บทที่ 3

ทฤษฎี ทูกรุ๊ป

3.1 ทฤษฎี ทูกรุ๊ป (Two Group Theory)

การคำนวณโดยใช้นิวตรอนความเร็วค่าเดียว (one-group neutron) ค่า δ ที่ได้เป็นค่าโดยประมาณที่ไม่ถูกต้อง เพราะว่าคุณสมบัติของสารในแกน แตกต่างกันมากสำหรับนิวตรอนวิ่งช้า และนิวตรอนวิ่งเร็ว ดังนั้นเมื่อคำนวณโดยใช้นิวตรอนความเร็วค่าเดียว ค่าที่ได้จึงไม่ถูกต้องกับความเป็นจริง โดยทั่วไปนิยมใช้ทฤษฎี ทูกรุ๊ป ซึ่งให้ผลถูกต้องพอสมควร และการคำนวณไม่ยุ่งยากเกินไปนัก ถ้าพิจารณาความเร็วของนิวตรอนว่ามีค่าต่าง ๆ กันเป็นความเร็วหลายกลุ่ม (multi-group velocity) การคำนวณจะยุ่งยากมาก และต้องอาศัยเครื่องคำนวณกล

ในการคำนวณนี้ สมมติว่า นิวตรอนแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่ม คือนิวตรอนวิ่งช้าและนิวตรอนวิ่งเร็ว (วิธีคิด ถือว่า นิวตรอนที่วิ่งอยู่มีความเร็วค่าเดียว เมื่อไปชนกับสารตัวกลางเข้า จะกลายเป็นนิวตรอนวิ่งช้าทันที และถือว่าขณะที่วิ่งจากเร็วมาเป็นช้าไม่มีการดูดกลืน) ในที่นี้ใช้เลข 1 และเลข 2 ตามหลังตัวอักษร เป็นสัญลักษณ์แทนนิวตรอนวิ่งเร็วและนิวตรอนวิ่งช้าตามลำดับ อักษร c และอักษร r แทนแกนและตัวสะท้อนตามลำดับ

นิวตรอนวิ่งเร็วในแกนจะมีสมการการแพร่ เมื่อมันอยู่ในสถานะคงที่ (steady state diffusion equation) เป็น

$$D_{1c}\nabla^2\phi_{1c} - \Sigma_{1c}\phi_{1c} + k\,\Sigma_{2c}\,\phi_{2c} = 0 \qquad (3.1)$$

Σ_{2c} คือครอสเซคชั่นของการดูดกลืนของนิวตรอนวิ่งช้าในแกนของเครื่องปฏิกรณ์

$k\,\Sigma_{2c}\phi_{2c}$ คือจำนวนนิวตรอนวิ่งเร็วที่เกิดจากการแตกตัว ต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ต่อวินาที

k คือมัลติพลิเคชั่นแฟคเตอร์

Σ_{1c} คือสโลอิ้งดาวน์ครอสเซคชั่น (slowing down cross section) สำหรับนิวตรอนวิ่งเร็ว

$\Sigma_{1c}\phi_{1c}$ คือจำนวนนิวตรอนวิ่งช้าที่เกิดขึ้นต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ต่อวินาที

สำหรับนิวตรอนวิ่งช้าในแกนจะมีสมการการแพร่ เมื่อมันอยู่ในสถานะคงที่เป็น

$$D_{2c}\nabla^2\phi_{2c} - \Sigma_{2c}\phi_{2c} + \Sigma_{1c}\phi_{1c} = 0 \qquad (3.2)$$

$\Sigma_{1c}\phi_{1c}$ คือต้นกำเนิดของนิวตรอนวิ่งช้า เป็นจำนวนนิวตรอนวิ่งเร็วที่ลดความเร็วลงมาเป็นนิวตรอนวิ่งช้า (เป็นจำนวน ต่อ ซม.^{3} ต่อวินาที)

ในตัวสะท้อน สมการการแพร่สำหรับนิวตรอนวิ่งเร็วที่อยู่ในสถานะคงที่ เป็น

$$D_{1r}\nabla^2\phi_{1r} - \Sigma_{1r}\phi_{1r} = 0 \qquad (3.3)$$

ถือว่าไม่มีตัวกำเนิดนิวตรอนในตัวสะท้อน

Σ_{1r} คือสโลอิ้งดาวน์ครอสเซคชั่นสำหรับนิวตรอนวิ่งเร็วในตัวสะท้อน

สำหรับนิวตรอนวิ่งช้าในตัวสะท้อน จะมีสมการการแพร่เป็น

$$D_{2r}\nabla^2\phi_{2r} - \Sigma_{2r}\phi_{2r} + \Sigma_{1r}\phi_{1r} = 0 \qquad (3.4)$$

Σ_{2r} คือครอสเซคชั่นของการดูดกลืนของนิวตรอนวิ่งช้าในตัวสะท้อน

สมการ (3.1) และ สมการ (3.2) สามารถเขียนในรูปสมการคลื่นเป็น

$$\nabla^2\phi_{1c} + B^2\phi_{1c} = 0 \qquad (3.5)$$

$$\nabla^2\phi_{2c} + B^2\phi_{2c} = 0 \qquad (3.6)$$

เมื่อ B^2 เป็นค่าคงที่ และถือว่ามีค่าเหมือนกันสำหรับนิวตรอนทั้ง 2 กลุ่ม แทนค่า $\nabla^2\phi_{1c}$ และ $\nabla^2\phi_{2c}$ จาก (3.5) และ (3.6) ลงใน (3.1) และ (3.2) จะได้

$$-(D_{1c}B^2 + \Sigma_{1c})\phi_{1c} + k\Sigma_{2c}\phi_{2c} = 0$$

และ $$\Sigma_{1c}\phi_{1c} - (D_{2c}B^2 + \Sigma_{2c})\phi_{2c} = 0$$

จากเงื่อนไขที่ว่า ϕ_{1c} และ ϕ_{2c} ต้องไม่เท่ากับศูนย์ จะเป็นจริงเมื่อ ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของสัมประสิทธิ์จะต้องเป็น ศูนย์ จะได้

$$(D_{1c}B^2 + \Sigma_{1c})(D_{2c}B^2 + \Sigma_{2c}) - k\Sigma_{1c}\Sigma_{2c} = 0 \quad (3.7)$$

