บทที่ ๓

Transformation for Congruent Triangles

ความหมายของรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการ

ความหมายเดิมของเรขาคณิตแบบยุคลิดกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยม 2 รูปบนพื้นราบจะเท่ากันทุกประการได้คือเมื่อยกรูปสามเหลี่ยมหนึ่งขึ้นซ้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งแล้ว ทุกส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะทับกันสนิทเหมือนรูปเดียวกัน คือสามเหลี่ยมทั้งสองต้องมีด้านที่สมนัยกัน เท่ากันด้านต่อด้าน มีมุมทั้งสามที่สมนัยกันเท่ากัน มุมต่อมุม

ในเรขาคณิตเบื้องต้น มีทฤษฎีบทที่กล่าวถึงรูปสามเหลี่ยม 2 รูปจะเท่ากันทุกประการได้อยู่ 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1 สามเหลี่ยม 2 รูป มีด้านเท่ากัน 3 ด้าน ด้านต่อด้าน สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณีที่ 2 สามเหลี่ยม 2 รูป มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน ด้านต่อด้าน และมีมุมในระหว่างด้านเท่าเท่ากัน สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณีที่ 3 สามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณีที่ 4 สามเหลี่ยม 2 รูป มีด้านเท่ากันหนึ่งด้าน และมีมุมเท่ากัน 2 มุม มุมต่อมุม สามเหลี่ยม 2 รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

ในการพิสูจน์กรณีทั้ง 4 นี้ก็จะพิสูจน์ โดยการยกรูปสามเหลี่ยมหนึ่งขึ้นซ้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ถ้าทุกส่วนของสามเหลี่ยมทั้งสองทับกันสนิทเหมือนรูปเดียวกัน ก็กล่าวได้ว่าสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการ

ถ้ามองในแง่ของวิชาพีชคณิตสมัยใหม่แล้ว การยกรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปซ้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้ทับกันสนิทนั้น ก็คือการเลื่อนจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปทับจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งได้พร้อมกันนั่นเอง.

<u>นิยาม 3.1</u> รูปสามเหลี่ยม 2 รูป บนพื้นราบจะเท่ากันทุกประการ (แบบยุคลิด) ได้ก็ต่อเมื่อสามารถหา matrix transformation ได้แมทริกซ์หนึ่งและเป็น element ที่อยู่ใน Euclidean Group ซึ่งจะนำจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปทับจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งได้พร้อมกันโดยให้จุดสมนัยกันทับกัน.

กรณีทั้งสี่ที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการได้ดังกล่าวนั้น สามารถจะพิสูจน์ได้โดยใช้นิยาม 3.1 ดังต่อไปนี้.

1. จากกรณีที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมได้ 2 รูป โดยให้ด้านที่สมนัยกันเท่ากันด้านต่อด้าน เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดยกำหนดด้าน AB เท่ากับด้าน DE ด้าน BC เท่ากับด้าน EF และด้าน CA เท่ากับด้าน FD ซึ่งตีความทางเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ว่า กำหนดโคออดิเนตของจุด A, B, C, D, E และ F มาให้ เช่น ให้เป็น (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6) ตามลำดับ ดังนั้น

$$\text{ระยะ } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\text{ระยะ } BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$
$$\text{ระยะ } CA = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$
$$\text{ระยะ } DE = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$
$$\text{ระยะ } EF = \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$
$$\text{ระยะ } FD = \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$

ดังนั้น

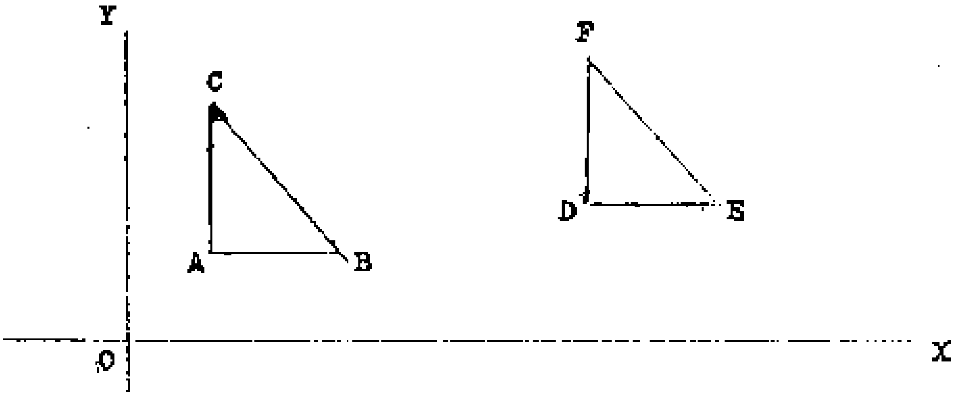
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$
$$\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$
$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$

ต้องการหา matrix transformations แมทริกซ์หนึ่งที่เป็น element ใน Euclidean Group ซึ่งจะนำจุดยอด A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) และ C (x_3, y_3)

ของรูป $\triangle$ ABC ไปทับจุดยอด D (x_4, y_4), E(x_5, y_5) และ F(x_6, y_6) ของรูป $\triangle$ DEF ตามลำดับได้พร้อมกัน

จากคุณสมบัติของ Euclidean Group ก็จะทำให้ความยาวของด้านของสามเหลี่ยม และมุมของสามเหลี่ยมมีขนาดคงที่

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ถ้าให้รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะที่ด้านที่สมนัยกัน ขนานกันดังรูป



เลื่อนจุด A (x_1, y_1) ไปทับจุด D (x_4, y_4)

จาก (7) ในบทที่ 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\therefore \quad x_4 = x_1 + a$$

$$y_4 = y_1 + b$$

$$\therefore \quad a = x_4 - x_1$$

$$b = y_4 - y_1$$

matrix transformation H_1 จะเท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น element ใน Euclidean Group

จาก (1) กล่าวได้ว่า matrix transformations H_1 จะนำจุด A (x_1, y_1) ไปทับจุด D (x_4, y_4)

ขณะเดียวกัน matrix transformations H_1 ก็จะนำจุด B (x_2, y_2) และ C (x_3, y_3) ไปทับจุด E (x_5, y_5) และ F (x_6, y_6) ตามลำดับด้วยดังนี้คือ

