ทฤษฎีบทของสโตกส์บนซิมเพลกซ์โดยใช้อินทิกรัลรีมันน์นัยทั่วไป

นาย วิจารณ์ สดศิริ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2537

ISBN 974-584-393-8

STOKES' THEOREM OVER SIMPLEXES
VIA
THE GENERALIZED RIEMANN INTEGRAL

Mr. Wijarn Sodsiri

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1994
ISBN 974-584-393-8

Thesis Title	STOKES' THEOREM OVER SIMPLEXES VIA THE GENERALIZED RIEMANN INTEGRAL
By	Mr. Wijarn Sodsiri
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Mark E. Hall Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

.... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

.... Chairman

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

.... Thesis Advisor

(Dr. Mark E. Hall Ph.D.)

.... Member

(Dr. Yati Krisnangkura Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

วิจารณ์ สดศิริ : ทฤษฎีบทของสโตกส์บนซิมเพลกซ์โดยใช้อินทิกรัลรีมันน์นัยทั่วไป

(STOKES' THEOREM OVER SIMPLEXES VIA THE GENERALIZED RIEMANN INTEGRAL)

อ.ที่ปรึกษา : ดร.มาร์ค อี. ฮอลล์, 65 หน้า. ISBN 974-584-393-8

อินทิกรัลรีมันน์นัยทั่วไปคล้ายกับอินทิกรัลรีมันน์สามัญ แต่อินทิกรัลรีมันน์นัยทั่วไปอินทิเกรตกลุ่มของฟังก์ชันที่ใหญ่กว่ามากและมีสมบัติที่สวยกว่า สมบัติที่ดีมากอันหนึ่งคือทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งไม่ต้องการข้อสมมุติที่ว่า อนุพันธ์ F' อินทิเกรตได้เพื่อที่จะได้สูตรมูลฐาน

$$(GR)\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

กลับได้ว่า การอินทิเกรตได้ของ F' เป็นส่วนหนึ่งของผลสรุปของทฤษฎีบทแทน

ในงานวิจัยนี้เราให้บทนิยามที่ง่ายและเป็นรูปธรรมของอินทิกรัลของฟังก์ชันบน k-ซิมเพลกซ์ใน R^k โดยที่

(i) เราสามารถพิสูจน์แบบหนึ่งของทฤษฎีบทของสโตกส์สำหรับรูปแบบเชิงอนุพันธ์ที่หาอนุพันธ์ได้ และ

(ii) ถ้า $k = 1$ แล้วอินทิกรัลที่นิยามขึ้นมาใหม่นี้จะเหมือนกับอินทิกรัลรีมันน์นัยทั่วไปบนช่วงปิดใน R

ทฤษฎีบทที่สำคัญของวิทยานิพนธ์นี้คือ ทฤษฎีบทของสโตกส์ในแบบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทของสโตกส์ ให้ $k, n \in Z^+$ โดยที่ $k \le n$ ให้ Ω เป็นเซตย่อยเปิดของ R^n ที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $\sigma = [p_0, p_1, \ldots, p_k]$ เป็น k-ซิมเพลกซ์สัมพรรคที่วางทิศทางแล้วใน Ω ถ้า ω เป็นรูปแบบ $k-1$ ที่หาอนุพันธ์ได้บน Ω แล้ว

$$\int_\sigma d\omega$$

หาค่าได้ และ

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$$

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต [signature]

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Mark E. Hall

ปีการศึกษา 2536 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

C325067 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD : DIFFERENTIABLE FORM / INTEGRATION / SIMPLEX / STOKES' THEOREM
WIJARN SODSIRI : STOKES' THEOREM OVER SIMPLEXES VIA THE GENERALIZED RIEMANN INTEGRAL. THESIS ADVISOR : DR. MARK E. HALL, Ph.D. 65 pp. ISBN 974-584-393-8

The generalized Riemann integral is similar to the ordinary Riemann integral, yet it integrates a much wider class of functions and has much nicer properties. One very nice property is the *fundamental theorem of calculus*, which does not require the assumption that the derivative F' be integrable in order to obtain the basic formula

$$(\mathrm{GR})\int_a^b F'(x)\ dx = F(b) - F(a);$$

instead, the integrability of F' is one of the conclusions of the theorem.