สมการที่ได้เป็นสมการวิกฤตสำหรับแกนของเครื่องปฏิกรณ์ฯ ที่มีตัวสะท้อนเมื่อคิดพลังงานะของนิวตรอนเป็น 2 กลุ่ม

หารสมการ(3.7) ด้วย $\Sigma_{1c}\Sigma_{2c}$จะได้

$$\left(\frac{D_{1c}}{\Sigma_{1c}}B^2 + 1\right)\left(\frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}}B^2 + 1\right) = k \quad (3.8)$$

หรือ

$$(1 + L_{1c}{}^2B^2)(1 + L_{2c}{}^2B^2) = k \quad (3.9)$$

เมื่อ $\frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}}$ คือกำลังสองของความยาวของการแพร่กระจาย , L_{2c} ของนิวตรอนวิ่งช้าในแกน

$\frac{D_{1c}}{\Sigma_{1c}} = L_{1c}^2$ คือกำลังสองของความยาวของการแพร่กระจายของนิวตรอนวิ่งเร็วในแกน

$L_{1c}{}^2 = \tau_c$

τ_c คือเฟอร์มิเอจ[1] (Fermi age)ของเทอร์มอลนิวตรอนในแกน

สมการ (3.9) จะเขียนได้เป็น

$$(1 + \tau_c B^2)(1 + L_{2c}{}^2B^2) = k$$

$$\frac{k}{(1 + \tau_c B^2)(1 + B^2L_{2c}{}^2)} = 1 \quad (3.10)$$

---

[1] Richard Stephenson, Nuclear Engineering (Tokyo: KOGAKUSHA Co., LTD., 1958), pp. 150 - 151

สมการนี้เป็นสมการวิกฤตของ ทูกรุ๊ป (two-group critical equation) สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อน

จากการคูณและจัดเสียใหม่ สมการจะอยู่ในรูป

$$B^4 + \left(\frac{1}{\mathcal{T}_c} + \frac{1}{L_{2c}^2}\right)B^2 - \frac{k-1}{\mathcal{T}_c L_{2c}^2} = 0 \qquad (3.11)$$

สมการนี้เป็นสมการควอดคราติคของ B^2 และมีคำตอบที่เป็นไปได้ สอง คำตอบ คำตอบทั้งสองของ B^2 เป็นบวกหนึ่งค่า และลบหนึ่งค่า แทนด้วย μ^2 และ $-\nu^2$ ตามลำดับ โดย μ^2 และ ν^2 เป็นค่าบวก

คำตอบเขียนได้ดังนี้

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{\mathcal{T}_c} + \frac{1}{L_{2c}^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{T}_c} + \frac{1}{L_{2c}^2}\right)^2 + \frac{4(k-1)}{\mathcal{T}_c L_{2c}^2}}\right]$$

และ (3.12)

$$-\nu^2 = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{\mathcal{T}_c} + \frac{1}{L_{2c}^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{T}_c} + \frac{1}{L_{2c}^2}\right)^2 + \frac{4(k-1)}{\mathcal{T}_c L_{2c}^2}}\right] \qquad (3.13)$$

สมมติเครื่องปฏิกรณ์ฯ เป็นรูปแผ่นขนาดอนันต์ จากสมการ (3.5)

$$\frac{d^2\phi_{1c}}{dz^2} + \mu^2\phi_{1c} = 0$$

และ

$$\frac{d^2\phi_{1c}}{dz^2} + \nu^2\phi_{1c} = 0$$

ซึ่งมีคำตอบทั่ว ๆ ไป เป็นผลบวกของแต่ละคำตอบย่อย

$$\phi_{1c} = a_1e^{i\mu z} + a_2e^{-i\mu z} + a_3e^{\nu z} + a_4e^{-\nu z}$$

a_1, a_2, a_3 และ a_4 เป็นค่าคงที่ใด ๆ ถ้าเขียนในรูป sine และ cosine จะได้

$$\phi_{1c} = b_1\sin\mu z + b_2\cos\mu z + b_3\sinh\nu z + b_4\cosh\nu z$$

เนื่องจากฟลักซ์ต้องมีสมมาตรรอบจุดกำเนิด ดังนั้น $\frac{d\phi}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$ นั่นคือ สัมประสิทธิ์ b_1 และ b_3 ต้องเป็นศูนย์ คำตอบจะเขียนได้เป็น

$$\phi_{1c} = AX + CY \qquad (3.14)$$

เมื่อ $X = \cos \mu z$ และ $Y = \cosh \nu z$

คำตอบของ ϕ_{2c} จะเขียนได้ในทำนองเดียวกันเป็น

$$\phi_{2c} = A'X + C'Y$$

$$= S_1AX + S_2CY \qquad (3.15)$$

เมื่อ $A' = S_1A$ และ $C' = S_2C$

จะเห็นได้ว่า สมการคลื่นของแกน คือสมการ (3.5) และสมการ (3.6) มีคำตอบของฟลักซ์ที่สอดคล้องตามค่า μ^2 และ $-\nu^2$ เป็น X และ Y ตามลำดับ ดังนั้นสมการ (3.5) และ (3.6) อาจเขียนได้เป็น

$$\nabla^2 X + \mu^2 X = 0 \qquad (3.16)$$

$$\nabla^2 Y - \nu^2 Y = 0 \qquad (3.17)$$

คำตอบของสมการ (3.16) และ (3.17) นี้ขึ้นอยู่กับรูปร่างของเครื่องปฏิกรณ์ ซึ่งปรากฏอยู่ในตาราง 3–1