จุด B จะถูกส่งไปที่จุด B (x_2', y_2') โดย matrix transformation H_1

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2' = x_2 + (x_4 - x_1)$$

$$y_2' = y_2 + (y_4 - y_1)$$

จุด C จะถูกส่งไปที่จุด C' (x_3', y_3') โดย matrix transformation H_1

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_3 = x_3 + (x_4 - x_1)$$

$$y_3 = y_3 + (y_4 - y_1)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x_2', y_2') = (x_5, y_5)$ และ $(x_3', y_3') = (x_6, y_6)$

$$\therefore \text{ ระยะ } B''C'' = \sqrt{[x_3 + (x_4 - x_1) - (x_2 + (x_4 - x_1)]^2 + [y_3 + y_4 - y_1) - (y_2 + (y_4 - y_1))]^2}$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$= \text{ระยะ}BC$$

$$= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$

= ระยะ EF

$\therefore$ จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F

$\therefore$ H_1 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอด A, B, C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้พร้อมกัน

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ กล่าวคือ ด้านที่สมนัยกันเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมที่สมนัยกันเท่ากัน มุมต่อมุม ซึ่งจะทดสอบดูได้ดังนี้

1. ทดสอบด้าน

$$\therefore \text{ระยะ } DB' = \sqrt{(x_2 + (x_4 - x_1) - x_4)^2 + (y_2 + (y_4 - y_1) - y_4)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

= ระยะ AB

$$= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$

= ระยะ DE

$$\therefore \text{ระยะ } C'D = \sqrt{[x_4 - (x_3 + (x_4 - x_1)]^2 + [y_4 - (y_3 + (y_4 - y_1)]^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

= ระยะ CA

$$= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$

= ระยะ FD

และระยะ $B'C'$ = ระยะ BC = ระยะ EF

2. ทดสอบมุม

ให้เส้นตรง AC มีสมการเป็น $y = m_1x + c_1$

$$\therefore m_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

ให้เส้นตรง BC มีสมการเป็น $y = m_2x + c_2$

$$\therefore \quad m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

ให้เส้นตรง BA มีสมการเป็น $y = m_3x + c_3$

$$\therefore \quad m_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ให้ $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \beta = \tan^{-1} \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2m_3}$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)} \ldots(3)$$

ให้มุม DFE $= \alpha'$, FED $= \beta'$

ให้เส้นตรง DF มีสมการเป็น $y = m_1'x + c_1'$

$$\therefore \quad m_1' = \frac{y_6 - y_4}{x_6 - x_4}$$

$$= \frac{y_3 + (y_4 - y_1) - y_4}{x_3 + (x_4 - x_1) - x_4}$$

$$= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

ให้เส้นตรง EF มีสมการเป็น $y = m_2'x + c_2'$

$$\therefore \quad m_2' = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5}$$

$$= \frac{y_3 + (y_4 - y_1) - (y_2 + (y_4 - y_1))}{x_3 + (x_4 - x_1) - (x_2 + (x_4 - x_1))}$$

$$= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

ให้เส้นตรง ED มีสมการเป็น $y = m_3'x + c_3'$

$$\therefore \quad m_3' = \frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5}$$

$$= \frac{y_4 - (y_2 + (y_4 - y_1))}{x_4 - (x_2 + (x_4 - x_1))}$$

$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\therefore \quad \alpha' = \tan^{-1} \frac{m_1' - m_2'}{1 + m_1'm_2'}$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_5 - x_6)(y_6 - y_4) - (x_6 - x_4)(y_6 - y_5)}{(x_6 - x_4)(x_6 - x_5) + (y_6 - y_4)(y_6 - y_5)} \quad \ldots(4)$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

$$\therefore \quad \beta' = \tan^{-1} \frac{m_2' - m_3'}{1 + m_2'm_3'}$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_4 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_4 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_4 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_4 - y_5)} \quad \ldots (5)$$

$$= \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_3)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_3)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3)}$$

$\therefore \quad \alpha = \alpha'$

$\beta = \beta'$

$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างในกระดาษกราฟ โดยให้จุด A, B, C, D, E และ F มีโคออดิเนตเป็น (1,4), (4,4), (1,8), (8,5), (11,5) และ (8,9) ตามลำดับ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง (กราฟรูปที่ ๖)

$\therefore$ matrix transformations H_1 เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

H_1 จะเป็น matrix transformations ที่ส่งจุด A(1,4), B(4,4) และ C(1,8) ไปยังจุด D(8,5), E(11,5) และ F(8,9) ตามลำดับ

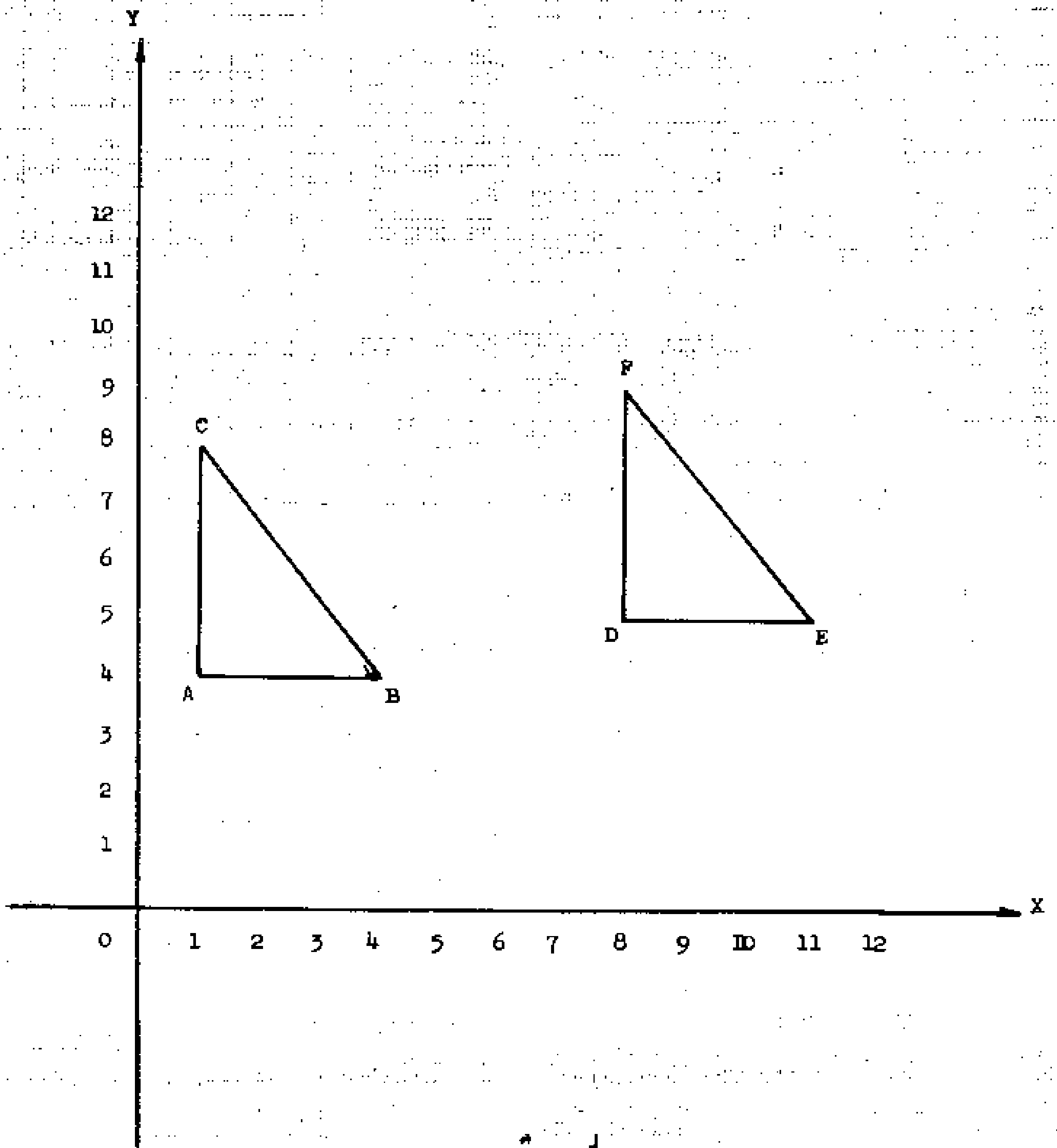
สมมุติให้จุด B ถูกส่งไปที่จุด $B'(x_2', y_2')$ โดย H_1 และจุด C ถูกส่งไปที่จุด $C'(x_3', y_3')$ โดย H_1

