บทที่ 2

การคำนวณออกแบบอย่างเหมาะที่สุดสำหรับโครงถักระนาบ

2.1 <u>กล่าวนำ</u>

ในการคำนวณออกแบบโครงสร้างนั้น ผู้ออกแบบจะมุ่งความสนใจไปที่ค่าหน่วยแรงในชิ้นส่วนโครงถัก และค่าการเคลื่อนที่เป็นสำคัญ ก่อนที่จะได้สิ่งที่กล่าวมานี้ขั้นตอนต้องมาจากการวิเคราะห์โครงสร้างโดยสมมุติพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนโครงถักซึ่งในที่นี้เรียกว่าหน้าตัดเริ่มแรก ส่วนการวิเคราะห์โครงสร้างในที่นี้ใช้วิธีการการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยใช้ความสัมพันธ์ของสติฟเนสและการเปลี่ยนตำแหน่งที่คล้องจองตามแรงกระทำภายนอกดังสมการ

$$K\,X = P \tag{1}$$

โดยที่ K = สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง

X = เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง

P = เมตริกซ์ของแรงกระทำ

เมื่อพิจารณาสมการ (1) จะเห็นว่า ค่าแรงกระทำภายนอกจะเป็นค่าคงที่ ส่วนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งขึ้นอยู่กับค่าสติฟเนสของโครงสร้าง

$$K = A\,S\,A^t \tag{2}$$

โดยที่ A = เมตริกซ์สถิตย์ได้มาจากโคซายน์แสดงทิศทางของชิ้นส่วนที่จุดต่อ

A^t = เมตริกซ์การเข้ากันของรูปเรขาคณิตของโครงสร้าง

S = สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนโครงถัก

เมื่อพิจารณาสมการ (2) จะเห็นว่า A และ A^t ขึ้นอยู่กับทรงเรขาคณิตของโครงสร้างที่ทำการออกแบบ ดังนั้นจึงเป็นค่าคงที่ ส่วน S เปลี่ยนแปลงได้ตามที่ผู้ออกแบบต้องการโดยปกติผู้ออกแบบคำนวณจะพยายามออกแบบให้ประหยัดที่สุดเท่าที่จะทำได้และอยู่ในเกณฑ์ความปลอดภัยที่ยอมรับได้ ดังนั้นค่าสติฟเนสของโครงสร้างจะเปลี่ยนแปลงตามค่าสติฟเนสของชิ้นส่วน และเมื่อค่าสติฟเนสของโครงสร้างเปลี่ยนไป จะเห็นได้จากสมการ (1) ว่าค่าการเปลี่ยนตำแหน่งจะเปลี่ยนไปแบบผกผันกับค่าสติฟเนสของโครงสร้าง

การพิจารณาหน่วยแรงในโครงถักนั้นใช้สมการสมดุลย์

$$P = A F \qquad (3)$$

โดยที่ F = เมตริกซ์ของแรงภายในชิ้นส่วนโครงถัก

ในโครงสร้างดีเทอมิเนตนั้นเมตริกซ์สถิตย์จะหาได้เป็นเมตริกซ์สี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อ A เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (Singular) ดังนั้น A สามารถหาตัวผกผันได้

$$F = A^{-1} P \qquad (4)$$

ดังนั้นแรงภายในของโครงสร้างถักดีเทอมิเนตจะขึ้นอยู่กับทรงเรขาคณิตของโครงสร้างและแรงภายนอกที่มากระทำกับโครงสร้าง ไม่ขึ้นกับค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงสร้าง

แต่ถ้าเป็นโครงสร้างถักอินดีเทอมิเนตจะเห็นว่าเมตริกซ์ A ไม่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมตริกซ์ A ไม่สามารถหาตัวผกผันได้

เมื่อเรียงตามลำดับแล้ว ค่าแรงภายในของโครงสร้างจะทราบได้ต่อเมื่อทราบค่าการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง และเช่นเดียวกันค่าการเคลื่อนที่จะขึ้นอยู่กับค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงถัก และค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงถักก็คือค่าพื้นที่หน้าตัดคูณด้วยโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุหารด้วยความยาวของชิ้นส่วนนั้น

ดังนั้นจะเห็นว่าเมื่อมุ่งความสนใจไปที่การเคลื่อนที่และหน่วยแรงในโครงสร้าง จะต้องอาศัยการทำนายพื้นที่หน้าตัดที่พอดีทำให้ทั้งหน่วยแรงและการเคลื่อนที่อยู่ภายในกำหนด และทำให้น้ำหนักหรือปริมาตรของโครงสร้างน้อยที่สุดด้วยเป็นจุดสำคัญ

2.2 การสร้างฟังก์ชันเป้าหมายและอสมการเงื่อนไขบังคับ

ตามแนวคิดที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ การออกแบบโครงถักอย่างเหมาะที่สุดจะต้องให้น้ำหนักน้อยที่สุด (Minimum weight design)

2.2.1 ดังนั้นฟังก์ชันเป้าหมายก็คือ น้ำหนักหรือปริมาตร ซึ่งในโครงถักก็จะหมายถึงผลรวมของผลคูณระหว่างพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนที่ประกอบเป็นโครงถักกับความยาวของชิ้นส่วนนั้น สามารถเขียนเป็นรูปสมการได้ว่า

$$Z = \sum_{i=1}^{n} A_i L_i \qquad ;i = 1,\ldots\ldots\ldots,n \qquad (5)$$

โดยที่ Z = ค่าฟังก์ชันเป้าหมาย (ปริมาตรของโครงถัก)

A_i = พื้นที่หน้าตัดของโครงถักชิ้นส่วนที่ i

L_i = ความยาวของชิ้นส่วนที่ i

n = จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดของโครงถัก

ฟังก์ชันเป้าหมายนี้จะต้องมีค่าน้อยที่สุดโดยสอดคล้องได้ตามอสมการเงื่อนไขบังคับ (Constraint)

2.2.2 เงื่อนไขบังคับ (Constraint) หมายถึงข้อกำหนด กฎเกณฑ์ ที่ถูกกำหนดขึ้น เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบสุดท้าย ในที่นี้หมายถึงขนาดของพื้นที่หน้าตัดแต่ละชิ้นของโครงถัก ข้อกำหนดโดยทั่วไปแล้วในการออกแบบโครงสร้าง โดยมากจะใช้ข้อกำหนดทางหน่วยแรงของทุก ๆ ชิ้นส่วนว่าจะต้องไม่เกินหน่วยแรงที่ยอมให้ (Allowable stress) ในโครงถักก็หมายถึง

หน่วยแรงดึง (Tensile stress) และหน่วยแรงอัด (Compressive stress) ส่วนหน่วยแรงที่ยอมให้ใช้งานได้นั้นจะได้มาจากวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงถัก ในที่นี้หมายถึงเหล็ก และได้จากข้อกำหนดมาตรฐานของ AISC (9) ข้อกำหนดที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งก็คือการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างที่ยอมให้เกิดขึ้นได้มากที่สุด ที่กล่าวมานี้เป็นเพียงส่วนเดียวของเงื่อนไขบังคับ โดยทั่วไปเรียกส่วนนี้ว่าเงื่อนไขบังคับทางพฤติกรรมโครงสร้าง (Behavior constraint)