สมการ (3.14) และ สมการ (3.15) จะให้คำตอบทั่วไปของสมการ (3.1) และ (3.2) แต่คำตอบที่จะนำมาใช้ คือ

$$\phi_{1c} = AX \qquad \phi_{1c} = CY$$

$$\phi_{2c} = A'X \qquad \phi_{2c} = C'Y$$

โดยการใช้ค่า $\phi_{1c} = AX \qquad \phi_{2c} = A'X$

ตารางที่ 3-1

ผลลัพธ์ของสมการคลื่นสำหรับฟลักซ์ของนิวตรอนในแกน

Geometry	X	Y
Infinite Slab	$\cos \mu x$	$\cosh \nu x$
Sphere	$\frac{\sin \mu r}{r}$	$\frac{\sinh \nu r}{r}$
Infinite Cylinder	$J_0(\mu r)$	$I_0(\nu r)$

จากสมการ (3.16) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla^2 \phi_{2c} = -\mu^2 A' X$$

แทนค่าใน สมการ (3.2) จะได้

$$-D_{2c}\mu^2 A' X - \Sigma_{2c} A' X + \Sigma_{1c} A X = 0 \qquad (3.18)$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{\Sigma_{1c}}{D_{2c}\mu^2 + \Sigma_{2c}}$$

อัตราส่วน $\frac{A'}{A}$ แทนด้วย S_1 เรียก สัมประสิทธิ์ของคัปปลิ้ง (coupling coefficient) ดังนั้นจะได้

$$S_1 = \frac{\Sigma_{1c}}{D_{2c}\mu^2 + \Sigma_{2c}} \qquad (3.19)$$

เนื่องจาก $\frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}}$ คือ L_{2c}^2

$\frac{D_{1c}}{\Sigma_{1c}}$ คือ $\mathcal{T}_c$

สมการ (3.19) จะเขียนได้เป็น

$$S_1 = \left(\frac{D_{1c}}{\mathcal{T}_c D_{2c}}\right)\left(\frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{L_{2c}^2}}\right) \qquad (3.20)$$

ในทำนองเดียวกัน โดยการแทนค่า CY สำหรับ ϕ_{1c} และ $C'Y$ สำหรับ ϕ_{2c} และ $\nabla^2\phi_{2c} = \nu^2 C'Y$ ในสมการ (3.2) จะได้

$$D_{2c}\nu^2 C'Y - \Sigma_{2c}C'Y + \Sigma_{1c}CY = 0 \qquad (3.21)$$

อัตราส่วน $\frac{C'}{C}$ เรียก สัมประสิทธิ์ของคัปปลิ้ง แทนด้วย S_2 จะได้

$$S_2 = \frac{C'}{C} = \left(\frac{D_{1c}}{\mathcal{T}_c D_{2c}}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{L_{2c}^2} - \nu^2}\right)$$

แทนค่า

$$\nu^2 = \mu^2 + a$$

$$a = \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\mathcal{T}}$$

จะเขียนสมการได้เป็น

$$S_2 = -\left(\frac{D_{1c}}{\mathcal{T}_c D_{2c}}\right)\left(\frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{\mathcal{T}_c}}\right) \qquad (3.22)$$

จากสมการ (3.3) และสมการ (3.4) ถ้าหารสมการ (3.3) ด้วย D_{1r} และสมการ (3.4) ด้วย D_{2r} จะได้

$$\nabla^2\phi_{1r} - K_{1r}^2\phi_{1r} = 0 \qquad (3.23)$$

$$\nabla^2\phi_{2r} - K_{2r}^2\phi_{2r} + \frac{D_{1r}}{D_{2r}\mathcal{T}_r} = 0 \qquad (3.24)$$

เมื่อ $K_{1r}^2 = \frac{\Sigma_{1r}}{D_{1r}}$, $K_{2r}^2 = \frac{\Sigma_{2r}}{D_{2r}}$, $\frac{D_{1r}}{\Sigma_{1r}} = \mathcal{T}_r$

คำตอบทั่วไปของสมการ (3.23) คือ

$$\phi_{1r} = C_1 e^{-K_{1r}z} + C_2 e^{+K_{1r}z}$$

เงื่อนไขขอบเขต ในตัวสะท้อนที่มีขนาดอนันต์ ϕ_{1r} ต้องมีค่าจำกัดไม่ว่า z จะมีค่ามากเพียงใด ดังนั้น $C_2 = 0$ จะได้

$$\phi_{1r} = C_1 e^{-K_{1r}z}$$

เขียนได้เป็น

$$\phi_{1r} = FZ_1 \qquad (3.25)$$

เมื่อ $Z_1 = e^{-K_{1r}z}$ และ F เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากสมการ (3.24) เขียนค่าตอบทั่วไปได้เป็น

$$\begin{aligned}\phi_{2r} &= GZ_2 + S_3\phi_{1r} \\ &= GZ_2 + S_3FZ_1 \qquad (3.26)\end{aligned}$$

