranggul และ Thenissara [15] ซึ่งแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นชั้นประกอบย่อยสามเหลี่ยมแบบละเอียด ดังรูปที่ 4.14 และตารางที่ 4.5 และมีเงื่อนไขขอบดังรูปที่ 4.15 โดยที่การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่ทางเข้าตายเป็นการไหลแบบวงแหวนตามค่าที่กำหนดไว้ในภาคผนวก ก ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าความเร็วที่ผนังตายไม่เป็นศูนย์ จนกระทั่งพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากปลายตายตกกระทบมาเคลือบเส้นลวดและไหลไปพร้อมกับเส้นลวดที่มีความเร็วเท่ากับ 1 หน่วย และการไหลที่ทางออกตายพัฒนาเป็นการไหลแบบปลัก ทางเข้าตายเป็นขนาดกว้าง 0.5 หน่วยยาว 3 หน่วย ปลายตายมีความกว้าง 0.08 หน่วย ความยาวการไหลที่ไหลออกจากปลายตายมีค่าเท่ากับ 2 หน่วย ส่วนความเค้นเฉือนและความเค้นฉากได้กำหนดค่าไว้ในภาคผนวก ข



รูปที่ 4.14 แสดงรูปร่างโดเมนของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์ทูลิ่ง

ตารางที่ 4.5 ข้อมูลรายละเอียดชั้นประกอบย่อยของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์ทูลิ่ง

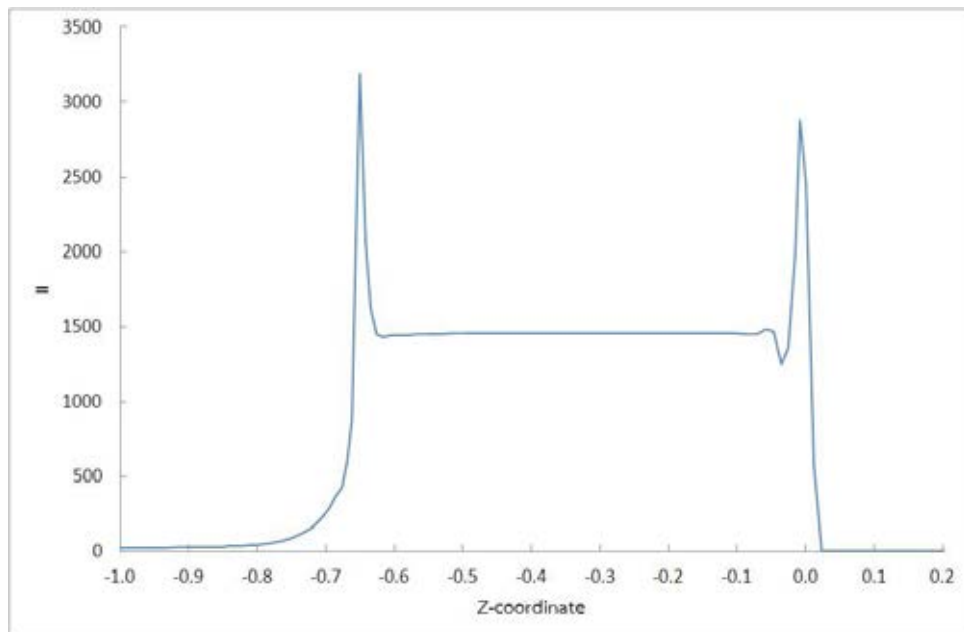
ชนิดชั้นประกอบ	จำนวนชั้นประกอบ	จำนวนโหนด	ดีกรีความอิสระ
ชั้นประกอบสามเหลี่ยมแบบละเอียด	4714	9755	61051



รูปที่ 4.15 ลักษณะปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์ทูลิ่ง

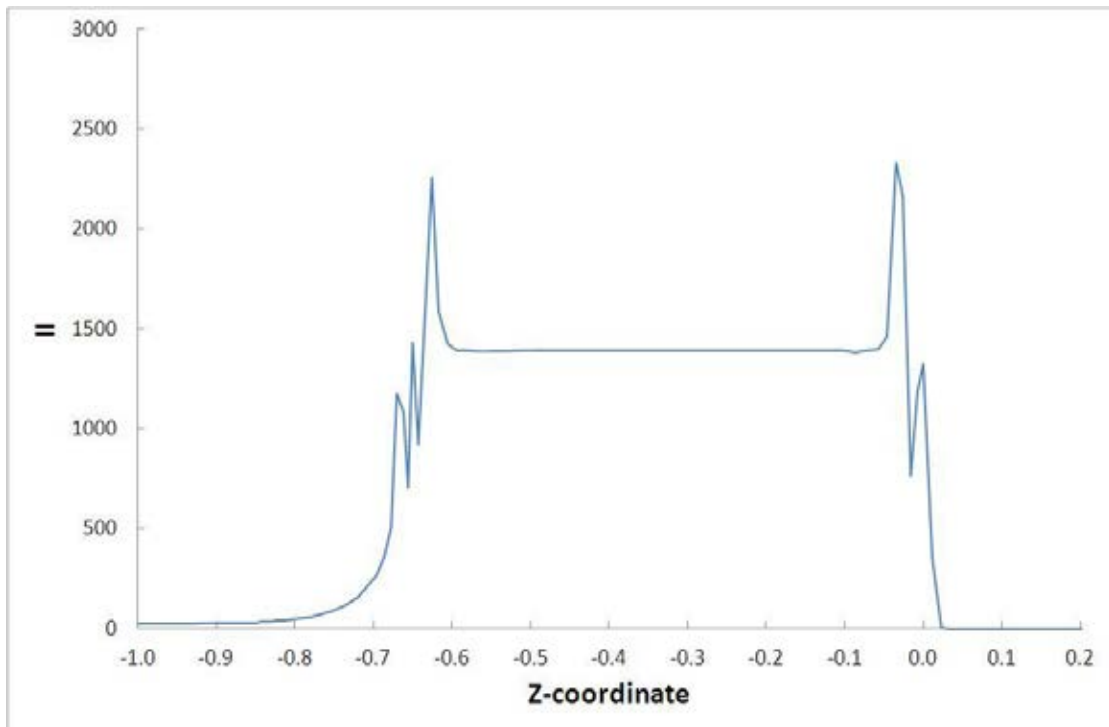
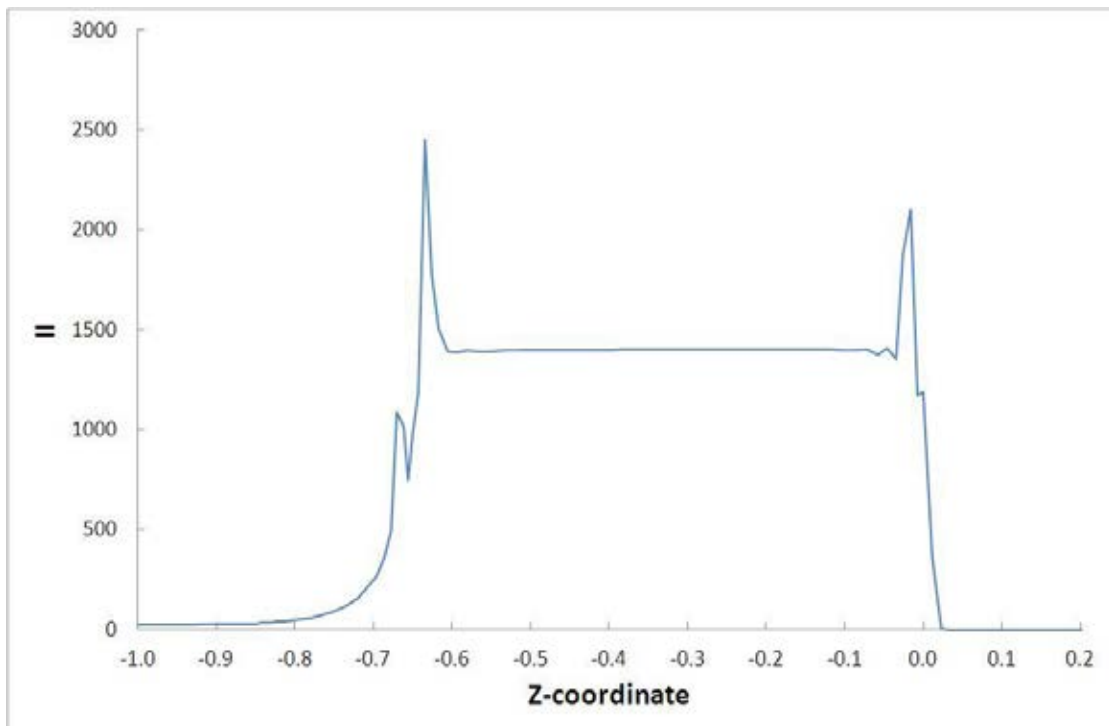
4.3.2 ผลที่ได้รับ (result)

