บทที่ 2

แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับความเชื่อถือได้

ในปัจจุบันการประเมินความเชื่อถือได้ในระบบไฟฟ้ากำลังมักนำแนวคิดเกี่ยวกับของทฤษฎีความน่าจะเป็นมาใช้โดยอาศัยหลักพื้นฐานที่ว่าอุปกรณ์ในระบบไฟฟ้ากำลังนั้นอาจอยู่ในสถานะทำงานหรือสถานะเสียก็ได้ โดยสถานะเสียที่จะเกิดขึ้นในอนาคตจะถือเป็นเหตุการณ์ที่ไม่อาจทราบล่วงหน้าได้หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งเป็นเหตุการณ์แบบสุ่ม ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีความน่าจะเป็นและแบบจำลองสถานะการทำงานของอุปกรณ์ต่างๆในระบบไฟฟ้าประกอบกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ในการประเมินความเชื่อถือได้ของระบบไฟฟ้ากำลัง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 การกระจายของฟังก์ชันความเชื่อถือได้

หากกำหนดให้ Q(t) คือฟังก์ชันการกระจายความน่าจะเป็นแบบสะสมที่อุปกรณ์ใดๆจะเสียแล้วดังนั้น ฟังก์ชันการกระจายความน่าจะเป็นแบบสะสมที่อุปกรณ์นั้นๆจะทำงานได้ในที่นี้กำหนดให้เป็น R(t) โดย R(t) นิยามดังสมการที่ 2.1 [5,6]

$$R(t) = 1 - Q(t) \tag{2.1}$$

หากเราทำการดิฟเฟอเรนชิเอทฟังก์ชันการกระจายแบบสะสมความน่าจะเป็นแล้วเราจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density function)

หากกำหนดให้ $f(t)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นที่อุปกรณ์จะเสีย

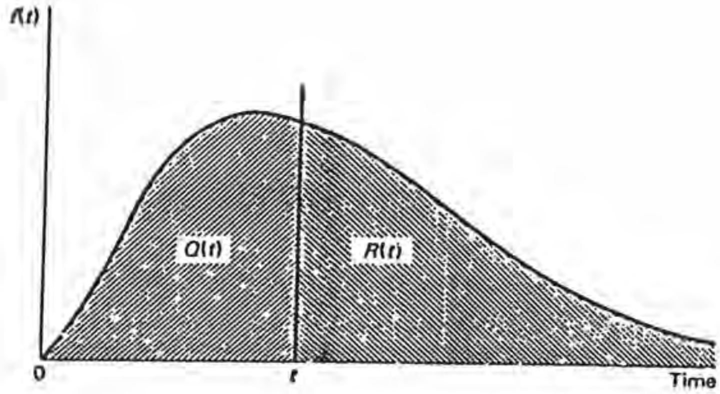
ดังนั้น
$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{2.2}$$

หรือ
$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt \tag{2.3}$$

และ
$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t) \tag{2.4}$$

จากสมการที่ 2.3 และ 2.4 เราสามารถเขียนแทนได้ดังรูปที่ 2.1

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นจะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสีย $Q(t)$ และความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะทำงานได้ $R(t)$



รูปที่ 2.1 รูปกราฟฟังก์ชันความหนาแน่น Q(t) ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสียในช่วงเวลา t และความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะทำงานได้หลังจากช่วงเวลา t

2.2 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (Reliability function)

หากพิจารณาในกรณีที่มีอุปกรณ์ N_0 ชิ้น

กำหนดให้ $N_S(t) =$ จำนวนอุปกรณ์ที่ทำงานได้เวลา t

$N_f(t) =$ จำนวนอุปกรณ์ที่เสียเวลา t

โดยที่ $N_S(t) + N_f(t) = N_0$ (2.5)

ที่เวลา t ใดๆ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้หรือฟังก์ชันที่อุปกรณ์สามารถทำงานได้ R(t) ถูกกำหนดโดย

$$R(t) = \frac{N_S(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_f(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_0} \quad (2.6)$$

ทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะล้มเหลว $Q(t)$

$$Q(t) = \frac{N_f(t)}{N_0} \quad (2.7)$$

จากสมการที่ 2.1

$$R(t)+Q(t)=1$$

ดังนั้น
$$\frac{dR(t)}{dt}=\frac{-dQ(t)}{dt}=\frac{-1}{N_0}\frac{dN_f(t)}{dt} \tag{2.8}$$