เมื่อ $Z_2 = e^{-K_{2r}z}$ และ G เป็นค่าคงที่ใด ๆ

S_3 คือ สัมประสิทธิ์ของรีเฟลกเตอร์คัปปลิ้ง (reflector coupling coefficient)

ในการหาค่า S_3 แทน ϕ_{2r} ในสมการ (3.24) ด้วย $S_3\phi_{1r}$ (ไม่รวมเทอม GZ_2 (เนื่องจากมันเป็นค่าตอบของสมการโฮโมจีเนียส homogeneous equation)

จะได้สมการเป็น

$$S_3\nabla^2\phi_{1r} - S_3K_{2r}^2\phi_{1r} + \frac{D_{1r}}{D_{2r}\tau_r}\phi_{1r} = 0 \qquad (3.27)$$

แทนค่า $\nabla^2\phi_{1r}$ จากสมการ (3.23) จะได้

$$S_3K_{1r}^2\phi_{1r} - S_3K_{2r}^2\phi_{1r} + \frac{D_{1r}}{D_{2r}\tau_r}\phi_{1r} = 0$$

นั่นคือ

$$S_3 = \frac{D_{1r}}{D_{2r}\tau_r}\left(\frac{1}{K_{2r}^2 - K_{1r}^2}\right)$$

$$= \frac{D_{1r}}{D_{2r}\tau_r}\;\frac{1}{(\tau_r/L_r^2) - 1} \qquad (3.28)$$

เมื่อ $K_{2r}^2 = \frac{1}{L_{2r}^2}$ และ $K_{1r}^2 = \frac{1}{\tau_r}$

ค่าคงที่ S_1, S_2 และ S_3 ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของสารในเครื่องปฏิกรณ์ฯ แต่ไม่ขึ้นกับรูปร่างของมัน ค่า Z_1 และ Z_2 ขึ้นกับรูปร่างของแกน และตัวสะท้อน ดังตารางที่ 3-2

ตารางที่ 3-2

ผลลัพธ์ของสมการคลื่นสำหรับฟลักซ์ของนิวตรอนในตัวสะท้อน

Geometry	Z (thickness T)	Z (T infinite)
Infinite Slab	$\sinh K_r\,(½H + T - x)$	$e^{-K_r x}$
Sphere	$\frac{\sinh K_r(R + T - r)}{r}$	$\frac{e^{-K_r r}}{r}$
Infinite Cylinder	$I_0(K_r r) - \frac{I_0}{K_0}\left[K_r(R+T)\;K_0(K_r r)\right]$	$\left[\;K_0(K_r r)\;\right]$

I_0 Zero order , modified Bessel function of the first kind.

K_0 Zero order , modified Bessel function of the second kind.

ในการที่จะให้การคำนวณได้ค่าที่สมบูรณ์ ได้กำหนดค่า μ^2 และ ν^2 ใน เทอมของตัวคงที่หลักของเครื่องปฏิกรณ์ฯ ดังนี้

$$\mu^2 = \mu_0^2 \left(1 - \epsilon + 2\epsilon^2 - 5\epsilon^3\right)^* \qquad (3.a)$$

*หมายถึงค่าโดยประมาณ

$$\nu = \mu^2 + a^2 \qquad (3.b)$$

โดยที่

$$\mu_0^2 = \frac{k - 1}{L^2 + \tau} \qquad (3.c)$$

$$a = \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau} \qquad (3.d)$$

$$\epsilon = \frac{\mu_0^2}{a} \qquad (3.e)$$

เงื่อนไขขอบเขต ฟลักซ์ของนิวตรอนวิ่งเร็ว และนิวตรอนวิ่งช้า และความหนาแน่นของกระแส มีความต่อเนื่องที่ผิวระหว่างแกนกับตัวสะท้อน

ความหนาแน่นของกระแสแทนด้วย

$$j = -D\phi'$$

และเครื่องหมาย [ ] ใช้แสดงว่าการคิดคิดที่ผิวระหว่างแกนกับตัวสะท้อน จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
[\phi_{1c}] &= [\phi_{1r}] \\
[\phi_{2c}] &= [\phi_{2r}] \\
-D_{1c}[\phi_{1c}'] &= -D_{1r}[\phi_{1r}'] \\
-D_{2c}[\phi_{2c}'] &= -D_{2r}[\phi_{2r}']
\end{aligned} \qquad (3.29)$$

แทนค่าฟลักซ์ จากสมการ (3.14), สมการ (3.15), สมการ (3.25) และ สมการ (3.26) ลงในสมการ (3.29) จะได้

$$
\begin{aligned}
A[X] + C[Y] - F[Z_1] &= 0 \\
S_1A[X] + S_2C[Y] - S_3F[Z_1] - G[Z_2] &= 0 \\
A[X'] + C[Y'] - \rho_1 F[Z_1'] &= 0 \\
S_1A[X'] + S_2C[Y'] - \rho_2 S_3F[Z_1'] - \rho_2 G[Z_2'] &= 0
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

เมื่อ

$$\rho_1 = \frac{D_{1r}}{D_{1c}} \tag{3.31}$$

$$\rho_2 = \frac{D_{2r}}{D_{2c}} \tag{3.32}$$

X', Y', Z_1' และ Z_2' เป็นอนุพันธ์ครั้งที่ 1 (first derivatives) ของ X, Y, Z_1, และ Z_2 ตามลำดับ เทียบกับ x หรือ r แล้วแต่รูปร่างของแกน

ในการที่จะหาค่า A, C, F และ G ของสมการแบบโฮโมจีเนียสนี้ ดีเทอร์มิแนนท์ที่ได้จากสัมประสิทธิ์ของสมการ ต้องเป็นศูนย์