พิจารณาผลการศึกษาของ Ngamaramvaranggul และ Thenissara [15] ซึ่งเป็นการศึกษาจุดที่พอลิเมอร์หลอมเหลวตกกระทบเคลือบลวดสายไฟของการไหลเคลือบลวดแบบทวิวัสดุโดยไม่พิจารณาผลกระทบการสิ้นเปลืองที่ผนังตาย และแสดงค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิวดรูปที่บริเวณผนังตายและผิวอิสระด้านบน ดังรูปที่ 4.16



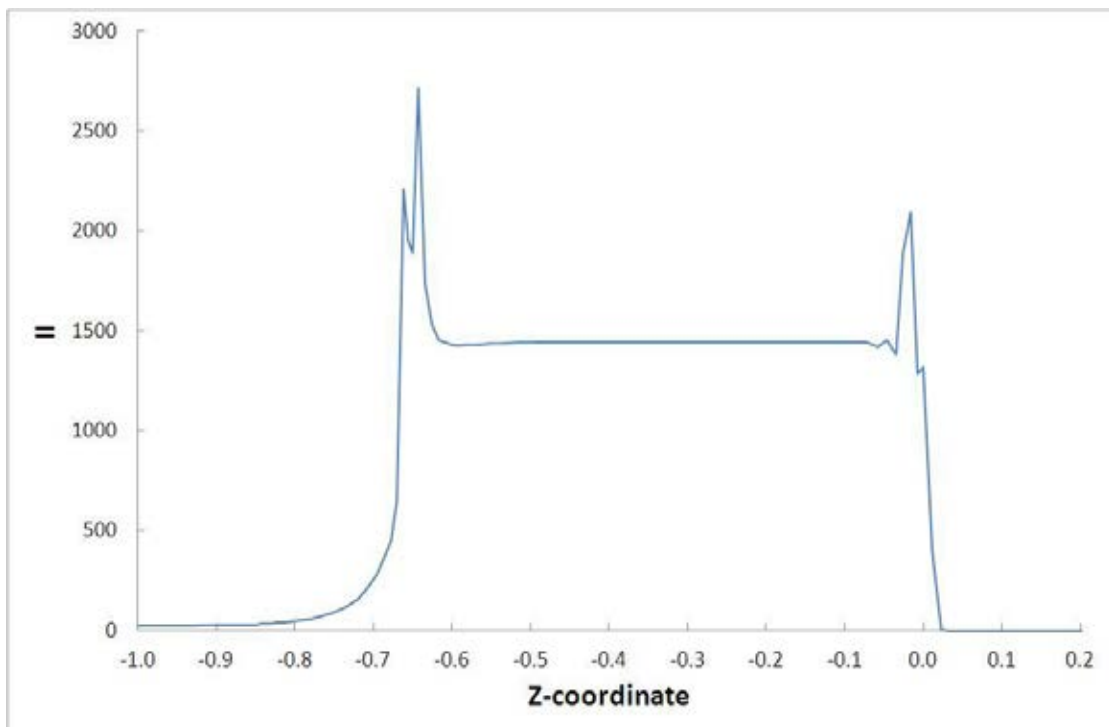
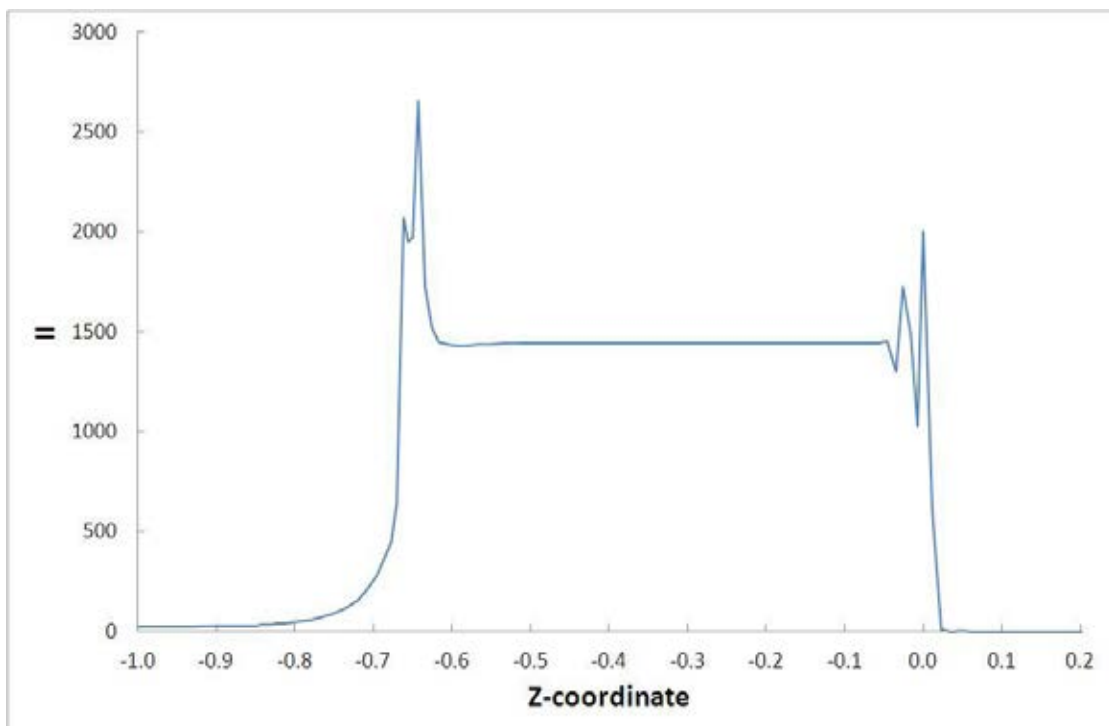
รูปที่ 4.16 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระของปัญหาการบวมตัวของการไหลเคลือบลวดชนิดทวิวัสดุที่ไม่พิจารณาผลของการสิ้นเปลืองที่บริเวณผนังตาย