เงื่อนไขบังคับที่จะเพิ่มเติมต่อไปนี้วิศวกรผู้ออกแบบจะประสบปัญหานี้อยู่เสมอ คือออกแบบแล้วขนาดที่ต้องการไม่มีขายในท้องตลาดหรือได้ขนาดใหญ่หรือเล็กกว่ามาตรฐานของโรงงานผลิต ข้อจำกัดนี้เรียกว่าเงื่อนไขบังคับรอง (Side constraint) เงื่อนไขบังคับรองนี้จะช่วยแก้ปัญหาโดยนำขนาดใหญ่สุดและเล็กสุดไปควบคุมตัวแปรให้มีขนาดอยู่ในขอบเขตที่กำหนดไว้ซึ่งเรียกว่าขีดจำกัดบน (Upper bound) และขีดจำกัดล่าง (Lower bound) อีกแบบหนึ่งของเงื่อนไขบังคับรองนี้เราเรียกว่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัว (Move limit) มีส่วนช่วยเหลือให้ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการสร้างอสมการเงื่อนไขบังคับเป็นเชิงเส้นตรงนั้นมีค่าน้อยลง เงื่อนไขบังคับต่าง ๆ ที่กล่าวมานี้จะกล่าวโดยละเอียดต่อไป

2.2.2.1 เงื่อนไขบังคับหน่วยแรง (Stress constraint) ตามแนวความคิดนั้น ค่าหน่วยแรงในชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนในระบบโครงสร้างจะต้องมีค่าไม่เกินหน่วยแรงที่ยอมให้ สมมุติฐานเบื้องต้นวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนนั้นเมื่อรับแรงกระทำยังคงพฤติกรรมยืดหยุ่นอยู่ ดังนั้นเราจึงสามารถแปลงจากเงื่อนไขบังคับหน่วยแรงมาเป็นเงื่อนไขบังคับแรงได้

$$F^* \begin{cases} \leq \quad F_a^* & ; \quad F^o \geq 0 \\ \\ \geq \quad -F_a^* & ; \quad F^o < 0 \end{cases} \tag{6}$$

โดยที่ F^* = แรงในหน้าตัดที่ถูกเลือกใหม่

F_a^* = แรงที่ยอมให้ใช้ได้ในหน้าตัดที่ถูกเลือกใหม่

F^o = แรงที่ได้จากการสมมุติหน้าตัดแรกเริ่ม

แรงที่ยอมให้ใช้งานได้ในหน้าตัดที่ถูกเลือกใหม่ได้จากผลคูณระหว่างหน่วยแรงที่ยอมให้ใช้งานได้กับค่าพื้นที่หน้าตัดใหม่

$$F_a^* = f_a\,(A^o + \Delta A) \tag{7}$$

โดยที่ f_a = หน่วยแรงที่ยอมให้ใช้งานได้

A^o = พื้นที่หน้าตัดเดิมของชิ้นส่วน

ΔA = ผลต่างระหว่างพื้นที่หน้าตัดใหม่กับพื้นที่หน้าตัดเดิม

แรงในหน้าตัดที่ถูกเลือกใหม่ (F^*) หมายถึงแรงจากหน้าตัดเก่าบวกกับผลต่างระหว่างแรงใหม่กับแรงเดิมเนื่องจากการเปลี่ยนพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนชิ้นนั้นในระบบโครงสร้าง แรงที่เปลี่ยนไปเล็กน้อย (ΔF_i) สามารถประมาณได้จากการเปลี่ยนไปเล็กน้อยของหน้าตัด (ΔA_i) โดยใช้อันดับแรกของอนุกรมเทเลอร์

$$\Delta F_i = F_i - F_i^o = \left(\frac{\partial F_i}{\partial A_i}\right)\Delta A_i \tag{8}$$

โดยทั่วไปแล้วการเปลี่ยนแปลงแรงในชิ้นส่วน i มีผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงไปของพื้นที่หน้าตัดทุกชิ้นในระบบโครงสร้าง ดังนั้นสมการ (8) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\Delta F_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial A_j}\right)\Delta A_j \tag{9}$$

ดังนั้นแรงใหม่ในชิ้นส่วน i จะประมาณได้ดังนี้

$$F^* = F_i^o + \Delta F_i = F_i^o + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial A_j}\right)\Delta A_j \tag{10}$$

นำสมการ (7) และสมการ (10) แทนลงในสมการ (6) จะได้อสมการขอบเขตจำกัดสำหรับแรงในชิ้นส่วน i

$$F_i^{o} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial A_j}\right) \Delta A_j \begin{cases} \leq & (f_i)_a (A_i^{o} + \Delta A_i) \quad ; \quad F_i^{o} \geq 0 \\ \\ \geq & (f_i)_a (A_i^{o} + \Delta A_i) \quad ; \quad F_i^{o} < 0 \end{cases} \tag{11}$$

2.2.2.2 เงื่อนไขบังคับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement constraint) เงื่อนไขบังคับนี้มีแนวคิดว่าในการออกแบบนั้นบางครั้งจะมีปัญหากับผู้ออกแบบในกรณีที่การเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) เกินขนาดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ ดังนั้นจึงได้นำขอบเขตนี้มาใส่ไว้เพื่อเป็นการควบคุมไม่ให้การเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นจากการเลือกพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนเกินขนาดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ โดยจะจำกัดเฉพาะตัวที่มีค่ามากที่สุดเท่านั้น

$$X^{*} \begin{cases} \leq & X_a \quad ; \quad X^{o} \geq 0 \\ \\ \geq & X_a \quad ; \quad X^{o} < 0 \end{cases} \tag{12}$$

โดยที่ X^{*} = การเปลี่ยนตำแหน่งใหม่ (New displacement)

X_a = การเปลี่ยนตำแหน่งที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ (Allowable displacement)

X^{o} = การเปลี่ยนตำแหน่งเริ่มแรก (Initial displacement)

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งนี้สามารถหาค่าโดยประมาณโดยวิธีเดียวกับที่ใช้ในขอบเขตจำกัดหน่วยแรง

$$X^{*} = X^{o} + \Delta X = X^{o} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial A_j}\right) \Delta A_j \tag{13}$$

นำไปแทนลงในสมการ (12) จะได้

$$X^{o} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial A_j}\right) \Delta A_j \begin{cases} \leq X_a & ; \quad X^{o} \geq 0 \\ \geq X_a & ; \quad X^{o} < 0 \end{cases} \tag{14}$$

2.2.2.3 เงื่อนไขบังคับรอง (Side constraints) ในทางปฏิบัติเงื่อนไขบังคับสูงสุดและต่ำสุดช่วยให้การออกแบบรวดเร็วขึ้นโดยมีขีดจำกัดบน (Upper bound) และขีดจำกัดล่าง (Lower bound) คำตอบสามารถเลือกได้ภายในเงื่อนไขบังคับนี้ที่เป็นขอบเขตที่ปรารถนาของผู้ออกแบบ

$$\begin{aligned} A_i &\geq (LB)_i \\ A_i &\leq (UB)_i \end{aligned} \tag{15}$$

โดยที่ A_i = ตัวแปรที่ออกแบบหมายถึงพื้นที่หน้าตัดชิ้นส่วนของโครงถักชิ้นส่วนที่ i

$(LB)_i$ = ขีดจำกัดล่างของพื้นที่หน้าตัดชิ้นส่วนของโครงถักชิ้นส่วนที่ i

$(UB)_i$ = ขีดจำกัดบนของพื้นที่หน้าตัดชิ้นส่วนของโครงถักชิ้นส่วนที่ i

เงื่อนไขบังคับทางพฤติกรรมโครงสร้าง (Behavior constraint) นั้นถูกทำให้เป็นเชิงเส้นโดยความจริงนั้นเป็นไร้เชิงเส้น (Nonlinear) ดังนั้นอสมการเงื่อนไขบังคับนี้จึงเป็นค่าที่ได้มาโดยประมาณ เงื่อนไขบังคับสุดท้ายที่จะกล่าวถึงนี้เรียกว่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัว ซึ่งเป็นเงื่อนไขบังคับที่เป็นตัวช่วยให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดน้อยลงโดยกำหนดหรือจำกัดเขตคำตอบแต่ละครั้ง เนื่องจากเงื่อนไขบังคับสร้างมาจากอันดับหนึ่งของอนุกรมเทเลอร์ เงื่อนไขบังคับที่ได้มานั้นจะใกล้ค่าจริงมาก เมื่อการสมมุติคำตอบเริ่มแรกนั้นอยู่ในขอบเขตเดียวกันกับคำตอบในรอบถัดไป โดยวิธีจำกัดคำตอบไม่ให้ออกจากจุดเริ่มต้นมากนักจะช่วยให้คำตอบซึ่งเคยมีความคลาดเคลื่อนมากกลับน้อยลง และเมื่อทำต่อไปเงื่อนไขบังคับเชิงเส้นจะนำไปสู่คำตอบอย่างเหมาะที่สุด ตัวอย่างเงื่อนไขบังคับ เช่น ถ้าใช้ขีดจำกัดการเคลื่อนตัว (Move limit) = 0.1

$$M_L = 0.1$$

$$U_i \geq 1 - M_L = 0.9 \qquad (16)$$

$$U_i \leq 1 + M_L = 1.1$$

โดยที่ M_L = ขีดจำกัดการเคลื่อนตัว (Move limit)