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
[X] & [Y] & -[Z_1] & 0 \\
S_1[X] & S_2[Y] & -S_3[Z_1] & -[Z_2] \\
[X'] & [Y'] & -\rho_1[Z_1'] & 0 \\
S_1[X'] & S_2[Y'] & -\rho_2 S_3[Z_1'] & -\rho_2[Z_2']
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.33}
$$

สมการที่ (3.33) นี้เป็นเงื่อนไขวิกฤตสำหรับแกนที่มีตัวสะท้อน สมการนี้อาจจะกระจายได้เป็น

$$\Delta = \left(D_{1c}\frac{X}{X}' - D_{1r}\frac{Z_1}{Z_1}' \right)\left(S_2 D_{2c}\frac{Y}{Y}' - S_3 D_{2r}\frac{Z_1}{Z_1}' - (S_2 - S_3) D_{2r}\frac{Z_2}{Z_2}' \right)$$

$$-\left(D_{1c}\frac{Y}{Y}' - D_{1r}\frac{Z_1}{Z_1}'\right)\left(S_1 D_{2c}\frac{X}{X}' - S_3 D_{2r}\frac{Z_1}{Z_1}' - (S_1 - S_3) D_{2r}\frac{Z_2}{Z_2}' \right)$$

ค่าที่ต้องการหาคือขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ฯ เช่นจะหารัศมีของเครื่องรูปทรงกลม จะต้องพยายามหาค่า R ที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนท์มีค่าเป็นศูนย์ โดยแทนค่าคงที่ที่ได้จากการคำนวณ และกำหนดความหนาของตัวสะท้อนให้คงที่ แทนค่า R สัก 2ค่า แล้วเขียนเส้นกราฟของค่า R และ Δ จะได้ค่า R ที่ทำให้ค่า Δ เป็นศูนย์โดยประมาณ แล้วเปลี่ยนค่า R ใช้ค่าที่ใกล้เคียงค่าที่ได้จากกราฟ จะหาค่ารัศมีที่ต้องการได้ เพื่อให้การคำนวณสะดวกขึ้น อาจให้ค่าจำกัดตัวจบฟังค์ชั่นใหม่เป็น

$$\alpha = \frac{[X']}{[X]}$$

$$\beta = \frac{[Y']}{[Y]}$$

$$\gamma = \frac{[Z_1']}{[Z_1]}$$

$$\delta = \frac{[Z_2']}{[Z_2]}$$

ตารางที่ 3–3 แสดงค่าของ α, β, γ และ δ

สมการวิกฤตของ หกรูป(two-group critical equation) จะเป็น

$$\alpha = \alpha' \tag{3.34}$$

เมื่อ

$$\alpha' = \frac{\rho_2\delta c_1 + \rho_1\gamma c_2 + \beta c_3}{c_1 + c_2 + c_3} \tag{3.35}$$

และ

$$c_1 = s_1(\rho_1\gamma - \beta)$$

$$c_2 = s_2(\beta - \rho_2\delta) \tag{3.36}$$

$$c_3 = s_3\rho_2(\delta - \gamma)$$

จากสมการเหล่านี้ ทำให้สามารถคำนวณหาขนาดที่ลดลงของแกนเมื่อมีตัวสะท้อน

ตารางที่ 3–3

ฟังก์ชั่นสำหรับหาค่า α, β, γ, δ
สำหรับตัวสะท้อนขนาดอนันต์

Geometry	Infinite Slab	Sphere	Infinite Cylinder
α	$-\mu \tan \mu \frac{H}{2}$	$\mu \cot \mu R - \frac{1}{R}$	$-\frac{\mu J_1(\mu R)}{J_0(\mu R)}$
β	$\nu \tanh \nu \frac{H}{2}$	$\nu \coth \nu R - \frac{1}{R}$	$\nu - \frac{1}{2R} - \frac{1}{8 \nu R^2}$ *
γ	$-K_{1r}$	$-K_{1r} - \frac{1}{R}$	$-K_{1r} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{8K_{1r}R^2}$ *
δ	$-K_{2r}$	$-K_{2r} - \frac{1}{R}$	$-K_{2r} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{8K_{2r}R^2}$ *

* หมายถึงค่าโดยประมาณ ตัดเทอมหลัง ๆ ทิ้งไป

ถ้าแกนมีขนาดจำกัดในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ค่าคงที่ μ, ν, K_{1r}, K_{2r} จะต้องกัดแปลงไปใช้ตัวอื่นแทน[2]

และถ้าความหนา T มีค่าจำกัด ค่า γ, δ จะแตกต่างไป แต่ในการคำนวณนี้ ถือว่า T มีค่าอนันต์

---

[2]Murray., op., cit. pp. 117 –119

3.2 การคำนวณหาขนาดวิกฤตของแกนเมื่อมีตัวสะท้อน โดยใช้ทฤษฎี-ทูกรุ๊ป

ค่าคงที่ที่ใช้ในการคำนวณ ได้จากข้อมูลของเครื่องปฏิกรณ์ฯ และจากหนังสืออ้างอิง[3]

พิจารณากรณีเครื่องปฏิกรณ์ฯ มีรูปเป็นแผ่นขนาดอนันต์และมีน้ำเป็นตัวสะท้อน

ในที่นี้จะต้องหาค่าคงที่ต่าง ๆ แล้วนำค่าที่ได้ไปแทนในสมการ (3.34) ค่าคงที่ชุดแรกที่จะหา คือ S_1, S_2 และ S_3 โดยใช้สมการ (3.20),(3.22) และสมการ (3.28)