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด E

$\therefore$ จุด B ทับจุด E

$$\text{และ} \quad \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$



กราฟรูปที่ ๓

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด F

$\therefore$ จุด C ทับจุด F

$\therefore$ H_1 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอด A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้พร้อมกัน โดยจุด A ทับจุด D จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะทดสอบได้คือ.

1. ทดสอบด้าน

$\because$ กำหนดให้ด้าน AB = ด้าน DE

ด้าน BC = ด้าน EF

และด้าน CA = ด้าน FD

ระยะ AB $= \sqrt{(4-1)^2 + (4-4)^2}$

$= 3$

ระยะ DE $= \sqrt{(11-8)^2 + (5-5)^2} = 3$

= ระยะ AB

ระยะ BC $= \sqrt{(1-4)^2 + (8-4)^2}$

$= 5$

ระยะ EF $= \sqrt{(8-11)^2 + (9-5)^2} = 5$

= ระยะ BC

ระยะ CA $= \sqrt{(1-1)^2 + (4-8)^2}$

$= 4$

ระยะ FD $= \sqrt{(8-8)^2 + (5-9)^2} = 4$

= ระยะ CA

2. ทดสอบมุม

ให้ $A\hat{C}B = \alpha$, $C\hat{B}A = \beta$

จาก (2) ได้

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{(1-4)(8-4)-(1-1)(8-4)}{(1-1)(1-4)+(8-4)(8-4)}$$

$$= \tan^{-1} (\frac{-3}{4})$$

จาก (3) ได้

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(1-4)(8-4)-(1-4)(4-4)}{(1-4)(1-4)+(8-4)(4-4)}$$

$$= \tan^{-1} (\frac{-4}{3})$$

ให้ $D\hat{F}E = \alpha'$, $F\hat{E}D = \beta'$

จาก (4) ได้

$$\alpha' = \tan^{-1} \frac{(8-11)(9-5)-(8-8)(9-5)}{(8-8)(8-11)+(9-5)(9-5)}$$

$$= \tan^{-1} (\frac{-3}{4}) = \alpha$$

จาก (5) ได้

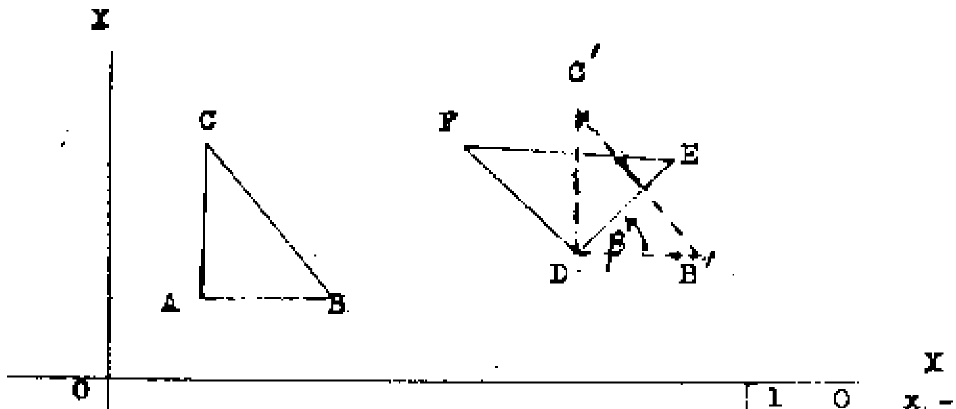
$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(8-11)(9-5)-(8-11)(5-5)}{(8-11)(8-11)+(9-5)(5-5)}$$

$$= \tan^{-1} (\frac{-4}{3})$$

$$= \beta$$

$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะดังรูป โดยด้าน DE ทำมุม β เรเดียนกับแนวระดับ



จากตัวอย่างที่ 1 จะได้ matrix transformation $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ซึ่งนำจุด A (x_1, y_1) ไปทับจุด D (x_4, y_4) จุด $B(x_2, y_2)$ ไปทับจุด $B'(x_2', y_2')$ และจุด $C(x_3, y_3)$ ไปทับจุด $C'(x_3', y_3')$

ใช้จุด D เป็นจุดหมุน หมุนด้าน DB′ ทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม β เรเดียน

จาก (13) ในบทที่ 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} x_2'' \\ y_2'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & x_4(1-\cos\beta) + y_4\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta & -x_4\sin\beta + y_4(1-\cos\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix}$$