U_i = สัมประสิทธิ์ตัวคูณกับพื้นที่หน้าตัดเก่าเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่ในชิ้นส่วน i

จากการศึกษาของ Kirsch (13) ได้แนะนำไว้ว่าถ้าใช้ค่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัวสูงหมายถึงยอมให้มีการเคลื่อนตัวจากจุดเดิมได้มาก จะทำให้การเข้าสู่คำตอบเร็วขึ้นแต่จะได้คำตอบคลาดเคลื่อนไปจากจุดที่เหมาะที่สุดจริง (True optimum) และถ้าใช้ค่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัวต่ำ ขั้นตอนการกระทำซ้ำจะต้องมากรอบขึ้น

เพื่อเป็นการแก้ปัญหาทั้งสองนี้จึงได้ใช้สมการสำหรับค่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัวในแต่ละรอบการกระทำซ้ำดังนี้

$$M_L = \frac{1}{1 + C_y} \qquad (17)$$

โดยที่ C_y = จำนวนรอบที่กระทำซ้ำ (Iterative cycle)

จะเห็นว่าเมื่อใช้ค่าขีดจำกัดการเคลื่อนตัวตามสมการนี้ เมื่อจำนวนรอบน้อยการเข้าสู่คำตอบจะเร็ว และเมื่อจำนวนรอบมากขึ้นความคลาดเคลื่อนจากคำตอบจะน้อยลง จึงสามารถแก้ปัญหาทั้งสองได้

2.3 <u>การหาค่าเงื่อนไขบังคับทางพฤติกรรมโครงสร้างเชิงเลข</u> (Numerical evaluation of behavior constraints)

การหาค่าตัวเลขที่สัมพันธ์กับพฤติกรรมโครงสร้างนั้น ต้องเริ่มต้นจากการวิเคราะห์โครงสร้างที่ได้สมมุติพื้นที่หน้าตัดของโครงถักเสียก่อน เพื่อเป็นข้อมูลเบื้องต้นที่จะนำไปหาเงื่อนไขบังคับต่อไป สำหรับงานวิจัยนี้วิธีวิเคราะห์โครงสร้างใช้วิธีการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement method)

การวิเคราะห์ตามวิธีนี้สามารถแสดงได้ตามลำดับดังนี้

$$P = A F \qquad \text{(สมการสมดุลย์)} \tag{18}$$

$$F = S \epsilon \qquad \text{(สมการหน่วยแรง - ความเครียด)} \tag{19}$$

$$\epsilon = A^t X \qquad \text{(สมการการเข้ารูปร่าง)} \tag{20}$$

โดยการแทนค่าสมการ (20) ลงในสมการ (19) แรงที่ต้องการสามารถแสดงในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งภายนอก (External displacement) ได้ดังนี้

$$F = S A^t X \tag{21}$$

เมื่อแทนค่าสมการ (21) ลงในสมการ (18) น้ำหนักที่กระทำภายนอกจะแสดงได้ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งภายนอก ดังนี้

$$P = A S A^t X \tag{22}$$

ให้ $$K = A S A^t \tag{23}$$

K = สติฟเนสเมตริกซ์ของของโครงสร้าง

ดังนั้นสมการ (22) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$P = K X \tag{24}$$

เมื่อผกผันสติฟเนสเมตริกซ์ (K) จะได้คำตอบเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งภายนอก

$$X = K^{-1}P \tag{25}$$

เมื่อใช้สมการที่ (21) โดยแทนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งภายนอกเข้าไปจะได้คำตอบแรงภายในที่ต้องการ

ในการหาสมการเงื่อนไขบังคับนั้นตามที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้วก็โดยการหาค่าที่ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ของแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งเมื่อเปลี่ยนแปลงตัวแปรในการออกแบบ การหาค่านี้ทำได้โดยหาว่ามีแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าไรเมื่อเพิ่มขนาดพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนทีละชิ้นจนครบทุกชิ้น โดยการใช้เมตริกซ์จะได้ว่า

$$P = A\,(F + \Delta F) \tag{26}$$

$$(F + \Delta F) = (S + \Delta S)(\epsilon + \Delta\epsilon) \tag{27}$$

$$(\epsilon + \Delta\epsilon) = A^{t}(X + \Delta X) \tag{28}$$

โดยที่ ΔF = เมตริกซ์ของแรงภายในที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเปลี่ยนแปลงตัวแปร

ΔS = สัมประสิทธิ์เมตริกซ์การเปลี่ยนตัวแปรที่ใช้ในการออกแบบเพียงตัวเดียวนอกนั้นเป็นศูนย์หมด

$\Delta\epsilon$ = เมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงการยืดหดของชิ้นส่วนเนื่องจากการการเปลี่ยนแปลงตัวแปรออกแบบ

ΔX = เมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนตำแหน่งภายนอกเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงตัวแปรออกแบบ

เมื่อแทนสมการ (28) ลงในสมการ (27) จะได้ว่า

$$(F + \Delta F) = (S + \Delta S)A^{t}(X + \Delta X) \qquad (29)$$

แทนค่าสมการ (29) ลงในสมการ (26) ได้ว่า

$$P = A(S + \Delta S)A^{t}(X + \Delta X) \qquad (30)$$

ให้ $\Delta K = A\,\Delta S\,A^{t}$ สมการ (30) จะเป็นดังนี้

$$P = (K + \Delta K)(X + \Delta X) \qquad (31)$$

ขยายสมการ (31) จะได้

$$P = K\,X + K\,\Delta X + \Delta K\,X + \Delta K\,\Delta X \qquad (32)$$

นำ $P = K\,X$ ลบออกจากสมการ (32) และตัด $\Delta K\,\Delta X$ ทิ้งเนื่องจากมีค่าน้อยมากและยังเป็นสมการกำลังสองซึ่งใช้ไม่ได้กับระบบเชิงเส้น

$$0 = \Delta K\,X + K\,\Delta X \qquad (33)$$

จากสมการ (33) จะสามารถประมาณการเปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงตัวแปรออกแบบได้ดังนี้

$$\Delta X = -K^{-1}\,\Delta K\,X \qquad (34)$$

หาแรงที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงตัวแปรออกแบบทีละตัว ขยายสมการ (29)

$$(F + \Delta F) = S\,A^{t}X + S\,A^{t}\Delta X + \Delta S\,A^{t}X + \Delta S A^{t}\Delta X \qquad (35)$$