ค่าที่ต้องหามาแทนลงในสมการเหล่านี้ คือ D_{1c}, D_{2c}, $\mathcal{T}_c$, L_{2c}^2 และ μ^2 ส่วนค่าที่อ่านได้จากหนังสืออ้างอิงเลยคือ D_{1r}, D_{2r}, $\mathcal{T}_r$ และ L_r^2

ค่าที่จะต้องหา

$$D_{1c} = 1.143 + 0.153(f_{Al}/f_{H_2O}) = 1.204$$

f_{Al}/f_{H_2O} คือ อัตราส่วนระหว่างปริมาตรของอลูมิเนียมเทียบกับน้ำ $= 0.4$

$$D_{2c} = \frac{1}{3 \times \Sigma_{tc}} = 0.224$$

โดยที่

$$\Sigma_{tc} = f_{H_2O}(\Sigma_t)_{H_2O} + f_{Al}(\Sigma_t)_{Al}$$

$$(\Sigma_t)_{H_2O} = \frac{1}{3D_{H_2O}} = 2.058\ , \quad (\Sigma_t)_{Al} = 0.0819$$

และ $$f_{AL} + f_{H_2O} = 1$$

$$\mathcal{T}_c = 33 + 41.8(f_{Al}/f_{H_2O}) = 49.7$$

$$L_{2c}^2 = \frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}} = 2.12$$

เมื่อ

$$\Sigma_{2c} = f_U(\Sigma_a)_U + f_{H_2O}(\Sigma_a)_{H_2O} + f_{Al}(\Sigma_a)_{Al}$$

f_U, f_{H_2O} f_{Al} คืออัตราส่วนโดยปริมาตรของ U^{235}, น้ำ และอลูมิเนียม ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเป็น 0.0026, 0.72 และ 0.28 (อาศัยหัวข้อ.2.2)

---

[3]*Ibid.*, pp. 121 - 125

$(\Sigma_a)_U, (\Sigma_a)_{H_2O}, (\Sigma_a)_{Al}$ คือ ครอสเซคชั่นของการดูดกลืนของ U^{235}, น้ำ และอลูมิเนียมตามลำดับ ซึ่งมีค่าเป็น 32.9, 0.22 และ 0.14

หาค่า μ^2 จากสมการ (3.a) โดยแทนค่า μ_0^2 จากสมการ (3.c) (ใช้ค่า $k = 1.6$) และแทนค่า a และ ϵ จากสมการ (3.d) และ (3.e) ตามลำดับ

จะได้ $\mu^2 = 0.0113$, $\mu = 0.106$

$D_{1r} = 1.143$ cm. $D_{2r} = 0.16$ cm.

$\tau_r = 31.4$ cm.^{2} $L_{2r}^2 = 8.29$ cm.^{2}

แทนค่าที่หาได้ในสมการ (3.20),(3.22) และ (3.28) จะได้

$$S_1 = 0.244$$

$$S_2 = -3.44$$

$$S_3 = 2.5$$

ค่าคงที่จุดที่สอง คือ C_1, C_2, C_3 โดยใช้สมการ (3.36)

ค่าที่ต้องหามาแทนลงในสมการนี้คือ ρ_1, ρ_2, β, γ และ δ

ค่า ρ_1 และ ρ_2 หาได้โดยแทนค่าคงที่ D_{1r}, D_{1c}, D_{2r} และ D_{2c} ที่หาไว้แล้วลงในสมการ (3.31) และ 3.32) ตามลำดับ

ได้ $\rho_1 = 0.95$

$$\rho_2 = 0.72$$

หาค่า β จากตาราง 3-3

$$\beta = \nu \tanh \nu \frac{H}{2}$$

แทนค่า ν จากสมการ (3.b) จะได้ว่า

$$\beta = 0.71 \tanh 0.71 \frac{H}{2}$$

จากตาราง (3-3) $\gamma = -K_{1r}$

แต่ $K_{1r}^2 = \frac{1}{\tau_r}$

I16624372

$$\gamma = -0.178$$

จากตาราง 3–3 $\quad \delta = -K_{2r}$

แต่ $\quad K_{2r} = \dfrac{1}{L_{2r}}$

$$\delta = -0.351$$

แทนค่าคงที่ที่หาได้ในสมการ (3.36) จะได้

$$C_1 = -0.038 - 0.159 \tanh 0.71 \frac{H}{2}$$

$$C_2 = -2.44 \tanh 0.71 \frac{H}{2} - 0.865 \quad , \quad C_3 = 0.31$$

แทนค่า $C_1, C_2, C_3, \rho_1, \rho_2, \beta, \gamma$ และ δ ลงในสมการ (3.35) จะได้

$$\alpha' = \frac{0.155 + 0.232 \tanh 0.71 \frac{H}{2}}{-1.213 - 2.599 \tanh 0.71\frac{H}{2}}$$

จากสมการ (3.34) $\quad \alpha = \alpha'$

จากตาราง 3–3

$$\alpha = \mu \tanh \frac{H}{2}$$

$$\alpha = -0.106 \tan 0.106 \frac{H}{2}$$

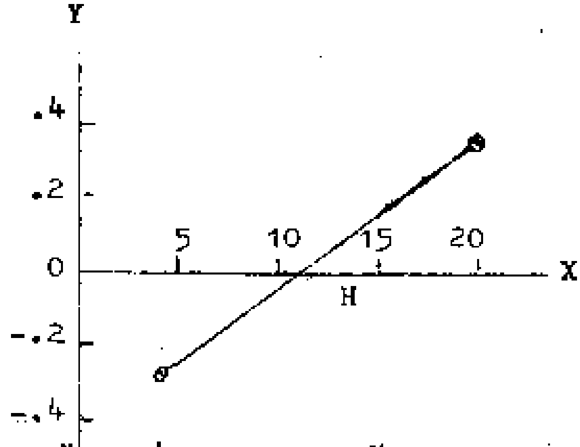
โดยการแทนค่าในสมการ (3.34) จะได้

$$0.13 \tan 0.106\frac{H}{2} + 0.275 \tan 0.106\frac{H}{2} \tanh 0.71\frac{H}{2}$$

$$-0.23 \tanh 0.71\frac{H}{2} - 0.155 = 0 \qquad (3.37)$$

วิธีหาค่า H ที่ทำให้ค่าทางซ้ายมือเป็นศูนย์ หาได้โดยการแทนค่า H ด้วยค่าใด ๆ อย่างน้อยสองค่า ลงในสมการ (3.37) เขียนกราฟระหว่างค่าที่ได้กับค่า H