พิจารณาผลกระทบการสิ้นเปลืองที่ผนังตายตามกฎการสิ้นเปลืองแพนเทียน โดยเลือกค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิวดรูปวิกฤตจากค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิวดรูปในรูปที่ 4.16 คือ 1500, 2000, 2300 และ 2700 ทำการคำนวณหาผลเฉลยใหม่โดยให้ $\alpha = 1.0$ และแสดงค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิวดรูปที่ผนังตายและผิวอิสระด้านบน เมื่อกำหนดค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิวดรูปวิกฤตตามที่เลือก พบว่าเมื่อกำหนด $H_{crit} = 1500$ ได้ค่า H ตามรูปที่ 4.17(ก) ค่า H มีการแกว่งมากในการไหลภายในตายและก่อนออกจากตายเล็กน้อย เมื่อกำหนด $H_{crit} = 2000$ ได้ค่า H ตามรูปที่ 4.17(ข) ค่า H ที่บริเวณทางเข้าตายเกิดการแกว่งน้อยกว่า $H_{crit} = 1500$ และที่ทางออกตายมีค่า H ที่จุดสูงสุดน้อยกว่าค่า H ของ $H_{crit} = 1500$ เมื่อพิจารณารูปที่ 4.17(ค) พบว่ากราฟของ H มีความคล้ายคลึงกับรูปที่ 4.17(ข) แต่ที่บริเวณภายในตายมีการเปลี่ยนแปลงของค่า H ในขณะที่ยังเพิ่มขึ้นสูงในช่วงแรก และมีค่า H สูงสุดมากกว่ารูปที่ 4.17(ข) เมื่อกำหนด $H_{crit} = 2700$ ได้ค่า H ตามรูปที่ 4.17(ง) พบว่าค่า H ที่บริเวณปลายตายมีการแกว่งอาจทำให้ผิวของพอลิเมอร์ที่เคลือบลวดขรุขระและเกิดรอยฟั่นฉลามได้ ดังนั้นจึงเลือกค่า $H_{crit} = 2000$ เป็นค่าที่เหมาะสม และทำการหาค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่เหมาะสมโดยคำนวณใหม่ด้วยการเลือกค่า α เป็น 0.4, 0.6, 0.8 และ 1.0 และแสดงผลเฉลยในรูปที่ 4.18

(ก) $H_{crit} = 1500$ (ข) $H_{crit} = 2000$

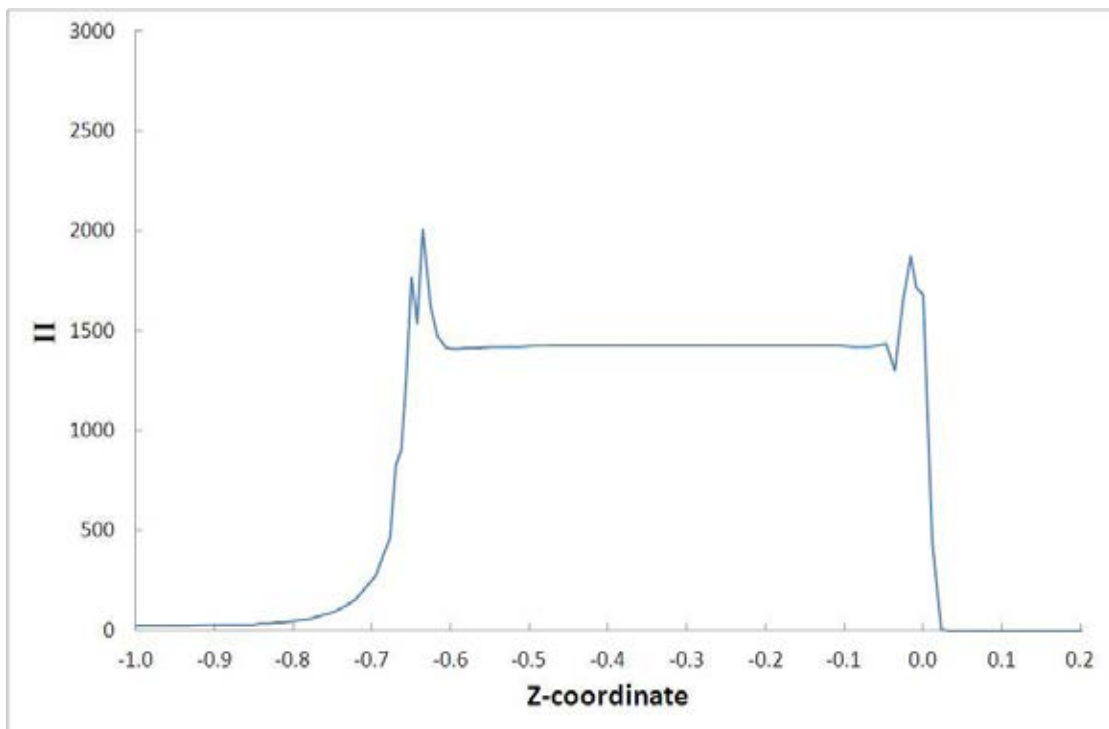
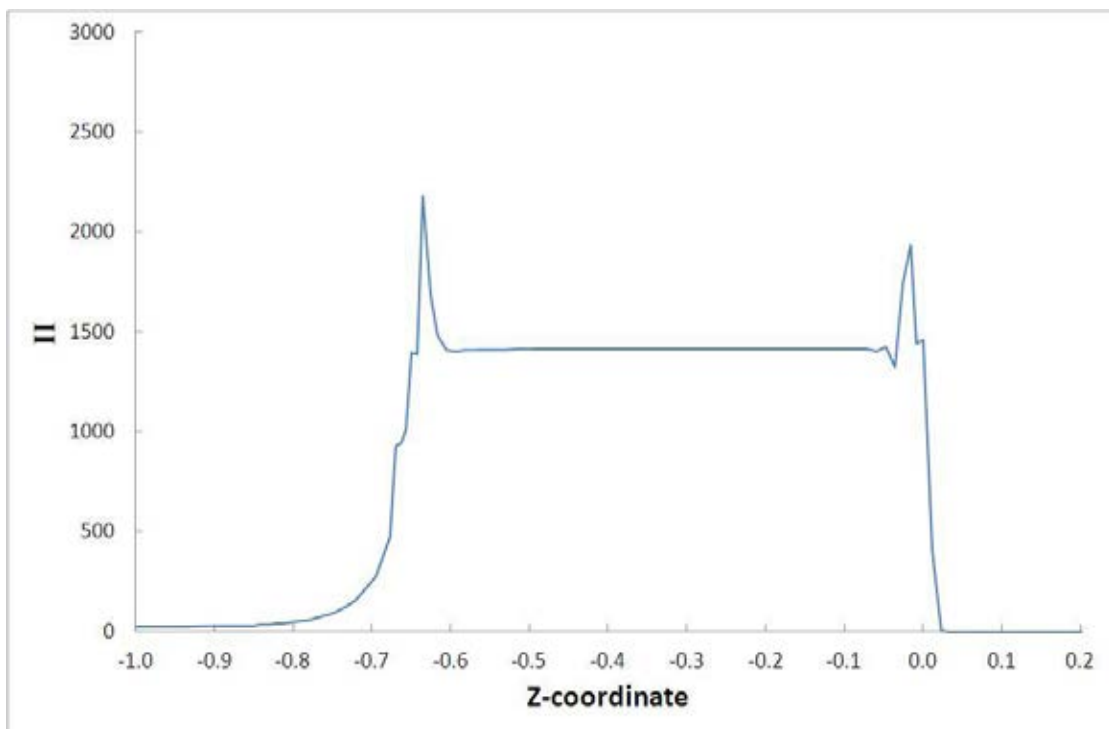
รูปที่ 4.17 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

(ก) $H_{crit} = 1500$, (ข) $H_{crit} = 2000$, (ค) $H_{crit} = 2300$ และ (ง) $H_{crit} = 2700$