จากสมการ (35) เห็นได้ว่า $\Delta S\,A^{t}\Delta X$ มีค่าน้อยมากสามารถตัดส่วนนี้ออก นำสมการ (21) ลบออก จะได้แรงที่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม

$$\Delta F = S\,A^{t}\Delta X + \Delta S\,A^{t}X \qquad (36)$$

จากสมการ (36) สังเกตุได้ว่าแรงที่แปลี่ยนแปลงจากเดิม (ΔF) นั้นมีส่วนประกอบที่สำคัญอยู่สองพจน์ พจน์แรกนั้นแทนการเปลี่ยนแปลงของแรงเนื่องจากการแปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนตำแหน่ง พจน์ที่สองนั้นเป็นผลจากตัวแปรในการออกแบบเปลี่ยนแปลงไปและจะมีค่าเท่ากับแรงเบื้องต้น ($S\,A^{t}X$) คูณด้วยเปอร์เซ็นต์การแปลี่ยนแปลง ($\Delta S/S$)

วิธีนี้จะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงได้สะดวกสบายโดยใช้วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct stiffness method) ในการวิเคราะห์โครงสร้างเบื้องต้น (Initial system) ΔK นั้นแทนสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนที่ถูกเปลี่ยนแปลงไป

สังเกตุว่าสมการ (34) และสมการ (36) นั้นเป็นสมการที่ตัดพจน์เมตริกซ์อันดับที่สองออก เพื่อแสดงว่าสมการ (34) และ (36) ยังคงนำไปใช้งานได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญทางกลศาสตร์ คือสภาวะสมดุลย์ของโครงสร้าง โดยการคูณ ΔF ด้วยเมตริกซ์สถิตย์ A ซึ่งได้จากรูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้าง ผลคูณของเมตริกซ์สองเมตริกซ์นี้จะได้น้ำหนักกระทำภายนอกที่เปลี่ยนแปลงจากน้ำหนักเดิมไป (ΔP) ถ้าโครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลย์แล้ว ΔP จะต้องมีค่าเป็นศูนย์

$$\Delta P = A\,\Delta F = A\,S\,A^{t}\Delta X + A\,\Delta S\,A^{t}X$$

$$\Delta P = A\,\Delta F = K(-K^{-1})\Delta K\,X + \Delta K\,X$$

$$= (-I)\Delta K\ X + \Delta K\ X = -\Delta K\ X + \Delta K\ X = 0$$

สมการ (34) และสมการ (36) สามารถนำไปใช้สร้างอสมการเงื่อนไขบังคับการเปลี่ยนตำแหน่งและหน่วยแรงได้ เนื่องจากสมการทั้งคู่นี้เป็นสมการเชิงเส้นซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนแปลงตัวแปรในการออกแบบทีละตัว ดังนั้นจะเป็นการสะดวกมากถ้าจะเปลี่ยนแปลงตัวแปรมากขึ้นจากเดิม 100% หรือให้ $\Delta A_j = A_j$ จากนั้นเมื่อกำหนดตัวแปรในการออกแบบแล้ว จำเป็นจะต้องใช้ U_j เป็นสัมประสิทธิ์ตัวคูณกับพื้นที่หน้าตัดเก่า

$$(A_j + \Delta A_j) = A_j(1 + \Delta A_j/A_j) = (U_j\ A_j) = A_{jnew}$$

ฟังก์ชันเป้าหมายจะกลายเป็น $$Z = \sum_{i=1}^{n} A_i^{o} L_i U_i \qquad (37)$$

U_j = อัตราส่วนในการเปลี่ยนแปลงจากพื้นที่หน้าตัดเดิมไปเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่

ดังนั้นจากสมการ (11) สามารถนำมาเขียนใหม่ได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij}\left(\frac{\Delta A_j}{A_j}\right) + F_i^{o} \begin{cases} \leq (f_i)_a A_i^{o}\left(1 + \dfrac{\Delta A_i}{A_i}\right) & ; \quad F_i^{o} \geq 0 \\ \\ \geq (f_i)_a A_i^{o}\left(1 + \dfrac{\Delta A_i}{A_i}\right) & ; \quad F_i^{o} \leq 0 \end{cases} \qquad (38)$$

ถ้าให้ f_i เป็นหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงถักที่เมื่อเปลี่ยนพื้นที่หน้าตัดใหม่

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} (U_j - 1) + F_i^{o} = (f_i) A_i^{o} U_i \tag{39}$$

$$(f_i) = \frac{F_i^{o} + \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} (U_j - 1)}{U_i A_i^{o}}$$

$$= \frac{F_i^{o} + \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j - \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij}}{U_i A_i^{o}}$$

$$= \frac{F_i^{o} + \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j}{U_i A_i^{o}} \tag{40}$$

โดยที่ F_i^{o} เป็นแรงในการออกแบบแรกเริ่ม เทอม $\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij}$ มีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของหน้าตัด 100% ทุก ๆ ชิ้นส่วนซึ่งทำให้ สติฟเนสของโครงสร้างอยู่ในอัตราคงเดิม ดังนั้นแรงจึงหักล้างกันกลายเป็นศูนย์

ถ้า f_t เป็นหน่วยหน่วยแรงดึงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน

$$f_t \leq f_p \tag{41}$$

ถ้า f_c เป็นหน่วยแรงอัดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน

$$f_c \geq f_p \tag{42}$$

โดยที่ f_p = หน่วยแรงที่ยอมให้เกิดขึ้นได้

ถ้าชิ้นส่วนนั้นรับแรงดึง อสมการเงื่อนไขบังคับที่เขียนจากสมการ (40) จะเป็นดังนี้

$$\frac{F_i + \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j}{U_i A_i^o} \leq f_p \tag{43}$$

หรือ

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j - f_p A_i^o U_i \leq - F_i^o \tag{44}$$

ถ้าชิ้นส่วนนั้นรับแรงอัด อสมการเงื่อนไขบังคับที่เขียนจากสมการ (40) จะเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j - f_p A_i^o U_i \geq - F_i^o \tag{45}$$

เอาลบคูณตลอด

$$- \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j + f_p A_i^o U_i \leq F_i^o \tag{46}$$

สังเกตุอสมการ (44) จะเห็นว่า f_p นั้นหมายถึงหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ใช้งานได้สำหรับองค์อาคารรับแรงดึงจากมาตรฐาน AISC 1984 (9)

$$f_{pt} = 0.6 f_y \tag{47}$$

โดยที่ f_y = หน่วยแรงดึงคลากของเหล็ก

และเพื่อป้องกันอัตราส่วนความชลูดมากเกินไปจึงใช้เกณฑ์การออกแบบด้านสติฟเนสควบคุมดังนี้

สำหรับองค์อาคารหลัก $L/r \leq 240$ (48)

โดยที่ L = ความยาว
r = รัศมีไจเรชั่น

ดังนั้นอสมการ (44) นำมาเขียนใหม่ได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j - f_{pt} A_i^{o} U_i \leq -F_i^{o}$$

หรือ (49)

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j - 0.6 * f_y A_i^{o} U_i \leq -F_i^{o}$$

เห็นได้ว่า f_{pt} นั้นขึ้นอยู่กับ f_y ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้นเงื่อนไขบังคับหน่วยแรงขององค์อาคารรับแรงดึงจึงไม่เป็นปัญหา

สังเกตอสมการ (46) จะเห็นว่า f_p นั้นหมายถึงหน่วยแรงอัดที่ยอมให้ใช้งานได้สำหรับองค์อาคารรับแรงอัด งานวิจัยนี้ใช้มาตรฐาน AISC 1984 (9) ควบคุมหน่วยแรงอัดซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