ในที่นี้แทนค่า H =4 ในสมการ (3.37) ได้ผลลัพธ์ทางซ้ายมือเป็น −0.267 และ H =20 จะได้ผลลัพธ์ทางซ้ายมือเป็น 0.35



รูปที่ 3-1

การหาค่า H โดยใช้กราฟ

ลากเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง เส้นตรงตัดแกน OX ที่ H = 11 ลองแทนค่า H = 11 ได้ผลลัพธ์ เป็น – 0.113 แสดงว่าค่าของ H ควรมากกว่า 11 จากการลองแทนค่า H เพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง พบว่าที่ค่า H = 14 ผลลัพธ์จะเป็นศูนย์ ค่า H นี้จึงเป็นความหนาของเครื่องปฏิกรณ์รูปแผ่นขนาดอนันต์ ที่มีตัวสะท้อนที่มีความหนาขนาดอนันต์

พิจารณากรณีเครื่องปฏิกรณ์ฯ ขนาดอนันต์แต่ไม่มีตัวสะท้อน

$$\mu^2 = B^2 = 0.0113$$

จากตาราง 2-1 $\quad B^2 = \left(\frac{\pi}{H_0} \right)^2$

จะได้ $\quad H_0 = 29.6 \text{ cm.}$

จากสมการ (2.19) จะได้ $\quad \delta = 7.8 \text{ cm.}$

ถ้าใช้ตัวสะท้อนเป็นกราไฟท์ ค่าคงที่ต่าง ๆ จะแตกต่างไปโดยดูจากตารางในหนังสืออ้างอิง[4] ที่เกี่ยวข้องกับกราไฟท์ วิธีการคำนวณเหมือนกัน ถ้าใช้เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม ก็สามารถคำนวณโดยอาศัยสูตรที่เกี่ยวกับรูปทรงกลม

จากการคำนวณจะสามารถเขียนเป็นค่าดังแสดงไว้ในตารางที่ 3-4

---

[4]Murray, loc.cit.

ตารางที่ 3-4

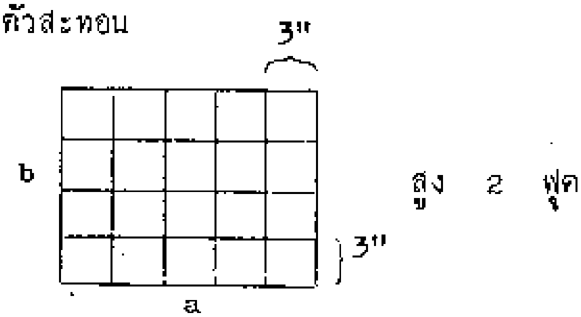
ตารางแสดงค่ารีเฟลกเตอร์เซฟวิ่งโดยใช้ทฤษฎี ทูกรุ๊ป

Geometry	Reflector	Reflector Savings
Infinite Slab	water	7.8
	graphite	14
Sphere	water	7.6
	graphite	13.6

จากค่าที่ได้จะเห็นว่าเครื่องปฏิกรณ์ฯ ที่มีแกนแบบแผ่นขนาดอนันต์ และแกนแบบรูปทรงกลม ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันมากที่สุด มีค่า δ ใกล้เคียงกัน ดังนั้นรูปเหลี่ยมใดๆ หรือรูปทรงกระบอกซึ่งมีลักษณะอยู่ระหว่างกลางของรูปทั้งสองนี้ ก็ควรมีค่า δ ใกล้เคียงกันด้วย และเนื่องจากการใช้ทฤษฎีทูกรุ๊ป เป็นการคำนวณที่ละเอียดกว่าทฤษฎี วันกรุ๊ป ควรให้ค่าที่ถูกต้องมากกว่า จึงนำค่า δ นี้ไปใช้ในการคำนวณหามวลวิกฤตต่อไป

3.3 การคำนวณหามวลวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ฯแบบสระน้ำ เมื่อมีจำนวนแท่งต่างกัน

กรณี 5 x 4แท่ง มีน้ำเป็นตัวสะท้อน



รูปที่ 3-2 แกนของเครื่องปฏิกรณ์ฯแบบ 5 x 4

จะได้ด้าน $a = 38.1$ ซม. ด้าน $b = 30.5$ ซม. และด้าน $c = 61$ ซม.