(ค) $H_{crit} = 2300$ (ง) $H_{crit} = 2700$

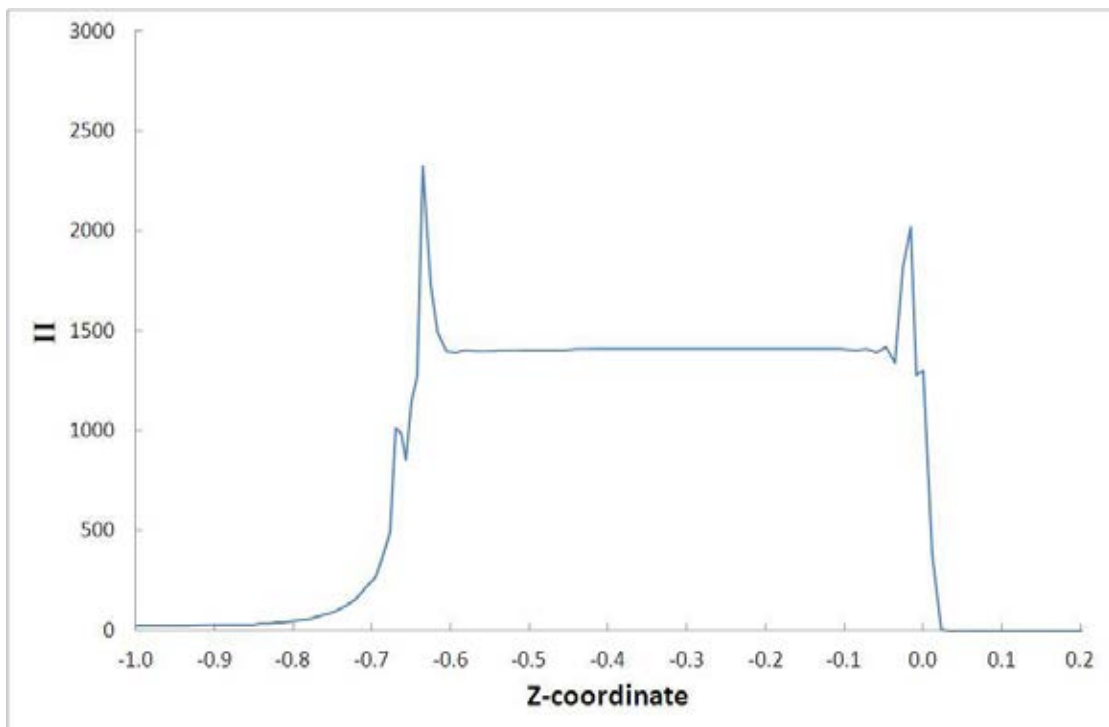
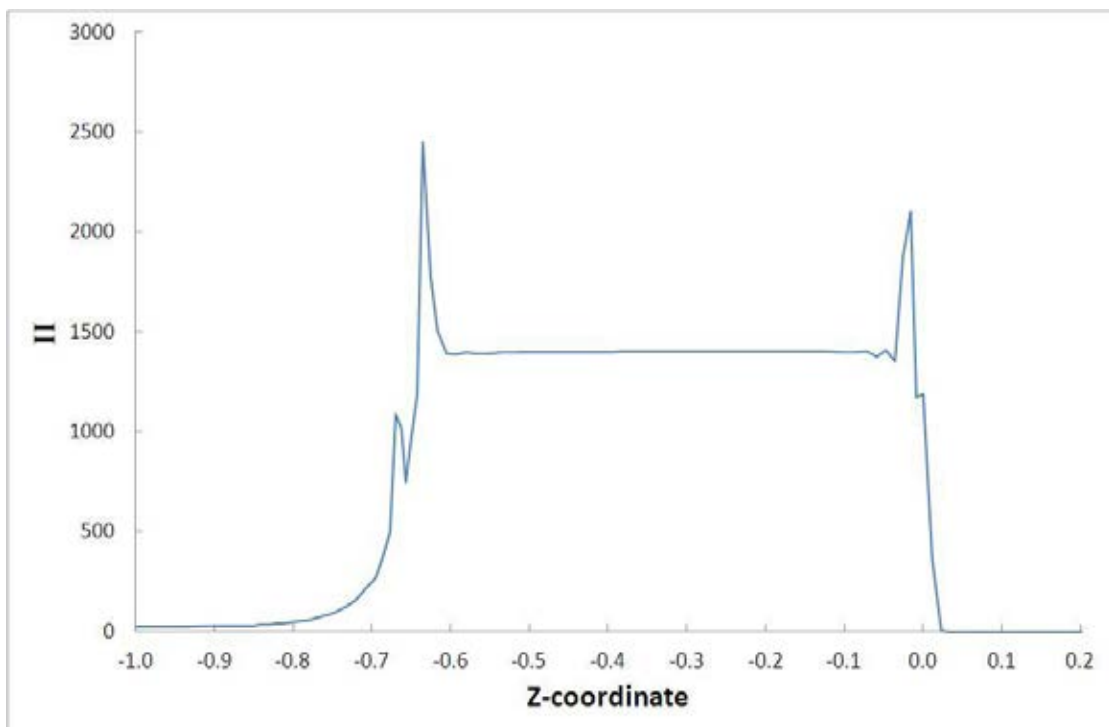
รูปที่ 4.17 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $\alpha = 1.0$:

(ก) $H_{crit} = 1500$, (ข) $H_{crit} = 2000$, (ค) $H_{crit} = 2300$ และ (ง) $H_{crit} = 2700$

(ก) $\alpha = 0.4$ (ข) $\alpha = 0.6$

รูปที่ 4.18 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $II_{crit} = 2000$:

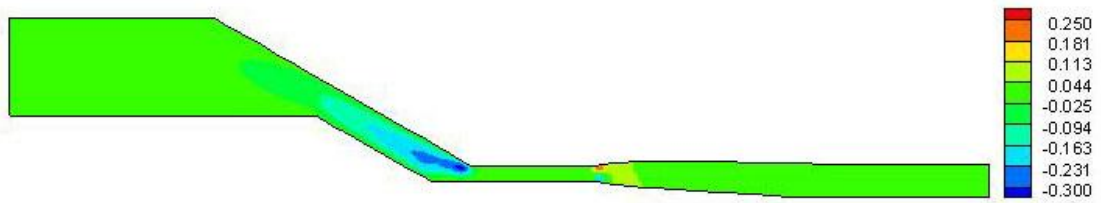
(ก) $\alpha = 0.4$, (ข) $\alpha = 0.6$, (ค) $\alpha = 0.8$ และ (ง) $\alpha = 1.0$

(ค) $\alpha = 0.8$ (ง) $\alpha = 1.0$

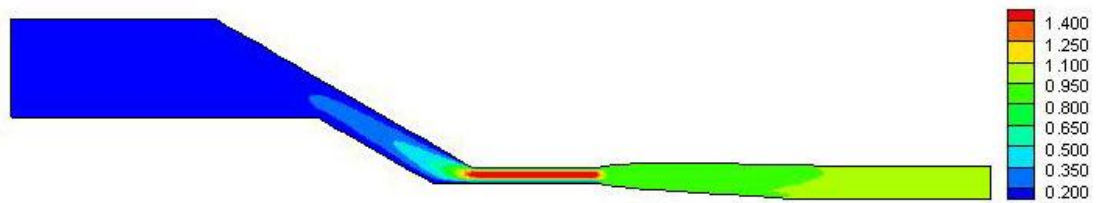
รูปที่ 4.18 ค่าความแปรผันอันดับที่สองบริเวณผนังตายและผิวอิสระเมื่อ $H_{crit} = 2000$:

(ก) $\alpha = 0.4$, (ข) $\alpha = 0.6$, (ค) $\alpha = 0.8$ และ (ง) $\alpha = 1.0$