ถ้า dt $\rightarrow 0$ จากสมการที่ 2.8 จะได้ว่า

$$f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{1}{N_0}\frac{dN_f(t)}{dt} \tag{2.9}$$

ฟังก์ชันหนึ่งที่สำคัญในการประเมินค่าดัชนีความเชื่อถือได้คืออัตราอันตราย(Hazard rate) ที่เวลาใดๆ ซึ่งเรากำหนดให้เป็น λ(t) โดย λ(t) นิยามดังสมการที่ 2.10 [5,6]

$$\lambda(t)=\frac{\text{จำนวนครั้งที่อุปกรณ์จะเสียต่อหน่วยเวลา}}{\text{จำนวนอุปกรณ์ที่มีโอกาสจะเสีย}} \tag{2.10}$$

พิจารณาสมการที่ 2.10 จะพบว่าสมการที่ 2.9 จะให้ค่าอัตราอันตรายเมื่อจำนวนที่อุปกรณ์ที่มีโอกาสจะเสียมีค่าเท่ากับ N_0 เมื่อ t=0 ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นที่อุปกรณ์จะเสียและอัตราอันตรายจะมีค่าเท่ากันที่เวลา t=0 (ที่เวลา t=0 เท่านั้น)

จากสมการที่ 2.10 อัตราอันตรายที่เวลา t คือ

$$\lambda(t)=\frac{1}{N_s(t)}.\frac{dN_f(t)}{dt} \tag{2.11}$$

(เทอม $\frac{dN_f(t)}{dt}$ คือ จำนวนครั้งของการเสียต่อหน่วยเวลา

$N_S(t)$ คือ จำนวนครั้งของอุปกรณ์ที่มีโอกาสเสียที่เวลา t)

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\frac{N_0}{N_0}\frac{1}{N_s(t)}.\frac{dN_f(t)}{dt}\\&=\frac{N_0}{N_S(t)}\frac{1}{N_0}.\frac{dN_f(t)}{dt}\\&=\frac{f(t)}{R(t)}\end{aligned} \tag{2.12}$$

จากสมการที่ 2.8 จะได้ว่า

$$\lambda(t) = \frac{-1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$$

$$\lambda(t)dt = \frac{-dR(t)}{R(t)} \qquad (2.13)$$

จากรูปที่2.1 λ(t) จะอยู่ในช่วงเวลา 0 $\rightarrow$ t คืออยู่ในพื้นที่แรเงาของ Q(t) ดังนั้นเทอม λ(t)dt จะอินทิเกรตในช่วง 0$\rightarrow$t ส่วนเทอม $\frac{-dR(t)}{R(t)}$ นั้นจะอินทิเกรตในช่วง 1 ถึง R(t) ใดๆ

จากสมการที่ 2.13 จะได้ว่า

$$\int_{1}^{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} = \int_{0}^{t} -\lambda(t)dt \qquad (2.14)$$

$$\ln R(t)_{1}^{R(t)} = \int_{0}^{t} -\lambda(t)dt$$

$$\ln R(t) - \ln R(0) = \int_{0}^{t} -\lambda(t)dt$$

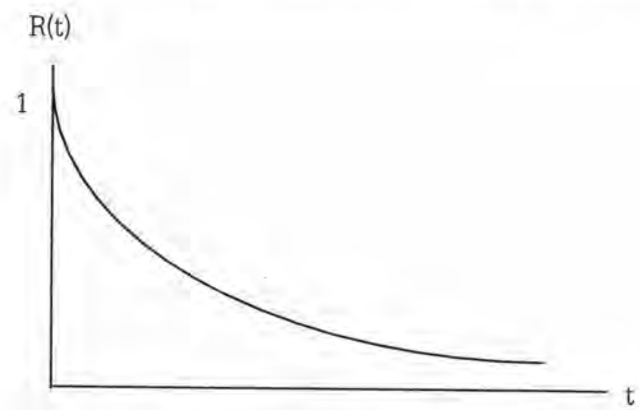
$$\ln R(t) = \int_{0}^{t} -\lambda(t)dt$$

$$R(t) = e^{-\int_{0}^{t}\lambda(t)dt} \qquad (2.15)$$

ถ้า λ(t)=ค่าคงที่ แล้วจะได้ว่า

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (2.16)$$

ซึ่งเราเรียกเทอมนี้ว่าเป็นการกระจายความน่าจะเป็นแบบเอ็กโปเนนเชียลซึ่งจากสมการนี้เราสามารถอธิบายได้ว่าฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์ค่อยๆลดลงจาก 1 ไปเรื่อยๆ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2