แต่จากตัวอย่างที่ 1

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x_2'' \\ y_2'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & (x_4-x_1)\cos\beta - (y_4-y_1)\sin\beta + x_4(1-\cos\beta) + y_4\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta & (x_4-x_1)\sin\beta + (y_4-y_1)\cos\beta - x_4\sin\beta + y_4(1-\cos\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2'' = x_2\cos\beta - y_2\sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta + x_4(1-\cos\beta) + y_4\sin\beta$$
$$y_2'' = x_2\sin\beta + y_2\cos\beta + (x_4 - x_1)\sin\beta + (y_4 - y_1)\cos\beta - x_4\sin\beta + y_4(1-\cos\beta)$$

$\therefore$ matrix transformations H_2 จะนำจุด B (x_2, y_2) ไปยังจุด E (x_2'', y_2'') ขณะเดียวกันก็จะนำจุด C (x_3, y_3) ไปยังจุด F(x_3'', y_3'') ด้วย

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_3'' = x_3\cos\beta - y_3\sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta + x_4(1-\cos\beta) + y_4\sin\beta$$
$$y_3'' = x_3\sin\beta + y_3\cos\beta + (x_4 - x_1)\sin\beta + (y_4 - y_1)\cos\beta - x_4\sin\beta + y_4(1-\cos\beta)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x_2'', y_2'') = (x_5, y_5)$ และ $(x_3'', y_3'') = (x_6, y_6)$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ ระยะ } E''F'' &= \sqrt{(x_3'' - x_2'')^2 + (y_3'' - y_2'')^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &= \text{ระยะ BC} \\ &= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2} \\ &= \text{ระยะ EF} \end{aligned}$$

$\therefore$ จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F และ H_2 จะเป็น matrix transformation ที่จะนำจุด A ไปทับจุด D ด้วย กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta + x_4(1 - \cos\beta) + y_4\sin\beta$$
$$y_4 = x_1\sin\beta + y_2\cos\beta + (x_4 - x_1)\sin\beta + (y_4 - y_1)\cos\beta - x_4\sin\beta + y_4(1-\cos\beta)$$

$\therefore$ H_2 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอด A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้พร้อมกัน.

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ กล่าวคือ ด้านที่สมนัยกันเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมที่สมนัยกันเท่ากัน มุมต่อมุม ซึ่งจะทดสอบดูได้ดังนี้.

1. ทดสอบด้าน

$$\therefore \text{ ระยะ } D'E' = \sqrt{(x_2'' - x_4)^2 + (y_2'' - y_4)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \text{ ระยะ AB}$$
$$= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$
$$= \text{ ระยะ DE}$$

$$\text{ระยะ } F'D = \sqrt{(x_4 - x_3'')^2 + (y_4 - y_3'')^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$
$$= \text{ ระยะ CA}$$
$$= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$
$$= \text{ ระยะ FD}$$

$$\text{และระยะ } B''C' = \text{ ระยะ BC } = \text{ ระยะ EF}$$

2. ทดสอบมุม

$$\text{ให้ } A\hat{C}B = \alpha, \quad C\hat{B}A = \beta$$
$$D\hat{F}E = \alpha', \quad F\hat{E}D = \beta'$$

จากตัวอย่างที่ 1

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_6 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_4)(y_6 - y_5)}{(x_6 - x_4)(x_6 - x_5) + (y_6 - y_4)(y_6 - y_5)}$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_4 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_4 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_4 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_4 - y_5)}$$

แต่ $(x_5, y_5) = (x_2'', y_2'')$ และ $(x_6, y_6) = (x_3', y_3'')$

$$\therefore \alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

$$= \alpha$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}$$

$$= \beta$$

$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

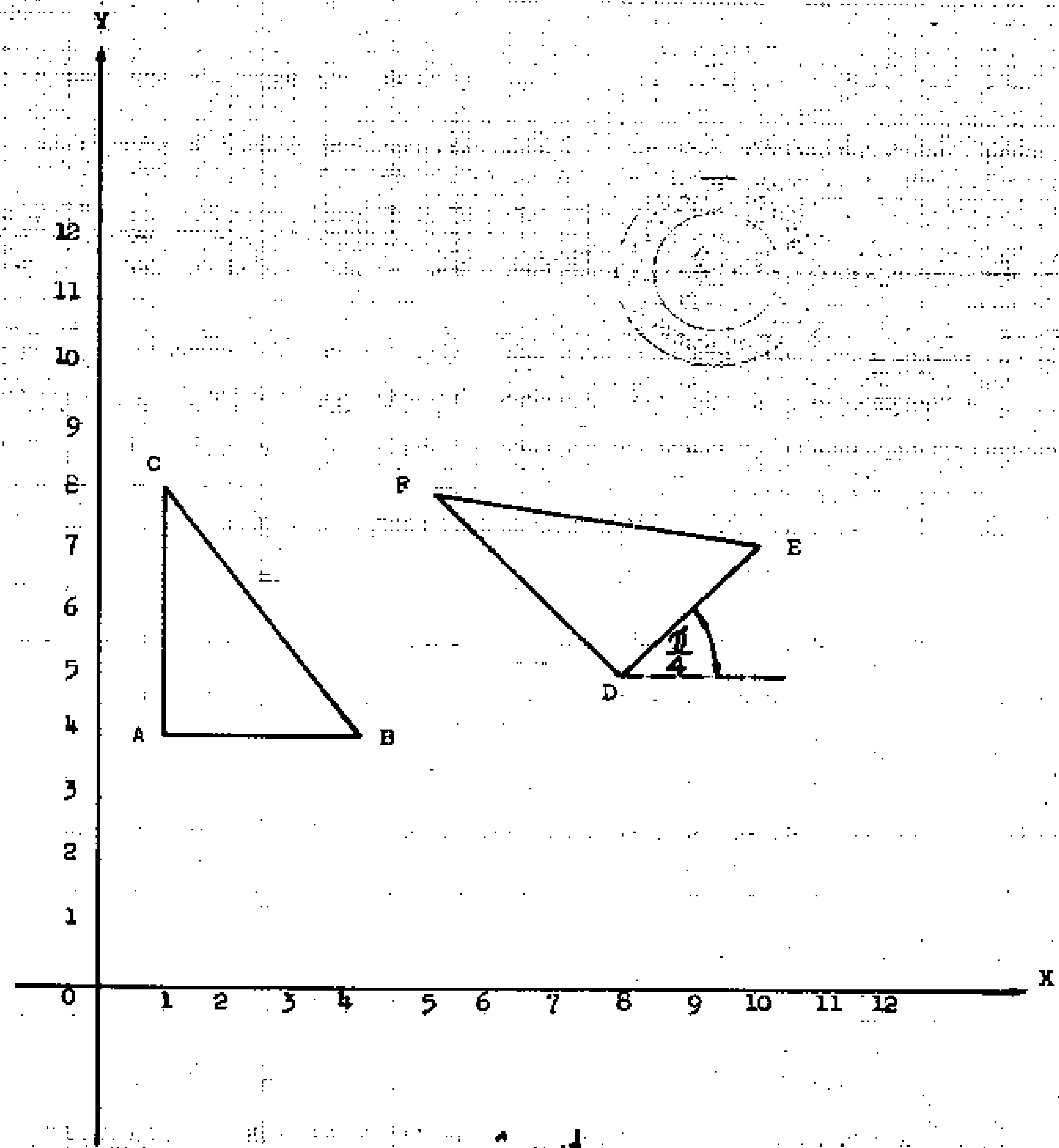
ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างในกระดาษกราฟ โดยให้จุด A, B, C,D,E และ F มีโคออดิเนต (1,4),(4,4),(1,8),(8,5),(10.121,7.121) และ (5.172,7.828) ตามลำดับ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง (กราฟรูปที่ 4) โดยมีด้าน DE ทำมุม $\frac{\pi}{4}$ เรเดียนกับแนวระดับ