องค์อาคารรับแรงอัด

บนพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดขององค์อาคารรับแรงอัดที่รับน้ำหนักตามแนวแกนเพียงอย่างเดียว เมื่ออัตราส่วนความชลูด (kL/r) ค่าที่มากที่สุดบนความยาวที่ไม่ถูกยึดรั้ง มีค่าน้อยกว่า C_c หรืออยู่ในช่วงที่เรียกว่าการโก่งเดาะเลยช่วงอีลาสติค หน่วยแรงอัดที่ยอมให้

$$f_{pc} = \frac{\left[1 - \dfrac{(kL/r)^2}{2\,C_c^{\,2}}\right] f_y}{F.S} \qquad (50)$$

$$F.S = \frac{5}{3} + \frac{3(kL/r)}{8\,C_c} - \frac{(kL/r)^3}{8\,C_c^{\,3}}$$

โดยที่ $$Cc = \frac{2\,\pi^2 E}{F_y}$$

และเมื่ออัตราส่วนความชลูด (kL/r) มากกว่า C_c หรืออยู่ในช่วงที่เรียกว่าการโก่งเดาะช่วงอีลาสติค หน่วยแรงอัดที่ยอมให้

$$f_{pc} = \frac{12\,\pi^2 E}{23(kL/r)^2} \qquad (51)$$

อัตราส่วนความชลูดสูงสุด

สำหรับองค์อาคารรับแรงอัดอัตราส่วนความชลูดต้องไม่เกิน

$$L/r \leq 200 \qquad (52)$$

สมการ (52) สามารถนำมาควบคุม ขีดจำกัดล่าง

จากสมการ (46) ลองกลับมาพิจารณาถ้าในกรณีชิ้นส่วนนั้นรับแรงอัดจะเห็นได้ว่า f_p นั้นจะมีค่าไม่คงที่ขึ้นอยู่กับรัศมีไจเรชั่นของหน้าตัดใหม่ซึ่งยังไม่ทราบว่าเป็นเท่าใด ดังนั้นจะเห็นว่าตัวแปรในอสมการจะมีสองตัวในพจน์เดียวเข้าลักษณะของโปรแกรมไร้เชิงเส้น งานวิจัยของ Romstad และ Wang (3) นั้นให้ค่า f_p เป็นค่าคงที่ทั้งชิ้นส่วนรับแรงอัดและชิ้นส่วนรับแรงดึง ในทางปฏิบัตินั้นเป็นไปไม่ได้สำหรับชิ้นส่วนรับแรงอัด จากงานวิจัยของ Lapay และ Goble (4) ได้ให้ค่าประมาณของหน่วยแรงอัด โดยให้ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีไจเรชั่นกับพื้นที่หน้าตัดเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น

$$f_u = \frac{\pi^2 E\, K_g A}{L^2} \qquad (53)$$

โดยที่ f_u = หน่วยแรงอัดออยเลอร์

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนโครงถัก

K_g = สัดส่วนความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีไจเรชั่นกับพื้นที่หน้าตัด ($r^2 = K_g A$)

และจากงานวิจัยของ Casis และ Sepulveda (7) ก็ได้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีไจเรชั่นกับพื้นที่หน้าตัดเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นเช่นเดียวกัน

ในการออกแบบแรกเริ่มนั้นยังไม่รู้ค่าแรงในชิ้นส่วนต่าง ๆ จึงต้องสุ่มขนาดหน้าตัดของชิ้นส่วน การสุ่มขนาดในรอบแรกควรจะถูกควบคุมด้วยอัตราส่วนความชลูดสูงสุด

สมการ (50) และ (51) ซึ่งเป็นข้อกำหนดตามมาตรฐาน AISC 1984 (9) สำหรับองค์อาคารรับแรงอัดตามแนวแกนเพียงอย่างเดียว จะเห็นว่าสมการ (51) นั้นได้มา

จากสมการของออยเลอร์

$$P_u = \frac{\pi^2 E\, I_s}{(kL)^2} \tag{54}$$

โดยที่ P_u = แรงอัดตามแนวแกนของออยเลอร์

I_s = โมเมนต์อินเนอร์เชีย

k = สัมประสิทธิ์ความยาวประสิทธิผล

= 1 (ปลายทั้งสองข้างเป็นแบบยึดหมุน)

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยโครงถักจึงใช้ค่า $k = 1$ สมการ (54) จะเป็น

$$P_u = \frac{\pi^2 E\, I_s}{L^2} \tag{55}$$

หน่วยแรงอัดตามแนวแกนของออยเลอร์จะเป็น

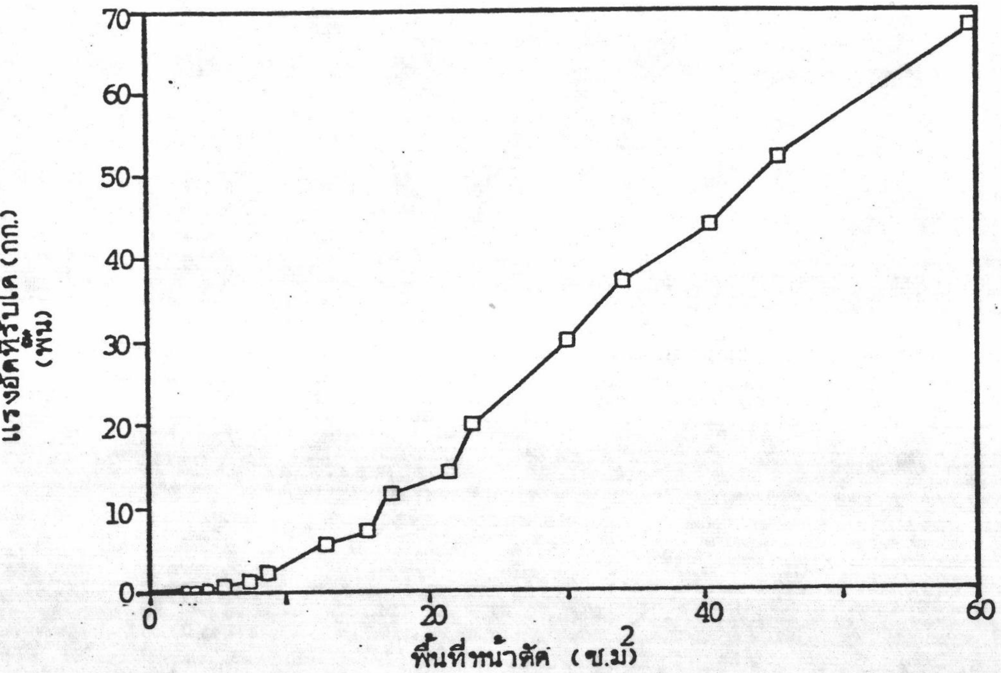
$$f_u = \frac{\pi^2 E\, r^2}{L^2} \tag{56}$$

พิจารณาสมการ (54) จะเห็นว่า ความสามารถในการรับแรงอัดตามแนวแกนของชิ้นส่วนที่ออกแบบจะมีค่าเพิ่มขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีค่าโมเมนต์อินเนอร์เชียเพิ่มขึ้น

เมื่อพิจารณาสมการ (51) กับสมการ (56) เห็นได้ว่าน้ำหนักอัดที่รับได้จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าโมเมนต์อินเนอร์เชีย สรุปได้ว่าในช่วงอีลาสติคน้ำหนักที่รับได้ตามมาตรฐาน AISC 1984 (9) ขึ้นอยู่กับค่าโมเมนต์อินเนอร์เชีย

สำหรับสมการ (50) หน่วยแรงอัดยังคงขึ้นอยู่กับค่าโมเมนต์อินเนอร์เชียแต่จะมีเส้นโค้งกลับทิศกับสมการ (51) คือเมื่ออัตราส่วนความชลูดน้อยลงกว่า C_c หน่วยแรงอัดที่ยอมให้จะ