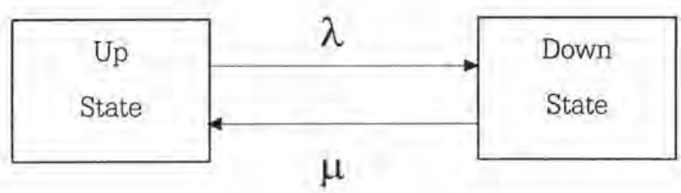
รูปที่2.2 ลักษณะการทำงานของอุปกรณ์ในระบบ

จากสมการที่ 2.16 ฟังก์ชันความหนาแน่นของฟังก์ชันความเชื่อถือได้จะมีค่าเท่ากับ

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\; f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \;) \tag{2.17}$$

2.3 การเปลี่ยนแปลงสถานะ (Transition rate)

พิจารณาอุปกรณ์ที่สามารถซ่อมได้ซึ่งมี 2 สถานะดังรูปที่ 2.3 โดยมีอัตราการเสีย λ และอัตราการซ่อม μ มีค่าคงที่



รูปที่ 2.3 ลักษณะการทำงานของอุปกรณ์ที่สามารถซ่อมได้

กำหนดให้

$P_0(t)$ คือ ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์ทำงานได้ที่เวลา t

$P_1(t)$ คือ ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์เสียที่เวลา t

ฟังก์ชันความหนาแน่นสำหรับสถานะที่อุปกรณ์ทำงานได้และฟังก์ชันความหนาแน่นสำหรับสถานะที่อุปกรณ์เสียดังรูปที่ 2.3 คือ

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{2.18}$$

$$f_1(t) = \mu e^{-\mu t} \tag{2.19}$$

จากรูปที่ 2.3 ความน่าจะเป็นในสถานะ 0 ที่เวลา t+dt (เริ่มนับเวลาจาก t) คือ

[ความน่าจะเป็นที่อยู่ในสถานะที่ทำงานได้ที่เวลา t และไม่เสียที่เวลา dt]

+[ความน่าจะเป็นที่อยู่ในสถานะเสียที่เวลา t และที่กำลังซ่อมที่เวลา dt] (2.20)

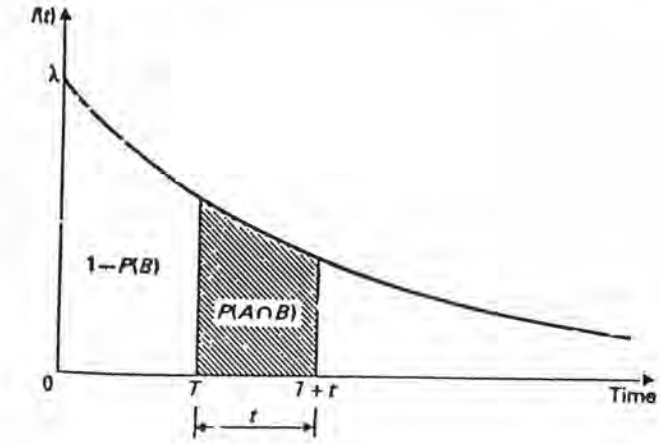
ดังนั้น

$$p_0(t+dt) = p_0(t)(1-\lambda dt) + p_1(t)(\mu dt) \tag{2.21}$$

(ความน่าจะเป็นที่ไม่อุปกรณ์จะไม่เสียที่ช่วงเวลา dt คือ 1- λdt)

พิสูจน์ได้ดังนี้

พิจารณารูปกราฟที่ 2.1 ซึ่งรูปกราฟจะแบ่งเป็นสองส่วนคือช่วงที่อุปกรณ์เสีย (พื้นที่แรเงา Q(t) และช่วงที่อุปกรณ์จะทำงานได้ R(t) พิจารณาอุปกรณ์ที่ทำงานได้จนถึงเวลา T ดังรูปที่ 2.4 เราต้องการทราบว่าในช่วงเวลา T จนถึง T+t ว่าความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสียมีค่าเพียงใด จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า



รูปที่ 2.4 ความน่าจะเป็นของอุปกรณ์ที่จะเสียหลังจากช่วงเวลา T ใดๆ

$P(A)$ คือ ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสีย

$P(B)$ คือ ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะทำงานได้

$P(A \cap B)$ คือความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะทำงานได้จนถึงเวลา T และเสียในช่วงเวลา (T,T+t)