$\therefore$ matrix transformation H_2

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & (8-1)\cos\frac{\pi}{4} - (5-4)\sin\frac{\pi}{4} + 8\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) + 5\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & (8-1)\sin\frac{\pi}{4} + (5-4)\cos\frac{\pi}{4} - 8\sin\frac{\pi}{4} + 5\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_2 จะเป็น matrix transformations ที่ส่งจุด A (1,4), B (4,4) และ C (1,8) ไปยังจุด D(8,5), E (10.121,7.121) และ F (5.172,7.828) ตามลำดับ



กราฟรูปที่ ๔

สมมุติให้จุด B(4,4) ถูกส่งไปที่จุด $E'(x''_2, y''_2)$ โดย H_2 และจุด C(1,8) ถูกส่งไปที่จุด $F'(x''_3, y''_3)$ โดย H_2

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x''_2 \\ y''_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} + 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.121 \\ 7.121 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด E

∴ จุด B ทับจุด E

$$\begin{bmatrix} x''_3 \\ y''_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 - 2\sqrt{2} \\ 5 + 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.172 \\ 7.828 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด F

$\therefore$ จุด C ทับจุด F

H_2 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอด A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้พร้อมกัน

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะทดสอบดูได้ดังนี้.

1. ทดสอบด้าน

$\therefore$ กำหนดให้ด้าน AB = ด้าน DE

ด้าน BC = ด้าน EF

และด้าน CA = ด้าน FD

และจากตัวอย่างที่ 1 ได้ระยะ AB = 3

ระยะ BC = 5

และระยะ CA = 4

$$\therefore \text{ ระยะ } DE = \sqrt{\left(\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{10+3\sqrt{2}}{2} - 5\right)^2} = 3 = \text{ ระยะ} AB$$

$$EF = \sqrt{\left[(8-2\sqrt{2}) - \frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \left[(5+2\sqrt{2}) - \frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right]^2}$$

$$= 5 = \text{ ระยะ } BC$$

$$\text{และระยะ } FD = \sqrt{\left[8-(8-2\sqrt{2})\right]^2 + \left[5-(5+2\sqrt{2})\right]^2}$$

$$= 4$$

$$= \text{ ระยะ} CA$$

2. ทดสอบมุม

ให้ $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

จากตัวอย่างที่ 1 ได้ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$

และ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$

ให้ $\widehat{DFE} = \alpha'$, $\widehat{FED} = \beta'$

จาก (4) ได้

$$\alpha' = \tan^{-1}\frac{\left(8-2\sqrt{2}-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)(5+2\sqrt{2}-5)-(8-2\sqrt{2}-8)\left(5+2\sqrt{2}-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)}{(8-2\sqrt{2}-8)\left(8-2\sqrt{2}-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)+(5+2\sqrt{2}-5)\left(5+2\sqrt{2}-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$= \alpha$$

จาก (5) ได้

$$\beta' = \tan^{-1}\frac{\left(8-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(5+2\sqrt{2}-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)-\left(8-2\sqrt{2}-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(5-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(8-2\sqrt{2}-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(8-\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)+\left(5+2\sqrt{2}-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)\left(5-\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)}$$

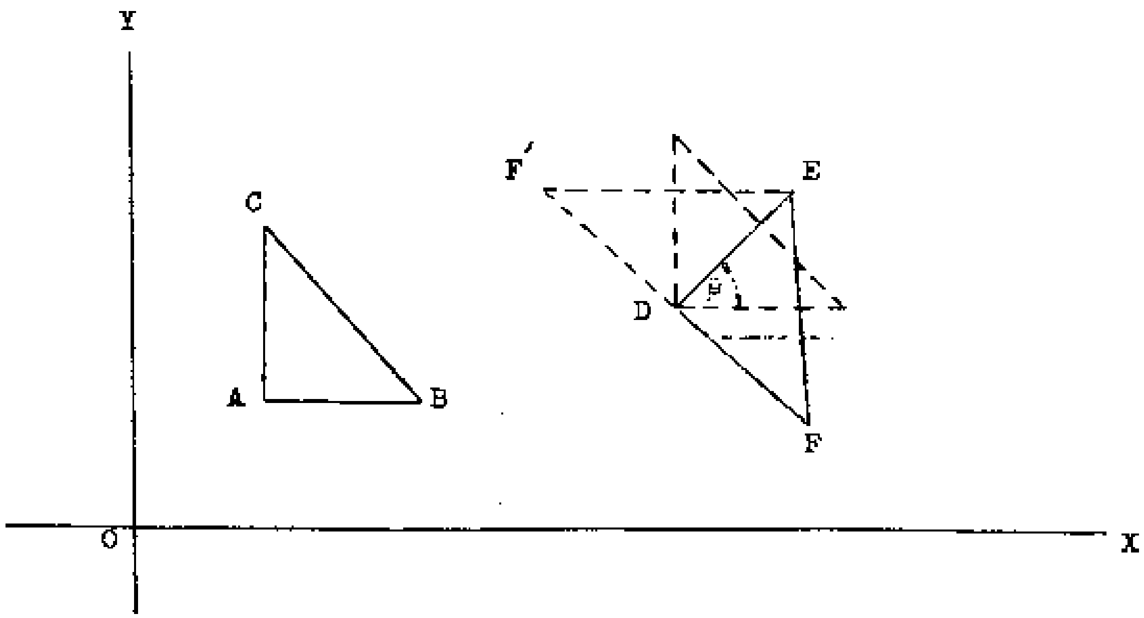
$$= \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$= \beta$$