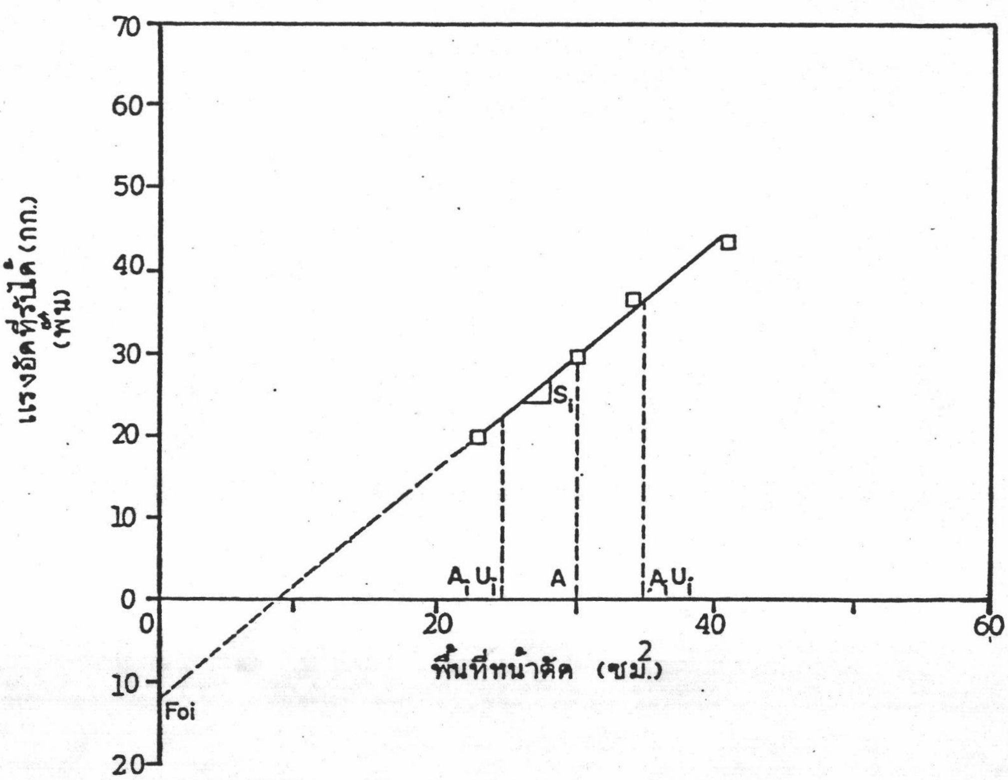
มีค่าเปลี่ยนแปลงไม่มาก และทำให้น้ำหนักอัดที่รับได้ไม่ขึ้นอยู่กับค่าโมเมนต์อินเนอร์เชียมากนัก แต่จะขึ้นอยู่กับค่าพื้นที่หน้าตัดมากกว่า ถ้าอัตราส่วนความชลูดน้อยลงเท่าใดอิทธิพลนี้ก็จะเพิ่มขึ้น



รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับพื้นที่หน้าตัด

สำหรับงานวิจัยนี้องค์อาคารรับแรงอัดจะถูกจัดให้เลือกหน้าตัดที่มีประสิทธิภาพมาใช้งาน หน้าตัดที่มีประสิทธิภาพนั้นหมายถึงเมื่อมีพื้นที่หน้าตัดมากขึ้นความสามารถในการรับแรงอัดจะมากขึ้นด้วย ดังรูปที่ 2.1

เห็นได้ว่าความสัมพันธ์ของความสามารถรับแรงอัดกับพื้นที่หน้าตัดนั้นมีความสัมพันธ์ใกล้เคียงกับเส้นตรง แต่ยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่ เพื่อปรับปรุงค่าความคลาดเคลื่อนนี้ให้น้อยลง จึงใช้ประโยชน์ขีดการเคลื่อนตัว โดยหาความสัมพันธ์เชิงเส้นของความสามารถรับแรงอัดกับพื้นที่หน้าตัด โดยวิธี กำลังสองน้อยสุด (Least square) ภายในช่วงขีดการเคลื่อนตัว ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับพื้นที่หน้าตัดในช่วงขีดการเคลื่อนตัว

โดยวิธีการนี้เราสามารถเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับไร้เชิงเส้น (Nonlinear constraints) เป็นเชิงเส้นได้โดยกลับมาพิจารณาอสมการ (46)

$$- \sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j + f_{pc} A_i^{o} U_i \leq F_i^{o} \qquad (57)$$

จะเห็นว่า f_{pc} ในอสมการเป็นค่าไม่คงที่แต่จากกราฟในรูปที่ 2 พอจะทำนายพจน์ที่ 2 ทางขวามือได้ว่า

$$f_{pc} A_i^{o} U_i = F_i \qquad (58)$$

เมื่อหาค่าจากกราฟรูปที่ 2.2 จะได้ว่า

$$F_i = F_{oi} + U_i S_i A_i^o \qquad (59)$$

โดยที่ F_{oi} = ระยะตัดแกนแรง

S_i = ความชันของเส้นความสัมพันธ์

นำสมการ (59) แทนลงในอสมการ (58)

$$-\sum_{j=1}^{n} \Delta F_{ij} * U_j + U_i S_i A_i^o \leq F_i^o - F_{oi} \qquad (60)$$

ดังนั้นอสมการ (58) สามารถใช้ในการควบคุมน้ำหนักโก่งเดาะได้

ในการออกแบบแรกเริ่มนั้นยังไม่รู้ว่าชิ้นส่วนไหนรับแรงดึงและชิ้นส่วนไหนรับแรงอัด ดังนั้นจึงให้ใช้ชิ้นส่วนที่มีรัศมีไจเรชั่นน้อยที่สุดตามมาตรฐาน AISC 1984 (9) และเมื่อได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างแล้วจึงรู้ว่าชิ้นส่วนใดบ้างรับแรงดึงและชิ้นส่วนใดบ้างรับแรงอัดแล้วจึงนำค่าอัตราส่วนความชลูดสูงสุดเข้าควบคุมให้ถูกต้องตามชนิดของแรง

เงื่อนไขบังคับสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งสมการ (34) ในทำนองเดียวกับขอบเขตจำกัดแรงหรือเงื่อนไขบังคับหน่วยแรงสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\Delta X_{max} = -(K^{-1}) \sum_{j=1}^{n} \Delta K_j X = -X_{max} \qquad (61)$$

ผลลัพธ์ข้างบนนี้เมื่อเราเพิ่มทุกชิ้นขึ้น 100% การเปลี่ยนตำแหน่งในระบบจะถูกหักล้างกลายเป็นศูนย์ จากผลลัพธ์นี้แสดงให้เห็นถึงความไม่ถูกต้องเห็นได้ชัดว่าการตัดพจน์อันดับ

สองออกจากสมการ (32) นั้นมีผลอย่างมากกับสมการการเปลี่ยนตำแหน่ง อย่างไรก็ตาม เนื่องจากมีอสมการเงื่อนไขบังคับรอง (Side constraints) อยู่ทำให้คำตอบที่ได้อยู่ไม่ไกลจากตัวเดิมมากนัก อาจประมาณได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta X_{max} * U_j \begin{cases} \leq X_a - 2X_{max}^{o}, & X_{max}^{o} \geq 0 \\ \geq X_a - 2X_{max}^{o}, & X_{max}^{o} < 0 \end{cases} \qquad (62)$$

เนื่องจากการสร้างฟังก์ชันเป้าหมาย และอสมการเงื่อนไขบังคับทางพฤติกรรมโครงสร้างเป็นค่าที่ได้มาโดยประมาณ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกระทำซ้ำขบวนการดังกล่าวหลายรอบดังรูปที่ 2.3 จากนั้นเพื่อเป็นการตรวจสอบการเข้าสู่คำตอบหรือจะเรียกว่า การเข้าสู่จุดเหมาะที่สุด (Convergence) งานวิจัยนี้ใช้สมการที่แนะนำโดย Jacoby และ Kowalik และ Pizzo (11) โดยการเปรียบเทียบความยาวของค่าประจำ (Norm Length) สองค่า

$$\frac{\left\| X^{k+1} - X^{\hat{}} \right\|}{\left\| X^{k} - X^{\hat{}} \right\|} = C \qquad (63)$$