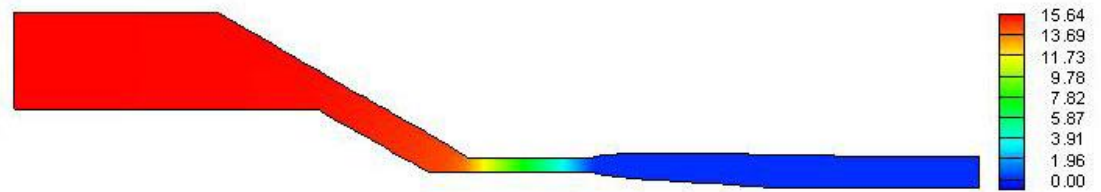
ค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปเมื่อกำหนด $\alpha = 0.4$ มีความแปรผันบริเวณรอยต่อทางลาดเอียงเข้าสู่ทางแคบภายในตายดังแสดงในรูปที่ 4.18(ก) และเมื่อกำหนด $\alpha = 0.6$ ค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปมีค่าเพิ่มขึ้นสูงสุดที่บริเวณทางลาดเอียงเข้าสู่ทางแคบภายในตายและลดต่ำลงก่อนจะเพิ่มสูงขึ้นที่บริเวณทางออกตาย ดังแสดงในรูปที่ 4.18(ข) ในรูปที่ 4.18(ค) และรูปที่ 4.18(ง) แสดงค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปเมื่อกำหนด $\alpha = 0.8$ และ $\alpha = 1.0$ ตามลำดับ พบว่าลักษณะของกราฟมีความคล้ายคลึงกันคือมีการสั่นบริเวณทางลาดเอียงก่อนเข้าสู่ทางแคบภายในตายและเพิ่มขึ้นสูงสุดที่จุดหักมุมจากนั้นลดต่ำลงเล็กน้อยและคงที่ตลอดทางแคบจนกระทั่งเพิ่มขึ้นอีกครั้งบริเวณทางออกตาย พบว่าเมื่อกำหนด $\alpha = 0.6$ ค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปที่ผนังตายและผิวอิสระมีความราบเรียบกว่าค่าที่ได้จากการแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลอื่น ซึ่งไม่ทำให้เกิดตำหนิหรือรอยฟันฉลามหรือมีโอกาสเกิดตำที่ที่สุด ดังนั้นจึงเลือก $\alpha = 0.6$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การลื่นไถลที่เหมาะสมสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทวิบูรณ์ลิ่ง นำค่าความแปรผันอันดับที่สองของอัตราการผิดรูปวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมที่ได้มาคำนวณใหม่อีกครั้งและแสดงผลเฉลยต่างๆ ในรูปแบบแถบชั้นสีตามรูปที่ 4.19



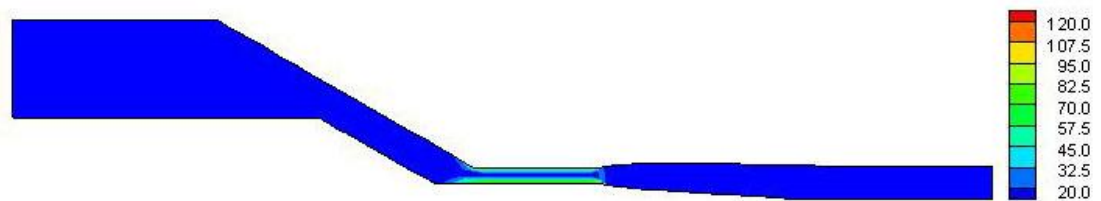
(ก) U_r



(ข) V_z



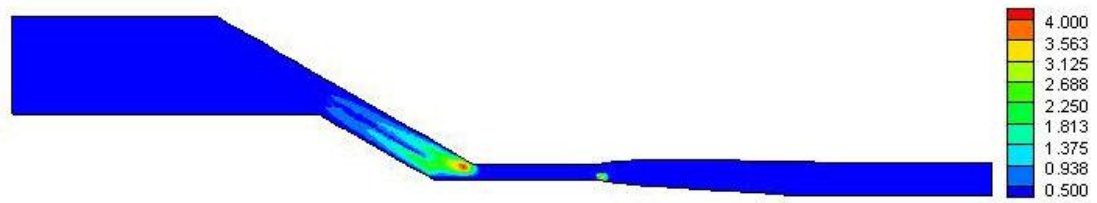
(ค) Pressure



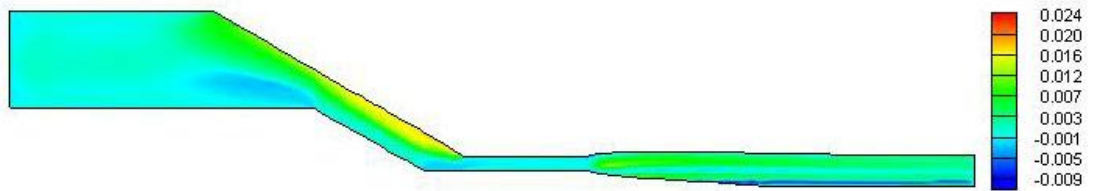
(ง) Shear-rate

รูปที่ 4.19 ปัญหาการไหลเคลือบลดขนาดที่วิบัติ: การแสดงผลด้วยแถบสี;

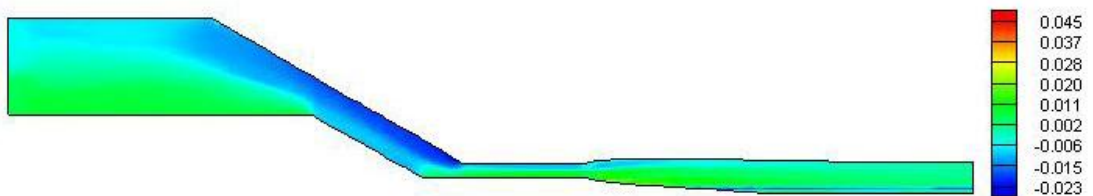
(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ซ) τ_{zz}



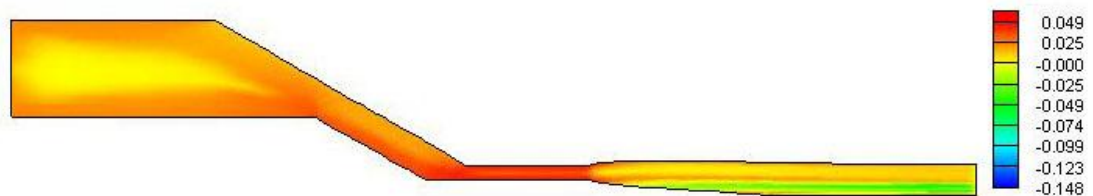
(จ) Extension-rate



(ฉ) τ_{rr}



(ช) τ_{rz}



(ฅ) τ_{zz}

รูปที่ 4.19 ปัญหาการไหลเคลือบลดขนาดที่วับทูลิ่ง: การแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบสีสัน;

(ก) U_r (ข) V_z (ค) Pressure (ง) Shear-rate (จ) Extension-rate (ฉ) τ_{rr} (ช) τ_{rz} (ฅ) τ_{zz}

ความเร็วในแนวแกน r มีค่าน้อยมากเกือบเป็นศูนย์เพราะกำหนดให้การไหลเป็นแบบราบเรียบ แต่มีค่าเพิ่มสูงเท่ากับ 0.25 บริเวณปลายตายเนื่องจากพอลิเมอร์ไหลอมเหลวเกิดการบวมตัว ดังแสดงในรูปที่ 4.19(ก) สำหรับความเร็วในแนวแกน z ที่แสดงในรูปที่ 4.19(ข) แสดงให้เห็นว่าการไหลที่บริเวณทางแคบก่อนออกปลายตายมีการพัฒนาเป็นการไหลที่มีลักษณะคล้ายพาราโบลา มีความเร็วในแนวแกน z สูงสุดที่เกือบกึ่งกลางรัศมีของตาย รูปที่ 4.19(ค) แสดงค่าความดันที่ทางเข้าตายมีค่าสูงสุดเท่ากับ 15.6 และค่อยๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ที่ outlet อัตราเฉือนที่ผนังตายบริเวณทางแคบก่อนออกปลายตายมีค่าสูงและมีค่าสูงสุดที่ปลายตายด้านล่างเท่ากับ 120.0 ดังแสดงในรูปที่ 4.19(ง) อัตราเฉือนแสดงในรูปที่ 4.19(จ) มีค่ามากเท่ากับ 4.0 ที่บริเวณจุดหักมุมก่อนการเข้าทางแคบ และบริเวณปลายตายด้านล่าง ความเค้นฉาก τ_{rr} มีค่าสูงบริเวณผนังก่อนการหักมุมเข้าทางแคบของตายดังแสดงในรูปที่ 4.19(ฉ) ในรูปที่ 4.19(ช) แสดงค่าความเค้นเฉือน τ_{rz} มีค่าสูงสุดบริเวณที่พอลิเมอร์ไหลอมเหลวไหลออกจากปลายตายมาเคลือบเส้นลวดหรือที่เรียกว่าจุดตกระทอบ (contraction point) และความเค้นฉาก τ_{zz} มีค่าสูงบริเวณผนังทางแคบก่อนออกปลายตาย เนื่องจากพอลิเมอร์ไหลอมเหลวไหลมารวมกันที่ทางแคบมีการผลักกันออกนอกตาย ดังแสดงในรูปที่ 4.19(ซ)