$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะ

ดังรูป



จากตัวอย่างที่ 2 จะได้ matrix transformation H_2 ซึ่งนำจุด A (x_1, y_1) ไปทับจุด D (x_4, y_4) จุด B (x_2, y_2) ไปทับจุด $E(x_5, y_5)$ และจุด $C(x_3, y_3)$ ไปทับจุด $F'(x_3'', y_3'')$

ให้จุด F' reflect บนเส้นตรง DE สมมุติได้จุด $F''(x_3''', y_3''')$

จาก (17) ในบทที่ 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} x_3''' \\ y_3''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & x_4(1 - \cos 2\beta) - y_4 \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & -x_4 \sin 2\beta + y_4(1 + \cos 2\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

แต่จากตัวอย่างที่ 2

$$\begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3''' \\ y_3''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & x_4(1 - \cos\beta) - y_4 \sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta + (y_4 - y_1)\sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta & -x_4 \sin\beta + y_4(1 + \cos\beta) + (x_4 - x_1)\sin\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3''' = x_3 \cos\beta + y_3 \sin\beta + x_4(1 - \cos\beta) - y_4 \sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta\ (y_4 - y_1)\sin\beta$$

$$y_3''' = x_3 \sin\beta - y_3 \cos\beta - x_4 \sin\beta + y_4(1 + \cos\beta) + (x_4 - x_1)\sin\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta$$

$\therefore$ matrix transformation H_3 จะนำจุด C (x_3, y_3) ไปยังจุด $F''(x_3''', y_3''')$

ขณะเดียวกันก็จะนำ B (x_2, y_2) ไปยังจุด $E''(x_2''', y_2''')$ ด้วย

$$\therefore \begin{bmatrix} x_2''' \\ y_2''' \\ 1 \end{bmatrix} = H_3 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2''' = x_2 \cos\beta + y_2 \sin\beta + x_4(1 - \cos\beta) - y_4 \sin\beta + (x_4 - x_1)\cos\beta + (y_4 - y_1)\sin\beta$$

$$y_2''' = x_2 \sin\beta - y_2 \cos\beta - x_4 \sin\beta + y_4(1 + \cos\beta) + (x_4 - x_1)\sin\beta - (y_4 - y_1)\sin\beta$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x_2''', y_2''') = (x_5, y_5)$, $(x_3''', y_3''') = (x_6, y_6)$

$\therefore$ ระยะ $EF = \sqrt{(x_3''' - x_3''')^2 + (y_3''' - y_2''')^2}$

$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

= ระยะ BC

$= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$

= ระยะ EF

$\therefore$ จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F และ H_3 จะเป็น matrix transformation ที่จะนำจุด A ไปทับจุด D ด้วย กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = H_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_4 = x_1 \cos\beta + y_1 \sin\beta + x_4(1 - \cos\beta) - y_4 \sin\beta \; (x_4 - x_1)\cos\beta + (y_4 - y_1)\sin\beta$

$y_4 = x_1 \sin\beta - y_1 \cos\beta - x_4 \sin\beta + y_4 (1 + \cos\beta) + (x_4 - x_1)\sin\beta - (y_y - y_1)\sin\beta$

$\therefore$ H_3 เป็น matrix transformotion ที่นำจุดยอด A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้สนิทกัน

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะทดสอบดูได้ดังนี้.

<u>1. ทดสอบด้าน</u>

ระยะ $DE'' = \sqrt{(x_2''' - x_4)^2 + (y_2''' - y_4)^2}$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

= ระยะ AB

$= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$

= ระยะ DE

ระยะ $F''D = \sqrt{(x_4 - x_3''')^2 + (y_4 - y_3''')^2}$

$= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$

= ระยะ CA

$= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$

= ระยะ FD

และระยะ $E''F''$ = ระยะ BC = ระยะ EF

2. ทดสอบมุม

ให้ $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

$\hat{DFE} = \alpha'$, $\hat{FED} = \beta'$

จากตัวอย่างที่ 1 ได้ว่า

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{(x_3-x_2)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2) + (y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(x_1-x_2)(y_3-y_2) - (x_3-x_2)(y_1-y_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2) + (y_3-y_2)(y_1-y_2)}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_6-x_5)(y_6-y_5) - (x_6-x_4)(y_6-y_5)}{(x_6-x_4)(x_6-x_5) + (y_6-y_4)(y_6-y_5)}$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_4-x_5)(y_6-y_5) - (x_6-x_5)(y_4-y_5)}{(x_6-x_5)(x_4-x_5) + (y_6-y_5)(y_4-y_5)}$$

แต่ $(x_5', y_5) = (x_2''', y_2''')$ และ $(x_6, y_6) = (x_3''', y_3''')$

$$\therefore \alpha' = \tan^{-1} \left\{ - \frac{(x_3-x_2)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2) + (y_3-y_1)(y_3-y_2)} \right\}$$

$$|\alpha'| = |\alpha|$$

$$\beta' = \tan^{-1}\left\{-\frac{(x_1-x_2)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_1-y_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)+(y_3-y_2)(y_1-y_2)}\right\}$$

$$|\beta'| = |\beta|$$

$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างในกระดาษกราฟ โดยให้จุด A,B,C,D,E และ F มีโคออดิเนต (1,4),(4,4),(1,8),(8,5),(10.121,7.121) และ(10.828, 2.172)ตามลำดับ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง (กราฟรูปที่ 5) โดยมีด้าน DE ทำมุม $\frac{\pi}{4}$ เรเดียนกับแนวระดับ