ในที่นี้ X = จุดพิกัดใน n มิติ

$X^{\hat{}}$ = หมายถึงค่าของ $A_i{}^{\hat{}}L_i$ ที่เป็นคำตอบอย่างเหมาะที่สุด

X^{k} = หมายถึงค่าของ $A_i{}^{k}L_i$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ k

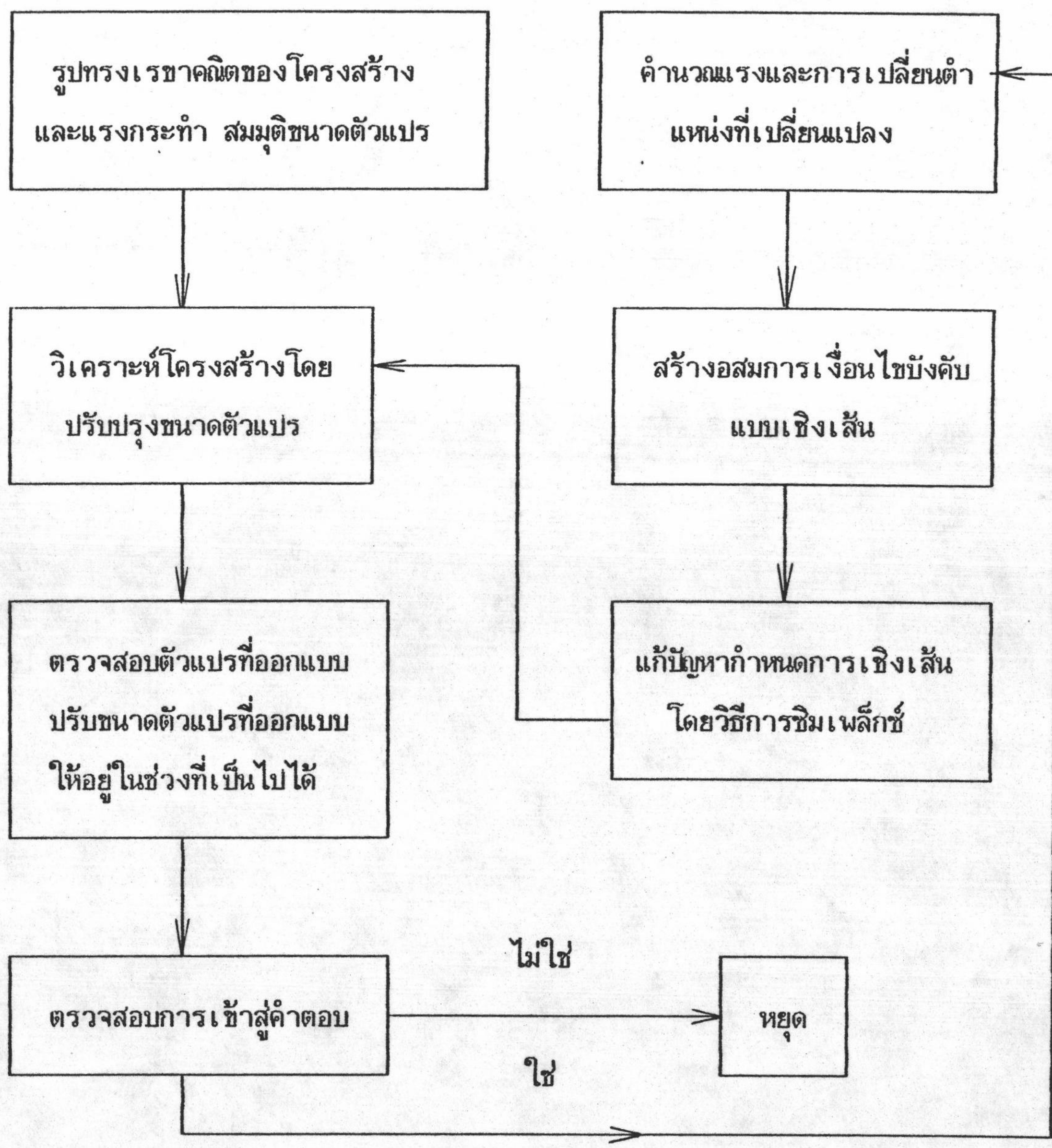
X^{k+1} = หมายถึงค่าของ $A_i{}^{k+1}L_i$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ k + 1

ดังนั้นจะเห็นว่าถ้าพิกัด X^{k+1} อยู่ใกล้พิกัดคำตอบมากกว่าจุดพิกัด X^{k} แสดงว่าฟังชั่นยังคงเข้าสู่คำตอบอยู่ (Converge) ในกรณีนี้ ค่า $C < 1$ ถ้าในกรณีค่า $C > 1$ ให้หยุดทำงาน คำตอบจะเป็น $X^{\hat{}}$ พิกัดสุดท้ายที่ยังเข้าสู่คำตอบ

เมื่อสร้างอสมการเงื่อนไขบังคับได้ทั้งหมดแล้ว จึงใช้กำหนดการเชิงเส้นออกแบบชิ้นส่วนโครงถักได้อย่างรวดเร็วและประหยัดจากตารางเหล็กมาตรฐาน ตามสมมุติฐาน

ข้างต้นของงานวิจัยนี้โดยใช้ค่าประมาณนั้น สามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการแก้ปัญหาโดยใช้รูปแบบเมตริกซ์ตามสมการต่าง ๆ ได้

ลำดับขั้นตอนการคำนวณเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 แผนภูมิขั้นตอนการคำนวณ

2.5 <u>กรณีใช้ชิ้นส่วนเหมือน ๆ กัน</u> (Grouping of elements)

กรณีนี้ในทางปฏิบัติแล้วการใช้ชิ้นส่วนให้เหมือน ๆ กันนั้นทำให้สะดวกในการติดตั้ง การควบคุมการก่อสร้าง และการสั่งซื้อวัสดุ เป็นการลดค่าใช้จ่ายในการบริหารลงได้มาก งานวิจัยนี้จึงจัดให้ผู้ใช้สามารถเลือกเป็นกลุ่ม ๆ เป็นชุด ๆ สมการ (37) สามารถลดขนาดลงได้โดยอัตโนมัติ

$$Z \quad = \quad \sum_{i=1}^{ng} A_i^o L_i \, U_i \qquad (66)$$

โดยที่ ng = จำนวณชุดพื้นที่หน้าตัด

A_i^o = พื้นที่หน้าตัดเดิมในแต่ละชุด

L_i = ความยาวของชิ้นส่วนที่อยู่ในชุดนั้น (กรณีมีหลายชิ้นให้นำความยาวมารวมกัน)

U_i = อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดเดิมไปเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่ของชุดนั้น ๆ

จะเห็นว่าพื้นที่หน้าตัดเดิมในแต่ละชุดจะมีค่าเท่ากัน แต่มีหลายชิ้นส่วน ดังนั้นชุดหนึ่งจะมีพื้นที่หน้าตัดเพียงตัวเดียว แต่ความยาวของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในชุดนั้น ๆ ย่อมมีหลายค่าแน่นอน เพราะชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในชุดเดียวกันความยาวอาจไม่เท่ากัน และตัวสุดท้ายในสมการ (66) ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงจากพื้นที่หน้าตัดเดิมไปเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่ย่อมมีค่าเดียวในชุดหนึ่ง ๆ

ดังนั้นสรุปได้ว่าทางขวาของสมการ (66) จะมีจำนวนพจน์รวมกันแบบเชิงเส้นตรงอยู่เท่ากับจำนวนชุดของพื้นที่หน้าตัด เพราะฉะนั้นจากเดิมที่จำนวนตัวแปรมีค่าเท่ากับจำนวนชิ้นส่วน ก็จะลดลงเหลือเพียงจำนวนชุดของพื้นที่หน้าตัดเท่านั้น