$P(A|B)$ คือความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสียในช่วงเวลา t โดยมีข้อแม้ว่าอุปกรณ์จะต้องทำงานได้จนถึงเวลา T ทั้งนี้เพราะว่าเป็นไปไม่ได้ที่อุปกรณ์จะเสียก่อนช่วงเวลา T ซึ่งทำให้อุปกรณ์ไม่มีทางที่จะเสียในช่วงเวลา t อีกนั่นเอง ในที่นี้กำหนดให้ความน่าจะเป็น $P(A|B)$ เท่ากับ $Q_c(t)$

จากสูตรของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2.22)$$

จากรูปที่ 2.4

$$P(A \cap B) = \int_{t}^{T+t} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(T+t)} \qquad (2.23)$$

$$P(B) = \int_{T}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T} \qquad (2.24)$$

ดังนั้น $P(A|B) = Q_C(t) = \frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = 1 - e^{-\lambda t}$ (2.25)

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเสียในช่วงเวลา t คือ $1 - e^{-\lambda t}$

กระจายสมการ $Q_C(t)$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(-\lambda t)^2}{2!} + \frac{(-\lambda t)^3}{3!} + \ldots$$

$$Q_C(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \lambda t - \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} - \ldots \tag{2.26}$$

แทน t ด้วย dt (ช่วงเวลาสั้นๆ) จะได้ว่า

$$Q_C(dt) = 1 - e^{-\lambda dt} = \lambda dt - \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \frac{(\lambda dt)^3}{3!} - \ldots$$

ถ้า $dt \rightarrow 0$ แล้ว

$$Q_C(dt) \approx \lambda dt \tag{2.27}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะทำงานได้ในช่วงเวลา dt คือ $1 - Q_C(dt) = 1 - \lambda dt$

ทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะซ่อมในช่วงเวลา dt คือ μdt

เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นในสถานะ 1 ที่เวลา t+dt ก็จะได้สมการที่คล้ายกับสมการที่ 2.21 ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ 2.28

$$p_1(t+dt) = p_1(t)(1 - \mu dt) + p_0(t)(\lambda dt) \tag{2.28}$$

จากสมการที่ 2.21 จะได้ว่า

$$\frac{p_0(1+dt) - p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{2.29}$$

หาก dt$\rightarrow$ 0 เทอมทางซ้ายของสมการที่ 2.29 จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{p_0(t+dt) - p_0(t)}{dt} = \frac{dp_0(t)}{dt} = p_0'(t) \tag{2.30}$$

ดังนั้น

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{2.31}$$

ทำนองเดียวกันสมการที่ 2.28 จะได้ว่า

$$p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t) \tag{2.32}$$

เขียนสมการที่ 2.31 และ 2.32 ในรูปเมตริกซ์จะได้ว่า

$$[p'_0(t) \quad p'_1(t)] = [p_0(t) \quad p_1(t)] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

แก้สมการที่ 2.31 โดยใช้ Lapalce Tranform จะได้ว่า

$$sp_0(s) - p_0(0) = -\lambda p_0(s) + \mu p_1(s) \tag{2.34}$$

โดยที่ $p_0(s)$ คือ Lapalce Tranform ของ $p_0(t)$

$p_1(s)$ คือ Lapalce Tranform ของ $p_1(t)$

ดังนั้น

$$p_0(s) = \frac{\mu}{s+\lambda} p_1(s) + \frac{1}{s+\lambda} p_0(0) \tag{2.35}$$

ทำนองเดียวกันจากสมการที่ 2.32 จะได้ว่า

$$p_1(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} p_0(s) + \frac{1}{s+\lambda} p_1(0) \tag{2.36}$$

เมื่อ $p_0(0)$ คือ ค่าเริ่มต้นของ $p_0(s)$

$p_1(0)$ คือ ค่าเริ่มต้นของ $p_1(s)$

แก้สมการที่ 2.35 และ 2.36 จะได้ว่า

$$p_0(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}[\frac{p_0(0)+p_1(0)}{s}] + \frac{1}{(\lambda+\mu)}\frac{1}{(s+\lambda+\mu)}[\lambda p_0(0) - \mu p_1(0)] \tag{2.37}$$

$$p_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}[\frac{p_0(0)+p_1(0)}{s}] + \frac{1}{(\lambda+\mu)}\frac{1}{(s+\lambda+\mu)}[\mu p_1(0) - \lambda p_0(0)] \tag{2.38}$$