$\therefore$ matrix transformation H_3

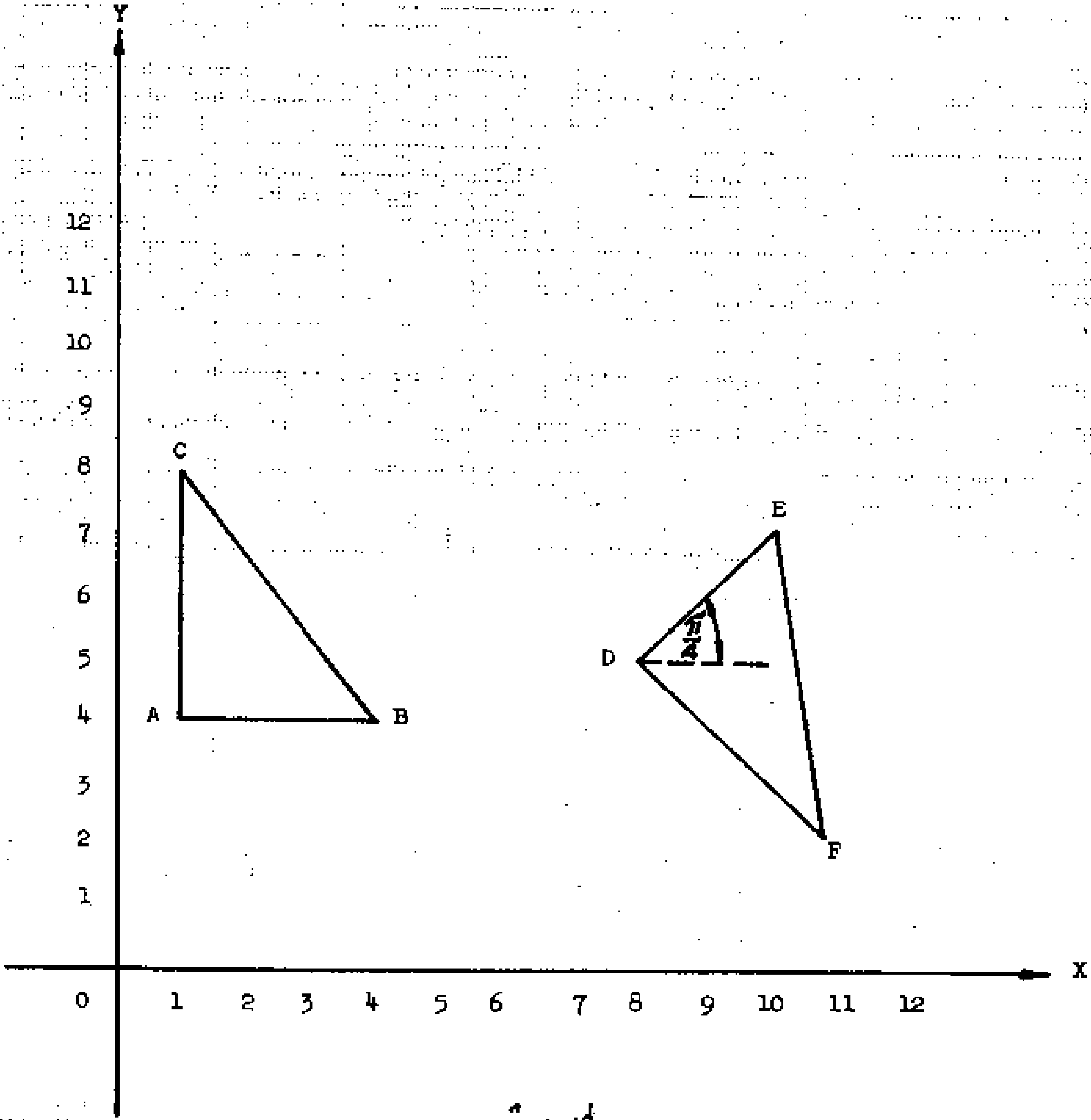
$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 8(1-\cos\frac{\pi}{4}) - 5\sin\frac{\pi}{4} + (8-1)\cos\frac{\pi}{4} + (5-4)\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} & -8\sin\frac{\pi}{4} + 5(1+\cos\frac{\pi}{4}) + (8-1)\sin\frac{\pi}{4} - (5-4)\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 8-\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5+\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_3 จะเป็น matrix transformation ที่ส่งจุด A (1,4), B (4,4) และ C (1,8) ไปยังจุด D (8'5), E (10.121,7.121) และ F (10.828, 2.172) ตามลำดับ

สมมุติให้จุด C (1,8) ถูกส่งไปที่จุด $F''(x_3''', y_3''')$ โดย H_3 และจุด B(4,4) ถูกส่งไปที่จุด $E''(x_2''', y_2''')$ โดย H_3

$$\begin{bmatrix} x_3''' \\ y_3''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 8-\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5+\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$



กราฟรูปที่ ๔

$$= \begin{bmatrix} 8 + 2\sqrt{2} \\ 5 - 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.828 \\ 2.172 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด F

$\therefore$ จุด C ทับจุด F

$$\begin{bmatrix} x''_2 \\ y''_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 8 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.121 \\ 7.121 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ซึ่งเท่ากับโคออดิเนตของจุด E

$\therefore$ จุด B ทับจุด E

$\therefore$ H_3 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอด A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุดยอด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้พร้อมกัน

$\therefore$ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะทดสอบกฎได้ดังนี้.

1. ทดสอบด้าน

∴ กำหนดให้ด้าน AB = ด้าน DE

ด้าน BC = ด้าน EF

และด้าน CA = ด้าน FD

และจากตัวอย่างที่ 1 ได้ระยะ AB = 3

ระยะ BC = 5

และระยะ CA = 4

จากตัวอย่างที่ 2 ได้ระยะ DE = 3 = ระยะ AB

$$\text{ระยะ } EF = \sqrt{\left[(8 + 2\sqrt{2}) - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \left[5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}\right]^2}$$

$$= 5 = \text{ระยะ } BC$$

$$\text{ระยะ } FD = \sqrt{[8 - (8 + 2\sqrt{2})]^2 + [5 - (5 - 2\sqrt{2})]^2}$$

$$= 4 = \text{ระยะ } CA$$

2. ทดสอบมุม

ให้ $\hat{ABC} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

จากตัวอย่างที่ 1 ได้ $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$

และ $\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$

ให้ $\hat{DFE} = \alpha'$, $\hat{FED} = \beta'$

จาก (4) ได้

$$\alpha' = \tan^{-1}\frac{(8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - 2\sqrt{2} - 5) - (8 + 2\sqrt{2} - 8)(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}{(8 + 2\sqrt{2} - 8)(8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5 - 2\sqrt{2} - 5)(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}) - ((8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}{(8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}$$