ตารางที่ 4.6 เปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์บูลิ่งและเพรชเซอร์ทูลิ่ง

ผลเฉลย	N. T.*	T. T.**	P. T.***
$\dot{\gamma}$ max	134.7	129.5	423.1
$\dot{\epsilon}$ max	4.58	4.40	8.97
Δp	17.20	15.64	9.91
τ_{rz} max	0.045	0.045	0.022
τ_{zz} max	0.052	0.049	0.069
χ	1.806	1.797	1.390

* ผลเฉลยจาก Ngamaramvarangul และ Thenissara [15]

** ผลเฉลยจากปัญหาการไหลเคลือบลวดแบบทิว์บูลิ่งที่มีผลกระทบของการสั่นไถลที่ผนังตายในงานวิจัยนี้

*** ผลเฉลยจากปัญหาการไหลเคลือบลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งที่มีผลกระทบของการสั่นไถลที่ผนังตายของงานวิจัยนี้

ตารางที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าผลเฉลยของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทิว์บูลิ่งระหว่างการไม่พิจารณาผลกระทบการสั่นไถลที่ผนังตายและการพิจารณาผลกระทบการสั่นไถลที่ผนัง

ตาย พบว่าเมื่อเพิ่มเงื่อนไขการสิ้นไกลบริเวณผนังตายทำให้อัตราเฉือน อัตรายืด และความดันลดลงส่งผลให้อัตราการบวมตัวลดลง ทำให้ค่าความแปรผันอันดับสองของอัตราการผิดรูปที่ผนังตายสูงสุดมีค่าลดลงจาก 4539.1 เป็น 4195.2 เมื่อเปรียบเทียบผลเฉลยระหว่างปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทวิบัพทูลิ่งและเพรชเซอร์ทูลิ่ง พบว่าอัตราเฉือนและอัตรายืดของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดทวิบัพทูลิ่งมีค่าน้อยกว่าอัตราเฉือนและอัตรายืดของปัญหาการไหลเคลือบลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่ง เพราะความเร็วในแนวแกน z ของการไหลเคลือบเส้นลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งที่ค่ามากกว่าการไหลเคลือบเส้นลวดชนิดทวิบัพทูลิ่ง ($V_{z(PT)} = 3.368$, $V_{z(TT)} = 1.584$ โดยที่ $\dot{\gamma} = \frac{dv_z}{dr}$ และ $\dot{\epsilon} = \frac{V_z}{z}$) แต่ความดันลดของการไหลเคลือบเส้นลวดชนิดทวิบัพทูลิ่งมีค่ามากกว่าความดันลดของการไหลเคลือบเส้นลวดชนิดเพรชเซอร์ทูลิ่งเนื่องจากตายแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งการไหลมีแรงเสียดทานจากแรงลากของเส้นลวดทำให้ใช้แรงในการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวน้อยกว่าตายแบบทวิบัพทูลิ่งที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลไปตามทางการไหลในตายจนออกปลายตาย

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

(Conclusion and Suggestion)

5.1 สรุปผลงานวิจัย (Research conclusion)

งานวิจัยนี้ศึกษาผลกระทบของการสิ้นเปลืองที่บริเวณผนังตายของปัญหาการบวมตัวที่มีแรงลาก และปัญหาการไหลเคลื่อนลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งและแบบทิวบ์ทูลิ่งของของไหลวิสโคอีลาสติก ด้วยตัวแบบแผนเทียบแทนเนอร์ พบว่าการพิจารณาความเร็วสิ้นเปลืองที่ผนังตาย มีผลทำให้อัตราการบวมตัว ความเค้นเฉือน อัตราเฉือน อัตรายืด ความดันลดมีค่าลดลง เมื่อเทียบกับปัญหาชนิดเดียวกัน แต่ให้ความเร็วที่ผนังตายมีค่าเป็นศูนย์

สำหรับปัญหาการบวมตัวที่มีแรงลาก ค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปวิกฤตที่เหมาะสม คือ 100 และค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่ผนังตาย คือ 0.7

สำหรับปัญหาการไหลเคลื่อนลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่ง ค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปวิกฤตที่เหมาะสม คือ 9,000 และค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่ผนังตาย คือ 0.6

และสำหรับปัญหาการไหลเคลื่อนลวดแบบทิวบ์ทูลิ่ง ค่าความแปรผันอันดับที่สองของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปวิกฤตที่เหมาะสม คือ 2,000 และค่าสัมประสิทธิ์การสิ้นเปลืองที่ผนังตาย คือ 0.6

5.2 ข้อจำกัดและเงื่อนไขของงานวิจัย (Research limitation and condition)

งานวิจัยนี้มีข้อจำกัดอยู่ภายใต้สมมติฐานหลายประการที่ทำให้ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณไม่สมบูรณ์เท่าที่ควร ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากปัจจัยต่างๆ ดังนี้

5.2.1 เงื่อนไขอุณหภูมิ งานวิจัยนี้อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่าระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ กล่าวคืออุณหภูมิที่ทุกๆ ตำแหน่งในโดเมนของการศึกษามีค่าคงตัว หรืออุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา แต่ในความเป็นจริงแล้วที่ตำแหน่งต่างๆ กันของระบบ อุณหภูมิมีความแตกต่างกัน เนื่องจากการสูญเสียพลังงานความร้อนในกระบวนการผลิต ดังนั้นอาจส่งผลให้ค่าตัวแปรต่างๆ มีความคลาดเคลื่อนผิดไปจากค่าจริงที่ตำแหน่งนั้น

5.2.2 แรงโน้มถ่วงของโลก เนื่องจากงานวิจัยนี้ไม่นำผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงของโลกเข้าพิจารณา เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงต่างๆ ที่เข้ากระทำกับของไหลในระบบ จึงทำให้แรงโน้มถ่วงของโลกมีผลกระทบน้อยมากต่อระบบ แต่สามารถทำให้ค่าของตัวแปรต่างๆ มีค่าคลาดเคลื่อนผิดไปจากค่าจริงได้

5.2.3 แรงตึงผิว งานวิจัยนี้ไม่คำนึงแรงตึงผิวจึงส่งผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ เนื่องจากการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่ไหลออกนอกตายทำให้เกิดผิวอิสระ ที่เกี่ยวข้องกับแรงตึงผิว ทำให้การยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลของของไหลมีการเปลี่ยนแปลง ส่งผลกระทบต่ออัตราการบวมตัว

5.2.4 ประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ เนื่องด้วยข้อจำกัดของหน่วยความจำ ทำให้ขึ้นประกอบอันตะที่จำแนกได้นั้นละเอียดในระดับหนึ่งเท่านั้น ขึ้นประกอบละเอียดมากขึ้นทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น แต่ถ้าขึ้นประกอบมีความละเอียดมากๆ จะส่งผลต่อเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณมากขึ้น

5.3 ข้อเสนอแนะ (Suggestion)

5.3.1 ศึกษาผลการสั่นไถลโดยใช้กฎการสั่นไถลอื่นๆ เช่น กฎการสั่นไถลเนเวียร์ และกฎการสั่นไถลบริสุทธี เป็นต้น

5.3.2 ศึกษาวิธีการเลือกค่าความแปรผันอันดับที่สองและค่าสัมประสิทธิ์การสั่นไถลที่ผนังตายให้เหมาะสมด้วยวิธีอื่น