ใช้ Inverse Lapalce Tranform จะได้ว่า

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}[p_0(0)+p_1(0)] + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}[\lambda p_0(0) - \mu p_1(0)] \tag{2.39}$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}[p_0(0)+p_1(0)] + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}[\mu p_1(0) - \lambda p_0(0)] \tag{2.40}$$

แทนค่า $p_0(0)+p_1(0)=1$ ลงในสมการ 2.39 และ 2.40 จะได้ว่า

$$p_0(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{\lambda+\mu}[\lambda p_0(0)-\mu p_1(0)] \quad (2.41)$$

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{\lambda+\mu}[\mu p_0(0)-\lambda p_1(0)] \quad (2.42)$$

ในทางปฏิบัติแล้วสถานะเริ่มแรกจะเริ่มที่สถานะ 0 ที่เวลา t =0

ดังนั้น

$$p_0(t)=1$$
$$p_1(t)=0 \quad (2.43)$$

ดังนั้นสมการที่ 2.41 และ 2.42 จะได้ว่า

$$p_0(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\ e^{-(\lambda+\mu)} \quad (2.44)$$

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)} \quad (2.45)$$

จากสมการที่ 2.44 และ 2.45 หากเราสนใจที่สถานะอยู่ตัว(Steady state หรือ Limitting state)แล้ว เรากำหนดให้

$t\to\infty$ จะได้ว่า

$$p_0=p_0(\infty)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}=\text{ค่าคงที่} \quad (2.46)$$

$$p_1=p_1(\infty)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}=\text{ค่าคงที่} \quad (2.47)$$

จากสมการที่ 2.33 [7] เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้

$$p'(t)=p(t)A \quad (2.48)$$

เมื่อ $p'(t)$ คือ Row vector ประกอบไปด้วยสมาชิก $\frac{dp_1(t)}{dt},\frac{dp_1(t)}{dt},\ldots\frac{dp_n(t)}{dt}$

เมื่อ $p(t)$ คือ Row vector ประกอบไปด้วยสมาชิก $p_1(t),p_2(t)\ldots p_n(t)$

A คือ Transitional intensity matrix ซึ่งมีสมาชิกคือ

$a_{ij}=\lambda_{ij}$ สำหรับ i≠j

$a_{ii}=-\sum\lambda_{ij}$ สำหรับ i=j โดยผลรวมของสมาชิกในแถวที่ i ใน Matrix A จะเท่ากับ 0 เสมอ

ถ้าเราพิจารณาที่สถานะอยู่ตัวแล้วจะได้ว่า

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = c \text{ เมื่อ } c \text{ คือค่าคงที่} \tag{2.49}$$

ดังนั้น $$\lim_{t \to \infty} p'(t) = 0 \tag{2.50}$$

แทนค่าลงในสมการที่ 2.48 จะได้ว่า

$$pA = 0 \tag{2.51}$$

สมการนี้เป็นประโยชน์มากในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่แต่ละสถานะ อย่างไรก็ตามในการแก้สมการหาความน่าจะเป็นที่แต่ละสถานะต้องใช้สมการช่วยอีก 1 สมการคือ

$$\sum_i p_i = 1 \tag{2.52}$$

จากการคำนวณหาสมการที่ 2.46 และ 2.47 หากเราใช้สมการที่ 2.51 และ 2.52 คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ภาวะอยู่ตัวจะได้ว่า

$$[p_0 \quad p_1]\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = 0 \tag{2.53}$$

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \tag{2.54}$$

$$\lambda p_0 - \mu p_1 = 0 \tag{2.55}$$

จะเห็นว่าสมการที่ 2.54 และ 2.55 คือสมการเดียวกัน

ดังนั้นสมการช่วยคือ

$$p_0 + p_1 = 1 \tag{2.56}$$

แก้สมการที่ 2.54 และ 2.56

จะได้ว่า

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \tag{2.57}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \tag{2.58}$$

สมการที่ 2.57 และ 2.58 จะพบว่าได้คำตอบเดียวกันกับสมการที่ 2.46 และ 2.47 และเป็นสมการที่บ่งบอกถึงโอกาสในระยะยาวที่อุปกรณ์จะทำงานได้หรืออุปกรณ์จะเสียนั่นเอง

กล่าวโดยสรุปแล้วเนื้อหาในบทนี้เป็นการกล่าวถึงแนวคิดเกี่ยวกับความเชื่อถือได้และสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับความเชื่อถือได้ซึ่งจะนำไปสร้างเป็นแบบจำลองของอุปกรณ์ในระบบไฟฟ้า ซึ่งจะกล่าวต่อไปในบทที่ 3