ปริมาตร $abc = 70800$ ซม.^{3}

เนื่องจากเมื่อใช้น้ำเป็นตัวสะท้อน มีรีเฟลกเตอร์เซฟวิ่ง เป็น 7.7 ซม. เป็นค่าเฉลี่ยที่ได้จากตาราง 3-4 จะได้

$$a' = a + 2 \times 7.7 = a + 15.4 = 53.5 \quad cm.$$

$$b' = b + 15.4 = 45.9 \quad cm.$$

$$c' = c + 15.4 = 76.4 \quad cm.$$

จากตาราง 2-1 เมื่อเครื่องปฏิกรณ์มีลักษณะเป็นแท่งสี่เหลี่ยม

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{a'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c'}\right)^2$$

ดังนั้นจะได้ $B^2 = 0.01$

ถ้าเครื่องปฏิกรณ์ฯ อยู่ในสภาพวิกฤต[5]

$$\frac{k}{(1 + B^2L^2)(1 + B^2\tau)} = 1$$

หรือเขียนได้เป็น

$$\frac{k}{1 + (L^2+\tau)B^2} = 1$$

ค่า $L^2 + \tau$ (คือ L_c^2) $= 50$ ซม.^{2}

จะได้ $k = 1.5$

จากสูตร[6] $k = \eta f$ (3.38)

η คือค่าเฉลี่ยของนิวตรอนวิ่งเร็วที่ถูกปล่อยออกมาเนื่องจากการแตกตัว มีค่าคงที่เป็น 2.076

f เรียกว่า เทอร์มอลยูทิไลซ์เซชั่น

เป็นอัตราส่วนของนิวตรอนวิ่งช้าที่ถูกดูดกลืนในยูเรเนียม ต่อ นิวตรอนวิ่งช้าที่ถูกดูดกลืนทั้งหมด

---

[5] Glasstone, <u>op.cit.</u> p.216

[6] <u>Ibid.</u>, p. 84

จากสูตร (3.38) จะได้ $\quad f = \dfrac{k}{\eta} = 0.72$

อาจเขียนสมการ f(3.38) ได้ในรูป

$$f = \frac{f_U(\Sigma_a)_U}{f_U(\Sigma_a)_U + f_{H_2O}(\Sigma_a)_{H_2O} + f_{Al}(\Sigma_a)_{Al}} = \frac{f_U(\Sigma_a)_U}{\Sigma_2} \qquad (3.39)$$

เมื่อ $\quad \Sigma_2 = f_U(\Sigma_a)_U + f_{H_2O}(\Sigma_a)_{H_2O} + f_{Al}(\Sigma_a)_{Al}$

เนื่องจาก $\quad f_U \simeq 0, \quad f_{Al} = 0.28, \quad f_{H_2O} = 0.72$

และให้ $\quad f_U(\Sigma_a)_U = x$

และค่าของ $\quad (\Sigma_a)_U = 32.9, \quad (\Sigma_a)_{H_2O} = 0.22, \quad (\Sigma_a)_{Al} = 0.14$

จะได้ $\quad \Sigma_2 = x + 0.02$

ดังนั้นจะได้ $\quad (x + 0.02)\, f = x$

จะหาค่า x ได้ เป็น 0.05

จาก

$$x = f_U(\Sigma_a)_U$$

จะได้ค่า $\quad f_U = 0.00165$

แต่ $\quad f_U = \dfrac{V_U}{V_{total}}, \quad V_{total} = a \times b \times c = 70800 \text{ cm.}^3$

จะได้ $\quad V_U = 109.7 \text{ cm.}^3$

จากสูตร

$$M = D\,V$$

D คือความหนาแน่น หน่วยเป็นกรัม/ซม.^{3} สำหรับยูเรเนียม D มีค่า 18.7 กรัม/ซม.^{3}

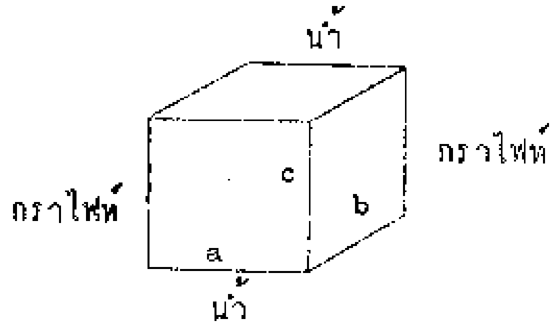
M คือมวล หน่วยเป็น กรัม

V คือปริมาตร หน่วยเป็น ซม.^{3}

เพราะฉะนั้นจะหาค่ามวลวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ได้เป็น 2052 กรัม

ค่าในทางปฏิบัติเป็น 2850 กรัม จึงต้องมีการคำนวณแก้ไขมวล ดังจะแสดงวิธีหาในบทต่อไป

ถ้ากรณีที่มีกราไฟท์ล้อมรอบด้านข้าง และมีน้ำอยู่ทางด้านบนและด้านล่าง ดังรูป 3-3



รูปที่ 3-3 เครื่องปฏิกรณ์ฯ ที่มีน้ำและกราไฟท์ล้อมรอบ

การคำนวณหามวลวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ฯ ใช้วิธีการเช่นเดียวกับเมื่อมีน้ำเป็นตัวสะท้อนทั้งหมด แต่ด้านที่ล้อมรอบด้วยกราไฟท์ ใช้ค่ารีเฟลกเตอร์เซฟวิ่งของกราไฟท์ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย 13.8 ซม. บวกกับด้าน a และ b แทน จะสามารถคำนวณหาค่ามวลวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ฯ ได้

ถ้าแท่งเชื้อเพลิงเรียงกันแบบ 5 x 5 หรือ 5 x 6 ก็สามารถหามวลวิกฤตได้เช่นเดียวกัน

จากการคำนวณแกนทึบไม่มีแท่งควบคุม จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3-5

ค่าของมวลวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ฯ แบบแกนทึบ

ชนิดของตัวสะท้อน	แกน	มวลวิกฤต(ทางทฤษฎี) กรัม
กราไฟท์	5 x 4	1480
	5 x 5	1760
	5 x 6	2010
น้ำ	5 x 4	2050
	5 x 5	2270
	5 x 6	2480