5.3.3 ศึกษาผลกระทบการสั่นไถลโดยพิจารณาแรงตึงผิว

5.3.4 ศึกษาผลกระทบการสั่นไถลโดยพิจารณาอุณหภูมิ

รายการอ้างอิง

- [1] S. Richardson. A Stick-slip Problem Related to the Motion of a Free Jet at Low Reynolds Numbers. Proc. Camb. Phil. Soc. 67(1970): 477-489.
- [2] R. I. Tanner. Engineering Rheology. London: Oxford University Press, 1985.
- [3] R. E. Nickell, R. I. Tanner and B. Caswell. The Solution of Viscous Incompressible Jet and Free-surface Flows Using Finite-element Methods. J. Fluid Mech. 65(1974): 189-206.
- [4] P. W. Chang, T. W. Patten, and B. A. Finlayson. Collocation and Galerkin Finite Element Methods for Viscoelastic Fluid Flow-II. Comp. and Fluids. 7(1979): 285-293.
- [5] M. J. Crochet and R. Keunings. Die Swell of a Maxwell Fluid Numerical Prediction. J. non-Newtonian Fluid Mech. 7(1980): 199-212.
- [6] M. J. Crochet and R. Keunings. On Numerical Die Swell Calculation. J. non-Newtonian Fluid Mech. 10(1982): 85-94.
- [7] M. J. Crochet and R. Keunings. Finite Element Analysis of Die-swell of a Highly Elastic Fluid. J. non-Newtonian Fluid Mech. 10(1982): 339-356.
- [8] C. R. Beverly and R. I. Tanner. Numerical Analysis of Three-dimensional Newtonian Extrudate Swell. Rheol. Acta. 30(1991): 341-356.
- [9] B. Caswell and R. I. Tanner. Wire-coating Die Design Using Finite Element Methods. Engineering and Science. 18, 5(1978): 416-421.
- [10] E. Mitsoulis. Fluid Flow and Heat Transfer in Wire Coating: A Review. Advances in Polymer Technology. 6, 4(1986): 467-487.
- [11] E. Mitsoulis, R. Wagner and F. L. Heng. Numerical Simulation of Wire-coating Low Density Polyethylene: Theory and Experiments. Polymer Eng. Sci. 28, 5(1988): 291-311.
- [12] S. Gunter, P. Townsend and M. F. Webster. Simulation of Some Model Viscoelastic Extensional Flows. Int. J. Num. Meth. Fluids. 23(1996): 691-710.
- [13] I. Mutlu, P. Townsend and M. F. Webster. Simulation of Cable-coating Viscoelastic Flows with Coupled and Decoupled Schemes. J. non-Newtonian Fluid Mech. 74(1998): 1-23.
- [14] H. Matallah, P. Townsend and M. F. Webster. Recovery and Stress-splitting Schemes for Viscoelastic Flows. J. non-Newtonian Fluid Mech. 75(1998): 139-166.
- [15] V. Ngamaramvarangul and S. Thenissara. The Contraction Point for Phan-Thien/Tanner Model of Tube-Tooling Wire-coating Flow. World Academy Technology. 64(2010): 811-818.

- [16] W. J. Silliman and L. E. Scriven. Separating Flow Near a Static Contact Line: Slip at Wall and Shape of a Free Surface. J. Comp. Phys. 34(1980): 287-313.
- [17] N. Phan-Thein. Influence of Wall Slip on Extrudate Swell: A Boundary Element Investigation. J. non-Newtonian Fluid Mech. 26(1988): 327-340.
- [18] A. V. Ramamurthy. Wall Slip in Viscous Fluids and Influence of Materials of Construction. J. Rheol. 30(1986): 337-357.
- [19] S. G. Hatzikiriakos and J. M. Dealy. Role of Slip and Fracture in the Oscillating Flow of HDPE in a Capillary. J. Rheol. 36(1992): 845-884.
- [20] C. F. J. Den Doelder, R. J. Koopmans, J. Molenaar, and A. A. F. Van de Ven. Comparing the Wall Slip and the Constitutive Approach for Modelling Spurt Instabilities in Polymer Melt Flows. J. non-Newtonian Fluid Mech. 75(1998): 25-41.
- [21] V. Ngamaramvarangul and M. F. Webster. Computation of Free Surface Flows with a Taylor-Galerkin/Pressure-Correction Algorithm. Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000): 993-1026.
- [22] A. Baloch, H. Matallah, V. Ngamaramvarangul and M. F. Webster. Simulation of Pressure- and Tube-tooling Wire-coating Flows through Distributed Computation. Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow. 12(2002): 458-493.
- [23] V. Ngamaramvarangul and M. F. Webster. Simulation of Pressure-tooling Wire-coating Flow with Phan-Thien/Tanner Models. Int. J. Num. Mech. Fluids. 38(2002): 677-710.
- [24] D. H. Morton-Jones. Polymer Processing. Chapman & Hall. London. 1989.
- [25] พรชัย สাত্রวาทา. Numerical Analysis I. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2544.
- [26] C. D. Han. Rheology in Polymer Processing. New York: Academic Press. 1976.
- [27] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. London: John Wiley & Sons. 1960.
- [28] R. B. Bird and R. C. Armstrong. Stress Tensor for Arbitrary Flows of Dilute Solutions of Rodlike Macromolecules. J. Chem. Phys. 58,7(1973): 2715-2723.
- [29] S. Bunditsaovapak and V. Ngamaramvarangul. Element Stretching for a Newtonian Fluid. Chulalongkorn University. Bangkok. 2003.
- [30] K. Walter. Rheometry. London: Chapman & Hall. 1975.
- [31] R. S. Rivlin and J. L. Eriksen. Stress Deformation Relations for Isotropic Material. J. Rat. Mech. Anal. 4(1955): 323-425.
- [32] M. Reiner. Deformation Strain and Flow. New York: Wiley. 1960.
- [33] R. Hooke. A Description of Helioscopes and Some Other Instruments. London. 1676.

- [34] J. C. Maxwell. On the Dynamical Theory of Gases. Phil. Trans. Roy. Soc. A157(1967):49-88.
- [35] J. C. Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. New York: Reinhold Pub. 1973.
- [36] J. G. Oldroyd. On the Formulation of Rheological Equation of State. Proc. Roy. Soc. A200(1950): 523-541.
- [37] D. Paddon and H. Holstein. Technical Report. Bristol University. BUCSTR 80-81. 1980.
- [38] V. Ngamaramvaranggul and M. F. Webster. Simulation of Coating Flows with Slip Effects. Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000): 961-992.
- [39] V. Ngamaramvaranggul and M. F. Webster. Numerical Simulation of Non-Newtonian Free Surface Flows. Computer Science, University of Wales, Swansea. 2000.
- [40] G. Teeramoke and V. Ngamaramvaranggul. Simulation of Extrusion for Wet Powder Masses in Pharmaceutical Process. Chulalongkorn University. Bangkok. 2008.
- [41] N. Phan-Thien. A Non-linear Network Viscoelastic Model. J. Rheol. 22(1978): 259-283.
- [42] N. Phan-Thien and R. I. Tanner. A New Constitutive Equation Derived from Network Theory. J. non-Newtonian Fluid Mech. 2(1977): 353-365.
- [43] M. J. Crochet, A. R. Davies and K. Walters. Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow. Rheology Series 1. Elsevier Science Publishers. 1984.
- [44] R. Keunings and M. J. Crochet. Numerical Simulation of the Flow of a Viscoelastic Fluid through an Abrupt Contraction. J. non-Newtonian Fluid Mech. 14(1984): 279-299.
- [45] R. B. Bird, R. C. Armstrong and O. Hassager. Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid mechanics. New York. 1(1987).
- [46] N. Phan-Thien. Boundary-element Analysis of Forming Process. Numerical Modelling of Material Deformation Processes: Research, Development and Application. London. 1992.
- [47] I. Mutlu, P. Townsend and M. F. Webster. Computation of Viscoelastic Cable Coating Flow. J. non-Newtonian Fluid Mech. 26(1998): 697-712.
- [48] H. Matallah, P. Townsend and M. F. Webster. Viscoelastic Multi-mode Simulations of Wire-coating. J. non-Newtonian Fluid Mech. 90(2000): 217-241.
- [49] H. Matallha, P. Townsend and M. F. Webster. Viscoelastic Computations of Polymeric Wire-coating Flows. CSR 13-2000. University of Wales, Swansea. 2000.
- [50] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung. Finite Element in the Solution of Field Problems. The Engineer. (1965): 507-510.
- [51] Tirupathi R. Chandrupatla and Ashok D. Belegundu. Introduction to Finite Elements in Engineering. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall Inc. 2002.