In this research, we give a simple, concrete definition of an integral of a function over a k-simplex in R^k such that

(i) we are able to prove a version of Stokes' theorem for arbitrary differential forms which are differentiable, and

(ii) if $k = 1$, then the integral is the same as the generalized Riemann integral over a closed interval in R.

The main result of this thesis is the following version of Stokes' theorem.

Stokes' Theorem: Let $k, n \in Z^+$ be such that $k \le n$. Let Ω be a nonempty open subset of R^n, and let $\sigma = [p_0, p_1, \ldots, p_k]$ be an oriented affine k-simplex in Ω. If ω is a differentiable $(k-1)$-form on Ω, then

$$\int_\sigma d\omega$$

exists and

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

ภาควิชา คณิตศาสตร์	ลายมือชื่อนิสิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Mark E. Hall
ปีการศึกษา 2536	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Mark E. Hall, my thesis advisor, for his untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother, brother, sister, and friends for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

page

LIST OF SPECIAL SYMBOLS

INTRODUCTION

One basic relation between the two fundamental concepts of calculus, the derivative and the definite integral, is the *fundamental theorem of calculus*, stated as follows: If $F : [a, b] \to R$ is differentiable on $[a, b]$, and if F' is Riemann integrable (or Lebesgue integrable) on $[a, b]$, then

$$\int_a^b F'(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

The hypothesis that F' is integrable is a nuisance, but it is necessary: There exist functions $F : [0, 1] \to R$ such that F is differentiable on $[0, 1]$ but F' is not even Lebesgue integrable on $[0, 1]$. This motivated mathematicians in the early 1900s to seek a new definition of the definite integral for which the fundamental theorem of calculus would be valid without the hypothesis that F' is integrable.

The generalized Riemann integral or *gauge integral* provides a solution to this problem. It was first introduced in a 1957 paper by the Czech mathematician *Jaroslav Kurzweil.* The integral was rediscovered independently by the Irish mathematician *Ralph Henstock* in 1961, who developed the basic properties of the integral. The version of the fundamental theorem of calculus which can be proved using the generalized Riemann integral does not require the assumption that F' be integrable (see Theorem 1.3.4).

A natural question is whether it is possible to give a definition of an integral over a k-simplex in R^k similar to the definition of the generalized Riemann integral so that a version of Stokes' theorem (the higher-dimensional analog of the fundamental theorem of calculus) can be proved for arbitrary differential forms which are differentiable.

In this thesis, we give a definition of an integral of a function over a k-simplex in R^k such that

(i) we are able to prove a version of Stokes' theorem for arbitrary differential forms which are differentiable, and

(ii) if $k = 1$, then the integral is the same as the generalized Riemann integral over a closed interval in R.

This thesis is not the first attempt to extend the generalized Riemann integral to higher dimensions. See, for example, [4], [5], [6], [8], and [9]. Unfortunately, each of these attempts was unsuccessful in some way. The definition we will present in Section 3.2 appears to overcome all of the deficiencies found in the integrals defined in the papers mentioned above.

This thesis is complete for the case $k \leq 2$. For the case $k > 2$ the only thing that we can not prove is *Cousin's Lemma* (Lemma 3.2.2), although we believe it to be true for all positive integers k. The proof of this lemma for the case $k \leq 2$ is standard.

The notational conventions, and background on the ordinary Riemann and the generalized Riemann integrals, are given in Chapter I. In Chapter II, we discuss differential forms and the differential operator d. In Chapter III, we introduce a new multi-dimensional version of the generalized Riemann integral of a function over a k-simplex in R^k, and then discuss integration of differential forms. In Chapter IV we prove our main goal, which is Stokes' theorem.