$$= \tan^{-1} \frac{4}{3}$$

$\therefore \quad |\alpha| = |\alpha'|$

และ $\quad |\beta| = |\beta'|$

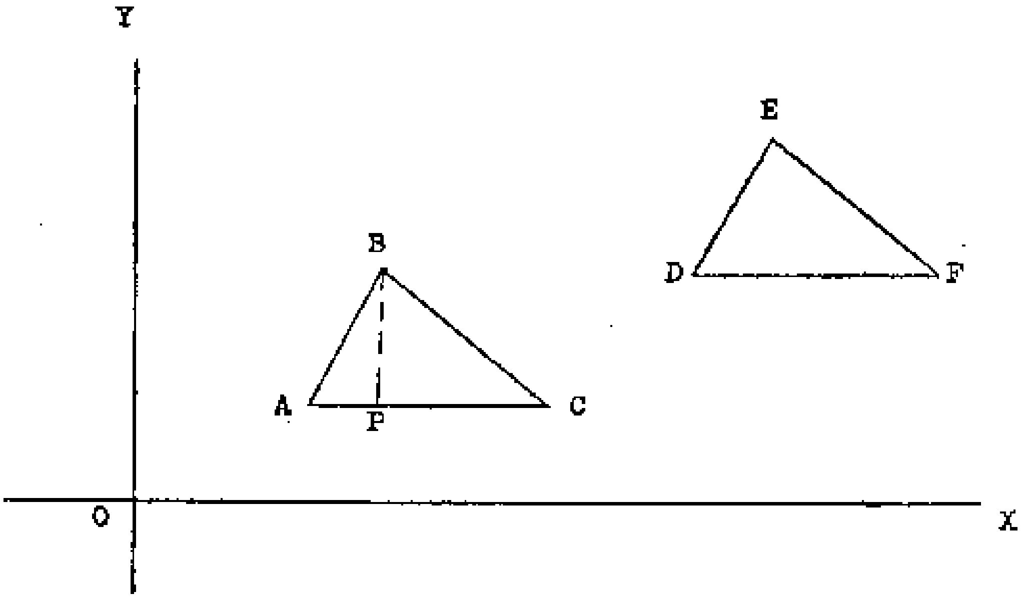
$\therefore$ มุมที่เหลือย่อมเท่ากัน

จากตัวอย่างในกรณีที่ 1 จึงสรุปได้ว่า ถ้ามีสามเหลี่ยม 2 รูป กำหนดจุดยอดทั้งสามของแต่ละรูปมาให้ เรากล่าวว่าสามเหลี่ยม 2 รูปนั้น เท่ากันทุกประการ เมื่อเราสามารถคำนวณหา matrix tranformation ซึ่งจะส่งจุดยอดทั้งสามของรูปหนึ่งไปยังจุดยอดทั้งสามของอีกรูปหนึ่งได้<u>พร้อมกัน</u>

2. จากกรณีที่ 2 สามเหลี่ยม 2 รูปมีด้านเท่ากัน 2 ด้าน ด้านต่อด้าน และมีมุมในระหว่างด้านเท่าเท่ากัน เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดยกำหนดด้าน AB เท่ากับด้าน DE ด้าน BC เท่ากับด้าน EF และมุม ABC เท่ากับมุม DEF ซึ่งที่ความหางเราจากณิตวิเคราะห์ได้ว่า กำหนดโคออดิเนตของจุด A,B,C,D,E และ F มาให้ ดังนั้นเราก็พิสูจน์ได้ว่า สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ โดยใช้วิธีการในกรณีที่ 1

3. จากกรณีที่ 3 สามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดยกำหนดมุม BAC เท่ากับมุม EDF และต่างก็เท่ากับหนึ่งมุมฉาก ด้าน BC เท่ากับด้าน EF ด้าน AB เท่ากับด้าน DE ซึ่งที่ความหางเราจากณิตวิเคราะห์ได้ว่ากำหนดโคออดิเนตของจุด A,B,C,D,E และ F มาให้ เราก็จะพิสูจน์โดยใช้วิธีการในกรณีที่ 1 ได้.

4. จากกรณีที่ 4 สามเหลี่ยม 2 รูป มีด้านเท่ากันหนึ่งด้าน และมีมุมเท่ากัน 2 มุม มุมต่อมุม เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม EDF โดยกำหนดด้าน AC เท่ากับด้าน DE มุม BAC เท่ากับมุม EDF และมุม BCA เท่ากับมุม DEF (ดังรูป)



สมมุติให้ด้าน AC $= b$ มุม BAC $= \alpha$ มุม BCA $= \beta$

ลาก $BP \perp$ กับ AC

สมมุติให้ $AP = \xi$

$BP = \eta$

$\therefore PC = b - \xi$

$\tan \alpha = \frac{\eta}{\xi}$

$\therefore \eta = \xi \tan \alpha$

$\tan \beta = \frac{\eta}{b - \xi}$

$\therefore \eta = (b - \xi) \tan \beta$

$\therefore \xi \tan \alpha = (b - \xi) \tan \beta$

$$\therefore \xi = \frac{b \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$\therefore \eta = \frac{b \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

เมื่อกำหนดด้าน AC มาให้จึงมีความต่างเราจากฝีตวิเคราะห์ได้ว่า ได้กำหนดโคออดิเนตของจุด A และ C ให้สมมุติให้เป็น (x_1, y_1) และ (x_3, y_3) ตามลำดับ ต้องการหาโคออดิเนต ของจุด B (x_2, y_2)

$$\therefore \quad x_2 = x_1 + \xi = x_1 + \frac{b \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$y_2 = y_1 + \eta = y_1 + \frac{b \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

โดยทำนองเดียวกันก็จะหาโคออดิเนตของจุด E ได้
เมื่อรู้โคออดิเนตของจุดยอดของสามเหลี่ยมทั้งสองก็จะพิสูจน์ได้ว่า สามเหลี่ยมทั้งสอง
เท่ากันทุกประการโดยใช้วิธีการในกรณีที่ 1

จึงสรุปได้ว่าทฤษฎีบททั้งสี่ของยุคลิดที่กล่าวถึงสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการนั้น เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทนั้นได้โดยคำนวณหา matrix transformations ซึ่งเป็น elements ใน Euclidean Group สามเหลี่ยมสองรูปหรือคู่หนึ่งจะเท่ากันทุกประการ เมื่อเราคำนวณแมทริกซ์ดังกล่าวมาได้ แมทริกซ์หนึ่งหรืออีกนัยหนึ่งแมทริกซ์หนึ่งแมทริกซ์จะมีผลทำให้เกิดสามเหลี่ยมคู่หนึ่ง เท่ากันทุกประการ สามเหลี่ยมคู่ต่าง ๆ ที่เท่ากันทุกประการนั้นก็เป็นผลจาก matrix transformations ทั้งหลายใน Euclidean Group นั่นเอง