เมื่อเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันเป้าหมายจากพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมาเป็นพื้นที่หน้าตัด

2.5 กรณีใช้ชิ้นส่วนเหมือน ๆ กัน (Grouping of Elements)

กรณีนี้ในทางปฏิบัติแล้วการใช้ชิ้นส่วนให้เหมือน ๆ กันนั้นทำให้สะดวกในการติดตั้ง การควบคุมการก่อสร้าง และการสั่งซื้อวัสดุ เป็นการลดค่าใช้จ่ายในการบริหารลงได้มาก งานวิจัยนี้จึงจัดจึงจัดให้ผู้ใช้สามารถเลือกเป็นกลุ่ม ๆ เป็นชุด ๆ สมการ (37) สามารถลดขนาดลงได้โดยอัตโนมัติ

$$Z = \sum_{i=1}^{ng} A_i^{o} L_i U_i \qquad (66)$$

โดยที่ ng = จำนวณชุดพื้นที่หน้าตัด

A_i^{o} = พื้นที่หน้าตัดเดิมในแต่ละชุด

L_i = ความยาวของชิ้นส่วนที่อยู่ในชุดนั้น (กรณีมีหลายชิ้นให้นำความยาวมารวมกัน)

U_i = อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดเดิมไปเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่ของชุดนั้น ๆ

จะเห็นว่าพื้นที่หน้าตัดเดิมในแต่ละชุดจะมีค่าเท่ากัน แต่มีหลายชิ้นส่วน ดังนั้นชุดหนึ่งจะมีพื้นที่หน้าตัดเพียงตัวเดียว แต่ความยาวของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในชุดนั้น ๆ ย่อมมีหลายค่าแน่นอน เพราะชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในชุดเดียวกันความยาวอาจไม่เท่ากัน และตัวสุดท้ายในสมการ (66) ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงจากพื้นที่หน้าตัดเดิมไปเป็นพื้นที่หน้าตัดใหม่ย่อมมีค่าเดียวในชุดหนึ่ง ๆ

ดังนั้นสรุปได้ว่าทางขวาของสมการ (66) จะมีจำนวนพจน์รวมกันแบบเชิงเส้นตรงอยู่เท่ากับจำนวนชุดของพื้นที่หน้าตัด เพราะฉะนั้นจากเดิมที่จำนวนตัวแปรมีค่าเท่ากับจำนวนชิ้นส่วน ก็จะลดลงเหลือเพียงจำนวนชุดของพื้นที่หน้าตัดเท่านั้น

เมื่อเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันเป้าหมายจากพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมาเป็นพื้นที่หน้าตัด

ในแต่ละชุดแล้ว

พิจารณาเงื่อนไขบังคับหน่วยแรง ในกรณีพื้นที่หน้าตัดเป็นชุด ๆ ผู้ใช้อาจจะกำหนดในหนึ่งชุดมีจำนวนชิ้นส่วนเท่าใดก็ได้ปัญหาที่เกิดตามมาก็คือ จะนำแรงภายในโครงสร้างในชิ้นส่วนใดมาทำเป็นเงื่อนไขบังคับ กรณีแต่ละชิ้นที่ได้อธิบายในหัวข้อ 2.2 นั้นไม่มีปัญหา เพราะชิ้นหนึ่งถือว่าเป็นชุดหนึ่งคือมีจำนวนชิ้นเท่าใดก็จะมีจำนวนชุดเท่านั้น การนำแรงมาทำเงื่อนไขบังคับจึงนำทุกแรงมาสร้างเงื่อนไขบังคับได้ และเนื่องจากในชิ้นส่วนหนึ่งเกิดแรงได้ชนิดเดียวหรือในชุดหนึ่งเกิดแรงได้ชนิดเดียว เงื่อนไขบังคับของชิ้นส่วนนั้นจะทราบทันทีว่าเป็นแรงชนิดใด แต่ในกรณีชุดชิ้นส่วนเป็นชุดในชุดหนึ่ง ๆ อาจมีหลายชิ้นส่วนและในชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในชุดอาจเกิดทั้งแรงดึงและแรงอัดและมีค่าต่าง ๆ กัน ปัญหาคือจะเลือกแรงใดมาสร้างเงื่อนไขบังคับหน่วยแรง

ในกรณีแรงอัดเป็นหลัก คือชุดนั้น ๆ มีค่าหน่วยแรงอัดมากกว่าหน่วยแรงดึง จะใช้แรงอัดสูงสุดมาสร้างเงื่อนไขบังคับ

ในกรณีหน่วยแรงดึงเป็นหลัก คือ ในชุดนั้น ๆ มีค่าหน่วยแรงดึงมากกว่าหน่วยแรงอัดมาก ๆ คือมีค่ามากกว่ากันถึง 5.548 เท่า จะใช้แรงจากชิ้นส่วนที่มีหน่วยแรงดึงสูงสุดเป็นเงื่อนไขบังคับหน่วยแรง

เหตุผลที่ใช้ 5.548 เท่ามาควบคุมการเลือก เนื่องจากหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ใช้ได้นั้นมีค่าเท่ากับ 1500 กก./ซม.^{2} ในกรณีใช้หน่วยแรงที่จุดคลากเท่ากับ 2500 กก./ซม.^{2} และหน่วยแรงอัดที่ยอมให้ใช้ได้เท่ากับ 270.34 กก./ซม.^{2} เมื่อชิ้นส่วนนั้นมีค่าอัตราส่วนความชลูดสูงสุดคือมีค่าเท่ากับ 200 อัตราความแตกต่างของหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัดมีค่าเท่ากับ 5.548 แล้วจะเห็นว่าไม่มีโอกาสที่แรงอัดจะเข้ามาควบคุมการเลือกพื้นที่หน้าตัดได้เลย

ในกรณีที่อยู่ระหว่างที่กล่าวมานี้ ได้จัดให้สร้างเงื่อนไขบังคับหน่วยแรงขึ้นทั้งแรงอัดและแรงดึง

ส่วนทางซ้ายของอสมการเงื่อนไขบังคับหน่วยแรง สมการ (44) และสมการ (46) นั้น ค่าแรงภายในที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเปลี่ยนแปลงตัวแปรในการออกแบบ ตัวแปรในการออกแบบในกรณีเป็นชุดหรือเป็นกลุ่มชิ้นส่วนใช้พื้นที่หน้าตัดเหมือน ๆ กัน ตัวแปรในการออกแบบจะเหลือเพียงเท่ากับจำนวนชุดเท่านั้น ดังนั้นค่าแรงที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดจึงเกิดจากการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดในชุดนั้น ๆ และมีสัมประสิทธิ์ตัวคูณเปลี่ยนแปลง (U_j) ตัวเดียวกัน ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงภายในเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดจึงสามารถรวมกันได้เชิงเส้นตรง สมการจะเขียนได้ใหม่ในรูปชุดพื้นที่หน้าตัด ได้ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{ng} \Delta F_{ij} * U_j \; - \; f_p \, A_i^{o} \, U_i \qquad \{<=>\} \quad -F_i^{o} \tag{67}$$

โดยที่ ΔF_{ij} = แรงที่เปลี่ยนแปลงไปในชิ้นส่วนที่ถูกใช้สร้างเงื่อนไขบังคับ (ชิ้นส่วน i) เมื่อพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนที่อยู่ในชุดหรือกลุ่ม j เปลี่ยนแปลงไป 100%

ดังนั้นด้านซ้ายของอสมการเงื่อนไขบังคับหน่วยแรงจะมีจำนวนลดลงเช่นเดียวกับฟังก์ชันเป้าหมาย คือจะเหลือเพียงเท่ากับจำนวนชุดของพื้นที่หน้าตัดเท่านั้น