

พีชคณิตวิธีเพื่อการหาผลเฉลยของปัญหาวิธีบางปัญหา



นายสมศักดิ์ อนันต์สุวรรณชัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2535

ISBN 974-581-462-8

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

018350

018350

๒๕๓๕

PATH ALGEBRAS FOR SOLVING SOME PATH PROBLEMS



Mr. Somsak Anansuvanchai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1992

ISBN 974-581-462-8

Thesis Title                      Path Algebras for Solving Some Path Problems  
By                                      Mr. Somsak Anansuvanchai  
Department                        Mathematics  
Thesis Advisor                    Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D.



Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

*Thavorn Vajrabhaya*  
..... Dean of Graduate School  
( Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D. )

Thesis Committee

*Virool Boonyasombat*  
..... Chairman  
( Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D. )

*Wanida Hemakul*  
..... Thesis Advisor  
( Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D. )

*Yupaporn Kemprasit*  
..... Member  
( Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D. )



พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมนี้เพียงแผ่นเดียว

สมศักดิ์ อนันต์สุวรรณชัย : พีชคณิตวิธีเพื่อการหาผลเฉลยของปัญหาวิถีบางปัญหา  
( PATH ALGEBRAS FOR SOLVING SOME PATH PROBLEMS )

อ. ที่ปรึกษา : รศ. ดร. วนิตา เหมะกุล, 55 หน้า. ISBN 974-581-462-8

พีชคณิตวิธีคือเซมิริง  $(P, \oplus, \otimes)$  ที่มีเอกลักษณ์และศูนย์ ซึ่งการดำเนินการ  $\oplus$  มีคุณสมบัติ  
ไอเดมโพเทนต์และสลับที่

วิทยานิพนธ์นี้เกี่ยวข้องกับในแง่พีชคณิต ( ซึ่งอธิบายได้ด้วยพีชคณิตวิธี ) ของปัญหาวิถีบน  
ไฮเพอร์กราฟ ดังต่อไปนี้

- (1) การแจกแจงเซตของจุดยอดทั้งหมดที่เป็นอิสระ
- (2) การแจกแจงเซตของการจับคู่ทั้งหมด (เซตของด้านทั้งหมดที่เป็นอิสระ)
- (3) การแจกแจงวิถีเชิงเดียวทั้งหมดระหว่างโนดสองโนดที่กำหนดให้
- (4) การแจกแจงวิถีเชิงธาตุทั้งหมดระหว่างโนดสองโนดที่กำหนดให้

เราสามารถหาผลเฉลยของปัญหาเหล่านี้ด้วยสมการพีชคณิตและใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วย

ภาควิชา ..... คณิตศาสตร์  
สาขาวิชา ..... คณิตศาสตร์  
ปีการศึกษา ..... 2534

ลายมือชื่อนิติกร ..... สมศักดิ์ อนันต์สุวรรณชัย  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ..... อ. วนิตา เหมะกุล  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมนี้เพียงแผ่นเดียว

## C025079 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD : PATH ALGEBRAS/PATH PROBLEMS

SOMSAK ANANSUVANCHAI : PATH ALGEBRAS FOR SOLVING SOME PATH PROBLEMS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. WANIDA HEMAKUL, PH.D, 55 PP. ISBN 974-581-462-8

A path algebra is a semiring  $(P, \oplus, \otimes)$  with unit and zero such that the operation  $\oplus$  is idempotent and commutative.

This thesis is concerned with the algebraic aspect (which is described by path algebras) of the following path problems on hypergraphs

- (1) enumeration of all independent node sets,
- (2) enumeration of all matchings (independent edge sets),
- (3) enumeration of all simple paths between two given nodes,
- (4) enumeration of all elementary paths between two given nodes.

Then the solution of such problems can be obtained by solving an algebraic equation with the use of computers.



ภาควิชา ..... คณิตศาสตร์  
สาขาวิชา ..... คณิตศาสตร์  
ปีการศึกษา ..... 2534

ลายมือชื่อนิสิต สมศักดิ์ อำนวยสุวรรณเชื้อ  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา อ.ดร. วนิดา  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....



## ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Wanida Hemakul, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my mother, brothers and sisters for their encouragement throughout my graduate study.

## CONTENTS



	page
ABSTRACT IN THAI . . . . .	iv
ABSTRACT IN ENGLISH . . . . .	v
ACKNOWLEDGEMENT . . . . .	vi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPTER	
I PATH ALGEBRAS AND PATH PROBLEMS . . . . .	2
II AN ALGEBRAIC FORMULATION OF PATH PROBLEMS . . . . .	16
III PATH PROBLEMS ON HYPERGRAPHS . . . . .	26
REFERENCES . . . . .	54
VITA . . . . .	55



## INTRODUCTION

Carre' [3] presented an algebra  $(P, \oplus, \otimes)$  which is called "path algebra" for solving some path problems on digraphs such as, existence of dipaths, shortest dipaths, longest dipaths, most reliable dipaths, maximal capacity dipaths, enumeration of dipaths, simple dipaths, elementary dipaths, proper separating arc (node) sets, bridges (separating nodes) etc. He also showed that all the path problems mentioned above can be expressed in the same algebraic form, i.e. in terms of path algebras, the problems can be posed as that of solving a matrix equation of the form

$$y = Ay \oplus b$$

where  $A$  is the arc-value matrix of a digraph over a path algebra  $P$  and  $b$  is either a column vector of  $A$  or the unit matrix  $E$  of a path algebra  $(M_n(P), \oplus, \otimes)$  for which  $M_n(P)$  is the set of all  $n \times n$  matrices whose entries belong to  $P$ . The matrix equation can be solved by classical methods of linear algebra, differing from these only in significance of the additive and multiplicative operations. Hence, this thesis is concerned with path algebras and developing a computer program for solving some path problems on hypergraphs.

In Chapter I, we first introduce path algebras and path problems on digraphs. Then we formulate some path problems and show that in terms of path algebras, each of these path problems can be posed as that of solving the above equation by the Jordan elimination method in Chapter II. Finally in Chapter III, path algebras for solving some path problems on hypergraphs are presented. The results in examples of Chapter II and Chapter III are obtained by executing a computer program.