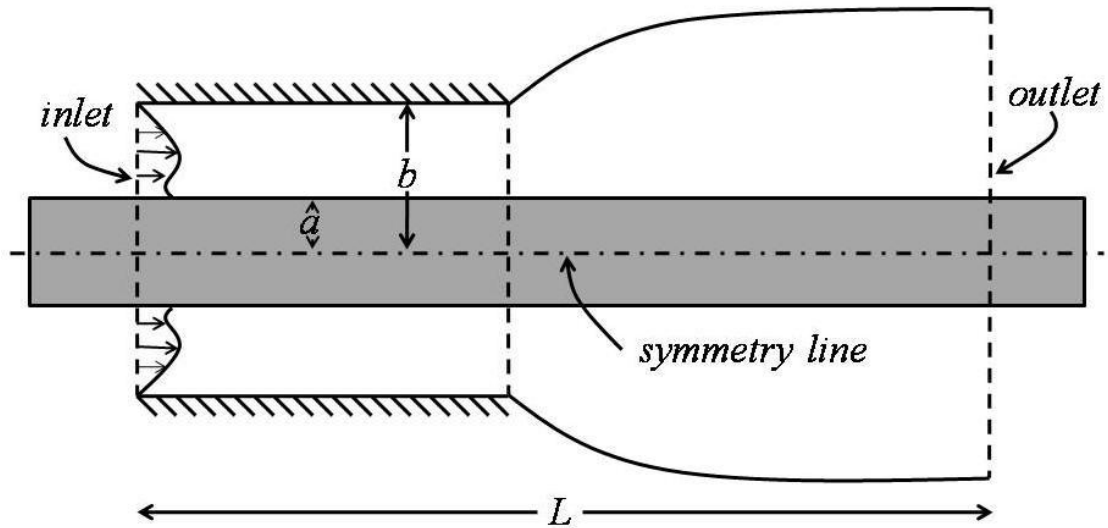
- [52] J. N. Reddy. An Introduction to the Finite Element Method. 2nd ed. New York: McGraw-Hill. 1993.
- [53] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equation. *Comp. Meth. App. Eng.* 32(1982): 199-259.
- [54] E. O. A. Carew, P. Townsend and M. F. Webster. A Taylor-Petrov-Galerkin Algorithm for Viscoelastic Flow. *J. non-Newtonian Fluid Mech.* 50(1993): 253-287.
- [55] B. V. Rathish Kummar, P. Srinivasa Rao and P. Sinha. Stream Upwind Petrov-Galerkin Finite Element Analysis of Thermal Effects on Load Carrying Capacity in Slider Bearings. *Numerical Heat Transfer. Part A.* 38(2000): 305-328.
- [56] H. Mattallah, P. Townsend and M. F. Webster. Embedded Recovery Methods for Viscoelastic Flows. CSR7-2000. University of Wales Swansea. 2000.
- [57] R. W. Fox and A. T. McDonald. Introduction to Fluid Mechanics. 5th ed. New York: John Wiley & Sons. 1998.
- [58] F. M. White. Fluid Mechanics. 4th ed. New York: McGraw-Hill. 1999.
- [59] R. L. Burden and J. D. Faires. Numerical Analysis. 6th ed. CA: Brooks/Cole Publishing. 1997.
- [60] มนตรี พิรุณเกษตร. กลศาสตร์ของไหล. กรุงเทพฯ: บริษัท วิทยพัฒน์ จำกัด. 2550.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การไหลแบบวงแหวน (Annular flow)

การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวที่ทางเข้าตายเป็นแบบวงแหวน (annular flow) ดังแสดงในรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1 การไหลแบบวงแหวน

มีการกำหนดความเร็วในแนวแกน z ดังนี้

$$V_z(r) = \frac{Pb^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 + \frac{4\mu L V_{wire}}{Pb^2} \right] \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right\} \quad (\text{ก.1})$$

- เมื่อ μ เป็นความหนืดรวม
 P เป็นความแตกต่างของความดันระหว่าง inlet และ outlet
 L เป็นความยาวของการไหลจาก inlet ถึง outlet
 a เป็นรัศมีของเส้นลวด
 b เป็นรัศมีของตาย
 V_{wire} เป็นความเร็วของเส้นลวด

และอัตราการไหล (flow rate) คือ

$$Q = 2\pi \int_a^b r V_z(r) dr \quad (\text{ก.2})$$

แทนสมการ (ก.1) ในสมการ (ก.2) ได้

$$Q = 2\pi \frac{Pb^2}{4\mu L} \left\{ \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4b^2} + A \left[\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right] \right\} \\ + 2\pi \frac{V_{wire}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left[\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right]$$

เมื่อ $A = \frac{a^2 - b^2}{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

สำหรับปัญหาการบวมตัวที่มีแรงลาก

กำหนดให้ $V_{wire} = 1.0$

$$a = 0.6$$

$$b = 1.0$$

สำหรับปัญหาการไหลเคลื่อนลวดแบบเพรชเซอร์ทูลิ่งและแบบทิวบ์ทูลิ่ง

กำหนดให้ $V_{wire} = 0$

$$a = 0.5$$

$$b = 1.0$$

ภาคผนวก ข

เงื่อนไขขอบที่ทางเข้าตายสำหรับความเค้น

สมการองค์ประกอบชนิดตัวแบบแทนเนียนแทนเนอรัรูปแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังอยู่ในรูป

$$We \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu_v \tilde{D} - f\tilde{\tau} - We \left\{ \bar{U} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \bar{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla \bar{U})^\dagger + \xi \left[(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger \right] \right\}$$

มีการกำหนดเงื่อนไขขอบที่ทางเข้าตายสำหรับความเค้นเฉือนและความเค้นฉาก ดังนี้

ความเค้นฉากในแนวแกน r คือ

$$\tau_{rr} = 0$$

ความเค้นเฉือนในแนวแกน rz คือ

$$We \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \mu_N \frac{\partial V_z}{\partial r} - f\tau_{rz}$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \frac{\mu_N}{We} \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{f}{We} \tau_{rz}$$

ความเค้นฉากในแนวแกน z คือ

$$We \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = -f\tau_{zz} + 2We\tau_{rz} \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = -\frac{f}{We} \tau_{zz} + 2\tau_{rz} \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

และความเค้นฉากในแนวแกน θ คือ

$$\tau_{\theta\theta} = 0$$

เมื่อ V_z เป็นความเร็วในแนวแกน z ของการไหลแบบวงแหวนดังสมการ (ก.1)

สำหรับงานวิจัยนี้กำหนดให้ $\mu_v = 0.99$ และ $We = 200$ เมื่อ $f = \exp\left(\frac{We}{\mu_v} \tau_{zz}\right)$

ภาคผนวก ค

$$\text{การแสดง } (\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U})^\dagger + \tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U} = \tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + \tilde{\tau} \cdot \tilde{D}$$

กำหนดตัวแปรต่างๆ ในระบบพิกัดทรงกระบอกสมมาตรรอบแกน (axisymmetric coordinate system) ดังนี้

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} \quad \text{และ} \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$$

แต่ละนิพจน์มีค่าดังนี้

$$\nabla \vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \vec{U}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^\dagger) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวปิยมาภรณ์ อุตมั่ง เกิดวันที่ 30 เดือนกันยายน ปีพุทธศักราช 2525 อำเภอศรีนครินทร์ จังหวัดสระแก้ว สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนเบญจมราชูทิศ จังหวัดจันทบุรี เมื่อปีพุทธศักราช 2543 และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีพุทธศักราช 2547 และในปีพุทธศักราช 2551 ได้เข้าศึกษาต่อในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย