การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

นางกุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย
The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2559
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BASED ON MATHEMATICAL MODELING AND SCAFFOLDING APPROACHES TO ENHANCE MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND REPRESENTATION ABILITIES OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Mrs. Kulnida Pluempitiwiriyawej

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Curriculum and Instruction
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2016

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
โดย	นางกุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช
สาขาวิชา	หลักสูตรและการสอน
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.....คณบดีคณะครุศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริเดช สุชีวะ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย เสวกงาม)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม)

.....กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ชาริณี ตรีวรัญญู)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฤดีรัตน์ ชุษณะโชติ)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์)

กุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช : การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BASED ON MATHEMATICALMODELING AND SCAFFOLDING APPROACHES TO ENHANCE MATHEMATICALPROBLEM SOLVING AND REPRESENTATION ABILITIES OFLOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ. ดร.อัมพร ม้าคนอง, อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม: อ. ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม, 291 หน้า.

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยและพัฒนาที่มีวัตถุประสงค์ 2 ประการ คือ 1) เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 2)เพื่อศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยพิจารณาจากการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม และศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง กลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม ปีการศึกษา 2559 จำนวน 64 คน ใช้เวลาในการทดลอง 24 คาบ เป็นระยะเวลา 12 สัปดาห์ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 2 ชุด ได้แก่ แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ข้อมูลใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic mean) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน(s.d.) และการทดสอบที (t-test)

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีหลักการสำคัญ 5 หลักการ คือ 1). หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงและการเข้าใจปัญหา 2). หลักการกำหนดเป้าหมายและการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง (Real world) ไปยังโลกแห่งความคิด (Conceptual world) 3). หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์ 4). หลักการทบทวนความคิด และ5). หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ 1).การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ 2). การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง 3). การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง 4). การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง 5). การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

2. คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น พบว่า 1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียน สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3). นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในทิศทางที่ดีขึ้น

ภาควิชา หลักสูตรและการสอน	ลายมือชื่อนิสิต .....
สาขาวิชา หลักสูตรและการสอน	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก .....
ปีการศึกษา 2559	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาร่วม .....

5584234227 : MAJOR CURRICULUM AND INSTRUCTION
KEYWORDS: MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING / MATHEMATICAL REPRESENTATION / MATHEMATICAL MODELING / SCAFFOLDING

KULNIDA PLUEMPITIWIRIYAWEJ: DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS BASED ON MATHEMATICALMODELING AND SCAFFOLDING APPROACHES TO ENHANCE MATHEMATICALPROBLEM SOLVING AND REPRESENTATION ABILITIES OFLOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS. ADVISOR: ASSOC. PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., CO-ADVISOR: PAIROT NOUMNOM, Ph.D., 291 pp.

This is a research and development with two objectives: 1) to develop instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches, 2) to study the quality of instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches. The study included comparison of problem solving and representation abilities after an instructional process between the experimental group and the control group and study the development of problem solving and representation abilities of students in the experimental group. The samples used in this research were 64 eighth graders (Mathayom 2 students) from Chulalongkorn University Demonstration School in 2016 academic year. The experimental time were 24 periods for 12 weeks. The two instruments used in this research were the mathematical problem solving ability test and the mathematical representation ability test. For data analysis, arithmetic mean, standard deviation (s.d.) and t-test

The findings were as follows:

1. The five principles of instructional process based on mathematical modeling and scaffolding approaches were 1) the principle of using real-world virtualized problem and problem understanding, 2) the principle of target determination and transformation from the real world to the conceptual world, 3) the principle of performing mathematical modeling, 4) the principle of reflective thinking and 5) the principle of various problem solving applications. They comprised 5 steps: 1) proposing problems of interest, 2) determining the target and creating mathematical modeling, 3) solving the problem and referring the results to the real world environment, 4) evaluating the model and verifying the model, 5) extending the idea to new situations.

2. The quality of the developed instructional process were 1) the experimental group had higher problem solving ability after the instructional process than the control group at .05 significant level, 2) the experimental group had higher mathematical representation ability after the instructional process than the control group at .05 significant level, and 3) the experimental group had developed problem solving and mathematical representation abilities in positive direction.

Department:	Curriculum and Instruction	Student's Signature	.....
Field of Study:	Curriculum and Instruction	Advisor's Signature	.....
Academic Year:	2016	Co-Advisor's Signature	.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี เนื่องจากได้รับความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงจาก รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ผู้วิจัยตั้งแต่ครั้งเป็นนิสิตระดับปริญญาบัณฑิต ณ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อาจารย์ได้ให้แนวคิด คำปรึกษา และคำแนะนำที่เป็นประโยชน์ และยังให้ความกรุณาเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เมื่อครั้งเป็นนิสิตระดับมหาบัณฑิต สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ณ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยศึกษาอยู่นั้น ได้เรียนรู้จากตัวอย่างการทำงานของอาจารย์อย่างใกล้ชิด ทั้งการคิดอย่างเป็นระบบ การลดการทำงานที่ถือว่าเป็นความสูญเสีย ความคล่องแคล่ว ความละเอียดรอบคอบ ความมุ่งมั่นในการทำงานและตัวอย่างการเป็นครูที่ดี ซึ่งนอกจากวิธีการถ่ายทอดความรู้แล้ว อาจารย์ยังเป็นแบบอย่างของครู ผู้มีคุณธรรม ทั้งความเสียสละ การเอาใจใส่ และไม่ทอดทิ้งศิษย์ ตลอดจนความเมตตา ที่ได้กรุณาตรวจแก้ไข และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงวิทยานิพนธ์เรื่องนี้ ตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดกระบวนการ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งถึงความเอาใจใส่ดูแลเป็นอย่างดียิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ได้เมตตาให้คำชี้แนะคำปรึกษาในประเด็นที่เป็นประโยชน์ในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ และเป็นกำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด และขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย เสวกงาม ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฤดีรัตน์ ชุษณะโชติ และอาจารย์ ดร.ชาริณี ตรีวรัญญู กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งคณาจารย์สาขาวิชาหลักสูตรและการสอนทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านเป็นอย่างสูง ที่ได้เสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย จนเป็นเครื่องมือที่สมบูรณ์เป็นประโยชน์ต่อการวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และรองคณบดี คณะครุศาสตร์ คณาจารย์ทุกท่าน ที่ให้ความอนุเคราะห์เรื่องการนำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไปทดลองใช้และการเก็บรวบรวมข้อมูล นอกจากนี้ขอขอบใจนักเรียนชั้น ม.2/3 และนักเรียนชั้น ม.2/6 ประจำปีการศึกษา 2559 ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในทุกวาระนับแต่เริ่มลาศึกษาต่อและเพื่อนร่วมงานในกลุ่มสาระฯ ที่ให้โอกาสให้ผู้วิจัยได้ลาศึกษาต่อในระดับดุษฎีบัณฑิต ขอขอบคุณที่ได้ช่วยเหลือ อำนวยความสะดวก สนับสนุน และเป็นกำลังใจให้ผู้วิจัยมาตลอดระยะเวลา 5 ปี ผู้วิจัยตระหนักคุณค่าในโอกาสที่ได้รับ และสัญญาว่า จะนำความรู้ความสามารถที่มีมาพัฒนานักเรียนและองค์กรต่อไป

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ใจทิพย์ ณ สงขลา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ขณิษฐ คำทอน อาจารย์ ดร.อัจฉรา ไชยูปถัมภ์ คุณกาญจนา พิชยพาณิชย์ และคุณอัญมนท์ ทวียนต์ชัย ที่ให้คำแนะนำและชี้แนะแนวทางในการดำเนินชีวิต สนับสนุนและเป็นกำลังใจตั้งแต่ผู้วิจัยเสมอมา ตั้งแต่ครั้งผู้วิจัยเริ่มเข้ามาศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตจวบจนสำเร็จการศึกษาระดับดุษฎีบัณฑิต

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่จารนัย แซ่โค้ว เป็นอย่างสูง ที่อบรมสั่งสอนเลี้ยงดู ให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์และการดำเนินชีวิตตลอดมา ผู้ปลูกฝังความอดทนไม่ย่นย่อต่ออุปสรรคและความขยันหมั่นเพียร มีมานะพยายามจวบจนกระทั่งประสบความสำเร็จดังเช่นทุกวันนี้ และขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชาญชัย ปลื้มปิติวิริยะเวช สามีผู้คอยช่วยเหลือทั้งทางด้านวิชาการ และสนับสนุนทางด้านชีวิตส่วนตัวพร้อมทั้งให้กำลังใจเสมอมา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... จ

กิตติกรรมประกาศ ..... ฉ

สารบัญ ..... ช

สารบัญตาราง ..... ฐ

สารบัญภาพ ..... ณ

บทที่ 1 บทนำ 1

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

คำถามการวิจัย 16

วัตถุประสงค์การวิจัย 16

สมมติฐานการวิจัย 17

ขอบเขตการวิจัย 19

คำนิยามศัพท์เฉพาะ 20

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย 24

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 25

1. แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 27

1.1 ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 27

1.2 ประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 28

1.3 หลักการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 29

1.4 กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 32

1.5 สมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 38

1.6 การประเมินแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 39

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

หน้า

1.7 ประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 40
1.8 ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน 41
1.9 หลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 43
2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 47
2.1 ความหมายของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 47
2.2 หลักการของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 48
2.3 หลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 49
2.4 ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้ 56
3. ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 58
3.1 ความหมายของโจทย์ปัญหา 58
3.2 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ 59
3.3 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 62
3.4 ความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหา 63
3.5 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 63
3.6 ธรรมชาติของปัญหาและการแก้ปัญหา 67
3.7 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 68
4. ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 70
4.1 ความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 70
4.2 ความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 71
4.3 รูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 72
4.4 แนวทางในการพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 75
4.5 การประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 76
5. กระบวนการเรียนการสอน 77

หน้า

5.1 ความหมายของกระบวนการเรียนการสอน 77
5.2 องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน 79
5.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน 80
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 82
6.1 งานวิจัยภายในประเทศที่เกี่ยวข้อง 82
6.2 งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้อง 89
กรอบแนวคิดการวิจัย 101
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย 102
ขั้นตอนที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 108
1. ศึกษาข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับหลักสูตร การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษากรุงเทพมหานคร 108
2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 108
3. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 109
4. พัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 110
5. ตรวจสอบและปรับปรุงคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน 121
ขั้นตอนที่ 2 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน 122
1. กำหนดแบบแผนการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน 122
2. กำหนดกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน 122
3. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และพัฒนาสื่อการเรียนรู้ 123

หน้า

4. พัฒนาเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล 125
5. ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนและเก็บรวบรวมข้อมูล 138
6. วิเคราะห์ข้อมูล 139
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 140
ตอนที่ 1 กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 142
1.1 หลักการกระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ 142
1.2 วัตถุประสงค์ของกระบวนการจัดการเรียนการสอน 143
1.3 ขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอน 144
1.4 การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน 151
ตอนที่ 2 ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น 154
2.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 156
2.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 160
2.3 การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 164
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 194
วัตถุประสงค์การวิจัย 194
สรุปผลการวิจัย 195
ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน 195

ตอนที่ 2 คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน 198
การอภิปรายผลการวิจัย 200
1. การอภิปรายผลจากการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน 200
2. การอภิปรายคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน 204
2.1 การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 204
2.2. การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 207
วิเคราะห์ความเชื่อมโยงของกระบวนการเรียนการสอนที่นำไปสู่ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 208
ข้อเสนอแนะ 210
1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ 210
2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งถัดไป 210
รายการอ้างอิง 212
ภาคผนวก 225
ภาคผนวก ก กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 226
ภาคผนวก ข รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 252
ภาคผนวก ค ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มทดลอง 254
ภาคผนวก ง ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มควบคุม 266
ภาคผนวก จ ตารางการหาค่าดัชนีความสอดคล้องของวัตถุประสงค์ 276
ภาคผนวก ฉ เครื่องมือวิจัย 287
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 291

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สารบัญตาราง

ตารางที่ 1 ลักษณะของการเชื่อมโยงของการนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ 74
ตารางที่ 2 ตารางสังเคราะห์หลักการของแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 98
ตารางที่ 3 ตารางสังเคราะห์หลักการของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ 99
ตารางที่ 4 ตารางสังเคราะห์องค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 100
ตารางที่ 5 รายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน 116
ตารางที่ 6 กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม 124
ตารางที่ 7 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 126
ตารางที่ 8 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน 127
ตารางที่ 9 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา –ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน 128
ตารางที่ 10 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาของแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 133
ตารางที่ 11 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน 134
ตารางที่ 12 รายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน 146
ตารางที่ 13 รายละเอียดของการวัดและประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน 152
ตารางที่ 14 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม 156
ตารางที่ 15 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ 157
ตารางที่ 16 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมในภาพรวม 158

Chulalongkorn University

ตารางที่ 17 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ 159
ตารางที่ 18 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม 160
ตารางที่ 19 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ 161
ตารางที่ 20 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม 162
ตารางที่ 21 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ 163
ตารางที่ 22 ตารางแสดงรายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน 240
ตารางที่ 23 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน 277
ตารางที่ 24 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน 278
ตารางที่ 25 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 1 279
ตารางที่ 26 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2 280
ตารางที่ 27 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน 281
ตารางที่ 28 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน รายข้อ 282
ตารางที่ 29 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน 283
ตารางที่ 30 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน รายข้อ 284

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 31 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน 285

ตารางที่ 32 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการ ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน รายข้อ 286

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สารบัญภาพ

ภาพที่ 1 กระบวนการสร้างแบบจำลอง (Modeling Process)..... 11
ภาพที่ 2 มุมมองลำดับแรกของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงให้เห็นว่าการตั้งคำถามอย่างไรในการถามเกี่ยวกับหลักการของการสร้างแบบจำลองที่มีความสัมพันธ์ไปยังการพัฒนาของแบบจำลอง..... 31
ภาพที่ 3 แผนผังกระบวนการสร้างแบบจำลอง..... 33
ภาพที่ 4 กระบวนการสร้างแบบจำลองของ Henry และ McAuliffe..... 36
ภาพที่ 5 วัฏจักรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์..... 37
ภาพที่ 6 วัฏจักรของการสร้างแบบจำลอง..... 44
ภาพที่ 7 ภาพประกอบรูปแบบการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้..... 54
ภาพที่ 8 แบบจำลองของ Mayer (Mayer's model) แสดงถึงกระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์..... 66
ภาพที่ 9 รูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์..... 72
ภาพที่ 10 กรอบแนวคิดการวิจัย..... 101
ภาพที่ 11 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยและพัฒนากระบวนการเรียนการสอน..... 104
ภาพที่ 12 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยตอนที่ 1..... 105
ภาพที่ 13 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยตอนที่ 2..... 106
ภาพที่ 14 กรอบขั้นตอนการดำเนินการวิจัย..... 107
ภาพที่ 15 หลักการของกระบวนการเรียนการสอนตามหลักการของแนวคิดของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการแสริมต่อการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน..... 111
ภาพที่ 16 แนวทางการจัดการเรียนการสอนที่วิเคราะห์จากหลักการของกระบวนการเรียนการสอน..... 112
ภาพที่ 17 ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนที่สังเคราะห์จากแนวทางการจัดการเรียนการสอนของกระบวนการเรียนการสอน..... 113
ภาพที่ 18 ขั้นตอนการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน..... 114

Chulalongkorn University

ภาพที่ 19 ความเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 209

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ. 1980 : Problem solving in school Mathematics ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (Krulik & Reys, 1980) ซึ่งสอดคล้องกับเป้าหมายหลักของคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา คือ เพื่อให้นักเรียนมีความรู้และมีเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการกำหนดวิธีการในการแก้ปัญหาในระดับที่สูงเกินกว่าระดับการศึกษาของตนเอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาควรจะมีโอกาสในการทดลองสร้างและปรับปรุงปัญหาเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริง เพราะปัญหาที่เกิดขึ้นในโลกแห่งความจริงนั้นมักประกอบด้วยองค์ประกอบที่ไม่เป็นระเบียบ ไม่สมบูรณ์ (NCTM, 2000b) ความคลุมเครือหรือการประกอบไปด้วยข้อมูลที่มากเกินไปหรือน้อยเกินไปอาจส่งผลต่อการตีความได้ ดังนั้นจึงเกิดคำถามและปัญหามากมายในขณะที่นักเรียนพยายามทำความเข้าใจกับข้อมูลนั้น ๆ และการนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ในกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ได้ถูกปรับเปลี่ยนและกลั่นกรองไปตามแบบจำลองในการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคน ดังนั้นนักเรียนจึงมีความจำเป็นที่ต้องพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้มีประสิทธิภาพในโลกของความเป็นจริงที่มีความยืดหยุ่นทางความคิดสร้างสรรค์มากขึ้น และโลกในยุคอนาคตที่มุ่งเน้นนักคิดทางคณิตศาสตร์และนักแก้ปัญหา(English, Fox, & Watters, 2005) ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงเป็นสิ่งสำคัญ สังเกตได้จากการที่จุดประสงค์การเรียนรู้ของหลักสูตรในระดับต่าง ๆ มีการเน้นเรื่องทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จนกระทั่งมีวลีติดปากว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียน
"คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น"

นอกจากนี้หลักสูตรขั้นพื้นฐาน (กรมวิชาการ, 2545) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนเกิดทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาได้ ครูต้องให้โอกาสนักเรียนได้ฝึกการคิดด้วยตนเองให้มาก โดยจัดสถานการณ์หรือปัญหาหรือเกมที่น่าสนใจ ท้าทายให้อยากคิด เริ่มด้วยปัญหาที่เหมาะกับศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนแต่ละกลุ่ม โดยอาจเริ่มด้วยปัญหาที่นักเรียนสามารถใช้ความรู้ที่เรียนมาแล้วมาประยุกต์ก่อน ต่อจากนั้นจึงเพิ่มสถานการณ์หรือปัญหาที่แตกต่างจากที่เคยพบมา สำหรับนักเรียนที่มี

ความสามารถสูงครูควรเพิ่มระดับความยากของปัญหา ซึ่งต้องใช้ความรู้ซับซ้อนหรือมากกว่าที่กำหนดไว้ในหลักสูตรให้นักเรียนได้ฝึกคิดด้วย ครูสามารถจัดกิจกรรมให้นักเรียนเรียนรู้อย่างค่อยเป็นค่อยไป โดยกำหนดประเด็นคำถามนำให้คิดและหาคำตอบเป็นลำดับเรื่อยไปจนนักเรียนสามารถหาคำตอบได้ครูค่อย ๆ ลดประเด็นคำถามลงจนสุดท้ายเมื่อเห็นว่านักเรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาเพียงพอแล้วก็ไม่จำเป็นต้องให้ประเด็นคำถามชี้นำ สอดคล้องกับ Cai and Lester (2010) ซึ่งกล่าวว่าการที่จะช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาครูต้องยอมรับว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนเป็นสิ่งที่ค่อย ๆ พัฒนาอย่างช้า ๆ ต้องการเวลาระยะยาว ค่อย ๆ ทำให้การแก้ปัญหาเป็นส่วนหนึ่งของรายวิชาคณิตศาสตร์และยิ่งไปกว่านั้น ครูต้องพัฒนาวัฒนธรรมการแก้ปัญหาในชั้นเรียนเพื่อให้เป็นเรื่องที่ทำเป็นปกติและมีการฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ นักเรียนจึงจะให้ความสำคัญกับการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมที่ท้าทายเป็นประจำ(Lester, 1994) ถึงแม้ว่าการแก้ปัญหาจะเป็นสิ่งที่สำคัญในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ แต่ Lina, Ling, and Cui (2011)ก็ได้กล่าวว่าครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ได้เกิดข้อสงสัยขึ้น "ทำไมมีนักเรียนบางคนสามารถประสบความสำเร็จในการคำนวณคำตอบสำหรับปัญหาแบบเลขคณิตหรือประโยคสัญลักษณ์ได้แต่พวกเขาไม่สามารถที่จะแก้ปัญหาที่เป็นโจทย์ปัญหาซึ่งต้องใช้เพียงแค่ความรู้พื้นฐานในการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์เท่านั้น” ซึ่งเหตุการณ์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ทั่วไปในกระบวนการของการเรียนรู้คณิตศาสตร์และทำให้ครูสับสนกับประเด็นเช่นนี้เป็นอย่างมาก

แม้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาจะเป็นความสามารถที่มีความจำเป็นในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่จากผลการผลการประเมินระดับนานาชาติ ยังคงแสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ศึกษาในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานยังคงมีความสามารถในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับที่ไม่น่าพึงพอใจนัก เห็นได้จากผลการประเมิน PISA (Programme for International Student Assessment) จากผู้ที่จบการศึกษาภาคบังคับหรือกลุ่ม อายุ 15 ปี (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2553) มีผลการประเมินต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติทุกครั้ง และเมื่อพิจารณาจาก PISA 2000 จนถึง PISA 2012 พบว่าในสามด้านที่ประเมิน ด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ยังคงมีแนวโน้มลดลง มี PISA 2009 ถึง PISA 2012 เท่านั้นที่มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น และที่สำคัญการรู้เรื่องคณิตศาสตร์มีคะแนนต่ำที่สุดในสามด้านที่ประเมิน ซึ่งในปี 2012 ปรากฏว่านักเรียนไทยมีคะแนน 427 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติ (OECD) 494 คะแนน ซึ่งเป็นข้อมูลที่ระบบการศึกษาโดยทั่วไปให้ความสำคัญมาก เพราะชี้นัยถึงศักยภาพของพลเมืองในอนาคต (โครงการPISAประเทศไทย, 2554; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557)

นอกจากนี้ผลการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติ พ.ศ. 2554 (TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study 2011) ซึ่งเป็นโครงการที่สมาคมนานาชาติเพื่อประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้น ม.2 ในวิชาคณิตศาสตร์และ วิทยาศาสตร์ จัดโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ร่วมมือกับสมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (International Association for the Evaluation of Educational Achievement; IEA) พบว่าประเทศไทยมีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์เป็น 427 คะแนน ซึ่งคะแนนเฉลี่ยของนานาชาติมีค่าเป็น 500 คะแนน ประเทศไทยจัดอยู่ในลำดับที่ 28 จากประเทศที่เข้าร่วมโครงการ 45 ประเทศในระดับชั้นมัธยมศึกษา จึงถือว่าอยู่ในระดับต่ำ (Low International Benchmark) ทั้งด้านเนื้อหาและด้านพฤติกรรมการเรียนรู้และยังต่ำกว่าค่ากลางของการประเมินอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 และมีแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยลดลงอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน (โครงการPISAประเทศไทย, 2554; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557)

จากรายงานผลการประเมินดังกล่าวเห็นได้อย่างชัดเจนว่าผลของการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยมีคุณภาพต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของนานาชาติอย่างต่อเนื่องโดยเฉพาะทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นทักษะที่สำคัญและคนไทยมีทักษะนี้อยู่ในระดับต่ำ(ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ, 2544) นอกจากนี้ยังสะท้อนให้เห็นว่า ประเทศไทยยังต้องยกระดับคุณภาพการเรียนรู้ของนักเรียนอย่างเร่งด่วนเพื่อให้ก้าวทันนานาชาติ และเร่งรัดการพัฒนาคุณภาพการศึกษาทั้งระบบอย่างจริงจังและต่อเนื่อง อันจะเป็นผลสะท้อนศักยภาพของพลเมืองไทยว่ามีความสามารถในการแข่งขันในอนาคตได้ เมื่อเทียบกับประชาคมโลก ทั้งนี้เพราะผลการประเมิน PISA ได้ถูกนำไปใช้เป็นเกณฑ์หนึ่งในการจัดอันดับความสามารถในการแข่งขันทางเศรษฐกิจและการลงทุนของประเทศ สอดคล้องกับสภาวการณ์ในปัจจุบันที่บริบทการเปลี่ยนแปลงในกระแสโลกก่อให้เกิดความร่วมมือทางเศรษฐกิจทั้งในระดับทวิภาคีและระดับพหุภาคีรวมทั้งความร่วมมือในประชาคมอาเซียน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2553)

จากผลการทดสอบดังกล่าว เมื่อพิจารณาร่วมกับลักษณะของข้อสอบสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่า นักเรียนยังไม่สามารถแก้ปัญหาในลักษณะของโจทย์ที่เป็นโจทย์ปัญหาได้เนื่องจากลักษณะของการประเมินการรู้คณิตศาสตร์ของ PISA เป็นการประเมินที่เน้นการแก้ปัญหาชีวิตจริงในสถานการณ์จริงในโลก (คำว่า “โลก” ในที่นี้หมายถึง สถานการณ์ของธรรมชาติ สังคม และวัฒนธรรมที่บุคคลนั้น ๆ อาศัยอยู่) สอดคล้องกับWu (2009) ที่ได้กล่าวไว้ว่า ลักษณะของข้อสอบ PISA นั้นเน้นการ

นำไปใช้ของเนื้อหาในหลักสูตร ต่อสถานการณ์ที่นักเรียนควรจะพบเจอในชีวิตประจำวัน ส่วน TIMSS นั้นเน้นการนำเนื้อหาในหลักสูตรไปใช้กับปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Nonroutine problem)

เนื่องจากการเผยแพร่ผลการประเมินของ TIMSS และ PISA ทำให้แนวคิดมุ่งเน้นเกี่ยวกับเรื่องสมรรถนะทางการศึกษาในระดับโรงเรียนมากขึ้น และให้ความสนใจเกี่ยวกับการอภิปรายและการทำวิจัยเกี่ยวกับการสอน ซึ่งการอภิปรายเกี่ยวกับสมรรถนะทางคณิตศาสตร์จะเน้นเป็นพิเศษทางด้านการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันในชีวิตประจำวันมากขึ้น (Henning & Keune, 2007) โดย Niss (2003) ได้กล่าวว่าสมรรถนะในทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่จำเป็นในการแก้ปัญหาซึ่งเกี่ยวกับระบบโรงเรียนและห้องเรียนแบบดั้งเดิม ดังนั้นมาตรฐานการศึกษาและหลักสูตรในปัจจุบันจะมีจุดเน้นที่สมรรถนะซึ่งการแก้ปัญหาเป็นหนึ่งในแปดความสามารถย่อยของสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ที่โลกกำลังให้ความสำคัญในยุคปัจจุบัน

จากที่กล่าวมาข้างต้นทั้งนานาประเทศรวมทั้งประเทศไทยเองก็ให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหาในการจัดการการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ แต่ก็ยังเห็นได้ชัดเจนว่าหลักฐานที่ปรากฏขึ้นว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นกับนักเรียนของประเทศไทยนั้นไม่ประสบความสำเร็จมาอย่างต่อเนื่องตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน แม้กระทั่งพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดทำแผนพัฒนาการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ ฉบับที่สิบเอ็ด พ.ศ. 2555 – 2559 (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2553) ก็ยังคงเน้นเรื่องการปฏิรูปการเรียนรู้ได้เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาอีกด้วย ดังนั้นจึงต้องทำ การศึกษาว่าอุปสรรคของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีอุปสรรคอยู่ที่ใด เพราะเหตุใดนักเรียนไทยจึงยังไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง

จากผลการวิจัยในประเทศไทยของ กรรณิการ์ ปวนกาศ (2543) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมนเพื่อวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า ความผิดพลาดของนักเรียนมีทั้งหมด 80 ความผิดพลาดเละความผิดพลาดที่พบสูงสุดคือ ความผิดพลาดประเภทการเปลี่ยนรูป กล่าวคือ นักเรียนไม่สามารถเปลี่ยนจากประโยคภาษามาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งสอดคล้องกับผลจากงานวิจัยของ เมตตา มาเวียง (2544) ที่ได้ศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมบัติของจำนวนนับ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น พบว่า การเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ได้เป็นหนึ่งในสามของลักษณะข้อบกพร่องที่มีความถี่สูงสุดจากข้อบกพร่องย่อย 12 ลักษณะ นอกจากนี้ จิตอารีย์

ปัญญาแจ้งสกุล (2544) พบว่าตัวแปรที่มีอิทธิพลทางตรงต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์คือ ทักษะการแปลงภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์ ทักษะการคิดคำนวณ ทักษะการตรวจสอบผลลัพธ์ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ และงานวิจัยของ ปนัดดา สังข์ศรีแก้ว (2552) ได้วิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนนับ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมน พบว่าความผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปหาน้อยดังนี้ ความผิดพลาดในขั้นการอ่าน การทำความเข้าใจ การแปลงรูป การใช้ทักษะกระบวนการ การสรุปตอบ และการแก้โจทย์ปัญหา การคูณ หาร จำนวนนับตามลำดับ

นอกจากนี้ ผลงานวิจัยของ ชลธิชา ใจพนัส และ อรอุมา เจริญสุข (2556) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พบว่าตัวแปรปัจจัยที่มีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มากที่สุดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 คือ ความสามารถในการเปลี่ยนภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ อัมพร ม้าคนอง (2536) ที่ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม พบว่าความถี่ของข้อผิดพลาดด้านการตีความโจทย์นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนการนำข้อมูลมาใช้ผิดมากที่สุด และรองลงมา คือการแปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ วัฒนิตา นำแสงวานิช (2539) ที่ศึกษาผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม โดยการใช้แบบฝึกทักษะพบว่าข้อบกพร่องหนึ่งที่พบคือการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์

จะเห็นได้ว่าจากผลงานวิจัยข้างต้น พบว่าการแปลความหมายโจทย์ การตีความและการเปลี่ยนจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ยังคงเป็นอุปสรรคต่อการแก้ปัญหาของนักเรียนไทย เพราะว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องมีการฝึกฝนให้เกิดเป็นทักษะและต้องการพื้นฐานความรู้เบื้องต้นเพื่อเรียนในมโนทัศน์ในขั้นสูงขึ้น เรื่องราวต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต้องใช้ความรู้ความเข้าใจของความหมายของคำหรือข้อความที่เป็นภาษาไทย ดังนั้นถ้าเข้าใจภาษาไทยได้ดี ก็น่าจะตีความปัญหาโจทย์หรือเข้าใจความหมายของคำถามได้ดี (พินิจ ศรีจันทร์ดี, 2530) สอดคล้องกับงานวิจัยของ Cifarelli (1998) ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการ

แปลภาษาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามหลักการและมาตรฐานของการเรียนคณิตศาสตร์โรงเรียนของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกาเมื่อปี 2000 ได้กล่าวไว้ว่า ความสามารถในการแปลภาษาเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหา (Gagatsis* & Shiakalli, 2004) จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่ากระบวนการแปลมีส่วนเกี่ยวข้องกับความสำเร็จในการแก้ปัญหา แต่การสอนยุทธวิธีการแปลโจทย์ปัญหายังถูกมองข้ามในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Duval(Uzun & Arslan, 2009) ได้ให้นิยามของการตีความหรือการแปลความหมายโจทย์ปัญหาว่าเป็นความเข้าใจความหมายของมโนทัศน์และระบุความหมายที่เทียบเท่ากับการใช้ตัวแทนในรูปแบบที่แตกต่างกันของมโนทัศน์เดียวกันได้ กิจกรรมนี้จะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกฝนการทำความเข้าใจเกี่ยวกับคุณสมบัติ ข้อมูล และการสร้างสถานการณ์ของปัญหา การตีความนี้อาจจะเกิดขึ้นไม่ได้หากนักเรียนขาดความสอดคล้องกันกับความหมายเชิงภาษากับการใช้ตัวแทนต่าง ๆ ที่ต้องใช้ในปัญหานั้น ๆ ซึ่งจะเห็นได้ว่าการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์นั้นมีความสำคัญต่อการตีความและการแปลโจทย์ปัญหาของนักเรียนดังนั้นหากเกิดว่าความไม่สอดคล้องกันหรือความไม่เทียบเท่าของความหมายของภาษากับการใช้ตัวแทนได้อย่างเด่นชัดแล้ว เส้นทางในการเปลี่ยนจากการใช้ตัวแทนรูปแบบหนึ่งไปยังตัวแทนอีกรูปแบบหนึ่งก็จะมีความยากมากขึ้น ซึ่งความยากในการแปลนี้เกี่ยวข้องกับความยากในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งตำราส่วนใหญ่ในปัจจุบันจะใช้ตัวแทนที่หลากหลายมากเพื่อเพิ่มความเข้าใจให้มากขึ้น การใช้สัญลักษณ์แทนความคิดทางคณิตศาสตร์จึงถือเป็นเรื่องพื้นฐานที่สำคัญ

Janvier (1987) ระบุว่าองค์ประกอบของการแปลความหมายประกอบด้วยการใช้ตัวแทนสองรูปแบบ ได้แก่ ตัวตั้งต้น (Source) หรือตัวแทนเริ่มต้น และตัวเป้าหมาย (Target) หรือตัวแทนสุดท้าย เพื่อให้ได้การแปลที่ถูกต้องและมีความตรงที่สุด นักเรียนจะต้องเลือกใช้องค์ประกอบของตัวตั้งต้นซึ่งมีความจำเป็นต่อตัวเป้าหมาย

Lesh, Post, and Behr (1987) ได้เน้นว่าระบบการใช้ตัวแทนนั้นมีความสำคัญในตัวมันเองอยู่แล้ว แต่การแปลความหมายระหว่างการใช้ตัวแทนแต่ละรูปแบบและการแปลงภายในแต่ละรูปแบบก็มีความสำคัญเช่นกัน เขาพบว่าความสามารถในการแปลเป็นองค์ประกอบสำคัญที่ส่งผลกระทบต่อความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหา ดังนั้นการทำความสามารถนี้ให้แข็งแกร่งขึ้นหรือปรับแก้ไขให้ดีขึ้นจะช่วยให้การใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์พื้นฐานได้ดีขึ้น และหากครูต้องการวินิจฉัยความบกพร่องในการเรียนรู้ของนักเรียน ครูสามารถทำได้โดยการหาโอกาสใน

ระหว่างการจัดการเรียนการสอน ตั้งประเด็นคำถามถึงการใช้ตัวแทนในรูปแบบหนึ่งแล้วให้นักเรียนแสดงความคิดในเรื่องเดิมโดยใช้ตัวแทนในรูปแบบอื่นอย่างหลากหลาย ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงลักษณะเด่นของระบบการใช้ตัวแทนรูปแบบต่าง ๆ ที่มีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนประกอบไว้ในแต่ละรูปแบบของตัวแทน จึงมีผลต่อความยากง่ายของการใช้ตัวแทนในแต่ละรูปแบบ เช่น พบว่า

1. การแปลความหมายไปยังรูปภาพมีความง่ายกว่าการแปลความหมายจากรูปภาพ

2. การแปลความหมายที่ใช้ภาษาเขียนนั้นง่ายกว่าการแปลความหมายโดยใช้สัญลักษณ์

3. การแปลความหมายที่ง่ายที่สุดคือการให้นักเรียนอ่านเศษส่วนหรือสัดส่วนที่เท่ากันในสองรูปแบบที่แตกต่างกัน เช่น 2:3 กับ 30:45

สอดคล้องกับ Hegarty and Kozhevnikov (1999) ที่เสนอให้เห็นความแตกต่างระหว่างการใช้ตัวแทนสองแบบของการมองเห็นเชิงปริภูมิ คือ การใช้ตัวแทนแบบแผนผังและการใช้ตัวแทนแบบรูปภาพ เขาพบว่านักเรียนที่ใช้ตัวแทนแบบแผนผังได้ดีจะประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในขณะนักเรียนคนที่ใช้ตัวแทนแบบรูปภาพประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้น้อยกว่า ดังนั้นจึงเห็นว่าตัวแทนแต่ละรูปแบบมีระดับความยากง่ายในการนำไปใช้ที่แตกต่างกันและมีความสำคัญต่อการแปล การตีความและการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา

การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอและเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของความคิดทางคณิตศาสตร์ให้มีลักษณะเป็นรูปธรรม เพื่อใช้ในการทำความเข้าใจและการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์(สาวิตรี มูลสุวรรณ, 2557) และ Shulman (1986) ยังได้ระบุว่า การใช้ตัวแทนเป็นส่วนหนึ่งขององค์ความรู้เกี่ยวกับศาสตร์การสอนของครู เขาให้คำจำกัดความของการใช้ตัวแทนว่าประกอบด้วย การเปรียบเทียบ รูปภาพ ตัวอย่าง คำอธิบายและการสาธิต กล่าวคือ วิธีการใช้ตัวแทนและการสร้างหัวข้อที่ทำให้เป็นที่เข้าใจได้แก่ผู้อื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ Ball, Thames, and Phelps (2008) ยังเน้นด้วยว่า การใช้ตัวแทนเป็นส่วนหนึ่งขององค์ความรู้ของหัวข้อที่พิเศษของคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นเอกลักษณ์ในการสอน องค์ความรู้ที่พิเศษนี้ประกอบด้วยการเลือกการใช้ตัวแทนให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์เฉพาะ การระบุได้ว่ามีอะไรบ้างที่จะต้องถูกใช้ในการใช้ตัวแทนที่มีความเฉพาะเจาะจง และการเชื่อมโยงการใช้ตัวแทนเข้ากับแนวคิดที่ซ่อนอยู่และการใช้ตัวแทนอื่น ๆ ครูมีความจำเป็นที่จะต้องมีความสามารถในการดึงการใช้ตัวแทนที่หลากหลายมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพราะว่าไม่มีการใช้ตัวแทนรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งเท่านั้นที่จะมีประสิทธิภาพสูงสุด สอดคล้องกับ Fennema & Franke (1992 cite in Harries & Barmby,

2011) ที่กล่าวไว้ว่า“วิชาคณิตศาสตร์นั้นประกอบด้วยชุดของนามธรรมที่เกี่ยวข้องกันขนาดใหญ่ และหากครูไม่ทราบว่า จะแปลนามธรรมเหล่านั้นให้กลายเป็นรูปแบบที่ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับความรู้เดิมของพวกเขาได้อย่างไร พวกเขาก็จะไม่สามารถเรียนรู้ด้วยความเข้าใจได้”

นอกจากการใช้ตัวแทนจะมีความสำคัญต่อครูแล้ว การใช้ตัวแทนยังมีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เป้าหมายทางการศึกษาที่สำคัญหนึ่งคือ เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้รูปแบบต่าง ๆ ของการใช้ตัวแทนในการสื่อสารกับผู้อื่น (Greeno & Hall, 1997) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง บทบาทของการใช้ตัวแทนที่ใช้ในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์แบบนามธรรมให้กลายเป็นประสบการณ์ที่สามารถจับต้องได้ของนักเรียน และการใช้ตัวแทนยังสนับสนุนความจำที่ใช้งานอยู่ของนักเรียน (Paivio, 1969) โดยยกตัวอย่างผ่านองค์ประกอบของกำจัดการคำนวณที่ให้มาไปสู่การใช้ตัวแทนภายนอก (Ainsworth, 2006) การใช้ตัวแทนสามารถที่จะถูกออกแบบให้แปลความหมายและเน้นคุณสมบัติเฉพาะบางอย่างของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Kaput, 2002) นอกจากนี้การใช้ตัวแทนที่หลากหลายมีบทบาทที่สำคัญในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน กล่าวได้ว่าการใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจและใช้ในการสื่อสารข้อมูลและแสดงความเข้าใจ ในการพิจารณาบทบาทของการใช้ตัวแทนภายในนั้นจะใช้ความแตกต่างระหว่างการใช้ตัวแทนภายในกับการใช้ตัวแทนภายนอก หรือ “โครงสร้างทางจิตใจ” และ “ระบบสัญลักษณ์” ตามลำดับ ซึ่งถูกอ้างอิงโดย Kaput (2002) การเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นตั้งอยู่บนพื้นฐานของการใช้ตัวแทนภายในของมโนทัศน์นั้น ซึ่งได้รับอิทธิผลมาจากการใช้ตัวแทนภายนอกของมโนทัศน์นั้นที่ได้แสดงให้กับนักเรียน Wood (1999 cite in Harries & Barmby, 2011) กล่าวว่าการเข้าใจมโนทัศน์นั้นตั้งอยู่บนระบบอันหลากหลายของสัญลักษณ์หรือการใช้ตัวแทนสอดคล้องกับ Lesh and Landau (1983) ยังให้คำจำกัดความของการที่นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถที่จะแปลหรือเปลี่ยนระหว่างรูปแบบการใช้ตัวแทนได้หรือไม่

Hiebert and Carpenter (1992) ได้ให้คำจำกัดความของการเข้าใจคณิตศาสตร์ว่าเป็นเครือข่ายของการใช้ตัวแทนภายใน โดยจะมีความเชื่อมโยงที่หนาแน่นขึ้นเมื่อมีความเข้าใจมากขึ้นสอดคล้องกับ Goldin and Shteingold (2001) ที่กล่าวว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์นั้นไม่สามารถเกิดความเข้าใจขึ้นได้เดี่ยว ๆ ต้องอาศัยระบบที่ใหญ่ขึ้นในกาสร้างความหมายและข้อตกลงที่ถูกสร้างขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างระบบการใช้ตัวแทนภายในกับระบบการใช้ตัวแทนภายนอก โดยกล่าวว่าระบบภายในประกอบด้วยความหมายที่กำหนดให้กับมโนทัศน์ การ

พัฒนาความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างและความเชื่อมโยงระหว่างการใช้ตัวแทนในรูปแบบที่แตกต่างกัน ระบบภายนอกนั้นมีตั้งแต่การใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดให้ไปจนถึงสิ่งแวดล้อมในการเรียนรู้ในรูปแบบที่ลงมือทำเองหรือรูปแบบที่พึ่งพาเทคโนโลยี (Thompson & Chappell, 2007)

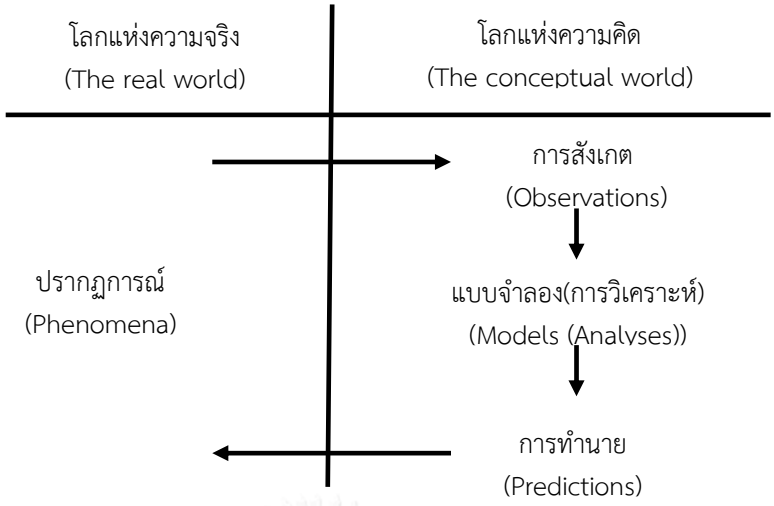
โครงสร้างการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจนนัก แต่คนทั่วไปกล่าวว่าการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต้องการสองสิ่ง คือ การตีความโจทย์ (Interpretation) และการวิเคราะห์โจทย์ (Analysis) ซึ่งทั้งสองสิ่งนี้อาจจะมีขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอนก็ได้ แต่ต้องสามารถระบุได้ว่าสิ่งใดเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหาบางโจทย์อาจจะมีทั้งข้อมูลที่เกี่ยวข้องและข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง (เพื่อเบนความสนใจไปทางอื่น) โดย Mayer (1985 cite in Kingsdorf & Krawec, 2014) ได้เสนอแนวทางการแบ่งระยะของการแก้โจทย์ปัญหาไว้เป็น 4 ระยะ ดังนี้ 1. ระยะการแปลโจทย์ (Translation phase) 2. ระยะการบูรณาการ (Integration phase) 3. ระยะการวางแผน (Planning phase) 4. ระยะการดำเนินการ (Execution phase)

จากผลของงานวิจัยข้างต้นพบว่าระยะที่เป็นอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนไทยเริ่มต้นตั้งแต่ระยะที่ 1 ที่นักเรียนไม่สามารถแปลโจทย์ได้ ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจในสิ่งที่โจทย์ถามหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ดังนั้นจึงไม่สามารถเข้าสู่ระยะที่ 2 ที่เป็นการบูรณาการองค์ความรู้ มโนทัศน์และทักษะกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มี เพื่อเลือกใช้ยุทธวิธีในการดำเนินการได้ และไม่สามารถระบุขั้นตอนวางแผนวิธีการดำเนินการที่เลือกไว้จากขั้นตอนที่ 2 ไปสู่ระยะที่ 3 ได้ และท้ายที่สุดนักเรียนก็ไม่สามารถลงมือแก้ปัญหาได้จริงในระยะที่ 4 ทำให้นักเรียนไม่สามารถดำเนินการตั้งแต่ระยะที่ 1 ถึงระยะที่ 4 ได้อย่างลุล่วงสมบูรณ์ ในที่สุดนักเรียนจึงไม่ประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา ซึ่งจากระยะที่ 1 และระยะที่ 2 เป็นระยะที่มีความสำคัญมาก เพราะนอกจากจะเป็นระยะเริ่มต้นแล้วยังประกอบด้วยการแปลโจทย์และการพิจารณาเลือกใช้วิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ หากเกิดอุปสรรคขึ้นในระยะนี้ก็จะทำให้นักเรียนดำเนินการต่อเนื่องไปยังระยะอื่นไม่ได้ ดังนั้นเราจึงควรให้ความสนใจในการพัฒนากระบวนการเรียนการเรียนที่ส่งเสริมความเข้าใจของนักเรียนในการแปลจากโจทย์ปัญหาไปสู่ประโยคสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เพื่อนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จได้อย่างสมบูรณ์ สอดคล้องกับงานวิจัยของ (อภิชญา ลือชัย, 2555) ที่ได้วิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Mayer (1985 cite in Kingsdorf & Krawec, 2014) ข้างต้น ของกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน เขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 39 จังหวัดอุตรดิตถ์ พบว่า นักเรียนใช้ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์มากที่สุด รองลงมาคือ

ทักษะการวางแผนการแก้ปัญหา และใช้ทักษะการดำเนินการตามแผนน้อยที่สุด ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่นักเรียนใช้มากที่สุดในการแก้โจทย์ปัญหา และยังเป็นจุดเริ่มต้นที่มีความสำคัญมากในการแก้โจทย์ปัญหาอีกด้วย เพราะการแปลโจทย์จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจโจทย์ปัญหาซึ่งอาศัยการทำงานของตัวแทนในรูปแบบที่แตกต่างกันในมโนทัศน์เดียวกัน

Barmby, Harries, Higgins, and Suggate (2007) ได้เสนอว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จะมีพื้นฐานมาจากการใช้ตัวแทนภายในจิตใจ (มโนทัศน์ รูปภาพหรือขั้นตอนกระบวนการ) คำสอน และการประเมินผล แต่สิ่งที่เราใช้จริงมักจะเป็นการใช้ตัวแทนภายนอก (ภาษาพูด สัญลักษณ์ที่เขียน รูปภาพ หรือวัตถุทางกายภาพ) ซึ่งตัวแทนเหล่านี้เราใช้สื่อสารทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจที่ซับซ้อนที่เกิดจากความเชื่อมโยงระหว่างการใช้ตัวแทนเหล่านี้ประกอบขึ้นเป็นระบบการใช้ตัวแทน หรือรูปแบบการใช้ตัวแทน (Representation mode) ซึ่งสถานการณ์โลกแห่งความจริงในการวิเคราะห์การแก้โจทย์ปัญหาเชิงประยุกต์ซึ่งที่กล่าวมาทั้งหมดนั้นเป็นแบบระบบการใช้ตัวแทนภายนอก (External representation) ส่วนระบบการใช้ตัวแทนภายใน (Internal representation) จะหมายถึงความสัมพันธ์ทางสัญลักษณ์ระหว่างสองระบบการใช้ตัวแทนใด ๆ ดังนั้นการกระบวนการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรส่งเสริมยุทธวิธีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพราะเป็นพื้นฐานของการเข้าใจและนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหาได้

Dym, Ivey, and Stewart (1980) กล่าวว่า "โลกแห่งความจริง" และ "โลกแห่งความคิด" มีความเกี่ยวข้องกันดังนี้ โลกภายนอกนั้นเป็นที่เราเรียกว่าความจริง จากการสังเกตเห็นปรากฏการณ์และพฤติกรรมต่าง ๆ จะเห็นว่า ความจริงนั้นการผลิตสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากโลกแห่งความจริงนั้นมาจากโลกแห่งความคิด ซึ่งโลกของความคิดเป็นโลกที่เกิดขึ้นในจิตใจของเราและพยายามจะทำความเข้าใจโลกภายนอกซึ่งเป็นโลกแห่งความจริงให้ได้มากที่สุด โดยมีวิธีการ 3 ขั้นตอน คือ การสังเกต การสร้างแบบจำลองและการคาดการณ์ ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 กระบวนการสร้างแบบจำลอง (Modeling Process)
(Blum, 1996 cite in Maaβ, 2006)

จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าการจัดการเรียนการสอนที่ใช้แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นมีความเกี่ยวข้องกับเฉพาะกับการแก้ปัญหาในชีวิตจริงหรือปัญหาในรูปโจทย์ปัญหาในห้องเรียน การสร้างแบบจำลองเป็นระบบที่รวมถึง องค์ประกอบ ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ การดำเนินการที่บรรยายถึงการมีปฏิสัมพันธ์ขององค์ประกอบนั้น และแบบรูปหรือกฎที่จะประยุกต์ใช้แบบจำลองนั้น โดยแบบจำลองมีวัตถุประสงค์เพื่อพรรณนาลักษณะ หรือเพื่อแสดงความคิดเกี่ยวกับ หรือเพื่อทำความเข้าใจ หรือเพื่ออธิบาย เพื่อหรือทำนายอนาคตของระบบเพียงบางส่วนที่เลือกหรือที่สนใจจากโลกภายนอก (Lesh et al., 2000 cite in Larson et al., 2010) โดยเริ่มต้นจากโลกแห่งความจริงไปยังโลกแห่งความคิดและย้อนกลับจากโลกแห่งความคิดกลับมายังโลกแห่งความจริง ดังนี้ นักเรียนจะค่อย ๆ ลดความซับซ้อนของโครงสร้างและสิ่งที่เป็นอุดมคติของปัญหาในโลกแห่งความจริงให้ลดน้อยลง เพื่อให้ได้มาซึ่งแบบจำลองของโลกแห่งความจริง หลังจากนั้นจึงจะค่อยเริ่มเชื่อโยงจากแบบจำลองในโลกแห่งความจริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยนักเรียนต้องใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารในขั้นตอนนี้โดยผ่านขั้นตอนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematizing) ของตัวนักเรียนเอง จากนั้นภายใต้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ของปัญหา และที่ขาดไปไม่ได้คือการตรวจสอบความสอดคล้องของผลลัพธ์ที่ได้ของปัญหากับสถานการณ์จริง ซึ่งจะต้องมีการตีความและสื่อสาร ซึ่งในขั้นตอนนี้เองที่นักเรียนก็ต้องทำความเข้าใจและแปลสิ่งที่ได้จากโลกแห่งความคิดกลับไปยังโลกแห่งความจริงอีกครั้งหนึ่งเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและคุณภาพของแบบจำลองที่สร้างขึ้นนั้น สอดคล้องกับ Janvier

(1987) ที่กล่าวว่าความสามารถในการแปลจะถูกพัฒนาได้ดีที่สุดถ้านักเรียนถูกฝึกให้แปลจากตัวตั้งต้นเป็นตัวเป้าหมายและจากตัวเป้าหมายเป็นตัวตั้งต้นอย่างสม่ำเสมอ

English and Lesh (2003) กล่าวว่าการสอนคณิตศาสตร์โดยครูนั้นเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยผ่านกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อดำเนินการแก้ปัญหานั้นจะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจปัญหาและสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าการสอนแก้ปัญหาจากโจทย์ปัญหาแบบปกติ ซึ่งสอดคล้องกับ Blum and Niss (1991) ที่กล่าวว่าการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้กระบวนการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นปัญหาที่น่าสนใจ ไม่ใช่ปัญหาซ้ำซาก และสามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นมีส่วนเกี่ยวข้องและฝึกฝนการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์และการแก้โจทย์ปัญหา

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) ได้กล่าวว่าว่า “ความเท่าเทียมกันมิได้หมายความว่านักเรียนทุกคนจะต้องได้รับคำสอนที่เหมือนกัน แต่หมายถึงจะต้องมีการช่วยเหลือที่เหมาะสมเพื่อที่จะให้นักเรียนทุกคนได้เข้าถึงความสำเร็จ” (Brodesky, Caroline, Elizabeth, & Lauren, 2002) เนื่องจากนักเรียนแต่ละคนมีความแตกต่างระหว่างบริบทของแต่ละบุคคลและมีประสบการณ์เดิมที่ส่งผลขอบเขตการเรียนรู้ที่จำกัด ทำให้ความแตกต่างเหล่านี้มีผลต่อความยากง่ายต่อการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา การตีความ การแปล การสื่อสารความคิดออกมาเป็นตัวแทนคณิตศาสตร์และท้ายที่สุดยังต่อเนื่องไปถึงการแก้ปัญหาอีกด้วย ดังนั้นนักเรียนจึงควรได้รับการช่วยเหลือจากครูหรือเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่า นักเรียนก็จะสามารถประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ของตนเองได้ในที่สุด ฉะนั้นวิธีหนึ่งที่จะสามารถนำมาพัฒนาความสามารถของนักเรียนเป็นแนวคิดในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนในกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในครั้งนี้คือ การจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding Approach)(โศจิวัจน์ เสริฐศรี, 2553)

การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นคำที่อยู่ในโลกของการศึกษาที่มีอยู่ในทฤษฎีของการเรียนรู้คอนสตรัคติวิสแนวใหม่ (Modern constructivist) การเสริมต่อการเรียนรู้จะมีบทบาทสำคัญมากในการพัฒนาเรียนรู้ของนักเรียน ทุกครั้งที่นักเรียนมาสู่ขั้นตอนการพัฒนาการเรียนรู้ในบางขั้นตอนซึ่งมีตัวชี้วัดความสำเร็จของการทำกิจกรรมนั้น ในบางสถานการณ์นักเรียนบางคนจะมีความต้องการการเสริมต่อการเรียนรู้ Vygotsky (Nur, 2004 cite in Tedy, 2011) แสดงให้เห็นว่าการเสริมต่อการเรียนรู้เป็นมโนทัศน์ของการเรียนรู้ที่มีความช่วยเหลือ (Assisted learning)ในรูปแบบของสื่อการ

เรียนรู้ การเสริมต่อการเรียนรู้ในบทบาทมุมมองการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในห้องเรียนมีปฏิสัมพันธ์ได้อย่างหลากหลายรูปแบบ เช่น ระหว่างครูกับนักเรียน ระหว่างนักเรียนกับนักเรียน ระหว่างนักเรียนกับสื่อการสอน โดยวัสดุสื่อที่ใช้สำหรับนักเรียนนั้นต้องมีพื้นฐานอยู่บนประสบการณ์เดิมของนักเรียนที่นักเรียนจะสามารถพัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และกลยุทธ์ผ่านสื่อการเรียนรู้ที่ใช้เพื่อตอบสนองต่อปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับได้

การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นสิ่งที่จัดหามาเพื่อช่วยเหลือในบางสิ่งในระหว่างช่วงแรกของการเรียนรู้ (Slavin & Davis, 2006) ครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถรอบรู้ในมโนทัศน์นั้น ๆ หรือสามารถปฏิบัติภาระงานทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับมอบหมายให้เสร็จสิ้นได้ ซึ่งเป็นภาระงานเดิมของนักเรียนคนดังกล่าวที่ไม่สามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง โดยครูจะค่อย ๆ ให้อิสระแก่นักเรียนในการสำรวจความสามารถของตนเองและเริ่มต้นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Tedy, 2011) ครูจะลดความช่วยเหลือและให้โอกาสนักเรียนที่จะรับผิดชอบมากขึ้น เมื่อนักเรียนสามารถปฏิบัติสิ่งที่ต้องการเรียนรู้นั้นได้ด้วยตนเองแล้ว Education Development Center (2007) ยังกล่าวว่ามีหลายยุทธวิธีที่การเสริมต่อการเรียนรู้จะทำให้นักเรียนสนใจเนื้อหาสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น การกำจัดงานที่ไม่จำเป็นและทำให้เสียเวลาออกไปเช่นการให้นักเรียนวาดตารางด้วยตนเอง เพื่อนักเรียนจะได้นำเวลาเหล่านั้นมาให้ความสนใจกับความคิดระดับสูงมากขึ้นและได้มีโอกาสแสดงออกถึงความสามารถในการเข้าใจมโนทัศน์ แต่ในที่สุดแล้วการเสริมต่อการเรียนรู้ก็มักจะจำเป็นต้องนำออกไปเพื่อให้นักเรียนจะได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง ส่วนการที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใดนั้นจำเป็นต้องมีการวางแผนล่วงหน้า เช่น จะสอนให้เด็กหัดขี่จักรยานในช่วงแรกต้องมีล้อเสริมไม่ให้ล้มเพื่อให้เด็กสามารถมุ่งความสนใจต่อวิธีการปั่นจักรยานโดยไม่จำเป็นจะต้องกังวลต่อการล้ม หลังจากนั้นเมื่อเด็กเรียนรู้การปั่นแล้วจึงจะสามารถนำล้อเสริมออกได้ แต่ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับเด็กแต่ละคนเพราะบางคนอาจต้องการให้การช่วยเหลือสนับสนุนตลอดเวลาแต่สำหรับบางคนก็ไม่จำเป็น

Ge and Land (2003) กล่าวว่าในช่วงทศวรรษที่ผ่านมานักวิจัยได้สืบเสาะหน้าที่ของการเสริมต่อการเรียนรู้หรือตัวสนับสนุนชั่วคราว (Temporary support) เพื่อช่วยเหลือความเข้าใจของนักเรียนให้ให้สะท้อนคิดถึงงานที่ซับซ้อนได้ การศึกษาของงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า การเสริมต่อการเรียนรู้ประกอบด้วย การสร้างแบบจำลองและการอภิปรายเพื่อเพิ่มการสังเกตการความเข้าใจและการใช้ยุทธวิธี และพบว่าสามารถจะเพิ่มการองค์ความรู้ทางด้านพุทธิพิสัยของนักเรียนได้ โดยการกระตุ้นให้นักเรียนใช้โครงสร้างทางปัญญา ดึงความรู้และเพิ่มความเข้าใช้และใช้การรู้คิดของตนเอง

(Metacognition) โดยการให้นักเรียนได้คิดออกมาอย่างเปิดเผยและแนะนำให้พวกเขาติดตามความเข้าใจของตนเอง จากแบบจำลองการแก้ปัญหาที่มีโครงสร้างที่ไม่ถูกต้อง(Ill-structure) ที่ประกอบด้วย การใช้ตัวแทนปัญหา(Problem representation) การสร้างผลลัพธ์(Solution generation) และการประเมินผล (Evaluation) ซึ่งจำเป็นต้องใช้ทั้งความรู้ด้านพุทธิพิสัย (Cognition) และ การรู้คิดของตนเอง(Metacognition) เป็นยุทธวิธีในการสนับสนุนกิจกรรมการแก้ปัญหาให้ดีขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นงานที่บุคคลนั้น ๆ เผชิญอยู่และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้และความสามารถทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ไม่ว่าปัญหานั้นจะเกิดขึ้นในชีวิตจริงหรือเป็นสถานการณ์จำลองในห้องเรียนในรูปแบบของโจทย์ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นในการดำรงชีวิตและเป็นเป้าหมายสำคัญถึงของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ นอกจากนี้การแก้ปัญหายังเป็นสมรรถนะและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และจากการค้นคว้าจากงานวิจัยต่าง ๆ พบว่า สิ่งหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้นั้นคือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพราะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการที่นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิดประกอบกับความรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการเลือกตัวแทนของข้อมูล วิเคราะห์ความสัมพันธ์สถานการณ์ปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาคำตอบและการทำงานร่วมกันของระบบของแบบจำลอง พร้อมทั้งตรวจสอบผลลัพธ์กับสภาพกับโลกแห่งความเป็นจริงว่าถูกต้องสอดคล้องกันหรือไม่ และในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นนั้น นักเรียนก็ยังคงต้องใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มาใช้เป็นตัวแทนสถานการณ์หรือบริบทในโลกแห่งในการสื่อสารกลับไปกลับมาระหว่างโลกแห่งความคิดให้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปด้วยเสมอ ดังนั้นในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาใด ๆ นั้นนักเรียนก็จะได้ฝึกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์และส่งเสริมการแก้ปัญหาของนักเรียนไปด้วยพร้อมกัน

นอกจากนี้จากงานวิจัยที่มาก่อนหน้ายังพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้การตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนนั้นมีระดับที่แตกต่างกันดังนั้นหากจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยนำแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้จะสามารถเสริมสร้างศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนตามสภาพจริงและน่าจะเหมาะสมที่จะนำมาใช้กับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการใช้สติปัญญาและมีลักษณะเป็นนามธรรมทำให้

นักเรียนเกิดการเรียนรู้และสร้างองค์ความรู้อย่างมีความหมายโดยเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ให้นักเรียนมีบทบาทในการคิดและตัดสินใจในการแก้ปัญหา โดยเปิดโอกาสให้ครู เพื่อนร่วมชั้นเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่มีความรู้ทำหน้าที่เป็นผู้เสริมต่อความคิด เพื่อให้นักเรียนสามารถพัฒนาตนเองไปตามศักยภาพของตนเองที่ควรจะเป็น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจทำการศึกษาการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหากับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยผลการวิจัยที่ได้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และครูคณิตศาสตร์ที่จะนำกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองและแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

คำถามการวิจัย

1. กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีหลักการและขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนอย่างไร

2. กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นได้หรือไม่ อย่างไร

วัตถุประสงค์การวิจัย

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น มีวัตถุประสงค์การวิจัย ดังนี้

1. เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

2. เพื่อศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ดังนี้

2.1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ กับนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หลังการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.2 เปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ กับนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หลังการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.3 ศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

สมมติฐานการวิจัย

Llinares and Roig (2008) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างองค์ความรู้ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาและการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหา โดยในการวิจัยครั้งนี้จะเน้นที่ระดับมัธยมศึกษาว่าจะสามารถสร้างและใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือของมโนทัศน์ในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างไร ซึ่งจะมีระดับของการพัฒนาการสร้างและใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 4 ระดับ และมีข้อสรุปว่านักเรียนที่ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีมุมมองการเรียนรู้เชิงสังคมและวัฒนธรรม เนื่องจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเกี่ยวข้องกับบริบทในโลกแห่งความจริง นอกจากนี้ Oswalt (2012) ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในห้องเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา พบว่าการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นตอนซึ่งนักเรียนได้ประยุกต์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้จากในชั้นเรียนกับสถานการณ์ใหม่ที่ไม่คุ้นเคย การสร้างแบบจำลอง คือ ปัญหาที่เต็มไปด้วยคณิตศาสตร์ที่นักเรียนมีส่วนร่วมการคิดทางคณิตศาสตร์ การวาดภาพประกอบจากประสบการณ์เดิมและสนับสนุนความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมอยู่ การสร้างแบบจำลองทำให้นักเรียนต้องกำหนดความหมายให้กับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และขยายไปสู่มโนทัศน์อื่นที่มากกว่าการเรียนรู้โดยการท่องจำ เพื่อที่จะให้นักเรียนประสบความสำเร็จในห้องเรียนโดยใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนต้องมีวิธีการทำงานร่วมกันกับนักเรียนคนอื่น ๆ อดทนผ่านปัญหาที่ท้าทายและตระหนักถึงความคิดของตนเอง

นอกจากนี้ Eseryel, Ifenthaler, and Ge (2011) ที่กล่าวว่าแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้โดยการสร้างแบบจำลองทำให้นักเรียนมีการปรับปรุงในความซับซ้อนการแก้ปัญหาของพวกเขาอย่างมีนัยสำคัญ และ Holton and Clarke (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ของการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งประกอบไปด้วย การหน้าที่ของการเสริมต่อการเรียนรู้ ขอบเขตของการเสริมต่อการเรียนรู้ การระบุการเสริมต่อการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลกับอภิปัญญาและการระบุขอบเขตกิจกรรมของการเสริมต่อการเรียนรู้ จากตัวอย่างงานวิจัยที่หลากหลาย การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นการดึงทฤษฎีการเรียนรู้ต่าง ๆ เข้าด้วยกันด้วยการนำอภิปัญญาเข้าไปในกรอบแนวคิดที่มาจาก กิจกรรมทางสังคมของการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยมีสะพานเชื่อมระหว่างการสนับสนุนการสอนของครูและการควบคุมการเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน ซึ่งงานวิจัยนี้ตั้งใจจะเชื่อมโยงระหว่างจุดประสงค์หลักของการสอนเข้า

กับการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อจะเป็นแนวทางการเรียนรู้ระยะยาว เพื่อที่ในอนาคตนักเรียนจะสามารถจะเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง สอดคล้องกับ Hwang, Chen, Dung, and Yang (2007) ได้ทบทวนและวิเคราะห์งานวิจัยเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะออกแบบ SET ซึ่งเป็นกรอบแนวคิดในการออกแบบการเสริมต่อการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ที่เรียนในบริบทการเรียนแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จุดประสงค์เพื่อสนับสนุนให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาได้สำเร็จ ซึ่ง SET เป็นแนวทางการสอนอย่างหนึ่งที่สนับสนุนการแก้ปัญหาของนักเรียนรวมถึงเป็นกระบวนการย่อยในการแก้ปัญหา แต่อย่างไรก็ตามในบริบทนี้ไม่ได้กล่าวว่า SET จะประสบความสำเร็จอย่างเดียว ยังต้องขึ้นเกี่ยวกับการเสริมต่อการเรียนรู้อีกด้วย

Steimann (2000) ได้ศึกษาเกี่ยวกับบทบาทของการเป็นตัวแทนในเชิงวัตถุและการสร้างแบบจำลองความคิด เป็นการทำงานคู่กันของวัตถุและความสัมพันธ์เป็นสิ่งที่ถูกฝังลึกในความคิดของเรา และ Sajadi, Amiripour, and Rostamy-Malkhalifeh (2013) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการตรวจสอบความสามารถการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ภายใต้มุมมองการเป็นตัวแทนอย่างมีประสิทธิภาพ การแก้โจทย์ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนสำหรับนักเรียน การจัดการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพจำเป็นต้องมีกลยุทธ์ที่มีประสิทธิภาพ หนึ่งในกลยุทธ์คือการใช้ตัวแทน นักเรียนบางคนประยุกต์ใช้คำสำคัญหรือตัวเลขเท่านั้น แต่เมื่อพวกเขาต้องเผชิญหน้ากับโจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนแล้วพวกเขาก็ไม่สามารถประยุกต์ใช้คำสำคัญเหล่านั้นได้ ดังนั้นครูจะต้องสอนกลยุทธ์ที่มีประสิทธิภาพเช่นการเป็นตัวแทน ในงานวิจัยนี้จะพยายามไม่ว่าจะใช้เป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ ผลการวิจัยพบว่ามีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญระหว่างการเป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพในชั้นประถมศึกษาปีที่สองนักเรียนได้ใช้ของการเป็นตัวแทน, มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตสูงและในทางตรงข้ามนักเรียนที่ไม่ได้ใช้ตัวแทนไม่ด่าเฉลี่ยเลขคณิตที่สูง ดังนั้นจึงมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญและโดยตรงระหว่างการเป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพและปัญหาคำที่มีประสิทธิภาพสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา

จากงานวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยดังนี้

1. นักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

2. นักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

3. นักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีพัฒนาการของการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น

ขอบเขตการวิจัย

1. กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มเป้าหมาย คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขตกรุงเทพมหานคร

2. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแปรที่ใช้ในการทดลองเพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย

2.1 ตัวแปรจัดกระทำ คือ กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.2 ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

3. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียวและเรื่องการแปรผัน จำนวน 24 คาบ

4. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองเพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน คือ12 สัปดาห์ รวม 24 ชั่วโมง ในภาคเรียนที่ 2 ปี การศึกษา 2559

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำลองทางความคิดจากปัญหาคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสาร เพื่อนำเสนอไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วตรวจสอบยืนยันผลลัพธ์ที่ได้กลับไปยังสถานการณ์หรือบริบทเดิมในโลกแห่งความเป็นจริงและประเมินคุณภาพของแบบจำลองเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาอื่น ๆ ต่อไป

แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ หมายถึง การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

กระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น หมายถึง กระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีจุดเน้นในการจำลองทางความคิดจาการปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แล้วดำเนินการหาคำตอบของปัญหาจากแบบจำลองคณิตศาสตร์นั้น โดยใช้กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และให้ความสำคัญในเรื่องการปฏิสัมพันธ์ทางสังคมในการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดเดิมของนักเรียนที่มีอยู่ ให้เหมาะสมกับศักยภาพและระดับพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน โดยค่อย ๆ ลดความช่วยเหลือลงเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาโดยใช้แบบจำลองด้วยตนเองได้อย่างหลากหลาย โดยมีหลักการของกระบวนการเรียนการสอน 5 ประการดังนี้

หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ทำให้เกิดความต้องการทำความเข้าใจหรือค้นหาคำตอบของปัญหา และการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสำรวจความรู้พื้นฐานเดิมเดียวกับปัญหาและเสริมต่อข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับบริบทของปัญหา

หลักการที่ 2 หลักการใช้การกำหนดเป้าหมายเพื่อแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง (The real world) ไปยังโลกแห่งความคิด (The conceptual world)

การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการเสริมต่อความรู้ความสามารถพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อกำหนดเป้าหมายและลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน

หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อได้มาซึ่งผลลัพธ์ในโลกแห่งความจริง

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้และเสริมต่อการเรียนรู้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ มีการประเมินข้อมูลป้อนกลับของนักเรียนเพื่อที่จะค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลง และให้นักเรียนสามารถฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง สรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงอ้างอิงข้อสรุปของผลลัพธ์นั้นกลับไปยังบริบทในโลกแห่งความจริง

หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิดเพื่อประเมินการทำงานของตนเอง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง การประเมินข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ให้นักเรียนมองเห็นแง่มุมที่หลากหลายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้น

หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย

การประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำนายไปสู่ปัญหาในโลกแห่งความจริงอื่น ๆ ในอนาคต เพื่อให้เกิดการขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

และขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ประกอบด้วย 5 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ

เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง

เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยการร่วมกันอภิปราย พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง

เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียนเพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้โดยการร่วมกันอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด

ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

กระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคู่มือการจัดกิจกรรมสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นนำ

ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการทบทวนพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นต้องใช้ในการเรียน หรือจัดสถานการณ์ หรือใช้ถามคำถามเกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ครูจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ซึ่งส่งเสริมให้นักเรียนเน้นการคิด มีคุณภาพดานความรู และมีทักษะที่จำเปนสำหรับการดำรงชีวิตในสังคมที่มีการเปลี่ยนแปลง และแสวงหาความรูเพื่อพัฒนาตนเองอยางตอเนื่องตลอดชีวิต

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเนื้อหาสาระและความคิดรวบยอดที่ได้รับจากการทำกิจกรรม การสรุปในลักษณะต่าง ๆ เช่น ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปหรือทบทวนสิ่งที่ได้เรียนมาแล้วในคาบ

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาและเชื่อมโยงความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์มาใช้ดำเนินการหาคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล โดยพิจารณาจากกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งมีองค์ประกอบ 4 ประการ ดังนี้ คือ

1) การวิเคราะห์ปัญหา เพื่อทำความเข้าใจต่อความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ให้มา พร้อมทั้งจำแนกประเด็นที่มีสำคัญและจำเป็นของปัญหา

2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา เพื่อใช้ความรู้ ความคิด ทักษะ หลักการทางคณิตศาสตร์ในการวางแผนเลือกใช้กลวิธีในแก้ปัญหา

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ เพื่อลงมือทำตามแผนการที่ได้ระบุไว้จนกระทั่งได้คำตอบ

4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด เพื่อตรวจสอบและยืนยันความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้กับบริบทของโจทย์ปัญหา และทบทวนหรือประเมินกระบวนการที่ผ่านมา

ซึ่งความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในที่นี้สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนถ่ายทอดออกมาในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งอาจมีลักษณะเป็นภาพ กราฟ ตาราง ตัวแปร สัญลักษณ์และข้อความทางคณิตศาสตร์ เพื่อจัดกระทำบันทึกและสื่อสารแสดงออกถึงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในความสัมพันธ์ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ทางสังคมและทางคณิตศาสตร์ โดยมีผลจากประสบการณ์ในการทำความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน และยังเป็นเครื่องมือช่วยขยายความคิดทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ

1. ความสามารถในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

2. ความสามารถในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

ซึ่งความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในที่นี้สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

นักเรียน หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขตกรุงเทพมหานคร

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1. แนวทางสำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องในการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้นมีหลักการ ขั้นตอน บทบาทครู บทบาทนักเรียนชัดเจน สามารถนำไปใช้หรือนำไปประยุกต์ใช้ปรับตามบริบทที่ต้องการได้

2. การวิจัยนี้ได้เสนอความสำคัญและปัญหาของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จึงเป็นการช่วยสร้างความตระหนักแก่ผู้ที่เกี่ยวข้องให้สนใจและส่งเสริมความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

3. กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านอื่น ๆ ของนักเรียน เช่น ความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ ความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการเชื่อมโยง

4. ระบบการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น จะเป็นแนวทางในการวิจัยและพัฒนากระบวนการเรียนการสอนอื่น ๆ ต่อไป

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.2 ประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.3 หลักการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.4 กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.5 สมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.6 การประเมินแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.7 ประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.8 ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

1.9 หลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.1 ความหมายแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.2 หลักการของแนวคิดการเสริมต่อกาเรียนรู้

2.3 หลักการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.4 ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้

3. ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของโจทย์ปัญหา

3.2 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.3 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.4 ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.5 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.6 ธรรมชาติของการแก้ปัญหา

3.7 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.2 ความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.3 รูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.4 แนวทางในการพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.5 ประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

5. กระบวนการเรียนการสอน

5.1 ความหมายของกระบวนการเรียนการสอน

5.2 องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน

5.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6.1 งานวิจัยภายในประเทศที่เกี่ยวข้อง

6.2 งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้อง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1. แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นโครงสร้างความคิดทางคณิตศาสตร์ในการจำลองปรากฏการณ์ต่าง ๆ โดยมีประเด็นที่นำเสนอ 9 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

1.1 ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Dym (2004) กล่าวว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การเป็นตัวแทนที่ย่อส่วนลงมาของบางสิ่งบางอย่าง การเลียนแบบหรือการจำลองเพื่อใช้ในการอธิบายหรือการเปรียบเทียบให้เห็นภาพอะไรบางอย่าง (เช่น แบบจำลองของอะตอม) ที่ไม่สามารถสังเกตได้โดยตรง เป็นระบบของข้อมูลที่ถูกสันนิษฐานขึ้นหรือวินิจฉัยขึ้นโดยเป็นการอธิบายเชิงคณิตศาสตร์ของสิ่งที่มีอยู่จริงหรือสภาพของความสัมพันธ์นั้น ๆ

Swetz and Hartzler (1991) กล่าวว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง โครงสร้างเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งใช้ในการประมาณลักษณะต่าง ๆ ของปรากฏการณ์ธรรมชาติ

NCTM (2000b) อธิบายว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง แบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติที่สำคัญซึ่งถูกเลือกมาขึ้นมาจากคุณสมบัติทั้งหมด โดยเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ของโลกแห่งความจริง โดยใช้เครื่องหมาย สัญลักษณ์ซึ่งเป็นตัวแทนของคุณสมบัติเหล่านั้น การวิเคราะห์และการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบจำลอง ลักษณะพิเศษของสถานการณ์ และการพิจารณาความถูกต้องและข้อจำกัดของแบบจำลองเป็นสิ่งที่นักเรียนควรคำนึงถึงในขณะที่นักเรียนอยู่ในการคิดเกี่ยวกับปัญหานั้น ๆ

Giordano, Weir, and Fox (2003) กล่าวว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การออกแบบและการสร้างสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ สำหรับใช้ในการศึกษากรณีเฉพาะของปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เป็นจริง โดยสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ดังกล่าว รวมถึงกราฟ สัญลักษณ์ สถานการณ์จำลองและการทดลอง

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร (2546) กล่าวว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นคณิตศาสตร์ประยุกต์แขนงหนึ่งที่นำคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆไปประยุกต์ใช้เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาการวางแผนงานหรือการคาดคะเนเหตุการณ์ต่าง ๆ ในอนาคต คำตอบของแบบจำลองจะเชื่อถือได้หรือถูกต้องตามความเป็นจริงมาน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับข้อมูลเบื้องต้นที่รวบรวมได้ ข้อสมมุติฐานที่กำหนดขึ้น การสร้างแบบจำลองที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง การตรวจสอบแบบจำลอง

จากความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบจำลองทางความคิดที่ในการจำลองสถานการณ์ในโลกของความเป็นจริงหรือสถานการณ์สมมติต่าง ๆ ด้วยตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์หรือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์โดยการสร้างความสัมพันธ์ให้สอดคล้องกับสถานการณ์จริง

1.2 ประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร (2546) ได้จำแนกประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ออกตามลักษณะได้ 3 ลักษณะคือ

1. จำแนกตามกาลเวลาซึ่งจำแนกได้เป็นแบบจำลองทางสถิติกับแบบจำลองทางพลวัต (Static and Dynamic) ตัวแบบทางสถิติเป็นแบบจำลองที่ไม่เกี่ยวข้องกับเวลา ส่วนแบบจำลองพลวัต เป็นแบบจำลองที่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง คำตอบของแบบจำลองขึ้นอยู่กับช่วงเวลา

2. จำแนกตามความแน่นอนซึ่งจำแนกได้เป็นแบบจำลองแน่นอนกับแบบจำลองความน่าจะเป็น (Deterministic and Probabilistic) แบบจำลองแน่นอนเป็นแบบจำลองที่มีข้อมูลนำเข้าที่แน่นอนซึ่งทำให้คำตอบของแบบจำลองมีผลที่แน่นอนส่วนแบบจำลองความน่าจะเป็นเป็นแบบจำลองที่ข้อมูลนำเข้าอย่างน้อยหนึ่งตัวอยู่ในรูปตัวแปรสุ่มซึ่งตำตอบของแบบจำลองจะได้ในเชิงการคาดคะเน

3. จำแนกตามความต่อเนื่องซึ่งจำแนกได้เป็นแบบจำลองต่อเนื่องกับแบบจำลองไม่ต่อเนื่อง(Continuous and Discrete) แบบจำลองต่อเนื่องเป็นแบบจำลองที่มีข้อมูลนำเข้าต่อเนื่องตลอดเวลาเช่น การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ ส่วนแบบจำลองไม่ต่อเนื่องเป็นแบบจำลองที่มีข้อมูลนำเข้าไม่ต่อเนื่อง เช่นจำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการของธนาคารจะเปลี่ยนแปลงเมื่อมีลูกค้าเข้าหรือออกจากธนาคารเท่านั้น

ข้อสังเกตการจำแนกประเภทของแบบจำลองตามลักษณะต่าง ๆของแบบจำลองดังที่กล่าวมาแล้วเป็นไปเพื่อการศึกษาเท่านั้นในความเป็นจริงยังมีแบบจำลองที่มีลักษณะผสมผสานในหลายลักษณะในแบบจำลองเดียวกัน

Giordano et al. (2003) ได้จำแนกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 4 ชนิด สองชนิดแรกเป็นแบบจำลองที่มีโครงสร้างที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในรูปของสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม ส่วนอีกสองชนิดเป็นแบบจำลองซึ่งเป็นนามธรรมสามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ของสถานการณ์จริง ได้แก่

1.แบบจำลองที่สร้างขึ้นโดยอาศัยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ภายใต้เงื่อนไขของสถานการณ์จริง

2. แบบจำลองที่ได้จากการเลือกสูตร ฟังก์ชัน หรือสมการต่าง ๆ ที่มีอยู่แล้ว เช่น สมการเส้นตรง สมการกำลังสอง เป็นต้น ที่เหมาะกับสถานการณ์จริง

3.แบบจำลองที่เป็นการทดลอง

4. แบบจำลองที่อยู่ในรูปของสถานการณ์จำลอง

จากประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปนามธรรมและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปรูปธรรม

1.3 หลักการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

Chulalongkorn University

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุหลักการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Dym (2004) กล่าวว่า การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิด เกี่ยวกับแบบรูปและการจัดการแบบรูปเพื่ออธิบายลักษณะของกลไกหรือพฤติกรรมที่สนใจของวัตถุต่าง ๆ ซึ่งมีหลากหลายแนวทางในการอธิบาย เช่นอธิบายเป็นภาษา อธิบายเป็นการวาดรูปหรือการร่างอย่างคร่าว ๆ อธิบายเป็นแบบจำลองทางเชิงกายภาพ (physical models) อธิบายเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์หรือสูตรทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความหลากหลายรูปแบบในการสื่อสารไปพร้อม ๆ กัน การสร้างแบบจำลองของสิ่งประดิษฐ์และปรากฏการณ์ต่าง ๆ ล้วนเป็นสิ่งสำคัญของทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์เองก็ยังมีความต้องการที่จะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์หมายถึง การเป็นตัวแทนในแง่มุมทางด้านคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของกลไกต่าง ๆ ที่มีอยู่จริงและวัตถุต่าง ๆ เราต้องการที่จะรู้วิธีการทำหรือสร้างการเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์หรือแบบจำลอง วิธีการตรวจสอบความถูกต้อง วิธีการใช้และข้อจำกัดจะเกิดขึ้นในสถานการณ์อย่างไรของแต่ละแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยหลักการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เกี่ยวข้องกับสาเหตุที่ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หลักการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Principles of Mathematical Modeling) (Dym, 2004) การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการกระทำที่มีหลักการทั้งที่อยู่เบื้องหลังและวิธีการที่จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ให้ประสบความสำเร็จ หลักการที่ครอบคลุมเป็นอย่างทั่วถึงหรือการถ่ายทอดด้วยคำพูดที่มีหลักการซึ่งเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงเปรียบเสมือนเป็นคำถามที่เกี่ยวกับความตั้งใจ และวัตถุประสงค์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หลักการสำคัญเหล่านี้เกือบทั้งหมดเป็นปรัชญาในธรรมชาติ จะเห็นได้ว่าหลักการคร่าว ๆ จากภาพที่ 2 โดยหลักการการสร้างแบบจำลองเหล่านี้วิธีการที่ถูกอธิบายตามคำถามและคำตอบต่อไปนี้

ทำไม(why): สิ่งที่เราต้องการหา ระบุความต้องการสำหรับแบบจำลอง

สิ่งที่ต้องการเราค้นหา(Find): ที่จะรู้หรือไม่ว่า รายการของข้อมูลที่เรากำลังมองหา

ให้(Given) : สิ่งที่เรารู้ ระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องที่มีอยู่

กำหนดให้ (Assume) : สิ่งที่เราสามารถกำหนดให้ได้ ระบุสถานการณ์ที่นำไปใช้

อย่างไร(How)วิธีการอย่างไรที่เราควรจะดูที่แบบจำลองนี้ ระบุการหลักการใช้หรือควบคุมทางกายภาพ

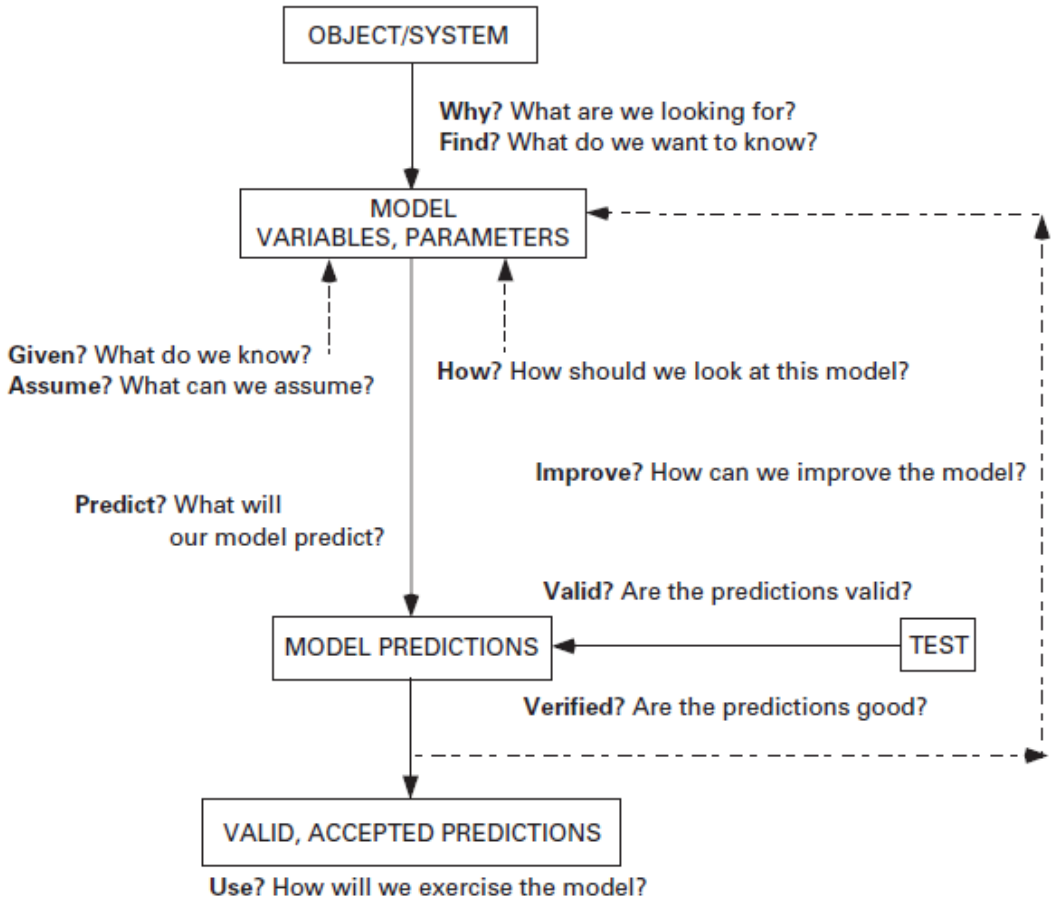
การคาดการณ์(Predict) : สิ่งใดที่เราจะคาดการณ์ทำนายแบบจำลองของเราระบุสมการที่จะนำมาใช้ในการคำนวณและคำตอบที่จะเป็นผลลัพธ์

ความถูกต้อง (Valid) : การคาดการณ์ที่ถูกต้อง ระบุการทดสอบที่สามารถทำให้การตรวจสอบแบบจำลอง เช่น มีความสอดคล้องกับหลักการและสมมติฐานหรือไม่

การตรวจสอบ(Verified): การคาดการณ์ที่ดี ระบุการทดสอบที่สามารถทำในการตรวจสอบแบบจำลอง เช่น ประโยชน์ในแง่ของเหตุผลเบื้องต้นที่แบบจำลองควรจะได้รับ

การปรับปรุง(Improve) : เราสามารถปรับปรุงแบบจำลองได้หรือไม่ ระบุค่าพารามิเตอร์ที่ยังไม่ทราบค่าอย่างเพียงพอ ตัวแปรที่ควรที่เกิดขึ้นทั้งหมด สมมติฐานหรือข้อจำกัดที่เกิดขึ้น การทดลองใช้ซึ่งมีความสัมพันธ์เป็นวงจร เรียกว่า “แบบจำลอง-การับรอง-การตรวจสอบ-การปรับปรุง-การทำนาย”

ใช้(Use) : เราจะฝึกใช้แบบจำลองอย่างไร จะทำอะไรกับแบบจำลอง



ภาพที่ 2 มุมมองลำดับแรกของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงให้เห็นว่าการตั้งคำถามอย่างไรในการถามเกี่ยวกับหลักการของการสร้างแบบจำลองที่มีความสัมพันธ์ไปยังการพัฒนาของแบบจำลอง
(Carson and Cobelli, 2001Dym, 2004)

จากหลักการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า หลักการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ การจำลองทางความคิดจากปัญหาคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสารเพื่อการนำเสนอไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วตรวจสอบยืนยันผลลัพธ์ที่ได้กลับไปยังสถานการณ์หรือบริบทเดิมในโลกแห่งความเป็นจริงและประเมินคุณภาพของแบบจำลองเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาอื่น ๆ ต่อไป

1.4 กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

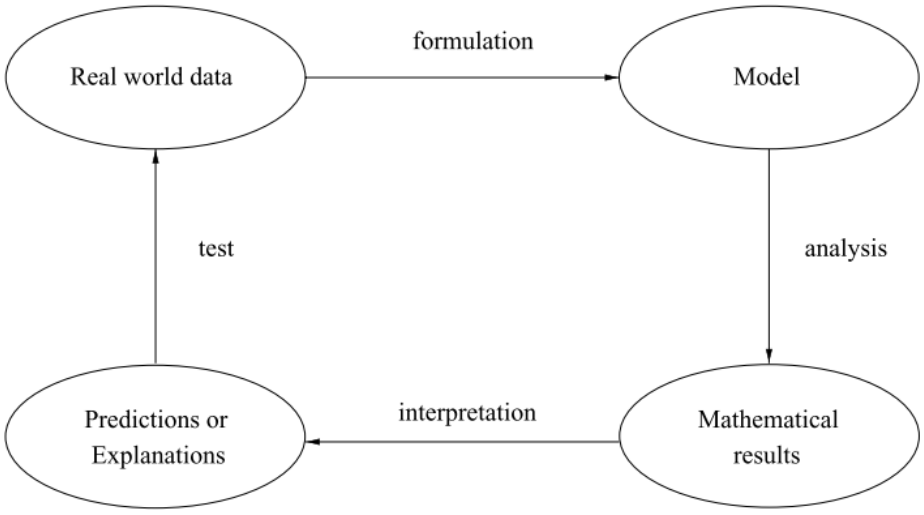
จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Dobson (2003) เสนอแผนผังกระบวนการสร้างแบบจำลองดังภาพที่ 3 เป็นวงหรือกระบวนการที่ทำซ้ำ โดยมีจุดเริ่มต้นจากด้านบนซ้าย คือ ข้อมูลในโลกแห่งความจริง (Real world data) ซึ่งอาจ เป็นตัวแทนของการวัดเชิงปริมาณของระบบที่สนใจองค์ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการทำงานของระบบนั้น ๆ หรือทั้งสองอย่างในกรณีใด ๆ ที่เราต้องการข้อมูลบางอย่าง ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น มักจะเป็นข้อมูลเพิ่มเติมที่ดีกว่า และจากข้อมูลที่เราได้ นั้นจะดำเนินการในการกำหนดหรือสร้างแบบจำลองต่อไป สิ่งที่จำเป็นในการสร้างแบบจำลองคือ ความชัดเจนของการทำงานของเป้าหมายของแบบจำลอง ปัจจัยที่เป็นส่วนประกอบของระบบและความสัมพันธ์ภายในระบบ โดยแบบจำลองอาจประกอบด้วย พีชคณิต การหาอนุพันธ์ สมการปฏิยานุพันธ์ กระบวนการสโตคาสติก โครงสร้างทางเรขาคณิต ฯลฯ แบบจำลองที่ดีจะมีส่วนประกอบของระบบเป็นส่วน ๆ เป้าหมาย คือ แบบจำลองย่อย ๆ (Submodel) นำมาประกอบกัน เพื่อเป็นตัวแทนของทั้งระบบที่น่าสนใจ ระบบที่ดีจะพร้อมที่จะทำงานอยู่ได้ในระบบที่เปลี่ยนแปลงไป สามารถทำความเข้าใจและดัดแปลงเพื่อประยุกต์ไปยังระบบที่น่าสนใจ แบบจำลองทั่วไปจะประกอบด้วยระบบที่เราสนใจเป็นกรณีพิเศษ แต่เป็นเรื่องยากที่จะคำนวณหรือวิเคราะห์เป็นแบบจำลองทั่วไป ดังนั้นเป้าหมายที่เป็นไปได้ก็คือการลดความซับซ้อนหรือทำให้ใกล้เคียงกับแบบจำลองทั่วไป แบบจำลองที่เป็นตัวแทนของระบบจริงที่ควรจะเป็นไปได้ในอธิบายข้อมูลจากแบบจำลองในแง่ของลักษณะของระบบที่สามารถสังเกตได้ ขั้นตอนนี้ไม่สำคัญเสมอไปแต่จะต้องทำถ้าผลลัพธ์ที่ได้ต้องนำไปใช้ในกรณีอื่น ๆ การตีความของผลลัพธ์จะต้องนำไปสู่การคาดการณ์หรือคำอธิบายเกี่ยวกับระบบจริงได้ นอกจากนี้ยังสามารถทดสอบตรวจ

ข้อเสียที่ได้จากการสังเกตจริงเพื่อตรวจสอบความมีประสิทธิภาของแบบจำลอง ถ้าหากสังเกตได้ว่าแบบจำลองนั้นยังไม่สามารถคาดการณ์สถานการณ์ได้แล้ว ก็ให้ทำการทำซ้ำวงรอบอีกครั้งด้วยการปรับปรุงการคิดหรือระบบ ผลลัพธ์ใหม่ การคาดการณ์และอื่น ๆ

คำอธิบายข้างต้นของกระบวนการการสร้างแบบจำลองอาจจะทำให้คุณนึกถึงวิธีการทางวิทยาศาสตร์ (Scientific method) ซึ่งมีการวางรากฐานของการวิจัยทางวิทยาศาสตร์มาหลายร้อยปี ซึ่งวิธีการทางวิทยาศาสตร์มีบางอย่างที่เป็นเช่นนี้

1. ให้ข้อสังเกตทั่วไปของปรากฏการณ์
2. กำหนดสมมติฐาน
3. พัฒนาวิธีการที่จะทดสอบสมมติฐาน
4. ได้รับข้อมูล
5. ทดสอบสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับข้อมูล
6. พยายามที่จะยืนยันหรือปฏิเสธสมมติฐาน



ภาพที่ 3 แผนผังกระบวนการสร้างแบบจำลอง
(Schematic flow of modeling process)(Dobson, 2003)

Henry& McAuliffe (1994 อ้างถึงใน White, 2000) ได้กล่าวไว้ใน State of New South Wales through the Department of Education and Training (n.d.) โดยเป็นการดัดแปลงมาจาก AAMT 1994 Mathematics Week publication กระบวนการสร้างแบบจำลองอธิบายได้ที่ดีที่สุดจากภาพที่ 4 แม้ว่าจะมีการนำเสนอกระบวนการหลากหลายรูปแบบกระบวนการของการสร้างแบบจำลองส่วนใหญ่จะพูดถึงสิ่งสำคัญในสิ่งเดียวกันอย่างไรก็ตามวิธีการต่าง ๆในห้องเรียนอาจจะสามารถแตกต่างกันได้ในแง่ของวัตถุประสงค์และการนำไปใช้

ขั้นที่ 1 ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง (Real-world problem) หากกล่าวถึงปัญหาที่ควรจะเป็นสิ่งทั่ว ๆ ไปและการให้ข้อมูลมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ในขั้นตอนถัดไปของกระบวนการสร้างแบบจำลองนี้จะพิจารณาและรวบรวมสิ่งที่เป็นสิ่งจำเป็น บ่อยครั้งที่ครูจะต้องมีดัดแปลงตัวอย่างจากปัญหาในตำราเรียนเพื่อกระชับข้อมูลเบื้องต้นที่รวบรวมได้

ขั้นที่ 2 การตั้งข้อสันนิษฐาน (Make assumptions) นี่เป็นขั้นหนึ่งที่มีค่าที่สุดของกระบวนการนี้และไม่ควรที่จะดำเนินการอย่างเร่งรีบ ซึ่งในขั้นนี้ประกอบไปด้วยการลงรายละเอียดของความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องทั้งหมดและจากนั้นจะพยายามที่ลดความซับซ้อนหรือดัดแปลงรายละเอียดนั้น ในขั้นนี้ เห็นได้ชัดว่ามีความจำเป็นเพื่อให้ได้ข้อมูลบางอย่างที่จะเป็นเงื่อนไขเบื้องต้นของปัญหา

ขั้นที่ 3 การกำหนดปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Formulate mathematical problem) ทางเลือกของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะขึ้นอยู่กับแนวคิดที่ใช้โดยครูและความต้องการของหลักสูตร ถ้าการตัดสินใจของชั้นเรียนขึ้นอยู่กับแบบจำลองที่ไม่สอดคล้องกับแนวคิดของครูแล้วครูมีทางเลือกที่จะเข้าไปแทรกแซง (แนวคิดของโครงสร้าง) หรือจะหยุดยั้งจนกว่าจะเสร็จสิ้นวงรอบหนึ่งของขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง ครูที่มีตัวเลือกของพีชคณิตในการสร้างแบบจำลองในชั้นเรียนหรือการให้โปรแกรมแผ่นตารางทำการ (Spread sheet) เพื่อจำกัดแบบจำลองนั้น

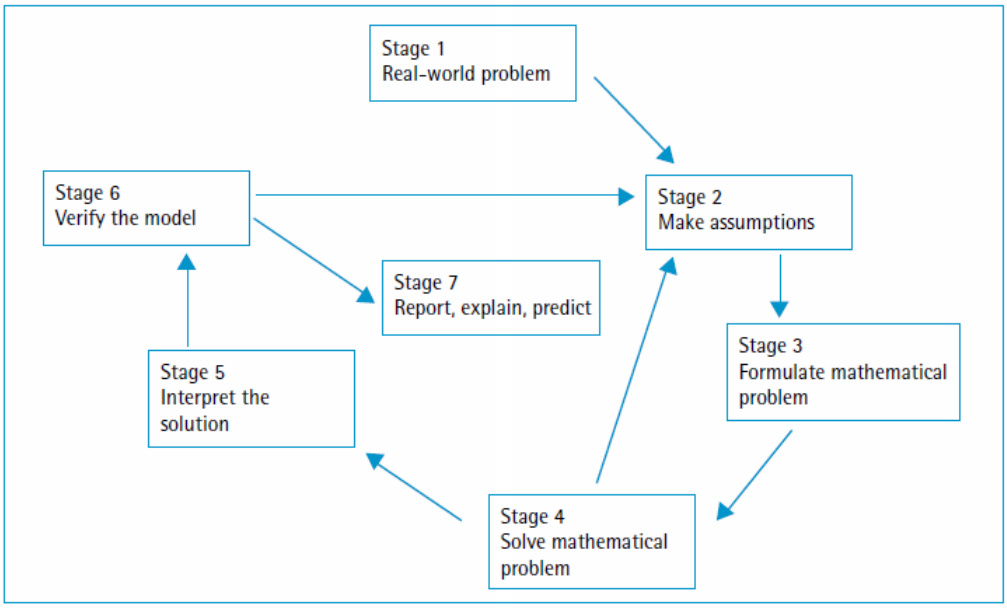
ขั้นที่ 4 การแก้ปัญหาที่เป็นปัญหาคณิตศาสตร์ (Solve the mathematical problem) ขั้นนี้จะอธิบายถึงกระบวนการที่ใช้โดยนักเรียนเมื่อประยุกต์ใช้ในวิธีการที่จะได้รับข้อมูล การใช้ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองที่อาจหมายถึงการกลับไปเริ่มต้น ยังขั้นสมมติฐานซึ่งเป็นลำดับของการแก้ไขปัญหาที่จะถูกพิจารณา

ขั้นที่ 5 การตีความหมายของวิธีการแก้ปัญหา (Interpret the solution) หลังจากการแก้ปัญหาของพวกเขา นักเรียนจะกลับไปสู่ปัญหา พวกเขาจะต้องตรวจสอบเพื่อยืนยันให้แน่ใจว่าพวกเขาได้ตอบปัญหาภายใต้สมมติฐานที่พวกเขาได้คิดไว้ การตีความควรจะทำให้ความชัดเจนเกิดขึ้นเกี่ยวกับสมมติฐานและเงื่อนไขเบื้องต้น นี่คือขั้นตอนที่สำคัญในการช่วยให้นักเรียนได้ตระหนักว่าการแก้ปัญหานั้นจะเป็นจำกัดด้วยบริบทและไม่ได้เป็นเรื่องง่ายที่จะถ่ายโยงไปยังสถานการณ์อื่น ๆ

ขั้นที่ 6 ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง (Verify the model) ในขั้นตอนนี้เป็นทั้งจุดแข็งและจุดอ่อนแบบจำลองที่มีการอภิปรายถึง ซึ่งเกี่ยวข้องกับการสะท้อนคิดให้เห็นถึงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกใช้ กล่าวว่า "ทุกแบบจำลองเป็นสิ่งที่ผิด แต่บางแบบจำลองเป็นสิ่งที่มีประโยชน์" เป็นสิ่งสำคัญในการเตือนที่อันตราย คือ การทำให้ง่ายขึ้นอย่างมากโดยไม่สนใจพื้นฐานของสมมติฐาน แบบจำลองที่ควรจะได้รับการประเมินในแง่ของตัวแปรที่ใช้และสิ่งที่มีความสำคัญมากกว่าและสิ่งที่ถูกละเลยตัดออก

ขั้นที่ 7 การรายงาน การอธิบาย การคาดการณ์ (Report, explain, predict) ขั้นนี้เป็นส่วนที่มีคุณค่าของกระบวนการ เป็นประสบการณ์ในต้องการของนักเรียนในการใช้ภาษาเพื่อการแสดงออกทางความคิดคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่เราสะท้อนคิดให้เห็นถึงคุณภาพของการคิดของนักเรียน ควรจะรวมถึงข้อมูลของความคืบหน้าของนักเรียนผ่านขั้นตอนของวงจรที่ดีในการคาดการณ์ครั้งสุดท้ายและคำตอบของพวกเขา โครงสร้างของกระบวนการการสร้างแบบจำลองให้การจัดการกลไกที่ดีสำหรับการรายงานของพวกเขา

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University



ภาพที่ 4 กระบวนการสร้างแบบจำลองของ Henry และ McAuliffe

(The modeling process) (Henry & McAuliffe 1994 อ้างถึงใน White, 2000)

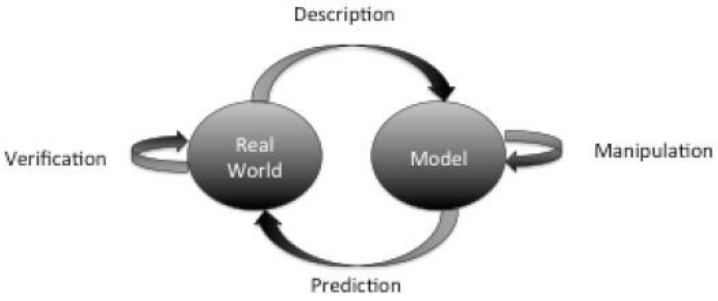
Lesh and Doerr (2003) กระบวนการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึงประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าในสถานการณ์ (Description) การจัดการเชิงคณิตศาสตร์ (Manipulation) การทำนายคำตอบ (Prediction) และการตรวจสอบ (Verification)

ขั้นที่ 1 กระทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา (Description) หมายถึง ขั้นของการทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งอาจเป็นสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในชีวิตจริง ซึ่งสถานการณ์ปัญหาเหล่านั้นอาจอยู่ในรูปของโจทย์ปัญหา ไดอะแกรม สูตร ตารางข้อมูล โดยใช้ความรู้พื้นฐานและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา การระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้อง การระบุความสัมพันธ์ของตัวแปร การให้ความสำคัญของตัวแปร แล้วแทนสถานการณ์ปัญหาด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของไดอะแกรม สูตร ตาราง กราฟ ตัวแปร นิพจน์ สมการ อสมการ ฟังก์ชัน สัญลักษณ์

ขั้นที่ 2 การจัดการเชิงคณิตศาสตร์ (Manipulation) หมายถึง ขั้นของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้คำตอบจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยความรู้มโนทัศน์ หลักการทางคณิตศาสตร์ และยุทธวิธีต่าง ๆ ในการดำเนินการ

ขั้นที่ 3 การทำนายคำตอบ (Prediction) หมายถึง ขั้นของการแปลความหมาย (Interpreting) ของคำตอบ การพิจารณาและวินิจฉัยคำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้คำตอบทางคณิตศาสตร์ แล้วนำคำตอบที่ได้ไปทำนายสถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบ (Verification) หมายถึง ขั้นของการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ โดยมีรายละเอียดของการหาข้อมูลมาสนับสนุนคำตอบ การสะท้อนความคิดเห็น การประเมินคำตอบที่ได้อย่างมีวิจารณญาณและการนำเสนอคำตอบ



ภาพที่ 5 วัฏจักรการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

(Lesh & Doerr 2003)

จากกระบวนการสร้างแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ควรเริ่มต้นจากการวิเคราะห์สถานการณ์จริงที่ต้องการสร้างแบบจำลองว่าเป้าหมายอะไร ระบุตัวแปรและความสัมพันธ์ของตัวแปรในสถานการณ์และการเลือกสิ่งที่เป็นตัวแทน โดยอาจจะเป็นสัญลักษณ์หรือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ กำหนดแบบจำลองโดยการสร้างและเลือก ทางเรขาคณิต กราฟ ตาราง พีชคณิต หรือ การเป็นตัวแทนทางสถิติที่อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนั้นได้ วิเคราะห์และดำเนินการเพื่อหาข้อสรุปไปยังสถานการณ์เดิมและตรวจสอบข้อสรุปโดยการเปรียบเทียบกับสถานการณ์ เพื่อตรวจสอบและปรับปรุงแบบจำลองให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกันต่อไป

1.5 สมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุสมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

Henning and Keune (2007) กล่าวว่า ความหมายของสมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถ ทักษะ ทัศนคติและความสมัครใจของนักเรียนในการทำงานที่เกี่ยวของกับกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งรวมถึงโครงสร้าง ความเข้าใจในโครงสร้างของปัญหา การตีความ องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ การตรวจสอบผลจากแบบจำลองและการสื่อสารนำเสนอผลที่ได้จากแบบจำลอง ซึ่งระดับของสมรรถนะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 3 ระดับดังนี้

ระดับที่ 1: การรับรู้และเข้าใจในการสร้างแบบจำลอง (Recognize and understand modeling) ซึ่งมีลักษณะของความสามารถดังต่อไปนี้

- การรับรู้
- เพื่ออธิบายขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง
- ลักษณะและความแตกต่างของแต่ละขั้นตอนของกระบวนการในการสร้างแบบจำลอง

ระดับที่ 2: การสร้างแบบจำลองอย่างอิสระ (Independent modeling) ซึ่งมีลักษณะของความสามารถดังต่อไปนี้

- การวิเคราะห์ในโครงสร้างของปัญหาและนามธรรมเชิงคุณภาพ
- การเลือกใช้มุมมองที่แตกต่างกัน
- การตั้งค่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- การทำงานของแบบจำลอง
- การตีความของผลและการแสดงผลของแบบจำลอง
- การตรวจสอบแบบจำลองและกระบวนการทั้งหมด

ระดับที่ 3: การสะท้อนคิดไตร่ตรองในการสร้างแบบจำลอง (Meta-reflection on modeling) ซึ่งมีลักษณะของความสามารถดังต่อไปนี้

- การวิเคราะห์การสร้างแบบจำลองอย่างมีวิจารณญาณ
- ลักษณะเกณฑ์มาตรฐานของการประเมินผลแบบจำลอง

- การสะท้อนคิดให้เห็นถึงกรณีต่าง ๆ ของการสร้างแบบจำลอง
- การสะท้อนคิดให้เห็นการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์

1.6 การประเมินแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า Meyer (2012) ได้เสนอแนวทางการประเมินผลแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้น โดยให้ความสำคัญกับทุกขั้นตอนของการสร้างวงจรแบบจำลองเป็นอย่างมาก เพราะเป็นส่วนหนึ่งที่จะทำให้เห็นความแตกต่างระหว่างแบบจำลองที่ดีและไม่ดี ถ้าเราใช้ในหนึ่งแบบจำลองประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์หนึ่ง ๆ อาจจะไม่เพียงพอ โดยอาจต้องใช้แบบจำลองอย่างหลากหลายเพื่อประสิทธิภาพในการใช้งานตามสถานการณ์ที่กำหนด

Kang and Noh (2012)ได้เสนอหลักการในการประเมิน 6 หลักการดังนี้

1 ความถูกต้องของผลลัพธ์จากแบบจำลองกับคำตอบที่ให้ หรือใกล้เคียงที่สุด

2. สอดคล้องกับลักษณะของสภาพพื้นฐานความเป็นจริง

3 ความแม่นยำในการคาดการณ์เป็นตัวเลขที่ชัดเจนจากแบบจำลอง

4 ความมั่นคง ไม่เกิดความผิดพลาดในการป้อนข้อมูล

5 ในกรณีทั่วไป สามารถนำไปใช้กับความหลากหลายของสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

6. ความสมบูรณ์ ความเป็นประโยชน์ ความเป็นแรงบันดาลใจหรือเป็นแนวทางในการนำไปสร้างแบบจำลองอื่น ๆ

จากการประเมินแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า มีหลักการดังนี้ ความถูกต้องตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ความสอดคล้องกับสถานการณ์ทั่วไปของปัญหา และความสามารถในการขยายไปสู่ปัญหาอื่นที่ใกล้เคียงกัน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1.7 ประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า ประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับจากการอ้างถึงในบทความวิจัยที่ผ่านมาจำนวนมาก การสร้างแบบจำลองเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในวิชาคณิตศาสตร์ในสามแนวทาง คือ

1. สถานการณ์ของโลกแห่งความจริงดึงดูดความสนใจของนักเรียนบางคน
2. นักเรียนมีความต้องการที่จะเรียนคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง
3. นักเรียนต้องการเรียนรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ด้านใหม่ๆ

โดยที่นักเรียนทำการเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์และการพัฒนาความเข้าใจอย่างซึ้งลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ (Boaler, 2001, Connor and Zbiek, 2006 cite in Wethall, 2011)การสร้างแบบจำลองของปัญหาทำให้เห็นความแตกต่างของวิธีการในการได้มาซึ่งของความต้องการที่จะสื่อสารเป็นการเริ่มต้นความพยายามที่จะแสดงความรู้สึกหรือความคิดออกมาเป็นคำพูดนำไปสู่การปรับความเข้าใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ (Doerr and English, 2003 cite in Wethall, 2011) การสร้างแบบจำลองสามารถทำให้นักเรียนใช้เกณฑ์ในการประเมินผลการเป็นตัวแทนเกี่ยวกับพีชคณิต (lzak 2003 cite in Wethall, 2011) นักเรียนโดยใช้วิธีการสร้างแบบจำลองในการเรียนคณิตศาสตร์นั้นพบว่ามีประสิทธิภาพทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ใช้การเรียนคณิตศาสตร์แบบหลักสูตรดั้งเดิมในการปัญหาที่ต้องมีการกำหนดแบบจำลองเกี่ยวกับพีชคณิตของความสัมพันธ์ของปริมาณและผลการแปลความหมายของการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิต (Fey et al, 2000 cite in Wethall, 2011) และท้ายที่สุดนักเรียนที่เข้าร่วมในหลักสูตรมีความมุ่งเน้นในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในโรงเรียนและคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโลกแห่งความเป็นจริงโดยพวกเขามีโอกาสที่จะฝึกเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่พวกเขาจะต้องใช้มันจริงนอกห้องเรียน (Boaler, 2001 cite in Wethall, 2011)

จากประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจกับสถานการณ์จริงที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้จำลองขึ้น ท้าทายและดึงดูดความสนใจของนักเรียนจากสถานการณ์จริงอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้ยังกระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียนรู้ความรู้ด้านใหม่ ๆ ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์มากขึ้นด้วย

1.8 ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน ไว้ดังนี้

Hodgson (1995) ได้กล่าวความสำคัญของการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ชั้นเรียน โดยแบ่งออกเป็นด้าน ๆ ได้ดังนี้

ด้านการแก้ปัญหา แบบจำลองคือการแก้ปัญหา นักเรียนต้องเผชิญหน้ากับการแก้ปัญหาและตั้งคำถามเกี่ยวกับสถานการณ์จริง โดยสถานการณ์ที่เป็นความสนใจของนักเรียนจะทำให้นักเรียนต้องการหาคำตอบ อย่างไรก็ตามแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ภายใต้สถานการณ์จริงอาจยังไม่ชัดเจน มีความคลุมเครือ นักเรียนอาจไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยตรง นักเรียนต้องใช้ความพยายามในการแก้ปัญหา โดยสรุปแล้ว แบบจำลองได้รวมบริบทของการแก้ปัญหาเข้าไว้ด้วยกัน เพื่อพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการแก้ปัญหา

ด้านการเชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตจริง การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาประยุกต์ไม่ใช่สิ่งใหม่ในการศึกษาคณิตศาสตร์ ดังจะเห็นได้จากในปี ค.ศ. 1983 PEA (Progressive Education Association) ได้กล่าวในรายงานไว้ว่า ครูคณิตศาสตร์ได้ให้นักเรียนแก้ปัญหาในสถานการณ์จริง โดยนำความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ เช่นเดียวกับมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM) ได้เน้นกิจกรรมที่นำไปสู่ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยมีจุดประสงค์ปลายทางเพื่อผลิตพลเมืองให้เป็นบุคคลซึ่งมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ หลักสูตรคณิตศาสตร์ เช่น กราฟ ตาราง สถิติ และใช้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาในสถานการณ์จริง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนทำให้เกิดการคิดและนำเอาความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ามามีส่วนร่วมคือสามารถเตรียมนักเรียนให้ใช้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาซึ่งเกิดขึ้นในชีวิตของนักเรียน ครูสามารถจำลองสถานการณ์จริงโดยการนำเสนอโจทย์ปัญหาในสถานการณ์จริงให้กับนักเรียนและแนะนำให้เกิดความพยายามหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจำเป็นต้องใช้ทักษะหลาย ๆ ทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาให้สำเร็จ

ด้านการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น ๆ การศึกษาในปัจจุบันได้ให้ความสำคัญกับการจัดการเรียนการสอนที่เน้นการบูรณาการระหว่างวิชา เช่นเดียวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็เน้นการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น ๆ ในหลักสูตร เช่น วิทยาศาสตร์ ศิลปะ สังคมศึกษา เป็นต้น ยิ่งไปกว่านั้นความยุ่งยากซับซ้อนที่เกิดจากกระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ยังมีความเหมาะสมในการใช้วิธีการเรียนแบบร่วมมือ ซึ่งครูจำนวนมากได้ใช้วิธีการเรียนแบบนี้ โดยเมื่อนักเรียนสร้างแบบจำลองขึ้นมาจะเกิดการมีปฏิสัมพันธ์ทางการเรียนกับเพื่อนคนอื่น ๆ และทำให้เกิดการอภิปรายในชั้นเรียน เช่น อภิปรายถึงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองกับสถานการณ์ปัญหาเริ่มต้น ขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง การใช้แบบจำลอง และข้อจำกัดของแบบจำลอง เป็นต้น

ด้านเจตคติ นักศึกษากลุ่ม Constructivist ได้ให้ความสำคัญกับการเรียนการสอนที่เน้นการปฏิบัติโดยนักเรียนที่มีส่วนร่วม อย่างไรก็ตาม การมีส่วนร่วมของนักเรียนในการปฏิบัติตามกิจกรรมจะไม่เกิดขึ้น ถ้านักเรียนไม่มีความต้องการที่จะเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งความต้องการเรียนคณิตศาสตร์ ถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของผลด้านเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน การสอนคณิตศาสตร์โดยวิธีปกตินั้น ครูได้นำเสนอเนื้อหาที่เชื่อว่าเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนักเรียน แต่ล้มเหลวในการพิจารณาถึงความสำคัญด้านเจตคติของนักเรียน ทำอย่างไรจึงจะทำให้นักเรียนที่ไม่ได้ศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นไปหรือนักเรียนที่ไม่ได้เข้าสู่วิชาชีพที่ใช้คณิตศาสตร์เห็นความสำคัญหรือมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) ได้เสนอแนะว่าครูควรจัดกิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนมีประสบการณ์เกี่ยวกับศักยภาพและการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจว่าคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับปัญหาในชีวิตของนักเรียน คณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของชีวิตไม่ได้แยกออกมาจากชีวิตจริง ซึ่งถือว่าเป็นข้อดีของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และทำให้นักเรียนต้องการเรียนคณิตศาสตร์

ด้านความรู้ด้านสถิติ บ่อยครั้งที่พบว่า ความรู้ทางสถิติเข้ามามีบทบาทเป็นอย่างมากในสังคมปัจจุบัน เช่น หนังสือพิมพ์ได้นำเสนอข้อมูลข่าวสารที่อยู่ในรูปสถิติ เช่น รูปของกราฟต่าง ๆ หรือการนำเสนอข้อมูลเชิงตัวเลข มาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) ได้เสนอว่า หลักสูตรทุก ๆ ระดับควรจะให้ความสำคัญเกี่ยวกับการเก็บรวบรวมข้อมูล ในชั้นเรียนนักเรียนจะทำการสืบสวนปัญหาในสถานการณ์จริง โดยการระบุตัวแปรของปัญหา ออกแบบและทำการทดลองเพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมของตัวแปร วิเคราะห์ข้อมูล

แสดงความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ (แบบจำลอง) ซึ่งอธิบาผลของการทดลอง และใช้แบบจำลองตอบคำถามของสถานการณ์จริงโดยจากกระบวนการเหล่านี้ นักเรียนต้องพัฒนายุทธวิธีเพื่อหาข้อมูลที่เป็นไปได้จริง และทดสอบข้อมูลเพื่อใช้ในการตัดสินใจ บ่อยครั้งที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อยู่ในรูปของสมการซึ่งเหมาะสมที่สุดกับข้อมูลโดยสามารถได้จากการวิเคราะห์ถดถอย โดยทั่ว ๆ ไป แล้วการเก็บรวบรวมข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล ถือเป็นพื้นฐานที่มีบทบาทสำคัญในกิจกรรมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ยิ่งไปกว่านั้นข้อมูลที่ถูกวิเคราะห์จะอยู่ภายใต้บริบทของปัญหาจริงซึ่งเป็นการให้นักเรียนรู้จักการประยุกต์การใช้สถิติในชีวิต

จากที่กล่าวมาข้างต้นความสำคัญของการใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนนั้นจะทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ขั้นตอนการแก้ปัญหา ด้วยการเชื่อมโยงองค์ความรู้คณิตศาสตร์กับการดำเนินชีวิตและต่อยอดความรู้ไปยังศาสตร์ต่าง ๆ

1.9 หลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

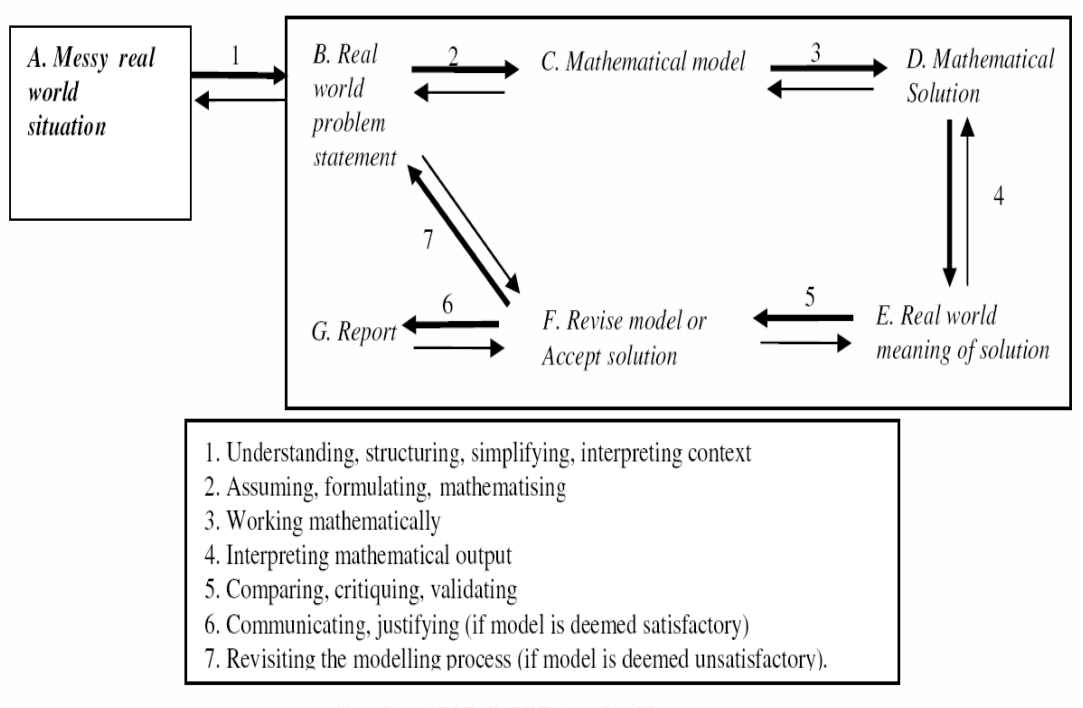
จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุขหลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Stillman (2012) กล่าวว่า การใช้แบบจำลองในการเรียนการสอนมีวัตถุประสงค์สองประการพร้อม ๆกัน

1. ใช้แก้ปัญหาเฉพาะที่อยู่ตรงหน้า
2. เพื่อฝึกพัฒนาการสร้างแบบจำลองตลอดเวลา ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถอธิบายและแก้ปัญหาในโลกของตนเองได้ด้วยตนเอง

ซึ่งภาพที่ 6 เป็นวัฏจักรการสร้างแบบจำลองโดยประยุกต์มาจาก Stillman, Galbraith, Brown, and Edwards (2007) ซึ่งเริ่มต้นจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงอันสับสน (A) จากรูปภาพตัวอักษร B – G คือ ขั้นตอนต่าง ๆ ที่เป็นผลลัพธ์หนึ่ง ๆ และลูกศรหนา หมายถึงการส่งผ่านในแต่ละขั้นตอน กระบวนการทั้งหมดให้อ่านตามหัวลูกศรในทิศตามเข็มนาฬิกาเริ่มจากด้านบนซ้ายของแผนผัง โดยผลลัพธ์ของการสร้างแบบจำลองอาจจะประสบผลสำเร็จหรือไม่ประสบผลสำเร็จแล้วเกิดการวนซ้ำเป็นวัฏจักรเมื่อผลการประเมินออกมาว่าผลลัพธ์นั้นยังไม่เป็นที่น่าพอใจ

พฤติกรรมทางความคิดที่แต่ละคนจะพยายามสร้างแบบจำลองโดยการข้ามผ่านจากขั้นหนึ่งไปอีกขั้นหนึ่งถูกอธิบายโดยตัวเลข 1-7 และหัวลูกศรบาง แสดงให้เห็นถึงความคิดที่อยู่ภายในกระบวนการสร้างแบบจำลองบอกถึงกิจกรรมอภิปัญญาที่สะท้อนกลับไปกลับมาได้



ภาพที่ 6 วัฏจักรของการสร้างแบบจำลอง

ดัดแปลงมาจาก Stillman, Galbraith, Brown and Edwards (2007) โดย Stillman (2012)

(Modelling cycle from Stillman, Galbraith, Brown and Edwards (2007))

โดยมีขั้นตอนปฏิบัติของการนำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนและใช้เทคโนโลยีในการจัดการเรียนการสอนมีลักษณะดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สถานการณ์โลกจริงที่ยุ่งเหยิง ไปยัง ประพจน์ปัญหาโลกจริง

(MESSY REAL WORLD SITUATION ⟶ REAL WORLD PROBLEM STATEMENT)

1.1 การระบุเนื้อหาของปัญหาได้อย่างชัดเจน

1.2 การตั้งสมมติฐานเพื่อลดความซับซ้อนลง

1.3 การระบุตัวแปรสำคัญและจำเป็น ๆ ได้

1.4 การระบุองค์ประกอบที่ถูกต้องของตัวแปรที่สำคัญและจำเป็นได้

ขั้นตอนที่ 2 ประพจน์ปัญหาโลกจริง ไปยัง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

(REAL WORLD PROBLEM STATEMENT ⟶ MATHEMATICAL MODEL)

1.1 การระบุต้นและตัวแปรตามจากแบบจำลองทางพีชคณิตได้

1.2 ต้องทราบว่าความเป็นเป็นเอกลักษณ์ของตัวแปรต้น

1.3 แทนองค์ประกอบต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เพื่อจะใช้สูตรได้

1.4 ตั้งสมมติฐานที่เกี่ยวข้องได้

1.5 การเลือกใช้ตารางทางคณิตศาสตร์หรือเทคโนโลยีในการคำนวณได้

1.6 การเลือกเทคโนโลยีในการประยุกต์สูตรได้อย่างอัตโนมัติ

1.7 การเลือกเทคโนโลยีในกาสร้างตัวแทนทางกราฟฟิกของแบบจำลองได้

1.8 การเลือกเทคโนโลยีในการพิสูจน์สมการทางพีชคณิตได้

1.9 การสร้างกราฟโดยใช้ฟังก์ชันแทนการลงจุดของข้อมูลในการตรวจสอบสมการทางพีชคณิต

ขั้นตอนที่ 3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไปยัง ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์

(MATHEMATICAL MODEL ⟶ MATHEMATICAL SOLUTION)

3.1 การประยุกต์ใช้สูตรสัญลักษณ์ที่เหมาะสม

3.2 การประยุกต์ใช้กระบวนการการทำประโยคพีชคณิตให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในการสร้างฟังก์ชันที่ซับซ้อนขึ้นได้

3.3 การใช้ตารางทางคณิตศาสตร์หรือเทคโนโลยีในการคำนวณได้

3.4 การใช้เทคโนโลยีในการประยุกต์สูตรได้อย่างอัตโนมัติ

3.5 การใช้เทคโนโลยีในกาสร้างตัวแทนทางกราฟิกของแบบจำลองได้

3.6 การใช้กฎและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

3.7 สามารถพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยเทคโนโลยีได้

3.8 สามารถทำให้เกิดผลเพิ่มเติมเพื่อช่วยให้เกิดการแปลผลได้

ขั้นตอนที่ 4 ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ ไปยัง ความหมายของผลลัพธ์ในโลกจริง

(MATHEMATICAL SOLUTION ⟶ REAL WORLD MEANING OF SOLUTION)

4.1 การระบุผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับสิ่งที่อยู่ในโลกแห่งความจริง

4.2 บริบทระหว่างผลลัพธ์สุดท้ายทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่คุ้นเคยไปยังสถานการณ์ที่มีความซับซ้อน

4.3 การบูรณาการข้อโต้แย้งเพื่อปรับปรุงการตีความ

4.4 ลดข้อจำกัดของผลลัพธ์ลงเท่าที่จำเป็นเพื่อสนับสนุนการตีความใหม่

4.5 ตระหนักถึงความสำคัญทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องก่อนที่ตีความคำถาม

ขั้นตอนที่ 5 ความหมายของผลลัพธ์ในโลกจริง ไปยัง แก้ไขแบบจำลองหรือยอมรับผลลัพธ์ (REAL WORLD MEANING OF SOLUTION ⟶ REVISE MODEL OR ACCEPT SOLUTION)

5.1 การเชื่อมโยงระหว่างสิ่งไม่คาดคิดกับสถานการณ์จริง

5.2 พิจารณาผลกระทบในโลกแห่งความจริงจากผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์

5.3 การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์และมุมมองของปัญหาในโลกแห่งความจริง

5.4 การตระหนักถึงข้อจำกัดที่จำเป็น และลดข้อจำกัดที่เป็นที่ยอมรับได้ เพื่อการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง

5.5 การพิจารณาความเพียงพอในโลกแห่งความจริงของผลลัพธ์แบบจำลองแบบทั่วโลก

ขั้นตอนที่ 6 แก้ไขแบบจำลองหรือยอมรับผลลัพธ์ ไปยัง รายงาน (REVISE MODEL OR ACCEPT SOLUTION ⟶ REPORT)

6.1 การประเมินแบบจำลองหาข้อดีและข้อบกพร่อง

6.2 ยอมรับและพอใจแบบจำลองที่สร้างขึ้น

6.3 นำเสนอแบบจำลอง

ขั้นตอนที่ 7 แก้ไขแบบจำลองหรือยอมรับผลลัพธ์ ไปยัง ประพจน์ปัญหาโลกจริง (REVISE MODEL OR ACCEPT SOLUTION ⟶ REAL WORLD PROBLEM STATEMENT)

7.1 การประเมินแบบจำลองหาข้อดีและข้อบกพร่อง

7.2 ปรับปรุงและไม่ยอมรับแบบจำลองที่สร้างขึ้น

7.3 ทบทวนและเริ่มกระบวนการสร้างแบบจำลองใหม่ โดยกลับไปพิจารณายังสถานการณ์เดิมในโลกแห่งความจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เป็นแนวคิดที่เน้นการช่วยเหลือนักเรียนบนพื้นฐานประสบการณ์เดิม ให้มีการเรียนรู้ได้ตามศักยภาพของตนเอง โดยมีประเด็นที่นำเสนอ 4 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

2.1 ความหมายของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ไว้ดังนี้

Vygotsky (1978) การเสริมต่อการเรียนรู้ คือ การให้ความช่วยเหลือนักเรียนให้สามารถทำงานที่ไม่สามารถทำงานให้สำเร็จได้ตามลำพังให้สามารถทำได้สำเร็จเป็นโครงสร้างชั่วคราวที่ยืดหยุ่นได้ โดยครูค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลงแล้วถ่ายโอนความรับผิดชอบการทำงานไปสู่นักเรียน นักเรียนลงมือกระทำมีปฏิสัมพันธ์กับสังคม

การเสริมต่อการเรียนรู้ คือ การช่วยเหลือเพื่อให้นักเรียนทำงานที่ไม่สามารถทำงานตามลำพังได้สำเร็จส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียนให้ผ่านพื้นที่บริเวณรอยต่อพัฒนาการโดยช่วยเหลือนักเรียนให้สามารถทำงานได้สำเร็จโดยอิสระผลของการช่วยเหลือ การตอบสนองต่อความต้องการของนักเรียนปรับความต้องการเข้ากับความสามารถในการปฏิบัติของนักเรียนครูเข้ามาช่วยเหลือเมื่อนักเรียนต้องการและปล่อยให้นักเรียนเป็นอิสระเมื่อนักเรียนทำงานได้เองรูปแบบของการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ใช้ในการสอนเช่นการเป็นตัวแบบ (Modeling) การคิดและพูดออกมาดังๆ (Think-Aloud) การใช้คำถาม (Questions) การปรับสื่อการเรียนการสอน (Adapting Instruction Materials) และการให้คำแนะนำโดยไม่ลังเล (Prompts and Cues)

จากที่กล่าวมาข้างต้น การเสริมต่อการเรียนรู้ คือ หมายถึง การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับการพัฒนาจากระดับที่เป็นจริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องนำออกไปจากการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด

2.2 หลักการของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการศึกษา พบว่าVygotsky (1978) ได้ระบุหลักการสำคัญของการเสริมต่อการเรียนรู้ คือ ครูต้องประเมินความรู้ทักษะและความต้องการของนักเรียนเพื่อเตรียมหรือเลือกกิจกรรมการช่วยเหลือที่เหมาะสมกับความต้องการของนักเรียนการเรียนรู้สิ่งที่ไม่สามารถเรียนรู้ได้ตามลำพังโดยต้องได้รับการช่วยเหลือจากครูและเพื่อนที่มีความรู้มากกว่า ทั้งนี้การให้การเสริมต่อการเรียนรู้ต้องเหมาะสมกับพัฒนาการของนักเรียนสามารถให้ความช่วยเหลือได้หลายรูปแบบ เช่น การตั้งคำถาม การบอกหรืออธิบายวิธีการการสาธิตหรือแสดงให้ดูการให้แบบอย่างการชี้แนะการทำงานกลุ่มการให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือแบบทดสอบก่อนเป็นต้นซึ่งใช้ได้ทั้งการเสริมต่อด้วยสื่อที่มองเห็นและการเสริมต่อแบบเป็นคำพูดโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือและกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้

มโนทัศน์ของการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพื้นฐานมาจากแนวคิดการเรียนรู้กลุ่มคอนสตรัคติวิสต์เชิงสังคมของ Vygotsky (1978 cite in Clark & Graves, 2005) ตามแนวคิด Vygotsky การทำงานของสมองของการพัฒนาการของเด็กทุกครั้งนั้นเกิดขึ้นครั้งแรกจากการให้ความสนับสุนจากผู้ใหญ่การร่วมมือที่เกิดขึ้น Vygotsky อ้างถึงบริเวณรอยต่อของพัฒนาการ (Zone of Proximal Development) พื้นที่ที่อยู่ระหว่างกิจกรรมที่เด็กสามารถทำได้เอง โดยอิสระกับพื้นที่ที่สามารถทำได้ด้วยการช่วยเหลือ พื้นที่รอยต่อของพัฒนาการ คือ พื้นที่ระหว่างพัฒนาการจริงซึ่งพิจารณาจากการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองกับระดับพัฒนาการที่พัฒนาได้พิจารณาจากการแก้ปัญหาภายใต้การแนะนำและร่วมมือกับผู้ที่มีความสามารถมากกว่า ครูหรือกลุ่มเพื่อนที่มีความเชี่ยวชาญมากกว่ามีความจำเป็นมากสำหรับกระบวนการเรียนรู้ พัฒนาการของบุคคลเกิดขึ้นในบริบทของกิจกรรมที่มีตัวแบบและการช่วยเหลือของคนที่มีทักษะมากกว่า งานของครูก็คือ การประเมินความเข้าใจของนักเรียนเพื่อให้ถึงจุดที่แท้จริงของพื้นที่รอยต่อพัฒนาการซึ่งนักเรียนต้องการช่วยเหลือ การช่วยเหลือของครูได้แก่ การเป็นแบบอย่าง การสาธิต การตั้งคำถาม การฝึก การสร้างภาระงานกลุ่มเพื่อให้เกิดการช่วยเหลือของเพื่อนในกลุ่ม ครูต้องรู้ว่าชนิดของงานที่นักเรียนแตกต่างกันสามารถทำได้ และต้องมีการปรับประเภทและจำนวนของความช่วยเหลือขณะที่นักเรียนพัฒนาอย่างต่อเนื่องตลอดช่วงที่ศึกษาในโรงเรียน จนกระทั่งในชีวิตจริง คนเราทุกคนต้องการวิธีการต่าง ๆ และประเภทของความช่วยเหลือที่ซับซ้อน ขณะที่เราพัฒนาและเรียนรู้ เช่น การนำเสนอแบบอย่างเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นการทำสิ่งต่าง ๆ การสาธิตกระบวนการหรือทักษะทางกาย และโดยการพูดดัง ๆ ว่าผู้ที่มีความรู้คิดอย่างไร ครูยังสามารถช่วยเหลือผ่านคำถาม การให้ผลสะท้อนกลับ การกระตุ้น และการชมเชย แต่ละรูปแบบของการช่วยเหลือขึ้นอยู่กับความชัดเจนและประสิทธิภาพการสื่อสารกับนักเรียน “การเสริมต่อการเรียนรู้” จึงเป็นทั้งคำทั่วไปสำหรับงานที่ครูนำเสนอการสนับสนุนอย่างเพียงพอ ตามความต้องการของ

นักเรียน และสามารถสร้างความเข้าใจภายใต้พื้นที่รอยต่อพัฒนาการการพัฒนาทางปัญญาของมนุษย์แบ่งเป็น 2 ระดับคือ (1) เชาว์ปัญญาขั้นต้น (Elementary Mental Process) เป็นกระบวนการขั้นพื้นฐานที่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติตามธรรมชาติที่ไม่ต้องเรียนรู้และมักจะมีความจำเป็นต่อการมีชีวิตปฏิสัมพันธ์ทางสังคมจึงไม่มีอิทธิพลต่อกระบวนการเหล่านี้ และ(2) เชาว์ปัญญาขั้นสูง (Higher Mental Process) เป็นกระบวนการทางปัญญาที่เกิดจากการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้ใหญ่ที่ให้การอบรมเลี้ยงดู ถ่ายทอดวัฒนธรรมโดยใช้ภาษา (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2536) ซึ่ง Vygotsky (1978) เชื่อว่าภาษาหรือการพูดจะเป็นเครื่องมือในการพัฒนาเชาว์ปัญญาขั้นสูง นอกจากนั้นการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม การสนทนาแลกเปลี่ยนความรู้ ประสบการณ์โดยการทำงานร่วมกัน จะทำให้บุคคลได้คิดและได้ถ่ายทอดความคิดนั้นออกมาทำให้เกิดการพัฒนาทางปัญญา

จากหลักการของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด

2.3 หลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุหลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ไว้ดังนี้

หลักการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้ คือ การเสริมต่อการเรียนรู้ โดยสามารถทำได้หลายประการ เช่น การให้แบบอย่าง การให้ข้อเสนอแนะ การสะท้อนผลการเรียนรู้ การตรวจสอบความรู้ของนักเรียนโดยให้นักเรียนเล่าสิ่งที่ได้เรียนรู้ การลดความซับซ้อนในงานหรือกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนมีความง่ายต่อการทำความเข้าใจ และอื่น ๆ ซึ่งการเสริมต่อการเรียนรู้จะมีประสิทธิภาพได้ ต้องมาจากพื้นฐานความเข้าใจเรื่องพื้นที่รอยต่อพัฒนาการเป็นสำคัญ นับตั้งแต่ระดับพัฒนาการที่แท้จริงของนักเรียนอันเป็นจุดเริ่มต้นในการเรียนรู้ ไปจนกระทั่งถึงพัฒนาการในระดับสูงสุดของนักเรียนซึ่งเป็นพัฒนาการที่นักเรียนสามารถที่จะเป็นไปได้ จึงจะทำให้ครูสามารถจัดกระบวนการเรียนรู้ได้อย่างถูกต้องและวางแผนการสอนได้เหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียน

Rosenshine and Meister (1992) ระบุองค์ประกอบสำคัญของกาเรียนการสอนโยการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วยองค์ประกอบหลัก 6 ประการ ดังนี้

1.กิจกรรมก่อนสอน คือ การระบุที่ต้องการพัฒนา มีคามเฉพาะเจาะจงในการเสริมต่อการเรียนรู้และการควบคุมความยุ่งยาก

2. ครูมีกิจกรรมเพื่อแสดงให้เห็นถึงกลยุทธ์ทางปัญญา

3. ครูแนะนำแนวทางปฏิบัติแก่นักเรียน

4. นักเรียนได้รับแบบตรวจสอบรายการเพื่อใช้ประเมินการทำงานของตนเอง

5. นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติอย่างอิสระ

6.นักเรียนประยุกต์การเรียนรู้สู่สถานการณ์ใหม่

Ellis and Larkin (1998) กล่าวว่า ความจำเป็นในการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ในการจัดการเรียนการสอนเกิดขึ้นเมื่อ ครูทราบว่านักเรียนไม่สามารถทำงานชิ้นใดชิ้นหนึ่งต่อไปได้ หรือไม่สามารถที่จะเข้าใจมโนทัศน์หนึ่ง ๆ ได้ การเสริมต่อการเรียนรู้อาจจะเกิดได้ระหว่างครูกับนักเรียนแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือการเสริมต่อการเรียนรู้ยังสามารถใช้ได้กับครูหนึ่งคนกับทั้งห้องเรียน ซึ่งเป็นแนวคิดของ ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

1. การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยครู (The instructor does it) ครูจะต้องออกแบบรูปแบบการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับงานใหม่หรืองานที่ยากนั้นอย่างไร ยกตัวอย่างเช่น ในการสอนการใช้ผังกราฟิก ครูอาจจะให้คู่มือที่มีข้อมูลบางส่วนของการใช้ผังกราฟิกแล้วใช้คำถาม ให้นักเรียนคิดและอธิยายว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลใดบ้างในผังกราฟิก

2. การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยชั้นเรียน (The class does it) ทั้งครูและนักเรียนร่วมกันทำงานนั้น ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนอาจจะเสนอแนะข้อมูลที่อาจจะเติมลงไปใน ผังกราฟิก แล้วครูก็จะเขียนรวบรวมคำแนะนำนั้นบนกระดาน แล้วนักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนเลือกเติมข้อมูลตามความคิดเห็นของตนเองผนวกกับข้อมูลที่ได้รับการแนะนำครูและเพื่อนร่วมชั้นเรียนจากบนกระดานแล้วเติมลงไปในสำเนาผังกราฟิกของตนเอง

3. การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยกลุ่มย่อย (The group does it) นักเรียนจะจับคู่กับเพื่อน 2 คนหรือจับกลุ่มเป็นกลุ่มย่อย ๆ เพื่อที่จะเติมเต็มผังกราฟิก และหากมี

เนื้อหาที่ซับซ้อนมาก อาจจำเป็นต้องใช้การเสริมต่อการเรียนรู้หลายครั้งในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน เพื่อจะช่วยให้นักเรียนเกิดความเชี่ยวชาญมากขึ้น

4. การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยตนเอง (The individual does it) เป็นขั้นตอนที่ฝึกความเป็นอิสระของตนเอง โดยที่นักเรียนแต่ละคนแสดงให้เห็นว่ามีความชำนาญในการทำงาน (กล่าวคือ นักเรียนสามารถจะเติมเต็ม ผังกราฟิก และสามารถอธิบายถึงความความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้อย่างเหมาะสม) และได้รับการฝึกฝนเท่าที่จำเป็นที่จะสามารถทำให้พวกเขาทำงานชิ้นนั้นได้อย่างอัตโนมัติและรวดเร็ว

Alibali (2006) แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีพัฒนาการทางการเรียนรู้ได้ด้วยการทำงาน ครูสามารถใช้ความหลากหลายของการเสริมต่อการเรียนรู้ที่สามารถรองรับความแตกต่างกันของระดับขององค์ความรู้ของนักเรียนหรือศักยภาพของนักเรียนที่แตกต่างกัน เนื้อหาที่มีซับซ้อนมากขึ้นอาจทำให้ครูจำเป็นจะต้องเพิ่มปริมาณของการเสริมต่อการเรียนรู้ให้กับนักเรียนในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดความเชี่ยวชาญในงานนั้น ๆ โดยสามารถแบ่งประเภทของการเสริมต่อการเรียนรู้ในการจัดการเรียนการสอนได้ ดังนี้

1.การนำเสนอมโนทัศน์ใหม่ (Advance organizers) เป็นเครื่องมือในการแนะนำเนื้อหาใหม่ และช่วยให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับหัวข้อนั้น เช่น ใช้แผนภาพเวนน์ในการเปรียบเทียบข้อมูล ใช้ผังงาน (Flow chart) ในการแสดงกระบวนการต่าง ๆ และใช้ผังองค์กร (Organization chart) เพื่อใช้แสดงลำดับความสัมพันธ์ ใช้เค้าโครง (Outline) เพื่อแสดงเนื้อหา ใช้เทคนิคช่วยจำ (Mnemonics) เพื่อช่วยในการจดจำ ใช้ข้อความ(Statements) เพื่อระบุถึงงานและเนื้อหาของงาน ใช้รูบริค (Rubric) เพื่อจะรู้ว่าเราต้องการอะไรในงานนั้น ๆ

2. บัตรคำใบ้ (Cue cards) มีการเตรียมบัตรให้แก่นักเรียนหรือกลุ่มนักเรียนเพื่อให้พวกเขาได้ร่วมกันอธิบายเกี่ยวกับหัวข้อใดหัวข้อหนึ่ง หรือเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เช่น บัตรคำศัพท์ เพื่อช่วยในการเตรียมการสอบ ประโยคแรกที่มีความเฉพาะเจาะจงของเนื้อหาเพื่อให้เติมเต็มให้สมบูรณ์ สูตรต่าง ๆ เพื่อช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา คำอธิบายมโนทัศน์เพื่อช่วยในการให้นิยาม

3. มโนทัศน์และผังความคิด (Concept and mind maps) คือแผนที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ โดยอาจมีแผนที่ที่เติมเต็มแล้วหรือเติมยังไม่เต็มให้กับนักเรียนเพื่อเติมให้เต็ม หรือนักเรียนอาจจะสร้างผังความคิดขึ้นเอง โดยขึ้นอยู่กับความรู้เกี่ยวกับงานนั้นในปัจจุบันของนักเรียน

4. ตัวอย่าง (Examples) อาจจะเป็นตัวอย่างที่สุ่ม (Sample) ตัวอย่างจริง (Specimen) รูปภาพ (Illustration) และตัวอย่างปัญหา (Problem) ที่ใช้เป็นตัวแทนของบางสถานการณ์

5. คำอธิบาย (Explanations) ข้อมูลที่ความละเอียดมากขึ้น ที่จะช่วยทำให้นักเรียนได้คิดเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้น ๆ โดยอาจเป็นคำอธิบายที่เขียนหรือการพูดก็เป็นได้

6. ใบงาน (Handouts) มีการเตรียมใบงานที่มีรานละเอียดของข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับงานนั้น ๆ แต่ไม่ต้องละเอียดมากนัก เพื่อให้นักเรียนสามารถที่จะจดบันทึกลงไปประกอบได้ด้วย

7. คำแนะนำ(Hints) คือ คำแนะนำที่จะช่วยให้นักเรียนทำงานต่อได้ด้วยตนเอง

8. การเตือนความจำ (Prompts) ลักษณะทางกายภาพหรือทางวาจาที่ใบ้เพื่อช่วยในการเตือนความจำหรือเตือนความรู้ที่เรียนมาก่อนหน้าหรือสิ่งที่นักเรียนรู้มาแล้ว

ลักษณะทางกายภาพได้แก่ การชี้นิ้ว การพยักหน้า การกระพริบตา การแตะเท้าเป็นจังหวะ

ลักษณะทางวาจา ได้แก่ คำพูด การส่งคำถาม เช่น “เริ่มได้” “หยุด” “นั่นแหละ” “เดี๋ยวนี้นะ” หรือเป็นคำถาม เช่น “จะต้องกดปุ่มไหนเพื่อจะแทรกรูปภาพคะ” หรือ “บอกได้ไหมคะ ว่าทำไมจึงเป็นเช่นนี้”

9. บัตรคำถาม (Question Cards) บัตรคำถามที่เตรียมมาสำหรับหัวข้อนั้น ๆ โดยเฉพาะ เพื่อแจกให้กับนักเรียนหนึ่งคนหรือนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย เพื่อถามที่เกี่ยวกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง

10. คำถามที่ไม่สมบูรณ์ (Question stems) ประโยคที่ไม่สมบูรณ์ซึ่งนักเรียนจะต้องเติมเต็ม จะช่วยนักเรียนเกิดความคิดที่ลึกซึ้งขึ้น โดยใช้คำถามสมมติ เช่น ขึ้นถ้าประโยคว่า “ถ้าหาก....”

11. เนื้อเรื่อง (Stories) เนื้อเรื่องที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหัวข้อที่ซับซ้อนหรือเป็นสิ่งที่นามธรรม ให้เกี่ยวข้องกับสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคย หรืออาจจะเป็นเนื้อเรื่องที่เล่าต่อกันมาเพื่อเป็นแรงบันดาลใจให้กับนักเรียน

12. การเสริมต่อที่มองเห็นได้ (Visual scaffolds) เช่น การชี้ไปที่วัตถุ การแสดงท่าทางด้วยมือ แผนภูมิรูปภาพและกราฟต่าง ๆ และวิธีการเน้นข้อมูลด้วยสายตาโดยการใช้ปากกาเน้นข้อความเพื่อเน้นความสำคัญนั้น

Hogan & Pressley (1997 cite in Stillman, 2012) กล่าวว่าการเตรียมการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ในการจัดการเรียนการสอนนั้นไม่แตกต่างจากเทคนิคการสอนอื่นที่ครูควรใช้การเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเติมเต็มการจัดการเรียนรู้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ในขณะที่เราคาดหวังว่าจะให้นักเรียนทุกคนของเราเข้าใจเนื้อหาต่าง ๆ ในรายวิชาที่สอน แต่นักเรียนแต่ละคนไม่มีความรู้ที่จำเป็นหรือความสามารถตั้งแต่เริ่มต้นดังที่ครูได้มุ่งหวังไว้ การเสริมต่อการเรียนรู้สามารถนำมาใช้เพื่อสนับสนุนในขณะที่นักเรียนกำลังเริ่มที่จะทำงานตามวัตถุประสงค์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นหรือยากให้เสร็จสมบูรณ์ได้ ซึ่งการรอบรู้และเชี่ยวชาญในเนื้อหาวิชาจะช่วยให้ครูสามารถระบุสิ่งที่ต้องการการเสริมต่อการเรียนรู้ การวางแผนที่จะใช้การเสริมต่อการเรียนรู้กับบางหัวข้อที่มีความยากสำหรับนักเรียนหรือเป็นสิ่งที่เป็นนามธรรม ได้เสนอให้เห็นว่าแนวทางการฝึกใช้การเสริมต่อการเรียนรู้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

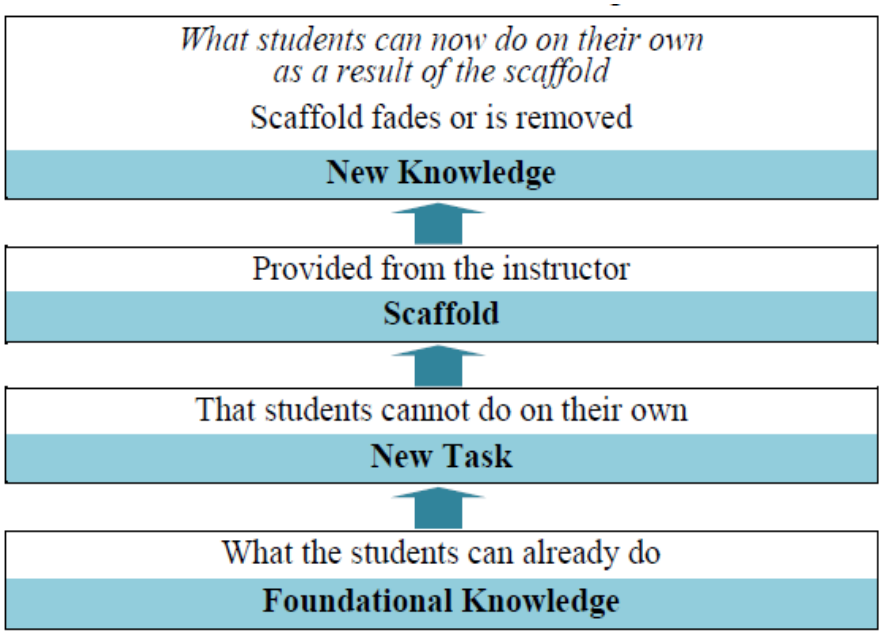
1. การสำรวจองค์ความรู้และความคิดพื้นฐานเดิม (Foundational Knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

2. การสำรวจภาระงานที่ไม่คุ้นเคย (New Task) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนยังไม่สามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

3. การเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffold) เพื่อให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนโดยผ่านกระบวนการการจัดการเรียนการสอน

4. การได้มาซึ่งองค์ความรู้ใหม่ (New knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสนับสนุนสิ้นสุดลง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University



ภาพที่ 7 ภาพประกอบรูปแบบการจัดการเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ (illustrative model of scaffolding)

Links (2008) ได้เสนอแนะแนวทางการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้โดยได้ดัดแปลงมาจาก Hogan& Pressley (1997)

- เลือกงานที่เหมาะสมที่ตรงกับเป้าหมายของหลักสูตร วัตถุประสงค์การเรียนรู้ของรายวิชาและความต้องการของนักเรียน
- อนุญาตให้นักเรียนที่จะช่วยในการสร้างเป้าหมายการเรียนการสอน (ซึ่งเป็นสิ่งที่สามารถเพิ่มแรงจูงใจของนักเรียนและความมุ่งมั่นในการเรียนรู้ของนักเรียน)
- พิจารณาภูมิหลังของนักเรียนและองค์ความรู้พื้นฐานเพื่อเป็นข้อมูลเบื้องต้นประเมินพัฒนาการของนักเรียน และสื่อการจัดการเรียนการสอนที่ง่ายเกินไปจะทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายได้อย่างรวดเร็วและลดแรงจูงใจของนักเรียน นอกจากนี้สื่อการจัดการเรียนการสอนที่ยากเกินไปไม่สามารถดึงดูดระดับความสนใจของนักเรียนได้
- ใช้ความหลากหลายในการสนับสนุนพัฒนาการการเรียนรู้ของนักเรียนผ่านงานที่ให้นักเรียนทำ (เช่น การเตือนความจำ การให้คำถาม คำแนะนำ แบบจำลอง การเสริมต่อที่มองเห็นได้)

- การเสริมแรงให้กำลังใจและให้การยกย่องโดยการใช้การถามคำถามแล้วให้นักเรียนอธิบายความพัฒนาการของพวกเขาเอง เพื่อให้นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการพัฒนาไปสู่เป้าหมาย
- ตรวจสอบพัฒนาการของนักเรียนผ่านข้อมูลป้อนกลับที่ได้รับจากนักเรียน (นอกเหนือจากข้อเสนอแนะของครูแล้วนักเรียนควรสรุปสิ่งที่ประสบความสำเร็จและที่ยังไม่ประสบความสำเร็จเพื่อให้นักเรียนตระหนักถึงพัฒนาที่ตนเองมี)
- สร้างบรรยากาศที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ และครูไม่ควรมีการตอบสนองทางลบต่อนักเรียน เพราะจะเป็นการสร้างบรรยากาศที่ไม่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ได้
- ครูช่วยให้นักเรียนทำงานได้ด้วยตนเองมากขึ้น ลดความช่วยเหลือจากการจัดการเรียนการอสอนและฝึกให้พวกเขาสามารถปฏิบัติงานในบริบทที่แตกต่างกัน

จากหลักการจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ดังนี้ หลักการ 1. การสำรวจองค์ความรู้และความคิดพื้นฐานเดิม (Foundational Knowledge) หลักการ 2. การสำรวจภาระงานที่ไม่คุ้นเคย (New Task) หลักการ 3. การเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffold) หลักการ 4. การได้มาซึ่งองค์ความรู้ใหม่ (New knowledge)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.4 ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้ ไว้ดังนี้

ข้อดี

Van Der Stufy (2002 อ้างถึงใน โศจิวัจน์ เสริฐศรี, 2553) เสนอข้อดีของการเสริมต่อการเรียนรู้ ดังนี้

1. ข้อดีของการสอนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ประการแรก คือ การให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียน นักเรียนไม่ฟังข้อมูลที่นำเสนออย่างเฉื่อยชา แต่ได้รับการกระตุ้นผ่านครูในการสร้างความรู้พื้นฐานและสร้างความรู้ใหม่ ๆ ในการทำงานกับนักเรียนที่มีความภาคภูมิใจในตัวเองต่ำ หรือนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียน ต้องหาโอกาสในการให้ผลย้อนกลับในทางบวกแก่นักเรียน

2. ข้อดีของการสอนการเสริมต่อการเรียนรู้ประการที่สอง คือ การสอนแบบเสริมต่อกาเรียนรู้สร้างแรงจูงใจแก่นักเรียน ทำให้นักเรียนต้องการเรียนรู้

3. ข้อดีของการสอนการเสริมต่อการเรียนรู้ประการที่สาม คือ ช่วยลดความสับสนของนักเรียน ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญมากสำหรับนักเรียนที่มีความต้องการพิเศษที่อาจสับสนได้ง่ายแล้วก็จะไม่ยอมรับและปฏิเสธการเข้าร่วมการเรียนรู้ระหว่างสถานการณ์ในสถานการณ์หนึ่ง

Links (2008)เสนอข้อดีของการเสริมต่อการเรียนรู้ ดังนี้

1. การท้าทายนักเรียนผ่านวิธีการเรียนรู้และวิธีการค้นพบ

2. การมีส่วนร่วมของนักเรียนในการอภิปรายอย่างมีความหมายและมีชีวิตชีวาในชั้นเรียนขนาดใหญ่และกลุ่มย่อยขนาดเล็ก

3. การกระตุ้นให้นักเรียนเรียนรู้วิธีการเรียนรู้ที่ดีขึ้น

4. การเพิ่มโอกาสสำหรับนักเรียนรับรู้และเข้าใจถึงวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอน

5. การจัดการเรียนการสอนเป็นรายบุคคล (โดยเฉพาะในห้องเรียนที่มีขนาดเล็ก)

6. การเปิดโอกาสให้มีการช่วยเหลือระหว่างที่มีการจัดการเรียนการสอนทั้งระหว่างครูกับนักเรียนและนักเรียนกับนักเรียน

7. การเสริมต่อการเรียนรู้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์การเรียนรู้อื่น ๆ

8. สร้างบรรยากาศในห้องเรียนที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้

ข้อจำกัด

Links (2008) เสนอข้อเสียของการเสริมต่อการเรียนรู้ ดังนี้

1. การวางแผนและการจัดการเรียนการสอตามแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ต้องใช้เวลาและทรัพยากรมากกว่าการจัดการเรียนการสอนแบบปกติ

2. การเลือกรูปแบบของการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เหมาะสมต่อลักษณะการเรียนรู้และการสื่อสารของนักเรียนแต่ละคน

3. การระบุได้ว่าว่าเมื่อใดที่ครูต้องลดการช่วยเหลือสนับสนุนจากเสริมต่อการเรียนรู้หรือเมื่อใดที่นักเรียนไม่ต้องการการช่วยเหลือสนับสนุนจากเสริมต่อการเรียนรู้แล้ว

4. ไม่สามารถรับรู้ถึงความพร้อมในการเรียนรู้ของตัวนักเรียนแต่ละคน ทั้งทางด้านร่างกายและจิตใจ เพื่อที่จะสามารถจัดการเรียนการสอนได้อย่างเหมาะสม

Van Der Stufy (2002 อ้างถึงใน โศจิวัจน์ เสริฐศรี, 2553) เสนอข้อเสียของการเสริมต่อการเรียนรู้ ดังนี้

1. ข้อจำกัดของการสอนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ประการแรก คือ เป็นข้อจำกัดสำหรับครูตั้งแต่การพัฒนาการสนับสนุนและการเตรียมบทเรียนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding Lessons) เพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการของนักเรียนแต่ละคน ต้องใช้เวลามาก อีกทั้งการเสริมต่อการเรียนรู้กับนักเรียนรายบุคคลในชั้นเรียนที่มีจำนวนนักเรียนเป็นจำนวนมากเป็นสิ่งที่ท้าทายมาก

2. ข้อจำกัดของการสอนการเสริมต่อการเรียนรู้ประการที่สอง คือ หากครูไม่ได้รับการฝึกการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้อย่างเหมาะสม อาจนำการเสริมต่อการเรียนรู้ไปใช้อย่างไม่เหมาะสมได้

3. ข้อจำกัดของการสอนการเสริมต่อการเรียนรู้ประการที่สาม คือ ครูจำเป็นต้องหยุดการควบคุมและปล่อยให้นักเรียนทำผิดได้ ซึ่งเป็นสิ่งที่ยากสำหรับครูในการปฏิบัติจริง

4. ข้อจำกัดของการสอนการเสริมต่อการเรียนรู้ประการที่สี่ คือ คู่มือครูและคู่มือหลักสูตรที่มีอยู่ไม่มีตัวอย่างของการเสริมต่อการเรียนรู้ หรือเค้าโครงของวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ซึ่งน่าจะเหมาะสมกับบทเรียนที่มีเนื้อหาเฉพาะ

จากข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ดังนี้

ข้อดี เพิ่มโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนรู้ตามศักยภาพของตนเอง

ข้อจำกัด ครูต้องมีทักษะการสอนที่ดีและใช้ระยะเวลาในการเตรียมตัว

3. ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาและเชื่อมโยงความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์มาใช้ดำเนินการหาคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล โดยมีประเด็นที่นำเสนอ 7 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

3.1 ความหมายของโจทย์ปัญหา

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของโจทย์ปัญหา ไว้ดังนี้

Adams, Ellis, and Beeson (1977) ได้ให้ความหมายไว้ว่าโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์คือโจทย์ภาษา (Word problem) หรือโจทย์เชิงเรื่องราว (Story problem) หรือโจทย์เชิงถ้อยคำบรรยาย(Verbal problem) นั่นคือโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณและต้องมีการตัดสินใจลงมือกระทำเพื่อหาคำตอบโดยที่ปัญหานั้นจะเป็นปัญหาที่ใช้ภาษาเรื่องราวหรือคำพูด เป็นการบรรยายสภาพการณ์ด้วยถ้อยคำหรือข้อความและตัวเลขโดยต้องการหาคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลขผู้แก้ปัญหาต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดในการแก้โจทย์ปัญหานั้น

Henderson and Pingry (1953) กล่าวว่าโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการวิธีการแก้ไขหรือหาคำตอบซึ่งผู้แก้ปัญหาจะทำได้ดีต้องมีกระบวนการที่เหมาะสมโดยใช้ความรู้และประสบการณ์ประกอบการตัดสินใจ

Lesh and Zawojewski (2007) กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาว่าเป็นสภาพการณ์ที่ผู้แก้โจทย์ปัญหาต้องการจะค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและผู้แก้ปัญหาต้องพยายามแปลความหมายวิเคราะห์ข้อมูลที่มีอยู่เพื่อที่จะค้นพบวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง

Reys, Lindquist, Lambdin, and Smith (2014) ได้กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่บุคคลต้องการบางสิ่งบางอย่างและไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีต้องหาวิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบโดยใช้ความพยายามและการคิดในขั้นสูง

จากความหมายของโจทย์ปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หมายถึง สถานการณ์ เรื่องราวหรือคำถามที่เป็นภาษาที่ต้องใช้กระบวนการและความรู้ทางคณิตศาสตร์ช่วยในการหาคำตอบ

3.2 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องกับโลกแห่งความจริง (Mathematical problems with and without a connection to the real world) (Schukajlow et al., 2012) มักจะถูกแบ่งออกเป็นสามกลุ่ม ดังนี้ โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลอง โจทย์ปัญหาที่ถูกแต่งขึ้น และโจทย์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ความแตกต่างระหว่างโจทย์ทั้งสามกลุ่มนั้นสามารถอธิบายได้โดยการบวนการคิดที่มีเหตุผลซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาเหล่านี้

1. โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลอง (Modeling problems) กระบวนการถ่ายโอนในสิ่งที่จำเป็นระหว่างความเป็นจริงกับคณิตศาสตร์เป็นหลักของการกระทำในการสร้างแบบจำลอง หนึ่งในรูปแบบการดำเนินการที่จะอธิบายการกระทำในการสร้างแบบจำลองที่เป็นวงจรการสร้างแบบจำลองที่เสนอโดย Blum and Leiss (2007) ในอุดมคติ รูปแบบกระบวนการแก้ปัญหาสำหรับปัญหาการสร้างแบบจำลองมีลักษณะที่โดดเด่นลำดับการกระทำ7 ขั้นตอน ต่อไปนี้

1. การทำความเข้าใจปัญหาและการสร้างองค์ความรู้ของแต่ละคน" สถานการณ์ของแบบจำลอง (Situation model)"

2. ลดความซับซ้อนของส่วนประกอบในสถานการณ์ของแบบจำลอง และทำให้เป็นการสร้างแบบจำลองจากของจริง (Real model)

3. “Mathematising” คือการทำความเข้าใจแบบจำลองจากของจริง(Real Model) ให้กลายเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model)

4. การใช้กระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์

5. การทำความเข้าใจเกี่ยวกับผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์นี้โดยคำนึงถึงความเป็นจริงที่เป็นและทำให้เข้าใจถึงผลลัพธ์ที่เป็นจริง

6. การตรวจสอบผลลัพธ์นี้มีการอ้างอิงถึงสถานการณ์ต้นแบบเดิม ถ้าผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นที่น่าพอใจ กระบวนการอาจจะกลับไปเริ่มต้นอีกครั้งในขั้นตอนที่ 2

7. การแสดงกระบวนการการแก้ปัญหาทั้งหมด

การจำแนกความแตกต่างระหว่างแต่ละขั้นตอนจะเป็นประโยชน์สำหรับการฟื้นฟูกระบวนการสร้างแบบจำลองที่ใช้โดยนักเรียนเมื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แต่กระบวนการที่เกิดขึ้นจริงของนักเรียนมักจะไม่ได้โดยตรง แต่ข้ามไปมาและออกไปหลายครั้งระหว่างคณิตศาสตร์กับความเป็นจริง (Blum & Leiss, 2007; Borromeo Ferri, 2007)

มีหลายวงจรการสร้างแบบจำลองอื่น ๆ ที่จะสามารถนำมา ใช้ในการอธิบายการกระทำของนักเรียน ขณะที่ใช้การสร้างแบบจำลองในการแก้ปัญหา (Galbraith & Stillman, 2006) ความได้เปรียบของลักษณะของวงจรการสร้างแบบจำลองเจ็ดขั้นตอน คือ การแยกแยะระหว่าง การสร้างแบบจำลองของสถานการณ์จริงและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งช่วยให้เห็นความแตกต่างระหว่างความยากในการทำความเข้าใจในสถานการณ์ที่กำหนดให้ ในการลดความซับซ้อน ของส่วนประกอบของข้อมูล ที่ได้จากสถานการณ์ และในการเลือกคำอธิบายทางคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสมในขณะที่นักเรียนอยู่ในระหว่างกระบวนการแก้ปัญหา และยังช่วยครูในการเลือกในสองสิ่งที่เหมาะสม เช่น จุดมุ่งหมายที่ดีและการปรับการแทรกแซงโดยเฉพาะอย่างยิ่งในขั้นตอนการทำความเข้าใจในการเริ่มต้นกระบวนการสร้างแบบจำลอง การแสดงถึงวงจรเจ็ดขั้นตอนนี้ในกรณีทั่วไปสามารถอธิบายได้ถึงรายละเอียดของทั้งสองสิ่งต่อไปนี้ไว้อย่างพอเพียง คือ ความสนใจในของการกระทำทางปัญญาที่สำคัญที่เกิดขึ้นในกระบวนการการสร้างแบบจำลองที่เกิดขึ้นจริงและความชัดเจนที่พอเพียงในการแนะนำในการสังเกตสิ่งที่จำเป็นและการวิเคราะห์ในวิธีการอย่างถี่ถ้วน เช่น ตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองในการแก้ปัญหาของสนามเด็กเล่นหนึ่งตามสภาพจริง โดยนักเรียนใช้ทั้ง 7 ขั้นตอนมาการสร้างแบบจำองในการแก้ปัญหา

2. โจทย์ปัญหาที่ถูกแต่งขึ้น (Dressed up word problems) โจทย์ปัญหาที่ถูกแต่งขึ้นมีความเกี่ยวข้องกับความเป็นจริงเป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามปัญหาเหล่านี้มักมีความสัมพันธ์กับความเป็นจริงซับซ้อนน้อยกว่าโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลอง ตั้งแต่รูปแบบความเป็นจริงที่ง่ายและให้รายละเอียดต่าง ๆ ตั้งแต่เริ่มต้นเพื่อที่จะอธิบายโจทย์ปัญหาเหล่านั้น เมื่อสร้างโจทย์ปัญหาดังกล่าวนั้นขึ้นแน่นอนว่า ต้องเป็นหัวข้อเกี่ยวข้องกับทางคณิตศาสตร์บางอย่างถูก " แต่งขึ้น " โดยมีการอ้างอิงถึง ความเป็นจริง และข้อมูลทั้งหมดที่จำเป็นสำหรับการใช้ในการหาแนวทางการแก้ปัญหาจากข้อความที่ปรากฏ (และไม่มีข้อมูลอื่น ๆ) ดังนั้นนักเรียนไม่จำเป็นที่จะต้องตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับการขาดหายของข้อมูลหรือการเลือกใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องในขณะที่กำลังดำเนินการแก้ปัญหาดังกล่าว แต่ก็เป็นการรู้กันดีว่าการตั้งสมมติฐานเป็นสิ่งหนึ่งที่เป็นอุปสรรคมาก

ที่สุดทางด้านพุทธิพิสัยในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของนักเรียน การตรวจสอบความเป็นจริงของผลลัพธ์ยังคงเป็นสิ่งที่ง่ายมาก เพราะส่วนใหญ่จะตรวจสอบเฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับทางคณิตศาสตร์ และความหลากหลาย " วงจรการสร้างแบบจำลอง " อาจไม่จำเป็นต้องเป็นเช่นนี้ ความแตกต่างของลักษณะในกระบวนการการแก้ปัญหาทำให้เห็นความแตกต่างความเป็นไปได้ระหว่างประเภทของปัญหาทั้งสองสำหรับครูและนักเรียน โจทย์ปัญหาเรื่องสนามฟุตบอลที่ถูกแต่งขึ้นที่มีความเกี่ยวข้องกับความเป็นจริงแต่มีความซับซ้อนน้อยและให้ข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาไว้อย่างเพียงพอ

3. โจทย์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ (Intra-mathematical problems) โจทย์ปัญหาประเภทนี้ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงกับความเป็นจริงใด ๆจุดเริ่มต้นของกระบวนการแก้ปัญหา คือ สถานการณ์แบบจำลองที่หมายถึงสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นโจทย์ที่ใช้การแก้ปัญหาบนพื้นฐานนี้โดยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเช่น โจทย์ที่ต้องการหาเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

จากประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวไว้ข่างต้น สรุปได้ว่า ประเภทของปัญหามี 3 แบบ คือ โจทย์ที่เกี่ยวข้องกับหลักการทางคณิตศาสตร์เท่านั้น โจทย์ที่ถูกแต่งขึ้นโดยบูรณาการหลักการทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในโลกแห่งความเป็นจริง โจทย์ที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติหรือสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

3.3 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Polya (1957b) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการหาวิถีทางที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหา เป็นการหาวิธีที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกหาวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่เพื่อจะให้ได้ข้อลงเอย หรือคำตอบที่มีความชัดเจน แต่ว่าสิ่งเหล่านี้ไม่ได้เกิดขึ้นในทันทีทันใด

Krulik and Rudnick (1993) กล่าวว่า เป็นสถานการณ์ที่ต้องการการคิดสังเคราะห์ความรู้ที่ได้เรียนมาเพื่อหาทางออกซึ่งเป็นกระบวนการที่บุคคลใช้ความรู้พื้นฐานหรือความรู้เดิมทักษะและความเข้าใจในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยกระบวนการดังกล่าวเริ่มต้นด้วยการเผชิญปัญหาและหาข้อสรุปถึงคำตอบซึ่งนักเรียนต้องสังเคราะห์ในสิ่งที่เขาได้เรียนมาและนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่

Cruikshank and Sheffield (1992) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่าปัญหาคณิตศาสตร์หมายถึงคำถามหรือสถานการณ์ที่ทำให้เกิดความงุนงงซึ่งนักเรียนไม่คุ้นเคยไม่สามารถหาวิธีการแก้ได้ทันทีทันใดหรือไม่ทราบวิธีการหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วปัญหาคณิตศาสตร์เป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แต่ไม่ได้หมายความว่าจะเกี่ยวกับจำนวนเท่านั้นปัญหาศาสตร์บางปัญหาเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับสมบัติทางกายภาพหรือการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวน

สสวท. (ม.ป.ป.) การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หมายถึงกระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหากลยุทธ์แก้ปัญหาและประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์

จากความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์คือ กระบวนการในการประยุกต์องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เชื่อมโยงกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ในการหาคำตอบให้กับสถานการณ์จริงสถานการณ์จำลองหรือปัญหาไม่สามารถหาวิธีการแก้ได้ทันทีทันใด

3.4 ความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหา

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหา ไว้ดังนี้

Lester (1977) การแก้ปัญหาเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ และเป็นเป้าหมายสูงสุดของหลักสูตร และการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

NCTM (1980) การแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นที่สำคัญของหลักสูตร เป็นเป้าหมายแรกของการเรียนการสอน และเป็นส่วนสำคัญของกิจกรรมคณิตศาสตร์

Fisher (1987) ทักษะการแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐานสำหรับการดำเนินชีวิตในแต่ละวัน ส่งเสริมความสามารถในระดับต่าง ๆ ที่จะนำไปสู่การประสบความสำเร็จในชีวิต ทักษะกระบวนการแก้ปัญหานี้จะมีผลกระทบต่อทักษะอื่น ๆ ได้แก่ความคิดสร้างสรรค์ มีวิจารณญาณและส่งเสริมกลยุทธ์ต่าง ๆ ได้แก่ การสังเกต การออกแบบ การตัดสินใจ การทำงานเป็นกลุ่ม และใช้เป็นเครื่องมือหาคำตอบการแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่สำคัญในการดำรงชีวิตของมนุษย์ ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงมีความสำคัญในการจัดการศึกษาของมนุษย์ด้วย

จากความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐานที่มีความจำเป็นในการดำรงชีวิต เพราะเป็นพื้นฐานในการส่งเสริมต่อการคิด การตัดสินใจ และนำการประสบความสำเร็จในชีวิต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

3.5 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Polya (1957a)กล่าวถึงกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหาเป็นขั้นตอนการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจคำประโยคย่อย ๆ สัญลักษณ์ต่าง ๆ ของปัญหาโดยนักเรียนต้องสามารถสรุปปัญหาเป็นภาษาหรือคำพูดของตนเองได้สามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดสิ่งใดมาให้และโจทย์ถามหาอะไร

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนสำคัญที่จะต้องพิจารณาโดยอาศัยข้อมูลจากขั้นที่ 1 นำไปสู่การกำหนดว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีใดโดยพิจารณาว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ก่อให้เกิดผลอย่างไรได้บ้างและต้องใช้ความรู้อะไรอีกบ้างที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นโดยการนำทฤษฎีหลักการหรือกฎสูตรนิยามที่เรียนมากำหนดเป็นวิธีการในการแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบเป็นขั้นดำเนินการตามแผนหรือวิธีการที่เลือกไว้จนกระทั่งได้คำตอบสำหรับปัญหาที่มีการคิดคำนวณขั้นนี้เป็นขั้นที่ลงมือคิดคำนวณเพื่อหาคำตอบจากวิธีการทางคณิตศาสตร์

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบเป็นขั้นที่ต้องพิจารณาตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาของตนว่าเรียบร้อยครบทุกกรณีที่เป็นไปได้หรือไม่ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

Krulik (1977 อ้างถึงใน สุพัตรา จอมคำสิงห์, 2552) ได้สรุปกระบวนการในการสอนแก้ปัญหาให้ได้ผลดีควรเป็นไปตามขั้นตอนดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจว่าโจทย์ต้องการถามอะไรต้องการอะไรมีข้อมูลอะไรที่โจทย์บอกแล้วเขียนรูปหรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2. หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์บอกและข้อมูลที่โจทย์ควรทราบด้วยการคิดย้อนกลับว่าเราเคยพบปัญหาเช่นนี้มาก่อนหรือไม่แล้วเริ่มตั้งสมมติฐานหลายๆข้อเพื่อหาทางทดสอบสมมติฐานนั้น ๆ

3. หาวิธีการที่ถูกต้องเพื่อทดสอบสมมติฐาน

4. ตรวจสอบผลลัพธ์ว่าสิ่งที่ค้นพบนั้นเป็นการตอบปัญหาที่ถูกต้องแน่นอนเพียงไร

Sternberg (1999 อ้างถึงใน สุพัตรา จอมคำสิงห์, 2552) ได้กล่าวถึงขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาไว้ 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุปัญหา (Problem Identification) เพื่อกำหนดขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องควรระบุสาเหตุของปัญหาที่แท้จริงก่อน

2. การจำกัดความของปัญหา (Definition of Problem) เมื่อสามารถระบุปัญหาที่แท้จริงได้แล้วจำเป็นต้องให้คำจำกัดความของปัญหาเพราะหากไม่มีการให้คำจำกัดความหรือคำจำกัดความของปัญหานั้นคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริงโอกาสในการแก้ปัญหาได้สำเร็จจะลดน้อยลง

3. การสร้างกลยุทธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Constructing Strategy for Problem Solving) เป็นขั้นตอนการวางแผนกลยุทธ์ต่าง ๆ และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาที่

ซับซ้อนให้เห็นเป็นขั้นตอนหรือสังเคราะห์องค์ประกอบหลายชนิดที่มีความสัมพันธ์กันแล้วนำมาเชื่อมโยงกัน เพื่อใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหา

4. การจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Organizing Information about a Problem) เป็นการจัดระเบียบข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำไปใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จหรือการสร้างภาพในใจที่ช่วยในการกำหนดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาให้ชัดเจน

5. การจัดสรรทรัพยากรที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Allocation of Resources) คนส่วนใหญ่จะเผชิญหน้ากับปัญหาแต่ละปัญหาต้องใช้ทรัพยากรในปริมาณที่ต่างกันเช่นปัญหาบางตัวต้องอาศัยระยะเวลานานในการแก้ปัญหาและต้องการเครื่องมือหลายชนิดในขณะที่บางปัญหาอาศัยทรัพยากรเพียงเล็กน้อยทั้งนี้ประสิทธิภาพของการจัดสรรทรัพยากรในการแก้ปัญหาจึงขึ้นอยู่กับความรู้ความชำนาญของแต่ละบุคคลด้วย

6. การตรวจสอบการแก้ปัญหา (Monitoring Problem Solving) การแก้ไขปัญหาที่มีประสิทธิภาพจะต้องมีการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลาเพื่อให้รู้แน่ชัดว่าขั้นตอนต่าง ๆดำเนินไปอย่างถูกต้องและนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการหรือไม่เพราะหากพบว่ามีข้อบกพร่องเกิดขึ้นแล้วการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาจะช่วยให้เราสามารถแก้ไขข้อบกพร่องได้ทันท่วงที

7. การประเมินผลการแก้ปัญหา (Evaluation Problem Solving) เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายหลังจากการแก้ปัญหาสิ้นสุดลงซึ่งเป็นการประเมินความสำเร็จและทบทวนการทำงานในขั้นตอนต่าง ๆ บางครั้งการประเมินผลการแก้ปัญหานี้จะทำให้สามารถรู้ถึงกลยุทธ์ใหม่ที่จะนำไปปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหาในครั้งต่อไปให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

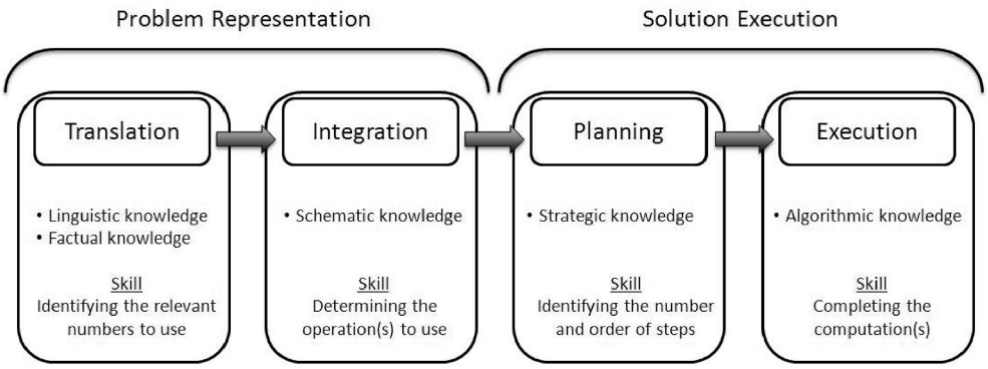
Kingsdorf and Krawec (2014) ได้ระบุทักษะที่จำเป็นในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาเพิ่มไว้ดังนี้

ระยะที่ 1 ระยะการแปลโจทย์ (Translation phase) จะเกี่ยวข้องกับความสามารถทางภาษา (Linguistic) กับความรู้เชิงประจักษ์ (Factual knowledge) โดยทักษะที่ใช้ในระยะนี้คือ การเลือกจำนวน (Number selection) ในการแก้โจทย์ปัญหา

ระยะที่ 2 ระยะการบูรณาการ (Integration phase) เกี่ยวข้องกับความรู้ของโครงสร้างทางปัญญา ทักษะที่ใช้คือการพิจารณาว่าจะใช้การดำเนินการใดในการแก้โจทย์ปัญหา

ระยะที่ 3 ระยะการวางแผน (Planning phase) เป็นความรู้ทางด้านยุทธศาสตร์การวางแผนซึ่งเกี่ยวข้องกับความรู้ของโครงสร้างทางปัญญาในขั้นตอนที่ 2 ทักษะที่ใช้ในขั้นตอนคือ สามารถระบุได้ว่ามีกี่ขั้นตอนในการดำเนินการแก้ปัญหานั้น ๆ

ระยะที่ 4 ระยะการลงมือทำ (Execution) ต้องใช้ความรู้ลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา (Algorithmic Knowledge) ทักษะที่ใช้ในขั้นตอนคือ ความสามารถในการคำนวณและการหาคำตอบที่สมบูรณ์ได้



ภาพที่ 8 แบบจำลองของ Mayer (Mayer's model) แสดงถึงกระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
(Mayer's (1984) model of the problem-solving process)(Kingsdorf & Krawec, 2014)

จากกระบวนการแก้ปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการแก้ปัญหา มี 4 ขั้นตอนคือ การวิเคราะห์โจทย์ การบูรณาการ การดำเนินการแก้ปัญหา และการสรุปคำตอบและการสะท้อนคิด

3.6 ธรรมชาติของปัญหาและการแก้ปัญหา

จากการศึกษา พบว่า Szetela and Nicol (1992) กล่าวว่าการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการของการเผชิญหน้ากับสถานการณ์ที่แปลกใหม่ กำหนดให้การเชื่อมโยงระหว่างข้อเท็จจริงที่ให้มา การระบุเป้าหมายและกลยุทธ์ที่คิดว่าจะเป็นไปได้สำหรับไปให้ถึงเป้าหมายของปัญหา คือในสถานการณ์ที่บุคคลแต่ละคนในตอนแรกไม่ทราบลำดับขั้นตอนที่แน่นอนซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาใด ๆ หรือขั้นตอนที่จะรับประกันว่าจะเป็นการแก้ปัญหา ซึ่งแล้วแต่ว่าเฉพาะบุคคลที่ปรารถนาจะแก้ปัญหา

ความสำเร็จในการแก้ปัญหานี้ขึ้นอยู่กับกระบวนการคิดอภิปัญญาเป็นซึ่งอธิบายโดย Garofalo and Lester Jr (1985) ตามรายการต่อไปนี้เป็นลำดับของการกระทำเพื่อการประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาที่

1. การเป็นตัวแทนได้อย่างเหมาะสมกับสถานการณ์ของปัญหาที่เกิดขึ้น
2. พิจารณากลยุทธ์ที่เหมาะสม
3. เลือกและทดลองใช้กลยุทธ์ที่มีแนวโน้มว่าเป็นการแก้ปัญหา
4. ตรวจสอบการดำเนินการด้วยส่วนที่เกี่ยวกับสภาพของปัญหาและเป้าหมาย
5. การได้มาและถ่ายทอดซึ่งเป้าหมายที่ต้องการ
6. ประเมินความเพียงพอและความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหา
7. ถ้าแก้ปัญหาที่มีการตัดสินผิดพลาดหรือไม่พอเหมาะแล้วทำให้ดีขึ้นโดยการปรับการเป็นตัวแทนของปัญหาและการดำเนินการด้วยกลยุทธ์ใหม่หรือการค้นหาขั้นตอนหรือมโนทัศน์ที่ผิดพลาด

กระบวนการคิดอภิปัญญาเหล่านี้เป็นสิ่งที่ยากจะประเมินได้ แต่การประเมินสามารถทำได้โดยการสร้างสถานการณ์ของปัญหาที่อำนวยความสะดวกในการสื่อสารของนักเรียนในความคิดของพวกเขา

3.7 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุแนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Zanzali and NAM (1999) ได้เสนอบทสรุปของระดับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

ระดับหนึ่ง

การหาคำตอบได้เพียงคำตอบเดียวในการแก้ปัญหาขั้นตอนเดียว โดยใช้วิธีการที่ชัดเจนและมีข้อจำกัดอยู่ในขอบเขตของจำนวนเต็ม ใช้เพียงกรณีเดียวในการแสดงการพิสูจน์

ระดับสอง ให้ทางเลือกของวิธีการในการหาวิธีแก้ปัญหา

ปัญหาที่มีหลายขั้นตอน โดยมีข้อจำกัดอยู่ในขอบเขตของจำนวนเต็ม

ปัญหาที่มีหนึ่งขั้นตอน โดยใช้จำนวนตรรกยะ โดยใช้มากกว่าหนึ่งกรณีที่มีความเฉพาะเจาะจงในการแสดงการพิสูจน์ ใช้คำศัพท์ทั่วไปในการนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่สาม

การเลือกวิธีการหนึ่งวิธีจากสองวิธีการในการแก้ปัญหาที่มีหลายขั้นตอน , การใช้จำนวนตรรกยะในขอบเขตจำกัดช่วงหนึ่ง

การใช้กรณีที่จำเป็นและเพียงพอที่จะแสดงการพิสูจน์

การใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่มีความไม่ชัดเจนในการนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

ระดับสี่

การดัดแปลงขั้นตอนวิธีการหนึ่งหรือมากกว่า เพื่อที่จะหาวิธีการแก้ปัญหาหลายขั้นตอน

การใช้จำนวนตรรกยะเต็มช่วงทั้งหมด

การสร้างบทพิสูจน์ที่มีโครงสร้างแต่ยังขาดรายละเอียดบางอย่างอยู่

การใช้คำศัพท์พื้นฐานและคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง แต่อาจจะขาดความชัดเจนสำหรับผู้อ่านภายนอก (External Reader)

ระดับห้า

การสร้างวิธีการดั้งเดิมที่จะหาวิธีการแก้ไขปัญหาแบบหลายขั้นตอน โดยใช้จำนวนตรรกยะเต็มช่วงทั้งหมด

การสร้างบทพิสูจน์อย่างมีโครงสร้างที่สามารถให้เหตุผลได้อย่างเต็มที่ในแต่ละขั้นตอน การใช้คำศัพท์พื้นฐานและคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง และมีความชัดเจนและมีคำตอบที่แม่นตรง

Dowshen (1980 cite in Laterell, 2000) ได้ทำการวิเคราะห์กลุ่มงานวิจัยที่สำคัญเกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในปี ค.ศ.1925-1975 มีบทสรุปอยู่ 12 ข้อ โดยหนึ่งในข้อสรุปนั้นระบุไว้ว่า

> “ลักษณะของผู้ที่แก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพสามารถระบุได้ดังนี้ ผู้ที่แก้ปัญหาได้อย่าง มีประสิทธิภาพมีแนวโน้มที่จะใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองอย่างกว้างขวาง มักจะมีแผนการบางอย่างในการเข้าสู่การแก้ปัญหา และแสดงความสามารถในการลองผิดลองถูก มีทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ดี มีความเชื่อมั่นในทางความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเอง มีแนวโน้มที่จะตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบและสามารถประมาณค่าคำตอบได้ และมักจะได้เข้าใจปัญหาก่อนที่จะลงมือแก้ปัญหานั้น”

NCTM (2000a) ได้ระบุมาตรฐานของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของครูและนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ไว้ดังนี้

มาตรฐานการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นกระบวนการของการประยุกต์ใช้ความหลากหลายของกลยุทธ์ที่เหมาะสมบนพื้นฐานของข้อมูลที่ให้ ที่อ้างอิง ที่จำได้หรือที่พัฒนาขึ้น นักเรียนต้องมีโอกาสบ่อย ๆ ในการกำหนด, การเผชิญกับปัญหาที่ซับซ้อนที่จำเป็นจะต้องใช้ความพยายามอย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งมีตัวชี้วัด ดังนี้

1. การสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ผ่านกระบวนการแก้ปัญหา
2. การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในวิชาคณิตศาสตร์และในบริบทอื่น ๆ
3. การประยุกต์ใช้และการปรับกลยุทธ์ให้เหมาะสมกับการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย
4. การตรวจสอบและการสะท้อนคิดให้เห็นถึงกระบวนการของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการแสดงความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์ โดยมีประเด็นที่นำเสนอ 5 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

4.1 ความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Davis (1984) การเป็นตัวแทนภายในจิตใจ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หรือเทคนิคหรือยุทธวิธีหรืออะไรก็ได้ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลกับการประมวลผลข้อมูล

Lesh, Post, and Behr (1987 cite in Goldin 1998) การอธิบายอย่างง่ายๆ และถูกจำกัดความรู้สึกเช่นเดียวกับภายนอก การแสดงให้เห็นเป็นรูปธรรมเกี่ยวกับความคิดรวบยอดภายในของนักเรียน ถึงแม้ว่า จะมีความแตกต่างในโครงสร้างของตัวแทนภายนอก (External representation) และตัวแทนภายใน (Internal representation)

Ball (1988) การแสดงแทนบางสิ่งบางอย่างคือการทาให้มีความชัดเจนภายใต้อิทธิพลของความคิด หรือเหตุที่จะทำให้รู้ หรือการรู้สึกโดยประสาทสัมผัส หรือเข้าใจความหมาย การใช้ตัวแทนคือสิ่งที่เป็นความคล้ายคลึงกัน เช่น ภาพ ถ้อยคำอธิบายโดยเฉพาะอย่างยิ่งมุมมองที่มีความจำเพาะเจาะจงหรือที่เกิดความประทับใจเกี่ยวกับบางสิ่งบางอย่างด้วยความตั้งใจ

Goldin (1998) การเป็นตัวแทนภายในจิตใจนั้นมีหลากหลาย มีทั้งแบบคำพูด แบบรูปภาพ แบบสัญลักษณ์ การวางแผน การควบคุมและการสอดส่องดูแล

NCTM (2000a) การสร้างและนำภาพ กราฟ ตาราง สัญลักษณ์ตัวแปรและข้อความภาษา เพื่อจัดกระทำ บันทึกและสื่อสารความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ทางสังคมและทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้น การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ด้วยภาพ กราฟ ตาราง สัญลักษณ์ตัวแปรและข้อความภาษา ออกมาตามแนวคิดและความเข้าใจในคณิตศาสตร์ เพื่อจัดกระทำ บันทึกและสื่อสารความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ทางสังคมและทางคณิตศาสตร์

4.2 ความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Greeno and Hall (1997) ได้สรุปความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่มีพลังสำหรับการคิดการใช้ตัวแทนจะช่วยให้เข้าใจคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนจะช่วยสนับสนุนการให้เหตุผลโดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจลักษณะสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

2. การใช้ตัวแทนช่วยให้นักเรียนรวบรวมความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

3. เมื่อนักเรียนสามารถถ่ายโยงความเข้าใจระหว่างการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกันจะช่วยเพิ่มความเข้าใจ การใช้ความคิดรวบยอด และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนต้องพัฒนาและใช้ตัวแทนในสถานการณ์ที่หลากหลาย

4. การสอนรูปแบบการใช้ตัวแทนจะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง

5. การใช้ตัวแทนเป็นการให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจ การสื่อสารข้อมูล และแสดงการให้เหตุผล

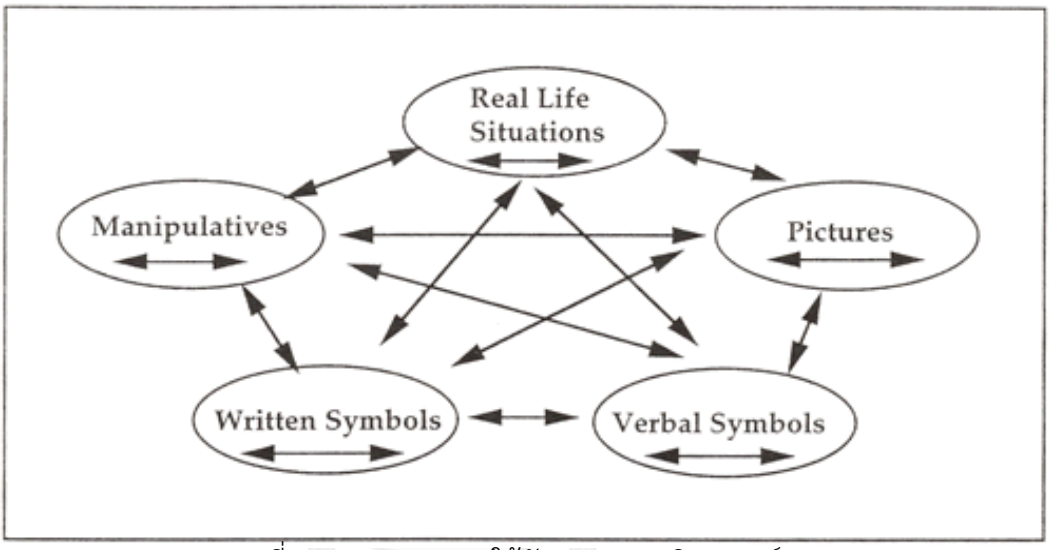
NCTM (2000a) การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากจะช่วยพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับความคิดรวบยอดได้อย่างลึกซึ้ง โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ในสิ่งที่นักเรียนได้สร้างขึ้น หรือเปรียบเทียบสิ่งต่าง ๆ ผ่านการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย เช่น วัตถุจริง ภาพวาด แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ ซึ่งตัวแทนข้างต้นจะช่วยในการสื่อสารของนักเรียน และเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อการทำความเข้าใจความคิดรวบยอดและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เป็นโอกาสที่นักเรียนจะได้ใช้การสื่อสารในการอ้างเหตุผลเพื่อสนับสนุนความเข้าใจของตนเองและคนอื่น ๆ และแสดงการใช้ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาในโลกจริง ซึ่งจะทำให้การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์กลายเป็นความรู้ที่ลึกซึ้ง

ความสำคัญของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า เป็นเครื่องมือในการทำให้เกิดความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น

4.3 รูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุรูปแบบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Lesh (1979) ความสามารถในการใช้ตัวแทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการที่หลากหลาย และเชื่อมโยงระหว่างวิธีการแสดงแทนที่แตกต่างกันไปนั้น แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 5 รูปแบบดังนี้



ภาพที่ 9 รูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

(Lesh, 1979)

1) การกระทำด้วยการใช้สื่ออุปกรณ์ (Manipulatives) เป็นการสะท้อนความเข้าใจและความคิดเห็นทางคณิตศาสตร์โดยผ่านสื่อที่เป็นวัตถุเชิงกายภาพ (Physical Materials) เช่น กระดาน ตะปู ลูกบาศก์ แท่งสี เป็นต้น การแสดงแทนด้วยการใช้อุปกรณ์เชิงกายภาพ (Manipulative aids) ของนักเรียนช่วยให้ครูเข้าใจระดับพัฒนาการของนักเรียน และเป็นพื้นฐานสำหรับการอภิปรายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย การแสดงแทนด้วยวิธีนี้อาจสะท้อนให้เห็นถึงความเชื่อของนักเรียน ซึ่งนักเรียนจำเป็นต้องมีประสบการณ์เชิงนามธรรมเพื่อการเรียนคณิตศาสตร์

2) รูปภาพ (Picture) เป็นการนำเอารูปมาช่วยสะท้อนแนวคิดความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การแสดงแทนด้วยรูปภาพช่วยกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

3) สัญลักษณ์ทางการเขียน (Written symbols) เป็นสื่อสะท้อนแนวคิดและ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยผ่านเขียนสัญลักษณ์บางอย่าง เช่น การเขียนอธิบายวิธีการในการแก้ปัญหาของนักเรียน การเขียนเกี่ยวกับแนวคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ จะช่วยให้แนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของนักเรียนชัดเจนขึ้น

4) สัญลักษณ์ทางการพูด (Verbal symbols) การสื่อความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ด้วยการพูด การฟัง หรือการอ่านเกี่ยวกับแนวคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เช่น การพูดเพื่ออธิบายวิธีการที่สมาชิกในกลุ่มใช้เพื่อหาคำตอบของปัญหา เป็นต้น การแสดงแทนด้วยวิธีนี้จะช่วยให้แนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของนักเรียนชัดเจนยิ่งขึ้น

5) บริบทในชีวิตจริง (Real-life situation) เป็นการแสดงแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ฝังตัวอยู่ในบริบทที่คุ้นเคย ซึ่งจะก่อให้เกิดประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นทางการของนักเรียน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Janvier (1987) ได้จำแนกการนำเสนอออกเป็น 4 ลักษณะ คือ ภาษาพูดหรือการอธิบาย ตาราง กราฟและสมการ ที่แสดงถึงกระบวนการเชื่อมโยงของการนำเสนอทั้ง 4 ลักษณะ ดังในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ลักษณะของการเชื่อมโยงของการนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ

ถึง / จาก	**ภาษาพูด การอธิบาย**	**ตาราง**	**กราฟ**	**สูตร สมการและสัญลักษณ์**
ภาษาพูด การอธิบาย		การหาค่า	การร่างกราฟ	การจัดรูปแบบ (modeling)
ตาราง	การอ่าน		การเขียนกราฟ	การหาแบบรูป (pattern)
กราฟ	การแปลความหมาย	การอ่าน		
สูตร สมการและสัญลักษณ์	การจดจำตัวแปร	การคำนวณ	การร่างกราฟ	

Goldin (1998) ได้กล่าวถึงประเภทของการแสดงแทนภายใน ซึ่งมีด้วยกันอยู่ 5 ประเภท ดังนี้

1. ประเภทของการพูดหรือเขียนประโยค (Verbal or Syntactic) หมายถึงความสามารถที่เชื่อมโยงกับการใช้ภาษาที่เป็นธรรมชาติ คำที่มีความหมายและไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเอง รวมไปถึงการใช้หลักไวยากรณ์ด้วย

2. ประเภทที่เป็นระบบทางจินตนาการ (Imagistic and Gestural Systems) s,kp57’โครงสร้าง ภาพที่อยู่ภายในหัว (Spatial and Visual) หรือภาพที่อยู่ในความคิด (Mental images) โครงสร้างที่เป็นการแสดงท่าทางและตัวโครงสร้างของนักเรียนเอง

3. ความเหมาะสมของความคิดของรูปแบบสัญลักษณ์ (Mental Manipulation of Formal `notation) หมายถึง จำนวนการคำนวณเรขาคณิต การแสดงให้เห็นถึงลาดับของสัญลักษณ์ในการแก้สมการ

4. กระบวนการช่วยค้นหา และยุทธวิธี (Strategic and Heuristic Process) การเสาะหาแนวทาง และการตรวจสอบข้อผิดพลาด

5. ระบบการแสดงแทนอารมณ์ (Affective Systems of Representation) ประกอบด้วย ความรู้สึก ทัศนคติ ความเชื่อ และค่านิยมที่แสดงออกทางคณิตศาสตร์ หรือตัวของนักเรียนเองที่เชื่อมโยงถึงคณิตศาสตร์

จากรูปแบบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม (ภายนอกจิตใจ) และตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (ภายนอกจิตใจ)

4.4 แนวทางในการพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุแนวทางในการพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Lubinski and Otto (2002) กล่าวไว้ว่า การสื่อสารทั้งโดยการพูดหรือการเขียนเป็นกฎที่สำคัญในการเรียนการสอนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ส่วนสำคัญของกระบวนการในการสื่อสารคือการเลือกใช้สัญลักษณ์ที่การใช้ตัวแทน กระบวนการการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ การใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายควรจะเริ่มขึ้นในขั้นเล็ก ๆ ของการเรียนคณิตศาสตร์ และปรากฏในการอธิบายความคิดซึ่งนักเรียนในชั้นเริ่มต้นสามารถอธิบายได้

Rider (2007) ได้อธิบายบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนไว้ว่า ครูต้องมีการปรับเปลี่ยนทั้งวิธีการสอนและการประเมิน โดยออกแบบการเรียนการสอนให้มีการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ผ่านการยกตัวอย่าง การฝึกปฏิบัติในชั้นเรียน ซึ่งจะต้องมีการส่งเสริมการใช้กราฟ ตาราง และสมการพีชคณิตไปพร้อม ๆ กัน และมุ่งนั้นให้นักเรียนสามารถเปลี่ยนการใช้ตัวแทนในหลายๆ รูปแบบได้ เพื่อเปรียบเทียบความเหมาะสมของตัวแทนรูปแบบต่าง ๆ ในเนื้อหาเดียวกัน นอกจากนั้นครูควรใช้การวัดและประเมินผลด้วยวิธีการที่หลายหลายทั้งที่เป็นทางการและไม่เป็นทางการ เช่น การสอบ การบ้าน แบบฝึกหัด หรือรูปแบบอื่น ๆ

NCTM (2000b) ได้อธิบายถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดังนี้ ครูคณิตศาสตร์สามารถช่วยให้นักเรียนเรียนรู้การใช้ตัวแทนที่หลากหลายและเหมาะสมได้โดยการส่งเสริมให้นักเรียนคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนเพื่อสนับสนุน

ความคิดและการสื่อสารความคิดนั้นของนักเรียน ครูช่วยให้นักเรียนพัฒนาการใช้ตัวแทนได้โดยการรับฟังความคิดเห็นของนักเรียน ถามคำถาม และพยายามเข้าใจในสิ่งที่นักเรียนพยายามสื่อสารด้วยการวาดรูปหรือการเขียนด้วยความจริงใจ ครูจำเป็นต้องรู้ว่าเมื่อไรที่ต้องตัดสินทำในสิ่งที่ถูกต้อง และจะช่วยนักเรียนอย่างไรในการใช้ตัวแทนอย่างเป็นแบบแผน แม้ว่าการใช้ตัวแทนอย่างเป็นแบบแผนเป็นสิ่งที่มีประโยชน์มาก ครูควรให้คำแนะนำเบื้องต้นในการใช้ตัวแทนก่อนที่นักเรียนจะสามารถใช้ตัวแทนอย่างมีความหมายแทนการบอกให้ทราบ

จากแนวทางในการพัฒนาในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าแนวทางในการพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ คือการส่งเสริมให้นักเรียนคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนเพื่อสนับสนุนความคิดและการสื่อสารความคิดนั้นของนักเรียนในรูปแบบของตัวแทนที่หลากหลาย โดยการรับฟังความคิดเห็นของนักเรียน การใช้คำถาม และอำนวยความสะดวกต่อการสร้างและใช้ตัวแทนของนักเรียน

4.5 การประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

NCTM (2000b)ได้ระบุมาตรฐานของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งของครูและนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ไว้ดังนี้

มาตรฐานการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (NCTM, 2000b) ประกอบด้วย 3 ตัวชี้วัด ดังนี้

1. สร้างและใช้การเป็นตัวแทนในการการจัดการ การบันทึกและสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์

2. เลือก ประยุกต์ใช้และแปลความระหว่างการเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา

3. ใช้การเป็นตัวแทนในรูปแบบที่นำไปสู่การแก้ปัญหาและแปลความในปรากฏการณ์ทางกายภาพทางสังคมและทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ระดับของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (Level of Mathematical Representation) (National Educational Goals Panel. (1996).

ระดับที่ 1: นักเรียนที่ใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไม่เหมาะสมหรือไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ใด ๆ เลยในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 2 นักเรียนมีความพยายามที่ใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสมในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 3 นักเรียนใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมถูกต้องแม่นยำในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 4 นักเรียนใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างซับซ้อนและหลากหลายในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

จากการประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การประเมินการใช้ตัวแทน คือ หลักฐานที่ยืนยันแสดงว่าสามารถสร้าง ใช้ตัวแทนในการสื่อสารความสัมพันธ์ในการบันทึก การจัดกระทำ และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง เหมาะสมและหลากหลาย

5. กระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอน เป็นกิจกรรมที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ โดยมีประเด็นที่นำเสนอ 3 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

5.1 **ความหมายของกระบวนการเรียนการสอน**

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุความหมายของกระบวนการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

Winn (1993) ให้ความหมายของกระบวนเรียนการสอนว่า เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เริ่มจากปัจจัยนำเข้าได้แก่ ครูและแหล่งการเรียนรู้ที่ส่งผลให้เกิดการกระทำสู่นักเรียนโดยมีเป้าหมายที่เฉพาะเจาะจงทั้งคุณลักษณะทางจิตวิทยาและพฤติกรรม

Good and Merkel (1959) ให้คำนิยามว่ากระบวนการเรียนการสอน คือวิธีของการเรียนการสอนที่ใช้นำไปสู่การเปลี่ยนแปลงหรือการเรียนรู้ที่ต้องการ

Reigeluth (2013) เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เริ่มต้นจากปัจจัย การเรียนการสอน ได้แก่ ครู แหล่งการเรียนการสอนที่ ส่งผลให้เกิดการกระทำสู่นักเรียน โดยมีเป้าหมายที่เฉพาะเจาะจงทั้ง คุณลักษณะทางจิตวิทยาและพฤติกรรม ดังนั้น กระบวนการเรียนการสอน จึงมีองค์ประกอบที่เป็นลักษณะเฉพาะ คือ

1. นักเรียนที่ต้องการและมีแรงจูงใจในการเปลี่ยนแปลง โดยสามารถตั้งเป้าหมายและกำกับตนเองได้

2. คุณลักษณะทางจิตวิทยาและพฤติกรรมที่ต้องการเปลี่ยนแปลงและ

3. มีเป้าหมายที่เฉพาะเจาะจง

Reigluth (1983) ให้ความหมายกระบวนการเรียนการสอนว่า เป็นขั้นตอนการเรียนการสอนที่ครูกำหนดขึ้นเพื่อให้นักเรียนพัฒนาความสามารถของตนเองตามวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนนั้น

ทิศนา แขมมณี (2544) ได้กล่าวถึงกระบวนการเรียนการสอนว่า “ การสอนจำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับการเรียนรู้ เพราะกระบวนการสอนก็คือ กระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนใช้กระบวนการเรียนรู้ ที่เหมาะสมกับสาระการเรียนรู้ที่ ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี”และเห็นว่ากระบวนการสอนมีทั้งที่มีลักษณะทั่วไป (Generic) ประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง และกระบวนการสอนที่มีลักษณะเฉพาะสาขาวิชา (Specific)

ทิศนา แขมมณี (2545)ยังได้กล่าวถึงกระบวนการเรียนการสอนว่า “ในความหมายที่แท้จริงแล้วเป็นคนละเรื่องกับกระบวนการเรียนรู้แต่มีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิดกระบวนการสอนเป็นขั้นตอนและวิธีการดำเนินการช่วยให้บุคคลอื่นเกิดการเรียนรู้ซึ่งต้องอาศัยความรู้ /ความคิด/ความเชื่อ เกี่ยวกับกระบวนการเรียนรู้ของมนุษย์ ” นอกจากนั้น ยังสรุปให้เห็นองค์ประกอบการเรียนการสอนว่า “การสอนให้ได้ผลดีนั้น ควรจะต้องเริ่มที่หลักการและจัดกระบวนการสอนให้สอดคล้องกับหลักการ โดยอาศัยรูปแบบการสอน วิธีการสอน และเทคนิคการสอน ซึ่งมีอยู่อย่างหลากหลายเข้ามาช่วยให้กระบวนการสอนเกิดประสิทธิภาพสูงสุด”

จากความหมายของกระบวนการเรียนการสอน ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า หมายถึงขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนตามหลักการแนวคิดหรือทฤษฎีของรูปแบบการสอน วิธีการสอนและเทคนิคการสอนต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนประสบผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนที่วางไว้

5.2 องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุองค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

Arends (2014) อธิบายว่ากระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย ครู จุดประสงค์ นักเรียน สิ่งแวดล้อมการเรียนการสอน วิธีการเรียน การประเมินผล

Reigluth (1983) อธิบายว่า กระบวนการเรียนการสอนมีความสัมพันธ์กับการออกแบบการสอน ซึ่งเป็นกระบวนการที่จะคัดเลือกวิธีสอนเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ภายใต้เงื่อนไขที่ตั้งไว้

Davis School District (2000) อธิบายองค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอนว่า "มีลักษณะคล้ายกับรูปแบบ กล่าวคือประกอบด้วย เนื้อหา (จะสอนอะไร) วิธีการ (จะใช้สื่ออุปกรณ์อย่างไร) และการประเมิน(การประเมินผลระดับการเรียนรู้ของนักเรียนและความสำเร็จของการเรียนการสอน) ทั้งเนื้อหา วิธีการ และการประเมิน มีความสำคัญเท่าเทียมกันในกระบวนการเรียนการสอน" โดยอธิบายเนื้อหาว่า "ประกอบด้วย ความรู้ ทักษะ เจตคติ และคุณค่าซึ่งเป็นเป้าหมายหลักของการศึกษา ดังนั้นควรเป็นเนื้อหาที่เฉพาะเจาะจงและเหมาะสมกับความต้องการจำเป็น ความสนใจและเป้าหมายของนักเรียน ถ้ากระบวนการเรียนการสอนประสบความสำเร็จ แสดงว่าเนื้อหานั้นเกี่ยวข้องและมีความหมายสำหรับนักเรียน" ส่วนวิธีการ อธิบายว่า " จะต้องปรับตามความต้องการของนักเรียน...วิธีการเรียนรู้ของนักเรียนและสิ่งสำคัญคือ การเรียนการสอนในทุกชั้นเรียนจะต้องใช้วิธีการ สื่อและอุปกรณ์การเรียนการสอนที่ได้รับการพิสูจน์ทดสอบแล้ว"

จากองค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า กระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย ครู จุดประสงค์ นักเรียน บรรยากาศการเรียนการสอน การประเมินผล รวมทั้งรูปแบบกระบวนการสอนแบบต่าง ๆ ที่มีที่มาจากหลักการ แนวคิด ทฤษฎีที่มีลักษณะและเป้าหมายที่เฉพาะเจาะลง

5.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

จากการศึกษา พบว่า นักการศึกษาได้ระบุการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

Joyce and Weil (1996) ได้เสนอหลักการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน ซึ่งนำมาประยุกต์ใช้ในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน ดังนี้

1. รูปแบบการเรียนการสอนต้องมีทฤษฎีรองรับ เช่น ทฤษฎีจิตวิทยา

2. ก่อนนำกระบวนการเรียนการสอนไปใช้ต้องการการวิจัยเพื่อทดสอบทฤษฎีและตรวจสอบคุณภาพในลักษณะของการนำไปใช้ในสถานการณ์จริง แล้วนำมาข้อค้นพบมาปรับปรุงและแก้ไขรูปแบบที่พัฒนาขึ้น

3. การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนอาจพัฒนาให้นำไปใช้ได้อย่างกว้างขวางหรือใช้เฉพาะวัตถุประสงค์อย่างใดอย่างหนึ่งก็ได้

4. การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนจะมีจุดมุ่งหมายหลักที่ใช้เป็นหลักในการพิจารณาเลือกใช้รูปแบบ นั่นคือถ้าผู้ใช้นำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ตรงกับจุดมุ่งหมายหลักก็จะทำเกิดผลสูงสุด แต่ก็สามารถนำรูปแบบนำรูปแบบไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์อื่น ๆถ้าพิจารณาเห็นว่ามีความเหมาะสม

ทิศนา แขมมณี (2544) เสนอขั้นตอนการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน สรุปได้ดังนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1. ศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับนักเรียน สภาพแวดล้อมที่เกี่ยวข้อง เช่น ปัญหาการเรียนการสอน หลักสูตร เป็นต้น เพื่อกำหนดวัตถุประสงค์ในการพัฒนานักเรียน

2. ศึกษาทฤษฎี แนวคิด หรือหลักการ ที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ในการพัฒนานักเรียนและปัญหาจากการศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน

3. กำหนดขั้นตอนการเรียนการสอนตามแนวคิดทฤษฎีนั้น ๆ และวิธีการดำเนินการจัดการเรียนการสอน โดยใช้วิธีสอนและเทคนิคการสอนที่หลากหลายเพื่อช่วยให้นักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

4. ตรวจสอบและปรับปรุงประสิทธิภาพของกระบวนการเรียนการสอนเพื่อให้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดหรือทฤษฎีนั้น ๆ มีความเป็นไปได้และเหมาะสม

สอดคล้องกับนักเรียนและสภาพที่แท้จริงของการจัดการเรียนการสอน โดยให้ผู้ทรงคุณวุฒิเป็นผู้ตรวจสอบและนำไปทดลองใช้ เพื่อนำข้อมูลจากผลการทดลองใช้มาปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนและนำไปทดลองซ้ำ โดยอาจทำได้หลายหลายครั้งจนกว่าจะได้ผลเป็นที่พอใจ

Deming and Renmei (1952) นำเสนอแนวคิดนี้ในประเทศญี่ปุ่น ในค.ศ.1950 คนญี่ปุ่นจึงเรียกวงจรนี้ว่า "Deming Cycle" และมีการใช้วงจรPDCA อย่างแพร่หลายในการควบคุมคุณภาพงานของธุรกิจประเภทต่าง ๆ ในประเทศญี่ปุ่น และสหรัฐอเมริกา และในปัจจุบัน ผู้นำองค์กรต่าง ๆ ทั่วโลก ต่างใช้วิธีการนี้เพื่อพัฒนาทั้งด้านเศรษฐกิจและสังคมวงจรเดมมิงเป็นวงจรที่ใช้ในการพัฒนากระบวนการเพื่อปรับปรุงคุณภาพ โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานเป็น ดังนี้

1. ขั้นวางแผน (P-Plan) เป็นการวางแผนอย่างมีประสิทธิภาพในการปรับปรุงงาน ในกระบวนการเรียนรู้ต้องมีการวางแผนการเรียนรู้ การวางแผนที่ดี จะช่วยให้เกิดแรงบันดาลใจ มีความกระตือรือร้นในการทำตามแผน ทำให้เกิดการเรียนรู้

2.ขั้นปฏิบัติตามแผน(D-Do) เป็นขั้นที่ต้องลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

3. ขั้นตรวจสอบ (C-Check) เป็นขั้นที่ต้องตรวจสอบว่างานที่ทำสอดคล้องกับกับแผนที่วางไว้หรือไม่

4. ขั้นปรับปรุง (A-Act) เป็นขั้นประเมินผลกระบวนการทั้งหมด ต้องวิเคราะห์ว่ามีการเรียนรู้อะไรบ้าง ต้องแก้ไขอะไรบ้าง เพื่อปรับปรุงการดำเนินงานในวงจรรอบต่อไป

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนอย่างมีประสิทธิภาพ จึงควรใช้วงจรเดมมิ่งเป็นการพัฒนาโดยการนำขั้นตอนในกระบวนการเรียนการสอนที่วิเคราะห์จากการศึกษาข้อมูลแนวคิดทฤษฎี มาเข้าวงจร PDCA เริ่มจากการวางแผนการเรียนรู้ (Plan)ปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ (Do) แล้วตรวจสอบผลที่ได้รับ (Check) และปรับปรุงขั้นตอนในกระบวนการเรียนการสอน เพื่อดำเนินการในวงจรรอบต่อไป จนได้ขั้นตอนสุดท้าย ขั้นตอนในกระบวนการเรียนการสอนที่ได้ในขั้นตอนสุดท้ายจึงเป็นกระบวนการที่เหมาะสมกับสภาพแวดล้อม เนื้อหาสาระ และสภาพนักเรียนอย่างแท้จริง

จากการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนมีขั้นตอนดังนี้ ศึกษาบริบทของนักเรียน กำหนดวัตถุประสงค์ในการจัดการเรียนการสอน วางแผนการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิด หลักการและนิยามของรูปแบบการเรียนการสอน วิธีการสอนและเทคนิคการสอนเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการจัดการเรียนการสอน ตรวจสอบและปรับปรุงประสิทธิภาพของการเรียนการสอน

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีประเด็นที่นำเสนอ 2 ประเด็น แสดงรายละเอียดดังนี้

6.1 งานวิจัยภายในประเทศที่เกี่ยวข้อง

จันทร์ศรี จันทร์คำ (2544) ได้ศึกษาการสอนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมทักษะการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวันของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6พบว่า

ผลการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้แผนการสอนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวัน มีคะแนนผ่านเกณฑ์ทุกคน คือร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม คิดเป็นร้อยละ 82.40 ซึ่งถือว่าผ่านเกณฑ์และอยู่ในเกณฑ์เฉลี่ยที่ดีมาก

ความคิดเห็นของนักเรียนต่อการเรียนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมทักษะการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวัน นักเรียนมีความคิดเห็นมากที่สุดในบทบาทของครูในการแจ้งจุดประสงค์การเรียนการสอน การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน และการกระตุ้นนักเรียนให้ทำงานเป็นกลุ่มคิดค้นแก้ไขปัญหาด้วยตนเอง

อรชร ภูบุญเดิม (2550) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 วิธี คือ การแก้โจทย์สมการโดยการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตารางและการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนหลังการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน สูงกว่าก่อนสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ชมพู สีสัน (2551) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้รูปแบบการนำเสนอเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ในกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวเปรของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 วิทยาลัยศีขรภูมิ จังหวัดสุรินทร์ โดยการวิเคราะห์ผลการตอบแบบสอบถาม เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ตามกรอบทฤษฎีที่ Janvier (1987) ซึ่งได้จำแนกการนำเสนอเป็น 4 ลักษณะคือ ภาษาพูดหรือการอธิบาย ตาราง กราฟและสมการ พบว่านักเรียนกลุ่มเป้าหมายได้คะแนนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 คิดเป็นร้อยละ 72 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และเวลาที่ใช้รูปแบบการ นำเสนอจากการตอบแบบทดสอบหลังเรียนพบว่านักเรียนกลุ่มที่ได้คะแนนสูงและกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำใช้เวลาในการนำเสนอรูปแบบไม่แตกต่างกันมากแต่การนำเสนอสูตรสมการและสัญลักษณ์ทั้งสองกลุ่มใช้เวลาโดยเฉลี่ยนานกว่าการใช้รูปแบบการนำเสนอแบบอื่น

ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรีพบว่า

1. นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนกลุ่มทดลองที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาเพิ่มขึ้นจากเดิมร้อยละ 38.520 ในขณะที่นักเรียนกลุ่มควบคุมมีพัฒนาการของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาเพิ่มขึ้นจากเดิมร้อยละ 20.206 เมื่อเปรียบเทียบพัฒนาการระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่าร้อยละของพัฒนาการของค่าเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระหว่างการวัดฉบับที่ 1 กับการวัดฉบับที่ 2 ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4. นักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของค่าเฉลี่ยคะแนนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นจากเดิมร้อยละ 30.719 ในขณะที่นักเรียนกลุ่มควบคุมมีพัฒนาการของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นจากเดิมร้อยละ 18.519 เมื่อเปรียบเทียบพัฒนาการระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่าร้อยละของพัฒนาการของค่าเฉลี่ยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างการวัดฉบับที่ 1 กับการวัดฉบับที่ 2 ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ปนัดดา สังข์ศรีแก้ว (2552) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ การวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนนับ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมน พบว่า

1. ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนนับ โดยใช้กระบวนการ วิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมน พบความผิดพลาดทั้งหมด 5 ประเภท เรียงลำดับจากมากไปหาน้อยดังนี้ ความผิดพลาดในขั้นการอ่าน การทำความเข้าใจ การแปลงรูป การใช้ทักษะกระบวนการ การสรุปตอบ และการแก้โจทย์ปัญหา การคูณ หารจำนวนนับตามลำดับ

2. การจำแนกประเภทความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนนับ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกลุ่มบัวบาน อำเภอยางตลาด จังหวัดกาฬสินธุ์ พบว่าประเภทความผิดพลาดทั้งหมด จำนวน 352 รายการ ดังนี้ คือ ความผิดพลาดประเภทการอ่าน 148 รายการ คิดเป็นร้อยละ 42.05 การทำความเข้าใจคำถาม 96 รายการ คิดเป็นร้อยละ 27.27 รายการ การแปลงรูป 64 รายการ คิดเป็นร้อยละ 18.18 การใช้ทักษะกระบวนการ 40 รายการ คิดเป็นร้อยละ 11.36 และการสรุปตอบ 4 รายการ คิดเป็นร้อยละ 1.14

สุจินดา เอี่ยมโอภาส (2552) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ ผลการใช้ชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทนเรื่อง ความน่าจะเป็น ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังเรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทนเรื่อง ความน่าจะเป็นอยู่ในระดับสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 50 และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English” สูงกว่าก่อนเรียนด้วยชุดการเรียน “Learning Mathematics Through English”อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จิตติมา คงเมือง (2553) ได้ศึกษาการส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการวาดแบบจำลองของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า

1. นักเรียนมีความสามรถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น

2. กระบวนการคิดในการวาดแบบจำลองเพื่อแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเริ่มต้นจาการวาดแบบจำลองเพื่อทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จากนั้นใช้แบบจำลองที่วาดขึ้นช่วยในการพิจารณาเลือกตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์และเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ให้เหมาะสมกับโจทย์ปัญหานั้น ๆ ตลอดจนใช้แบบจำลองช่วยในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่มีต่อความสามารถ ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทน และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ใช้ตัวแทนกับเกณฑ์ พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 75.44

พรรณทิภา ทองนวล (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่า

1.ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

5. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการเขียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไปอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

7. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน จำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ปานกลาง และต่ำ โดยพบว่า นักเรียนร้อยละ 37.50 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับสูง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องครบถ้วน ชัดเจน อีกทั้งมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายทั้งแผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง และรูปภาพในการสื่อสารแนวคิดได้อย่างชัดเจน นักเรียนร้อยละ 47.92 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับปานกลาง ซึ่งสามารถพูดอธิบายโดยมีการใช้ภาษาที่ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน และมีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งแผนภาพหรือรูปภาพเพื่อสื่อสารแนวคิดบ้างบางครั้งแต่ไม่ชัดเจนเท่าที่ควร และมีส่วนน้อยอีกร้อยละ 14.58 เป็นนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูดระดับต่ำ ซึ่งพูดอธิบายโดยใช้ภาษาที่ไม่ถูกต้อง หรืออธิบายได้แต่ไม่ครบถ้วน และไม่มีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารแนวคิด

ไพศาล ศรีสวัสดิ์ (2554) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนโดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ พบว่าความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนกลุ่มที่จัดการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่จัดการเรียนรู้ด้วยวิธีปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .01 และความพึงพอใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่องโจทย์ปัญหาเศษส่วนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้โดยการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับพึงพอใจมาก

อภิชญา ลือชัย (2555) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Mayer อันประกอบด้วย 4 ทักษะย่อยได้แก่ ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์ ทักษะการบูรณาการข้อมูลจากโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะการวางแผนการแก้ปัญหาและทักษะการดำเนินการตามแผน โดยมีการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Mayer โดยพบว่า

1. เมื่อวิเคราะห์ทักษะย่อยที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ทั้งสี่ทักษะย่อยของนักเรียนพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใช้ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์ได้มากที่สุด รองลงมาคือ ทักษะการวางแผนการแก้ปัญหา และใช้ทักษะการดำเนินการตามแผนได้น้อยที่สุดเมื่อจำแนกตามกลุ่มนักเรียนพบว่า

1.1 นักเรียนกลุ่มสูงใช้ทักษะการวางแผนการแก้ปัญหาได้มากที่สุด รองลงมาคือทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์และใช้ทักษะการบูรณาการข้อมูลจากโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้น้อยที่สุด

1.2 นักเรียนกลุ่มปานกลางใช้ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์ได้มากที่สุดรองลงมาคือทักษะการวางแผนการแก้ปัญหาและใช้ทักษะการบูรณาการข้อมูลจากโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้น้อยที่สุด

1.3 นักเรียนกลุ่มต่ำใช้ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์ได้มากที่สุด รองลงมาคือทักษะการบูรณาการข้อมูลจากโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และใช้ทักษะการดำเนินการตามแผนได้น้อยที่สุด

2. เมื่อเปรียบเทียบทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์โดยภาพรวมระหว่างกลุ่มนักเรียนพบว่านักเรียนกลุ่มสูงใช้ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์โดยภาพรวมได้สูงกว่านักเรียนกลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนกลุ่มปานกลางใช้ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์โดยภาพรวมได้สูงกว่านักเรียนกลุ่มต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เมื่อเปรียบเทียบทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มนักเรียน โดยจำแนกตามทักษะย่อยพบว่านักเรียนกลุ่มสูงใช้ทักษะการแปลความโจทย์คณิตศาสตร์ทักษะการบูรณาการข้อมูลจากโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะการวางแผนการแก้ปัญหา และทักษะการดำเนินการตามแผนได้สูงกว่านักเรียนกลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำในทุกทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนกลุ่มปานกลางใช้ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์แต่ละทักษะได้สูงกว่านักเรียนกลุ่มต่ำในทุกทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ไชยพร พิมพ์มะสอน (2554) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้สื่อการเรียนรู้ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า จากการวิเคราะห์การแสดงแทนในสถานการณ์การแก้ปัญหาพบนักเรียนแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ออกมา 5 รูปแบบ คือ 1) ด้วยการพูดของนักเรียนที่สื่อความหมายถึงโครงสร้างของการบวกจำนวนและการพูดที่แสดงถึงความหมายสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2) ด้วยการใช้สื่อที่ถูกกระทำ (Manipulative Representation) โดยการใช้ความสัมพันธ์หนึ่งต่อหนึ่ง (One to One Correspondence) ระหว่างสื่อที่เป็นตัวบล็อกกับตัวสถานการณ์จริง 3) ด้วยการเขียนประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แนวนอนและแนวตั้ง การเขียนไดอะแกรมที่แสดงวิธีการบวกและลบ และ4) ด้วยการวาดรูปวงกลม สี่เหลี่ยม และการวาดรูปแท่งบล็อกและ 5) ด้วยการผูกติดประโยคสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์แนวนอนและแนวตั้งกับตัวสถานการณ์จริง (Real World Situation) พบว่านักเรียนเกิดการแสดงแทนออกมานั้นเริ่มจากนักเรียนได้สัมผัส ได้จินตนาการหรือหยิบจับสื่อการเรียนรู้ที่เป็นรูปภาพในสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด นักเรียนใช้สิ่งเหล่านี้แก้ปัญหาโดยนาเอาบล็อกมาวางบนรูปเด็ก หรือรูปผลไม้จนครบ แล้วก็นำออกมาวางในแท่งบล็อกสิบเพื่อหาคำตอบด้วยการนับจำนวนบล็อกทั้งหมดในแท่งบล็อก การกระทำนี้เป็นการสร้างความมั่นใจในคาตอบของนักเรียนเอง ซึ่งเป็นผลให้นักเรียนเกิดความคิดต่อยอดในการหารูปแบบอื่น ๆ ของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ ฉะนั้นสื่อการเรียนรู้จึงเป็นเครื่องมือช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจ และเข้าถึงปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เร็วขึ้น

สาวิตรี มูลสุวรรณ (2557) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และ ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

6.2 งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้อง

Verschaffel, De Corte, and Borghart (1997) ได้ศึกษาเรื่องการสอนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนประถมศึกษาพบว่า นักเรียนกลุ่มที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีคะแนนสูงกว่ากลุ่มที่ได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีปกติที่แนะนำความรู้เรื่องแบบจำลองอย่างสรุปและกลุ่มที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีปกติอย่างเดียว จากมากไปน้อยตามลำดับ

Even (1998) ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงตัวแทนของฟังก์ชัน งานวิจัยนี้มีจุดเด่นอยู่ที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเป็นไปได้ในการแปลงจากรูปแบบของการใช้ตัวแทนไปยังการใช้ตัวแทนอีกรูปแบบหนึ่ง และคุณสมบัติของความรู้และความเข้าใจ ในช่วงแรกของการเก็บข้อมูลเป็นการถามคำถามปลายเปิดกับนักศึกษาครูวิชาคณิตศาสตร์ วิชาเอกมัธยมศึกษาในมหาวิทยาลัย 152 คน และในช่วงที่ 2 ของการเก็บข้อมูลสุ่มนักศึกษา 10 คนจากกลุ่มแรกมาสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่าความรู้เกี่ยวกับการใช้ตัวแทนในรูปแบบต่าง ๆ ไม่เป็นอิสระจากกัน แต่กลับมีส่วนที่เกี่ยวข้องกันกับความรู้สามประการ คือ ความรู้เกี่ยวกับวิธีการต่าง ๆ ที่นำไปสู่ฟังก์ชัน ความรู้ที่เกี่ยวกับบริบทของการนำเสนอและความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ นิยามที่เกี่ยวข้อง

Reusser and Stebler (1997) ได้ศึกษาโจทย์ปัญหาซึ่งโจทย์ปัญหาทุกข้อมีวิธีการแก้ปัญหาเสมอ ด้วยเหตุผลทางสังคมของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียน โดยงานวิจัยนี้ให้ความสำคัญกับความสมเหตุสมผลและการใช้ความรู้ในโลกแห่งความจริงในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมีข้อถกเถียงว่าการแก้โจทย์ปัญหาในห้องเรียนมีมากและน้อยกว่าการวิเคราะห์โครงสร้างของเนื้อหา นักเรียนหลายคนมีลักษณะที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างง่ายดาย ถึงแม้จะแก้ปัญหาไม่ได้ โดยไม่คำนึงถึงข้อจำกัดในความเป็นจริงของความจริงใด ๆ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียนไม่ได้แยกออกจากความเป็นจริงต่างกันเพียงวิธีการที่ใช้เท่านั้น แต่จากเครือข่ายวัฒนธรรมหลักและวัฒนธรรมย่อยของการปฏิบัติในบริบททางสังคมของการศึกษามันหมายถึงกิจกรรมที่ชาญฉลาดที่นอกเหนือจากแนวคิดการแก้ปัญหาประเภทของทักษะปัญญาทางสังคม (Socio-cognitive theory) โดยมีการทำการทดลองต่อยอดจากการทดลองของ Verschaffel, De Corte, and Lasure (1994) ซึ่งในการทดลองครั้งแรกทำเกี่ยวกับการจัดรายการปัญหาที่ได้มาตรฐานที่สามารถแก้ไขได้โดยวิธีการตรงไปตรงมาของการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์และรายการปัญหาแบบคู่ขนานกับแบบแรกที่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นจริงนักเรียน

ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่สี่และปีที่ห้า ส่วนในการทดลองครั้งที่สองนี้ทำเกี่ยวกับการจัดรายการที่คล้ายกันกับของปัญหาที่มีปัญหาต่อนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภายใต้สามเงื่อนไขบริบททางสังคมที่แตกต่างกันในระดับที่นักเรียนได้บอกหรือส่งสัญญาณว่าปัญหานั้นเป็นปัญหาที่ยากมากขึ้นในการแก้ปัญหามากกว่าที่จะลำบากในตอนแรกหรือเป็นปัญหาที่พวกเขาก็อาจจะไม่สามารถแก้ไขได้ ผลของการศึกษาทั้งสองคือการที่นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีนัยสำคัญ ในส่วนของปัญหาที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ โดยปราศจากลักษณะของความเป็นจริงอย่างชัดเจน การค้นพบโดยรวมจะกล่าวถึงเกี่ยวกับสามประเด็น โจทย์ปัญหาที่มีคุณภาพที่ใช้ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ วัฒนธรรมของการเรียนการสอนและการเรียนรู้และประเด็นทั่วไปมากขึ้นของความมีเหตุผลทางสังคมของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โรงเรียน

Ainsworth (1999, 2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันของการใช้ตัวแทนอย่างหลากหลาย การใช้ตัวแทนที่หลากหลายและสื่อประสมสามารถสนับสนุนการเรียนรู้ในหลายด้าน งานวิจัยนี้จะศึกษาฟังก์ชันที่สามารถรองรับและข้อขัดแย้งที่ค้นพบระหว่างการประเมินการเรียนรู้การตัวแทนอย่างหลากหลาย ซึ่งจะนำไปสู่กฎการออกแบบอย่างมีระบบ ในที่นี้จะอธิบายถึงการจัดหมวดหมู่ของ MERs การจัดหมวดหมู่นี้ถูกใช้เพื่ออธิบายว่าการแปลระหว่างตัวแทนข้ามระหว่างรูปแบบต่าง ๆ สามารถที่จะสนับสนุนผลการเรียนรู้สูงสุดได้อย่างไร และข้อมูลใดที่ควรจะรวบรวมจากผลการประเมิน เพื่อที่จะให้เกิดประสิทธิภาพในการเรียนรู้การใช้ตัวแทนอย่างหลากหลาย

Steimann (2000) ได้ศึกษาเกี่ยวกับบทบาทของการเป็นตัวแทนในเชิงวัตถุและการสร้างแบบจำลองความคิดการเป็นคู่ของวัตถุและความสัมพันธ์เป็นสิ่งที่ถูกฝังลึกในความคิดของเราว่าเกือบทุกภาษาในการสร้างแบบจำลองรวมถึงมัน เสมือนเป็นความแตกต่างขั้นพื้นฐาน แต่มีหลักฐานว่าทั้งสองเป็นส่วนหนึ่งโดยธรรมชาติด้วยในส่วนที่สามคือความเท่าเทียมของความคิดระดับพื้นฐานเกี่ยวกับบทบาทของการเป็นตัวแทน ถึงแม้ว่าการให้คำจำกัดความของแนวคิดบทบาทมากมายในวรรณคดี เรายืนยันได้เพียงว่าเพียงไม่กี่เป็นต้นแบบอย่างแท้จริงและการรับรู้แม้แต่น้อยเกี่ยวกับบทบาทที่แท้จริงของบทบาทเป็นตัวกลางระหว่างความสัมพันธ์และวัตถุที่มีส่วนร่วมในพวกเขา หลังจากที่อภิปรายกับที่มาที่สำคัญของมโนทัศน์ของบทบาท จึงได้นำเสนอคำจำกัดความขั้นพื้นฐานของการวิจัยครั้งนี้และแสดงให้เห็นถึงวิธีการที่จะคิดเป็นสัดส่วนตามธรรมชาติสำหรับปัญหาการสร้างแบบจำลองจำนวนมาก รวมถึงการแบ่งประเภทที่หลากหลายและแบบมีไดนามิก การทำงานร่วมกันของวัตถุ หลากหลายรูปแบบและการทดแทน

Cezikturk (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของแผนภาพที่มีปฏิสัมพันธ์ร่วมกันที่มีต่อความเข้าใจในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาบนพื้นฐานทฤษฎีของ Van Hiele (ทฤษฎีที่พัฒนาความคิดทางเรขาคณิต นักเรียนต้องผ่านการให้ตุผลห้าขั้นตอนโดยเริ่มต้นจากการรู้จำจนถึงการคิดอย่างถ้วยถี่ โดยความคิดระดับสูงกว่าจะมีพื้นฐานมาจากโครงสร้างของความคิดในระดับที่ต่ำกว่า) และทฤษฎีการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ พบว่ามีปฏิสัมพันธ์ที่สำคัญระหว่างจำนวนรูปแบบของการใช้ตัวแทนกับระดับความเข้าใจของนักเรียนตามทฤษฎีของ Van Hiele ด้วยแบบทดสอบความสามารถทางคณิตศาสตร์ นักเรียนที่อยู่ในระหว่างการเรียนรู้จากทฤษฎีของ Van Hiele พบว่าการใช้ตัวแทนแบบสามรูปแบบให้ผลในเชิงลบในขณะที่พวกเขาชอบการใช้ตัวแทนแบบสองรูปแบบมากกว่า จากการสัมภาษณ์นักเรียนที่อยู่ในระดับต่างของตามทฤษฎีของ Van Hiele พบว่า นักเรียนมีความแตกต่างในการใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความมั่นใจในการใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความพึงพอใจในการใช้ตัวแทน และวิธีการในการจัดการระหว่างการใช้ตัวแทนแบบต่าง ๆ ไปสู่โปรแกรม Mathlets

Gagatsis, Elia, and Kyriakides (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับธรรมชาติของการใช้ตัวแทนอย่างหลากหลายในการพัฒนาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สอนในโรงเรียนและอภิปรายสองทฤษฎีที่ใช้อธิบายแบบรูปและความยากในการแปลจากการใช้ตัวแทนหนึ่งไปยังการใช้ตัวแทนอีกตัวหนึ่ง โดยเก็บข้อมูลจากนักเรียนระดับชั้นประถามศึกษาปีที่ 6 จำนวน 79 คน พบว่าผลการวิจัยสนับสนุนสมมติฐานที่ว่าการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ประกอบขึ้นจากข้อมูลที่แตกต่างกันหลายอย่าง การใช้ตัวแทนอย่างหลากหลายมีความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ต่อกันและมีองค์ประกอบที่หลากหลายดังนั้นการใช้ตัวแทนอย่างหลากหลายเพียงอย่างเดียวจึงไม่สามารถช่วยให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ ในที่สุดการค้นพบข้างต้นมีคำแนะนำไว้ว่า โครงสร้างของการแปลระหว่างการใช้ตัวแทนอย่างหลากหลายอาจจะช่วยในการสอนโดยการทำตามวิธีการสอนที่ได้นำเสนอไว้ตามรูปแบบที่ 2

Thomas (2004) ได้ศึกษาแบบจำลองสำหรับการพัฒนาอย่างเชี่ยวชาญด้วยกลยุทธ์สำหรับการปรับปรุงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์งานวิจัยนี้ได้พัฒนากลยุทธ์ในการปรับปรุงการแก้ปัญหาและแบบจำลองสำหรับการพัฒนาอย่างเชี่ยวชาญ (Professional Development Model:PDM) ให้มีประสิทธิภาพ โดยใช้การเสริมศักยภาพ (Scaffolding) เป็นเครื่องมือในการใช้กลยุทธ์นี้ ซึ่งเครื่องมือนี้ได้รับการตรวจสอบและวิเคราะห์จากผู้เชี่ยวชาญทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาคำคณิตศาสตร์และใบงานโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สร้างสรรค์ตามสภาพจริง

หลังจากนั้นจึงมีการจัดการกับข้อมูลเชิงลึกในความผิดพลาดของมโนทัศน์และสามารถนำมาใช้ในการติดตามการปรับปรุงประสิทธิภาพของนักเรียน แบบจำลองสำหรับการพัฒนาอย่างเชี่ยวชาญ (Professional Development Model:PDM) เป็นอบรมเชิงปฏิบัติการ 5 วันในช่วงภาคฤดูร้อนของสถาบันเทคโนโลยีและคณิตศาสตร์ โดยการออกแบบแบบจำลองนี้ทำตามนสมมติฐานการวิจัยที่มีอยู่ว่าสิ่งที่ได้เรียนรู้ในการอบรมเชิงปฏิบัติการจะถูกถ่ายโอนไปยังสู่การปฏิบัติของครูวิชาคณิตศาสตร์ วิชาวิทยาศาสตร์ วิชาภาษาศาสตร์ และวิชาเทคโนโลยี (ที่สอนนักเรียนกลุ่มเดียวกัน) นอกจากนี้นักวิจัยยังสมมติฐานให้ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาสามารถใช้เทคโนโลยีในการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และผลการดำเนินงานคณิตศาสตร์ของนักเรียนอาจถูกปรับปรุงโดยการเรียนรู้ที่จะแก้ปัญหาโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และใบงานโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สร้างสรรค์ตามสภาพจริง

Henning and Keune (2007) ได้ศึกษาเกี่ยวกับระกับของสมรรถนะในการสร้างแบบจำลอง โดยสมรรถนะทางคณิตศาสตร์จะเน้นเป็นพิเศษในด้านการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันในแต่ละปัญหาของชีวิตประจำวันโดยจะเน้นที่การถูกตรวจสอบ และนอกจากนี้ระดับของแบบจำลองจะสามารถถูกส่งเสริมจากสมรรถนะในการสร้างแบบจำลอง ลักษณะของความสามารถที่เกี่ยวข้องกับแต่ละระดับมีการระบุไว้และตัวอย่างบางส่วนที่น่าสนใจ ระดับของแบบจำลองจะถูกวางในกรอบของมโนทัศน์ของการรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical literacy) และมันจะถูกนำมาเปรียบเทียบบ้างกับแบบจำลองอื่นของสมรรถนะในการสร้างแบบจำลอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Kaiser and Maaß (2006) ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองในห้องเรียนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเกี่ยวกับปัญหาและโอกาสงานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับช่องว่างระหว่างความเกี่ยวข้องของการประยุกต์ใช้งานและการสร้างแบบจำลองในการอภิปรายการจัดการเรียนการสอนและการให้ความสำคัญระดับรองลงมาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นกิจวัตรประจำวัน ผลจากการศึกษาเชิงประจักษ์ของเราเองที่อธิบายถึงความเชื่อทางคณิตศาสตร์ของครูและนักเรียนที่เป็นอุปสรรคสำคัญที่จะนำเสนอนอกจากนี้การศึกษาแสดงให้เห็นถึงความเป็นไปได้ที่จะเปลี่ยนความเชื่อเหล่านี้เช่นเดียวกับวิธีการที่จะส่งเสริมความสามารถการสร้างแบบจำลอง

Holton and Clarke (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ของการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งประกอบไปด้วย การหน้าที่ของการเสริมต่อการเรียนรู้ ขอบเขตของการเสริมต่อการเรียนรู้ การระบุการเสริมต่อการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลกับอภิปัญญาและการระบุหกขอบเขตกิจกรรมของการเสริมต่อการเรียนรู้จากตัวอย่างงานวิจัยที่หลากหลาย การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นการดึงทฤษฎีการเรียนรู้ต่าง ๆ เข้าด้วยกันด้วยการนำ อภิปัญญาเข้าไปในกรอบแนวคิดที่มาจาก กิจกรรมทางสังคมของการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยมีสะพานเชื่อมระหว่างการสนับสนุนการสอนของครูและการควบคุมการเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน ซึ่งงานวิจัยนี้ตั้งใจจะเชื่อมโยงระหว่างจุดประสงค์หลักของการสอนเข้ากับการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อจะเป็นแนวทางการเรียนรู้ระยะยาว เพื่อที่ในอนาคตนักเรียนจะสามารถจะเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง

Llinares and Roig (2008) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างองค์ความรู้ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาและการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหา โดยในการวิจัยครั้งนี้จะเน้นที่ระดับมัธยมศึกษาว่าจะสามารถสร้างและใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือของมโนทัศน์ในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างไร มีผู้เข้าร่วมทำการวิจัยเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา 511 คน เป็นนักเรียนระดับชั้นสูงสุดของการศึกษาภาคบังคับ มีอายุระหว่าง 15-16 ปี ซึ่งจะมี 4 ระดับในการพัฒนาการสร้างและใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีการเปรียบเทียบค่าคงที่เพื่อวิเคราะห์กระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน มีการระบุตัวแปรที่เฉพาะเจาะจงหับตัวแปรทั่วไป โดยที่ตัวแปรเฉพาะเจาะจงจะสนับสนุนตัวแปรทั่วไปที่เป็นองค์ประกอบหลักที่นักเรียนจะต้องรู้ในกระบวนการสร้างและใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังเน้นถึงความยากลำบากที่นักเรียนรู้สึกในขณะที่ใช้ความรู้ทาง

คณิตศาสตร์ในการแก้สถานการณ์เหล่านี้ ท้ายที่สุดมีการสรุปว่านักเรียนมีการใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในมุมมองการเรียนรู้เชิงสังคมและวัฒนธรรม

Mousoulides, Christou, and Sriraman (2008) ได้ศึกษามุมมองการสร้างแบบจำลองในการสอนและการเรียนรู้ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการวิเคราะห์กระบวนการที่ใช้โดยนักเรียนในขณะที่มีส่วนร่วมในกิจกรรมการสร้างแบบจำลองและ การตรวจสอบความสามารถของนักเรียนควรเป็นอย่างไร ที่จะสามารถสร้างแบบจำลองของปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาได้ โดยมีประชากรที่ศึกษาเป็นนักเรียนสองกลุ่มซึ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม การตรวจสอบกระบวนการของการสร้างแบบจำลองของนักเรียนในกลุ่มทดลองโดยมีการเสริมโปรแกรมซึ่งประกอบด้วยลำดับของกิจกรรมการสร้างแบบจำลองหกแบบ เพื่อทำการตรวจสอบความสามารถในการสร้างแบบจำลองของนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมสามครั้ง พบว่าแบบจำลองของนักเรียนปรับให้ดีขึ้นตามที่พวกเขาทำงานผ่านลำดับของกิจกรรมปัญหาและยังเผยให้เห็นจำนวนของปัจจัย เช่น ระดับชั้นของนักเรียน ประสบการณ์ ในการทำกิจกรรมการสร้างแบบจำลอง และความสามารถในการสร้างแบบจำลองที่ได้รับอิทธิพลจากการกระบวนการสร้างแบบจำลองของพวกเขา และในกระบวนการศึกษาครั้งนี้เสนอสามมิติของทฤษฎีแบบจำลองเพื่อสำหรับตรวจสอบ พฤติกรรมการสร้างแบบจำลองของนักเรียน ผลกระทบต่อการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลกระทบต่อการเรียนรู้ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Gerofsky (2010) ได้ศึกษาสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ของชีวิตจริงของโจทย์ปัญหา ในปี 2010 ที่ผ่านมา การจัดการอย่างดีของการทำงานเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้ความสำคัญ ในการพยายามที่จะนำความเป็นชีวิตจริงมาเพิ่มเติมในปัญหา และความเข้าใจของนักเรียน ต่อปัญหาเหล่านี้จากการศึกษาก่อนหน้านี้ของโจทย์ปัญหาเสมือนเป็นว่าศิลปะการสอนและประเภทของการรู้ ผู้วิจัยระบุว่าเราไม่สามารถที่จะไม่สงสัยเกี่ยวกับความสามารถที่จะรู้และการใช้ตัวแทนหรือความเหมาะสมของชีวิตจริงกับโจทย์ปัญหา โดยที่เป็นไปไม่ได้ที่จะยืนยันว่าเงื่อนไขของโลกสมัยปัจจุบันของเราแสดงให้เห็นถึงความชัดเจนทำของคำว่าโจทย์ปัญหากับชีวิตจริงที่ไม่แน่นอน

Eseryel et al. (2011) กล่าวว่าแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้โดยการสร้างแบบจำลองแบบไดนามิกทำให้นักเรียนมีการปรับปรุงในความซับซ้อนการแก้ปัญหาของพวกเขาอย่างมีนัยสำคัญ

Machmud (2011) ได้ศึกษากลยุทธ์การเสริมต่อการเรียนรู้ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์การเรียนรู้คณิตศาสตร์ควรได้รับการออกแบบมาเพื่อให้มีการมุ่งเน้นไปยังเป้าหมายที่มุ่งเน้นไปยังกระบวนการ การวางแนวทางการเรียนรู้มุ่งเน้นไปที่การพัฒนาของ “ความคิดทางคณิตศาสตร์(Mathematical thinking)” และ “การจัดการทางคณิตศาสตร์(Mathematical disposition)”ดังนั้นขั้นตอนของการเรียนการสอนเป็นเงื่อนไขเพื่อให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นที่จะสร้าง "ความหมาย" ผ่านกระบวนการของประสบการณ์ของตนเองไม่เพียงรู้เท่านั้น เช่นในเงื่อนไขบทบาทของครูเปลี่ยนจากเพียง "การแสดงและการบอก" เป็น “ผู้อำนวยความสะดวกและผู้ให้คำแนะนำที่สามารถตอบสนองต่อการพัฒนากระบวนการคิดของนักเรียน ซึ่งดำเนินการต่อจากความสามารถจริงที่เป็นอยู่จริงไปยังความสามารถตามศักยภาพของนักเรียนโดยการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ความพยายามระหว่างหมู่คนอื่น ๆ ดำเนินการโดยการนำเสนอการสร้างการเรียนรู้ด้วยการจัดสรรกับการสร้างความรู้ทางสังคม (Socio-constructivism) ที่เหมาะสม สิ่งหนึ่งที่สำคัญที่สุดของการสร้างความรู้ทางสังคมเป็นแนวคิดของการเสริมต่อในการฝึกปฏิบัติในการเรียนรู้

Hwang et al. (2007) ได้ทบทวนและวิเคราะห์งานวิจัยเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะออกแบบ SET ซึ่งเป็นกรอบแนวคิดในการออกแบบการเสริมต่อการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพที่เรียนในบริบทการเรียนแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จุดประสงค์เพื่อสนับสนุนให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาได้สำเร็จ โดยแนะนำให้รู้จักกับ SET ซึ่งเป็นแนวทางเลือกแกทางหนึ่งในการพูดถึงรูปแบบของการเสริมต่อการเรียนรู้ที่แตกต่างกันในกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่ง SET เป็นแนวทางการสอนอย่างหนึ่งที่สนับสนุนการแก้ปัญหาของนักเรียนรวมถึงเป็นกระบวนการย่อยในการแก้ปัญหาและการทำให้ปัญหานั้นอยู่ในรูปทั่วไป แต่อย่างไรก็ตามในบริบทนี้ไม่ได้กล่าวว่า SET จะประสบความสำเร็จอย่างเดียว ยังต้องขึ้นเกี่ยวกับการเสริมต่อการเรียนรู้อีกด้วย

Oswalt (2012) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในห้องเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นตอนซึ่งนักเรียนได้ประยุกต์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้จากในชั้นเรียนกับสถานการณ์ใหม่ที่ไม่คุ้นเคย งานของการสร้างแบบจำลองคือเป็นปัญหาที่เต็มไปด้วยคณิตศาสตร์ที่นักเรียนมีส่วนร่วมการคิดทางคณิตศาสตร์ , การวาดภาพประกอบสิ่งที่ได้เรียนรู้ก่อนหน้านี้และสนับสนุนความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมอยู่ การสร้างแบบจำลองทำให้นักเรียนต้องกำหนดความหมายให้กับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และขยายไปสู่มโนทัศน์ที่มากกว่าการเรียนรู้โดยการท่องจำ เพื่อที่จะให้นักเรียนประสบ

ความสำเร็จในห้องเรียนท่ามกลางความคิดของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนต้องมีการสอนวิธีการทำงานร่วมกันกับ นักเรียนคนอื่น ๆ อดทนผ่านปัญหาที่ท้าทายและตระหนักถึงความคิดของตนเอง

Özdemir and Üzel (2012) ได้ศึกษาการพิจารณาความคิดเห็นของนักเรียนเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนที่ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นฐาน ได้รับการออกแบบงานวิจัยเป็นแบบการวิจัยเชิงบรรยาย โดยเตรียมครูเป็นระยะเวลา 3 เดือน โดยนำไปจัดการเรียนกับนักเรียนระดับเกรด 6 – 8 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน โดยแต่ละกลุ่มมีลักษณะของนักเรียนเหมือนกัน จากการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างพบว่านักเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูล ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงพรรณนาและนักเรียนส่วนใหญ่มี ความคิดเชิงบวก เกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน โดยนักเรียนระบุว่าพวกเขามีประสบการณ์สภาพแวดล้อมที่แตกต่างกันในชั้นเรียนและทำให้เป็นผลดีต่อประสิทธิภาพการเรียนรู้ของวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้นักเรียนบางคนแสดงว่าการศึกษาเป็นความสนุกสนานและสามารถแสดงความคิดเห็นเชิงลบบางอย่างได้เพราะการทดสอบความวิตกกังวล

Kang and Noh (2012) ได้ศึกษาการสอนการสร้างแบจำลองทางคณิตศาสตร์กับวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน การสร้างแบบจำลองเป็นกระบวนการที่เป็นวงจรของการสร้างและการดัดแปลงแบบจำลองของสถานการณ์เชิงประจักษ์ที่จะเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นและช่วยในการตัดสินใจ บทบาทของการสร้างแบบจำลองและการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่โรงเรียน ได้รับความสนใจเพิ่มขึ้นในการสร้างการเรียนรู้ตามสภาพจริงและเผยให้เห็นกระบวนการคิดที่เกิดขึ้น ผลประโยชน์และความท้าทายในการเรียนการสอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และเผยแพร่ความพยายามของเราในการปรับปรุงปัญหาในแบบตำราเรียนเพื่อให้พวกเขาสามารถกลายเป็นกิจกรรมการสร้างแบบจำลองตามสภาพจริงมากขึ้นและผลกระทบต่อการเรียนการสอนและการประเมินเช่นเดียวกับการวิจัย

Leong (2013) ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาของประเทศมาเลเซีย สาเหตุที่ควรจะนำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาในประเทศมาเลเซีย ความสำคัญของกระบวนการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์เกี่ยวกับวิธีที่ประเทศสิงคโปร์และประเทศสหรัฐอเมริกาได้กำหนดการสร้างแบบจำลองในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ตัวอย่างบางตัวอย่างของการอธิบายงานการสร้างแบบจำลองและกระบวนการการสร้างแบบจำลองที่สามารถเชื่อมโยงกับการเรียนการสอนในปัจจุบันในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาของประเทศมาเลเซียได้ ประโยชน์ของการสร้างแบบจำลองมีอย่างมากในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ไม่เพียงแต่จะเข้าใจการใช้คณิตศาสตร์ในโลกแห่งความจริง แต่ยังสร้างแบบจำลองหรือการแสดงลักษณะทางกายภาพที่ใช้ในการแก้ปัญหา โดยการใช้กระบวนการการสร้างแบบจำลองในการแก้ปัญหาในโลกแห่งความจริงจะช่วยให้การคาดการณ์และการให้เหตุผลที่เป็นหนึ่งในการมุ่งเน้นความสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Sajadi et al. (2013) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการตรวจสอบความสามารถการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ภายใต้มุมมองการเป็นตัวแทนอย่างมีประสิทธิภาพ การแก้โจทย์ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนสำหรับนักเรียน การจัดการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพจำเป็นต้องมีกลยุทธ์ที่มีประสิทธิภาพ หนึ่งในกลยุทธ์คือการใช้ตัวแทน นักเรียนบางคนประยุกต์ใช้คำสำคัญหรือตัวเลขเท่านั้น แต่เมื่อพวกเขาต้องเผชิญหน้ากับโจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนแล้วพวกเขาก็ไม่สามารถประยุกต์ใช้คำสำคัญเหล่านั้นได้ ดังนั้นครูจะต้องสอนกลยุทธ์ที่มีประสิทธิภาพเช่นการเป็นตัวแทน ในงานวิจัยนี้จะพยายามไม่ว่าจะใช้เป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ ผ่านวิธีการสุ่มกลุ่มตัวอย่างนักเรียนสี่สิบเอ็ดคนซึ่งได้รับการคัดเลือกจากโรงเรียนหญิงล้วนระดับประถมศึกษา ผ่านการสอบคณิตศาสตร์, การแก้ปัญหาของพวกเขาได้รับการศึกษา ผ่านการทดสอบสเปียร์แมน, ผลการวิจัยพบว่ามีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญระหว่างการเป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ ในชั้นประถมศึกษาปีที่สองนักเรียนได้ใช้ของการเป็นตัวแทน, มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตสูงและในทางตรงข้ามนักเรียนที่ไม่ได้ใช้ตัวแทนมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ไม่สูง ดังนั้นจึงมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญและโดยตรงระหว่างการเป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพและปัญหาคำที่มีประสิทธิภาพสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา

ตารางที่ 2 ตารางสังเคราะห์หลักการของแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หลักการ	นักการศึกษา					
	Henry& McAuliffe (1994)	Pollak (2003)	Dym (2004)	Niss,Blum& Galbraith (2007)	CCSSM (2010)	Pollak (2012)
ระบุตัวแปรในสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงและเลือกจำลองในคุณสมบัติที่สำคัญ					✓	
สถานการณ์ในโลกแห่งความจริงที่ต้องการทำความเข้าใจในคุณสมบัติที่สำคัญ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ระบุแง่มุมที่สำคัญของข้อมูลและความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง	✓	✓				
ตัดสินใจว่าสิ่งใดคือสิ่งที่สำคัญและสิ่งที่ไม่สำคัญ	✓	✓				✓
การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ระบุประเภทของภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่จะมีความเกี่ยวข้องและเป็นประโยชน์ในการทำงานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์		✓				
ดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์	✓	✓		✓	✓	✓
การแปลงผลทางคณิตศาสตร์กลับไปสู่โลกแห่งความจริง	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ตีความผลลัพธ์ในบริบทในโลกแห่งความจริง	✓			✓	✓	
ตรวจสอบคำตอบในโลกแห่งความเป็นจริงโดยการเปรียบเทียบกับสถานการณ์เดิมและปรับปรุงแบบจำลอง	✓	✓	✓	✓	✓	✓
รายงานเกี่ยวกับข้อสรุปและความสมเหตุสมผล	✓				✓	
การคาดการณ์ไปยังสถานการณ์ที่แตกต่างออกไป	✓		✓		✓	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 3 ตารางสังเคราะห์หลักการของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

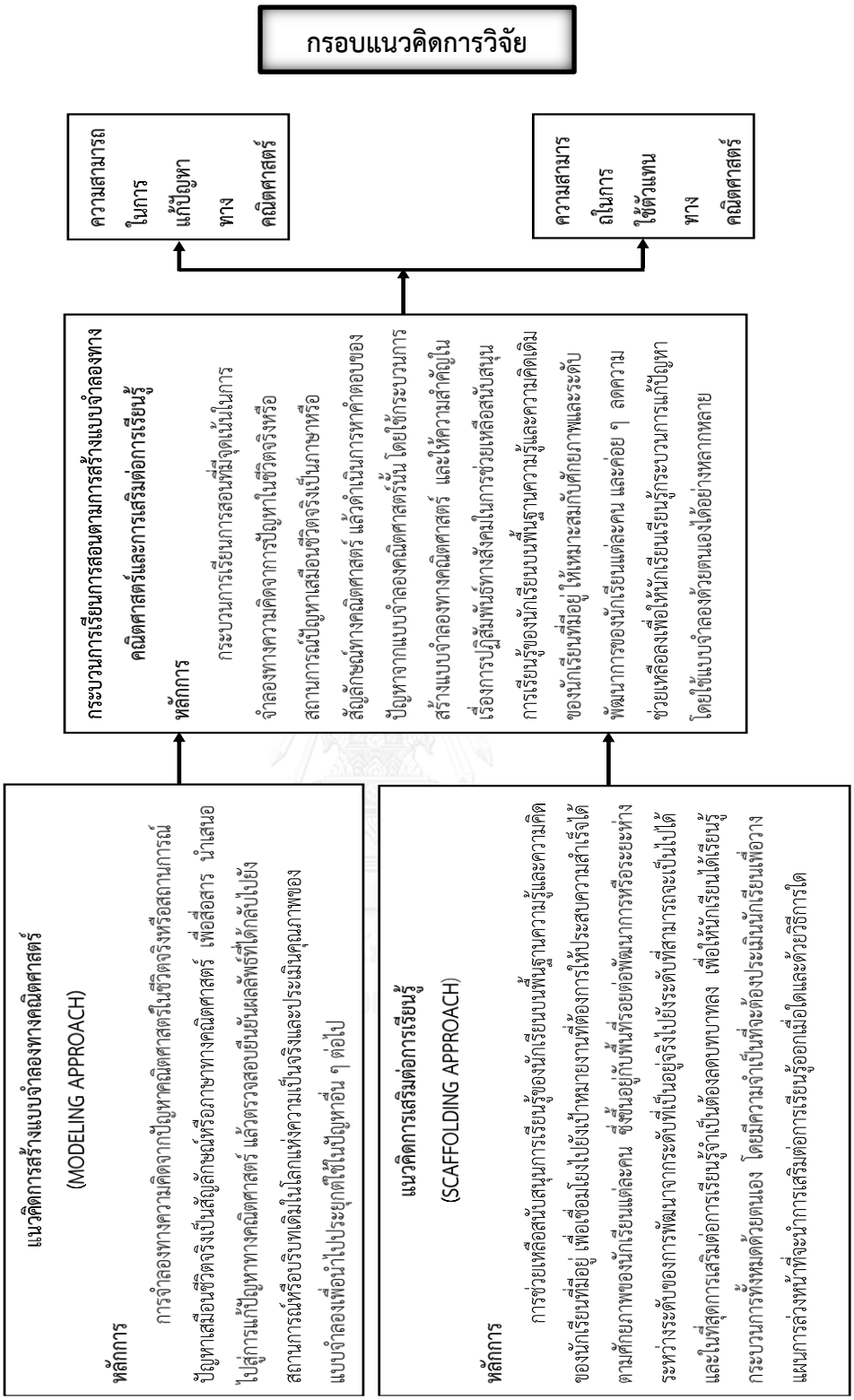
หลักการ	นักการศึกษา				
	Vygotsky (1978)	Rosenshine & Guenther (1992)	Hogan& Pressley (1997)	Ellis & Larkin (1998)	TA. (2008)
นักเรียนแต่ละคนไม่มีความรู้ที่จำเป็นหรือไม่มีความสามารถเรียนรู้บางสิ่งตามลำพัง	✓		✓	✓	
ครูต้องประเมินพื้นฐานความรู้ทักษะและความต้องการของนักเรียน	✓		✓		✓
เป้าหมายหรือความสามารถที่ต้องการพัฒนา	✓	✓	✓	✓	✓
ใช้ความหลากหลายในการสนับสนุนในขณะที่นักเรียนกำลังเริ่มที่จะทำงานตามวัตถุประสงค์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นหรือยากให้เสร็จสมบูรณ์ได้จากผู้ที่มีความเชี่ยวชาญมากกว่า	✓	✓	✓	✓	✓
ตรวจสอบพัฒนาการของนักเรียนผ่านข้อมูลป้อนกลับ		✓	✓		✓
ลดความช่วยเหลือจากการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติอย่างอิสระ		✓	✓		✓
ประยุกต์การเรียนรู้สู่สถานการณ์ใหม่ที่มีบริบทแตกต่างออกไป		✓			✓

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 4 ตารางสังเคราะห์องค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

องค์ประกอบ	นักการศึกษา / องค์กรทางการศึกษา			
	NCTM (2000)	Mandasari (2011)	Asmara (2014)	Puri. (2014)
แนวคิดภายในจิตใจที่แสดงออกมาเป็นรูปธรรม	✓	✓	✓	✓
เป็นผลมาจากการตีความของแต่ละคน	✓	✓	✓	✓
ใช้ในการค้นหาวิธีการแก้ปัญหา	✓		✓	✓
เครื่องมือขยายคิดทางคณิตศาสตร์	✓		✓	
โครงสร้างเล็ก ๆ ผ่านภาพ สัญลักษณ์ เครื่องหมาย		✓		
องค์ความรู้ของบางสิ่งที่ใช้แสดงถึงสิ่งอื่น		✓		✓
การสร้างขึ้นใหม่ของสภาพภายในจิตใจ		✓		

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University



ภาพที่ 10 กรอบแนวคิดการวิจัย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นการวิจัยและพัฒนาเพื่อมุ่งพัฒนากระบวนการเรียนการสอนและศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

การวิจัย (Research 1)

1. ศึกษาข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับหลักสูตร การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร
2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์
3. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

การพัฒนา (Develop 1)

1. พัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
2. ตรวจสอบและปรับปรุงคุณภาพกระบวนการเรียนการสอน
3. ทดลองใช้ (Try out) กระบวนการเรียนการสอน
4. ตรวจสอบกระบวนการเรียนการสอน
5. ปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนหลังจากการทดลองใช้ (try out)

ขั้นตอนที่ 2 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

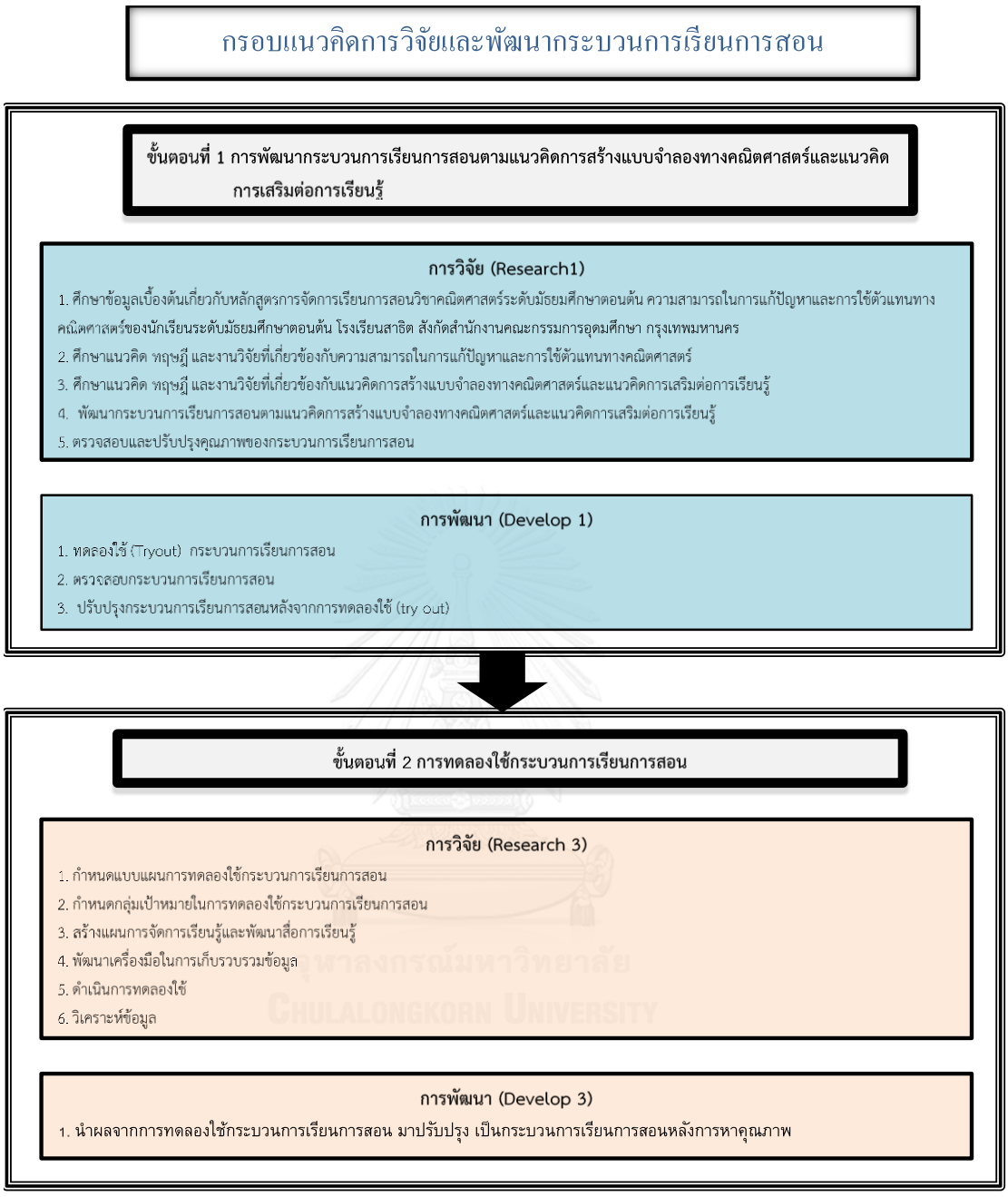
การวิจัย (Research 2)

1. กำหนดแบบแผนการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน
2. กำหนดกลุ่มเป้าหมายและกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน
3. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และพัฒนาสื่อการเรียนรู้
4. พัฒนาเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. ดำเนินการทดลองใช้และปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. วิเคราะห์ข้อมูล

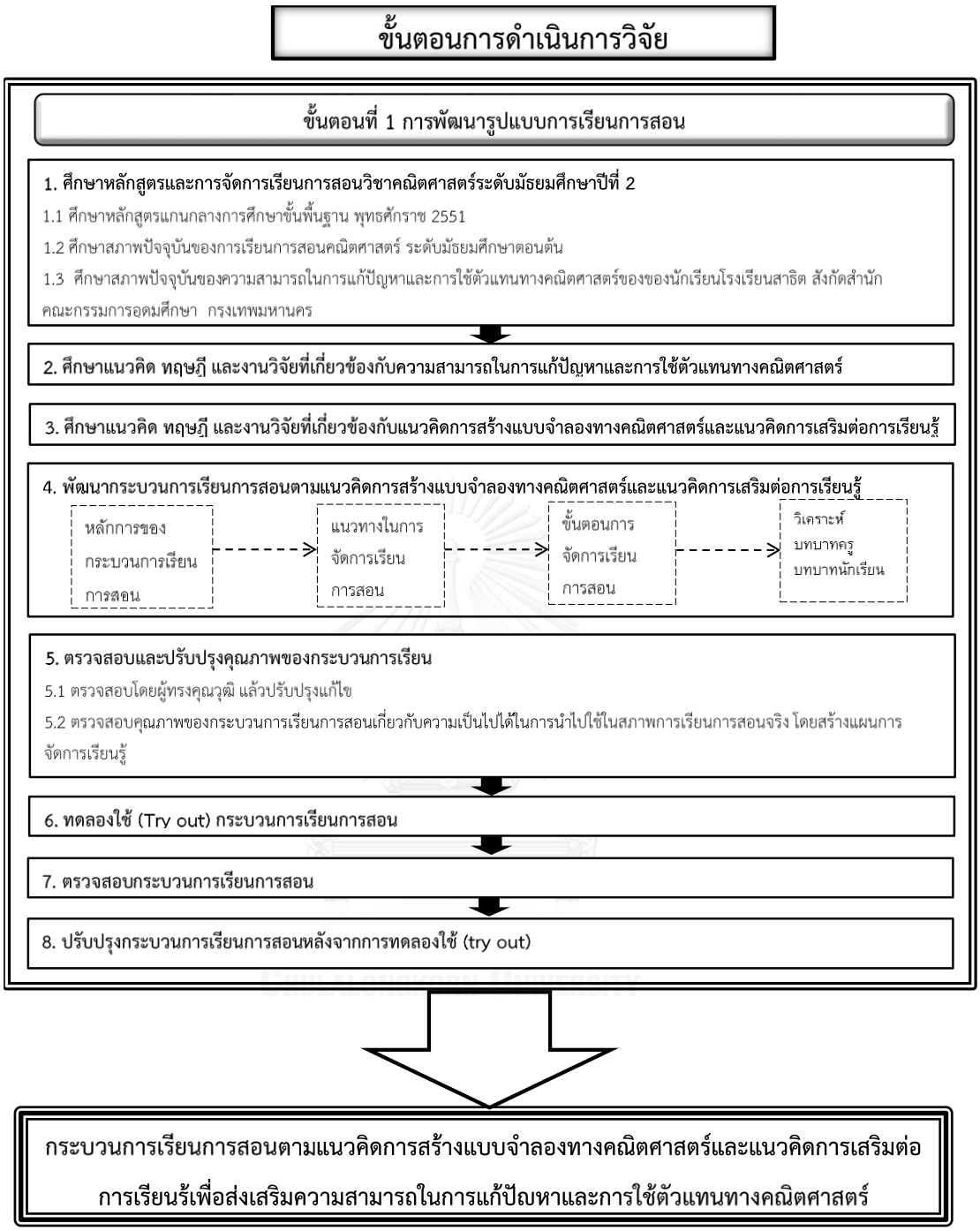
การพัฒนา (Develop 2)

1. นำผลจากการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน มาปรับปรุง เป็นกระบวนการเรียนการสอนหลังการหาคุณภาพ

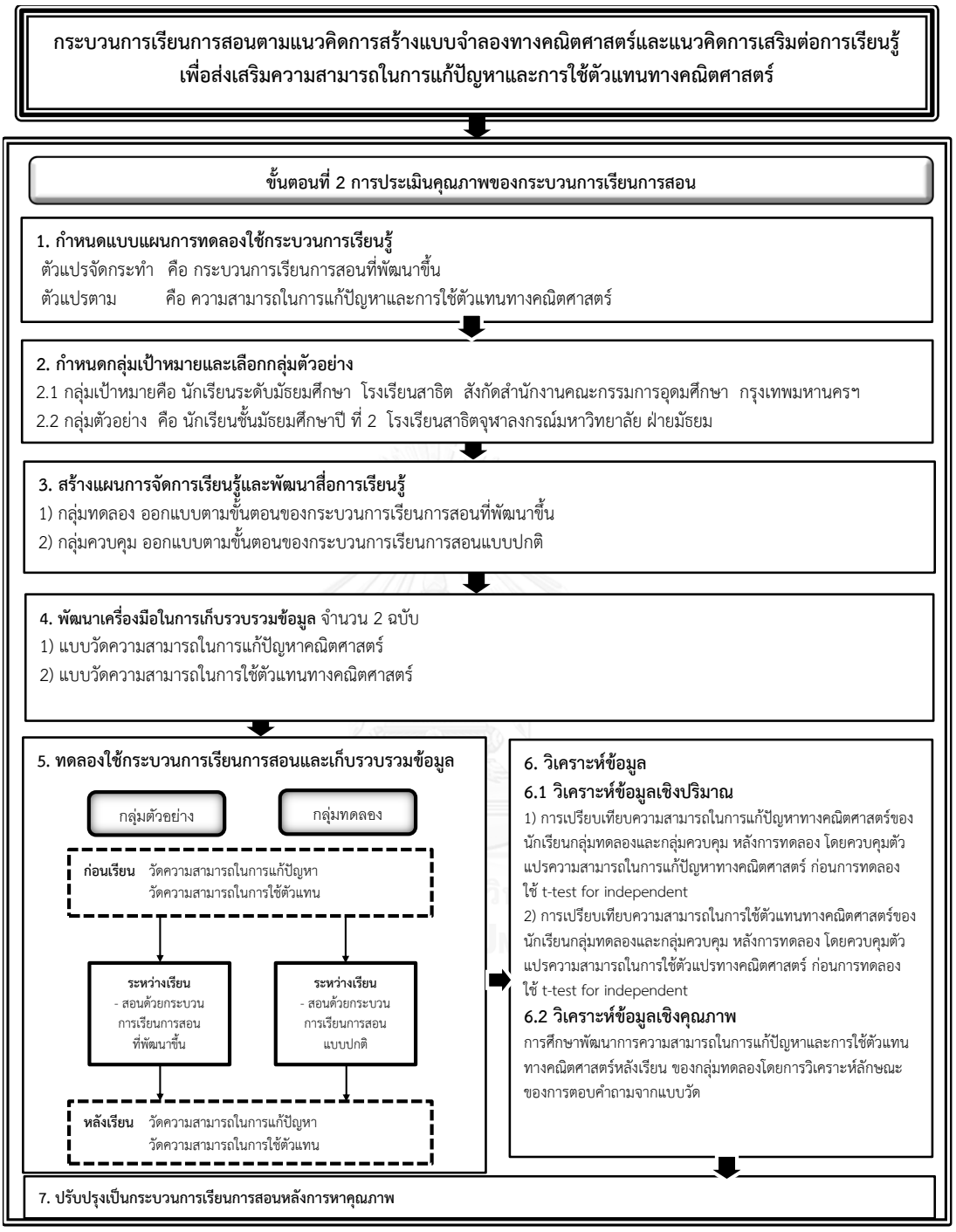
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University



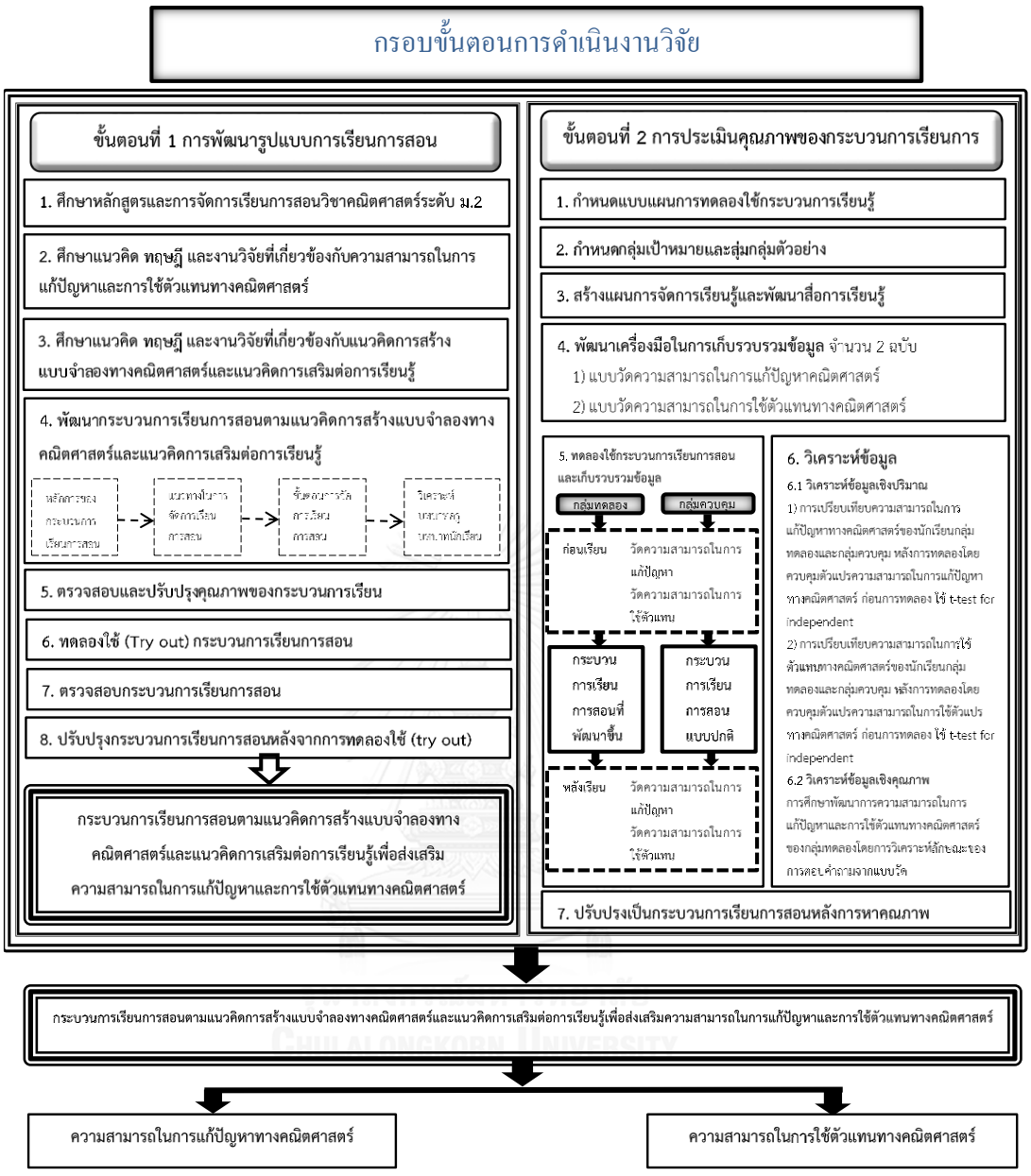
ภาพที่ 11 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยและพัฒนากระบวนการเรียนการสอน



ภาพที่ 12 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยตอนที่ 1



ภาพที่ 13 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัยตอนที่ 2



ภาพที่ 14 กรอบขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

1. ศึกษาข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับหลักสูตร การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จุดมุ่งหมาย ตัวชี้วัดสาระการเรียนรู้แกนกลาง และคุณภาพนักเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และแนวทางการจัดการเรียนรู้ เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้สอดคล้องตามความมุ่งหวังของหลักสูตร โดยผู้วิจัยศึกษาจากเอกสารหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ศึกษาธิการ, 2551) และเอกสารตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา, 2551)

1.2 ศึกษาสภาพปัจจุบันของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยผู้วิจัยศึกษาจากเอกสารรายงานผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับชาติ (ONET) วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2557; 2557) ผลการประเมินระดับนานาชาติและรายงานการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาสาเหตุเด็กไทยอ่อนคณิตศาสตร์และแนวทางแก้ไข (สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ, 2551)

1.3 ศึกษาสภาพปัจจุบันของความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของของนักเรียนโรงเรียนสาธิต ระดับมัธยมศึกษา สังกัดสำนักคณะกรรมการอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร

2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.3 แนวทางในการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.4 ความหมายของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

2.5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

2.6 แนวทางในการประเมินความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

3. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

3.1 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยผู้วิจัยศึกษาจากหนังสือ บทความ และรายงานการวิจัย โดยสรุปได้ดังนี้

แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำลองทางความคิดจากปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริง(โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์) เป็นสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสาร นำเสนอไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วตรวจสอบยืนยันผลลัพธ์ที่ได้กลับไปยังสถานการณ์หรือบริบทเดิมในโลกแห่งความเป็นจริงและประเมินคุณภาพของแบบจำลองเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาอื่น ๆ ต่อไป (Henry& McAuliffe, 1994, Pollak, 2003, Dym, 2004, Niss,Blum&Galbraith, 2007, CCSSM, 2010, Pollak,2012)

หลักการ 1 ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง (Real-world problem) ปัญหาในสถานการณ์ทั่ว ๆ ไปที่สามารถพบเจอได้ในชีวิตประจำวันหรือตัวอย่างปัญหาในห้องเรียนที่มีการดัดแปลงมาจากปัญหาในสถานการณ์จริงเพื่อให้ดูกระชับมากขึ้น และเป็นปัญหาที่ต้องการทำความเข้าใจ

หลักการ 2 การกำหนดปัญหาและการสรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ (Formulate mathematical problem , Summarize , Verify) การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการจำลองความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญที่ได้จากปัญหาและดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ และสรุปตรวจสอบผลลัพธ์ของปัญหาที่กำหนดขึ้น

หลักการ 3 การอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง (Infer) การพิจารณาและเชื่อมโยงตำตอบที่ได้กับบริบทของสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง

หลักการ 4 ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง (Verify the model) การประเมินถึงข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองที่สร้างขึ้น การอภิปรายให้เห็นถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดไป

หลักการ 5 การประยุกต์ใช้และการคาดการณ์แบบจำลองกับสถานการณ์อื่น ๆ (Apply , Predict) การนำแบบจำลองไปใช้กับสถานการณ์อื่น ๆ และการทำนายขยายไปสู่ปัญหาอื่น ๆ ในอนาคต

3.2 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวทางการเสริมต่อการเรียนรู้โดยผู้วิจัยศึกษาจากหนังสือ บทความ และรายงานการวิจัย โดยสรุปได้ดังนี้

แนวทางการเสริมต่อการเรียนรู้ หมายถึง การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด ตามแนวคิดของ (Vygotsky, 1978, Rosenshine & Guenther, 1992, Hogan & Pressley, 1997, Ellis & Larkin, 1998, TA, 2008)และ ดังนี้

หลักการ 1. การสำรวจองค์ความรู้และความคิดพื้นฐานเดิม (Foundational knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

หลักการ 2. การสำรวจภาระงานที่ไม่คุ้นเคย (New Task) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนยังไม่สามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

หลักการ 3. การเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffold) เพื่อให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนโดยผ่านกระบวนการการจัดการเรียนการสอน ซึ่งมีโครงสร้างของการช่วยเหลือสนับสนุนเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

3.1 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยครู (The instructor does it)

3.2 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยชั้นเรียน (The class does it)

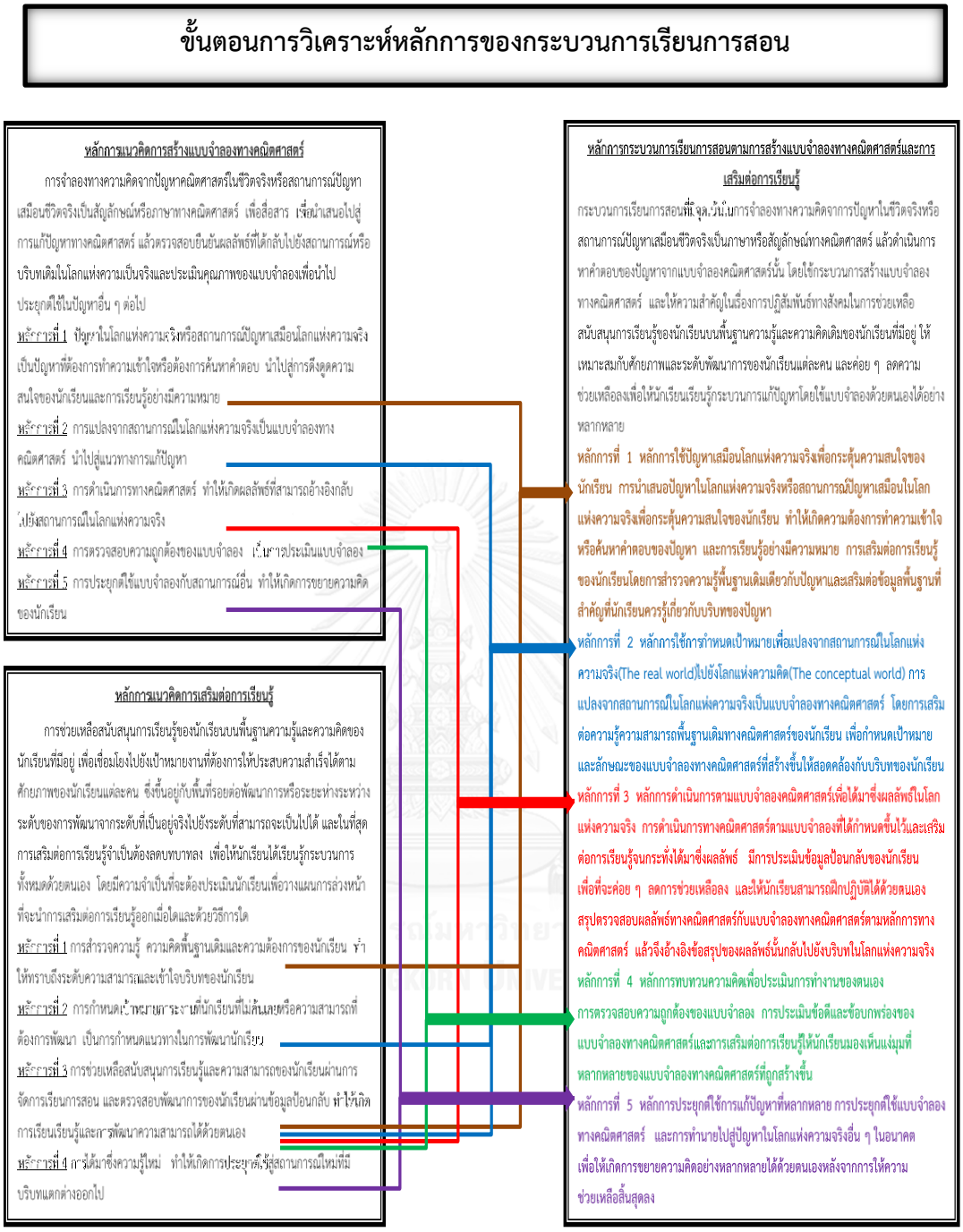
3.3 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยกลุ่มย่อย (The group does it)

3.4 นักเรียนแต่ละคนเรียนรู้ด้วยตนเอง (The individual does it)

หลักการ 4. การได้มาซึ่งองค์ความรู้ใหม่ (New knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสนับสนุนสิ้นสุดลง

4. พัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

4.1 สร้างหลักการของกระบวนการเรียนการสอน ผู้วิจัยนำสาระสำคัญของแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่วิเคราะห์ได้จากข้อ 3 มาบูรณาการแล้วพัฒนาเป็นหลักการของกระบวนการเรียนการสอน

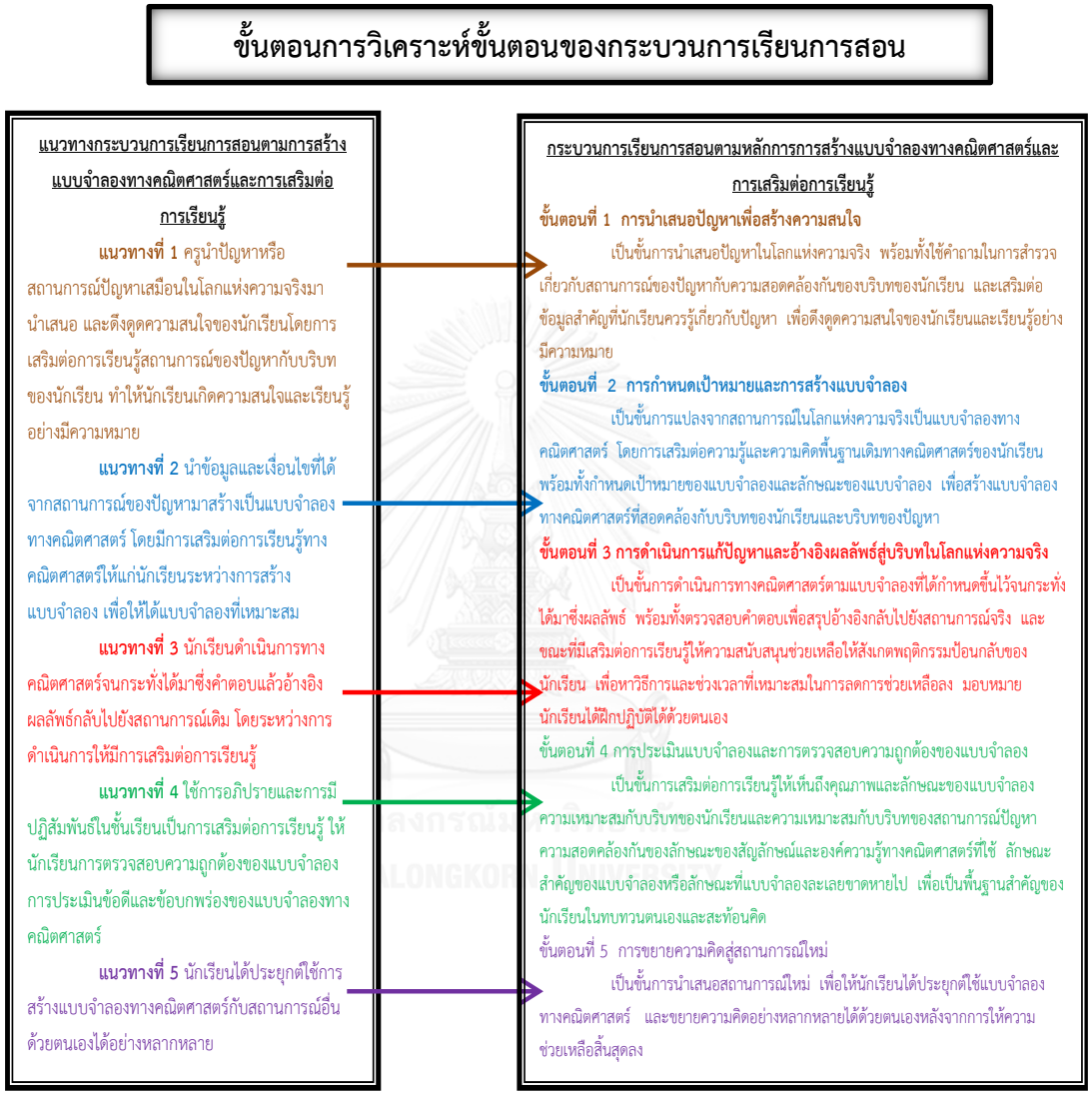


ภาพที่ 15 หลักการของกระบวนการเรียนการสอนตามหลักการของแนวคิดของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการแสริมต่อการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน

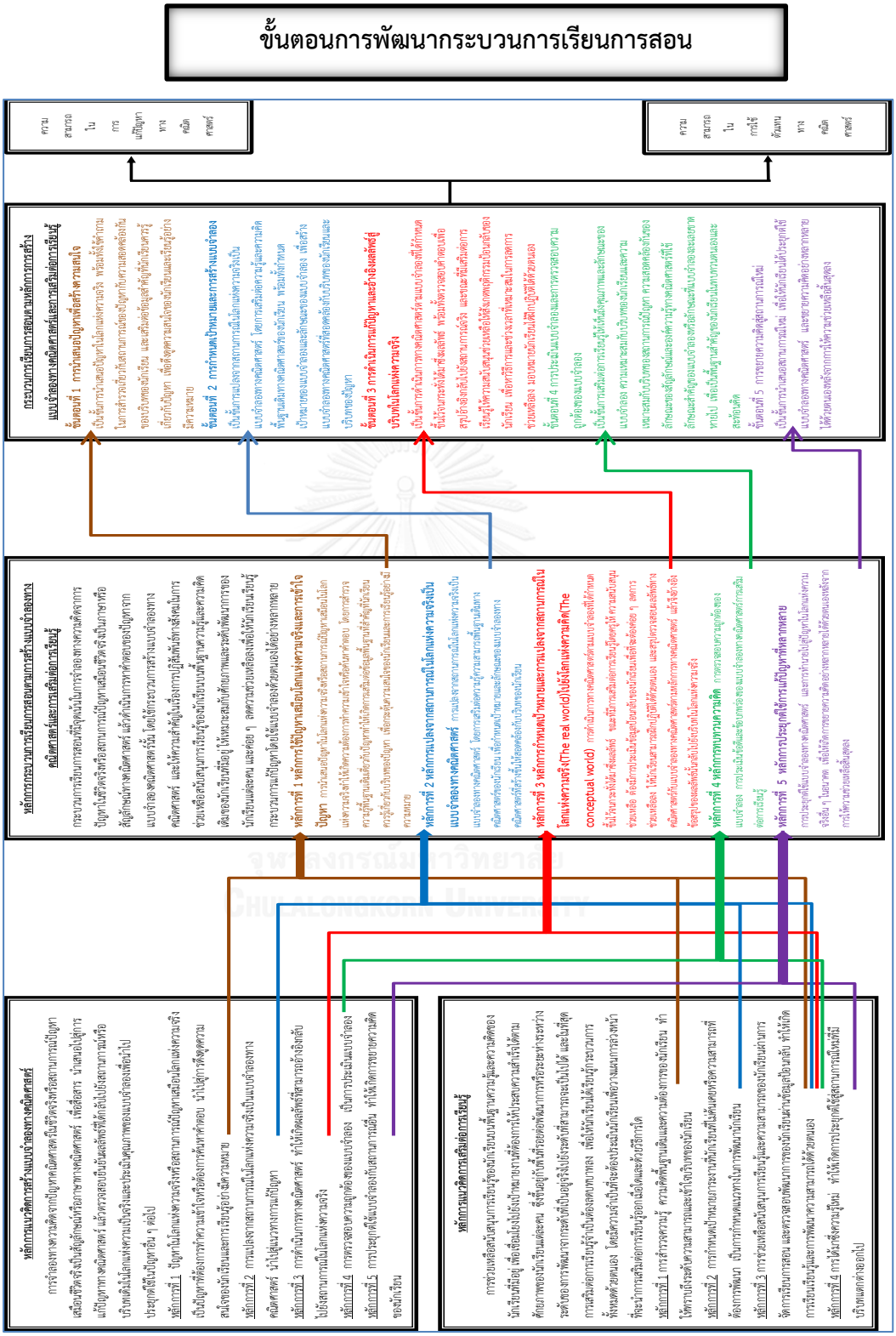
4.2 กำหนดแนวทางในการจัดการเรียนการสอน ผู้วิจัยนำหลักการของกระบวนการเรียนการสอน ที่ได้จากข้อ 4.1 มาวิเคราะห์เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอน

ภาพที่ 16 แนวทางการจัดการเรียนการสอนที่วิเคราะห์จากหลักการของกระบวนการเรียนการสอน

4.3 กำหนดขั้นตอนการจัดการเรียนการสอน ผู้วิจัยนำแนวทางในการจัดการเรียนการสอน ที่วิเคราะห์ได้จากข้อ 4.2 มาสังเคราะห์เป็นขั้นตอนการจัดการเรียนการสอน



ภาพที่ 17 ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนที่สังเคราะห์จากแนวทางการจัดการเรียนการสอนของกระบวนการเรียนการสอน



ภาพที่ 18 ขั้นตอนการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

4.4. วิเคราะห์ความเชื่อมโยงของกระบวนการเรียนการสอนไปสู่ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยพัฒนาขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนที่ได้จากข้อ 4.3 มาวิเคราะห์ความเชื่อมโยงของกระบวนการเรียนการสอนที่นำไปสู่ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.5. วิเคราะห์กิจกรรมการเรียนการสอน บทบาทครู บทบาทนักเรียนในกระบวนการเรียนการสอนตามขั้นตอนการเรียนการสอน

รายละเอียดของกิจกรรมการเรียนการสอน บทบาทครู บทบาทนักเรียนในขั้นตอนการเรียนการสอนแต่ละขั้น แสดงดังตารางที่ 5

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 5 รายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรใกล้เคียงกับบริบทของนักเรียนหรือเป็นสิ่งที่นักเรียนสนใจ 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนต่อปัญหาหรือสถานการณ์ที่นำเสนอ พร้อมทั้งสำรวจพื้นความรู้เดิมที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้ 3. ครูประเมินพื้นความรู้ตามความเข้าใจเดิมของนักเรียนพร้อมทั้งเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่ควรรู้เกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่นั้น 4. ครูสร้างบรรยากาศการเสริมต่อการเรียนรู้โดยครู หรือนักเรียนร่วมชั้นเรียนหรือผู้ที่มีความรู้มากกว่าร่วมกันอภิปราย 5. นักเรียนวิเคราะห์และทำความเข้าใจกับปัญหาหรือสถานการณ์	1. ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ บริบทชีวิตจริงที่มีความสอดคล้องกับเนื้อหา บริบทของนักเรียนและความเข้าใจสำคัญที่นักเรียนควรเข้าใจก่อนจะเรียน 2. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนและสำรวจความเข้าใจเดิมของนักเรียนต่อปัญหา 5. ประเมินความเข้าใจเดิมของนักเรียนด้วยการใช้คำถาม พร้อมทั้งวางประเด็นอภิปรายที่เป็นข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรทราบให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อเป็นการช่วยเหลือนักเรียนให้เข้าใจปัญหามากขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความเข้าใจเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา	1. นักเรียนร่วมกันรวบรวมสิ่งที่ปัญหากำหนดให้และสรุปสิ่งที่ปัญหาต้องการหาคำตอบเป็นเป้าหมายของแบบจำลอง 2. ครูมอบหมายงานให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 3. นักเรียนแต่ละคนบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาเพื่อสังเคราะห์ความคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือแบบกลุ่ม 4. ครูให้คำชี้แนะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	1. ส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอหรืออธิบายลักษณะแนวทางการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 2. ให้คำแนะนำเกี่ยวกับยุทธวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ เช่น ใช้คำถามหรือการยกตัวอย่างหรืออภิปรายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ	1. กำหนดสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ 2. วางแผนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ลงมือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียน เพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง	1. นักเรียนลงมือดำเนินการทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จนได้มาซึ่งผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ 2. นักเรียนเชื่อมโยงผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ไปยังผลลัพธ์ของสถานการณ์หรือปัญหาเสมือนชีวิตจริง 3. ครูประเมินความสามารถในการดำเนินการของนักเรียนเพื่อช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน 4. ประเมินงานที่นักเรียนพัฒนาการสามารถปฏิบัติได้ตามลำพังแล้วจึงลดความช่วยเหลือลง	1. สร้างบรรยากาศที่อำนวยความสะดวกให้นักเรียนดำเนินแก้ปัญหา 2. สังเกตความสามารถของนักเรียนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งประเมินและให้ความช่วยเหลือตามความสามารถของนักเรียนตามศักยภาพที่ควรจะพัฒนาไปได้ 3. สังเกตพัฒนาการของนักเรียนเมื่อสามารถปฏิบัติงานได้ตามลำพังแล้วจึงค่อย ๆ วางแผนลดความช่วยเหลือของนักเรียนคนนั้น ๆ ออกไป 4. ใช้คำถามวางประเด็นเพื่อให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์อ้างอิงกลับไปยังโลกแห่งความจริง	1. ลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเองอย่างอิสระในช่วงแรกและพยายามปรับปรุงตนเองจากคำชี้แนะหรือจากความช่วยเหลือของครูหรือเพื่อนนักเรียนที่มีความสามารถสูงกว่า 2. ตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นโดยการฝึกฝนการอธิบายความคิดของตนเองให้คนอื่นรับฟัง 3. อภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์เชื่อมโยงไปยังคำตอบในชีวิตจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียน และความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด	1. นักเรียนนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. ครูดำเนินการอภิปรายเพื่อให้นักเรียนได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ ข้อดี ข้อบกพร่องของแบบจำลองแต่ละแบบ	1. มอบหมายให้นักเรียนออกมานำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่มตนเอง 2. ดำเนินการอภิปรายให้เห็นถึงประสิทธิภาพของแบบจำลองแต่ละแบบ พร้อมทั้ง ชี้แนะการปรับปรุงข้อบกพร่อง 3. ใช้คำถามแบบซักค้านให้นักเรียนเห็นความแตกต่างและความหลากหลายของแบบจำลองแต่ละแบบจำลอง และเพื่อกระตุ้นความคิดของนักเรียน 4. ช่วยชี้แนะการประเมินแบบจำลอง	1. นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. อภิปราย เปรียบเทียบ โต้แย้ง ทบทวนและสะท้อนคิดคำตอบและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองและกับของเพื่อนักเรียนคนอื่น ๆ 3. สรุปและทำความเข้าใจลักษณะของแบบจำลองแต่ละแบบที่ได้จากการนำเสนอ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรเป็นสิ่งที่เป็นการได้ฝึกการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เคยสร้างมาแล้ว อย่างหลากหลาย 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจวางแผนการสร้างแบบจำลองและมอบหมายให้นักเรียนคาดการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ครูวางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น 4. ครูคอยให้คำแนะนำตามที่จะสามารถเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนได้ 5.นักเรียนร่วมอภิปรายเพื่อทำความเข้าใจปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง	1. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและสามารถประยุกต์ใช้ความรู้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้า 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียน 5. วางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความสามารถความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา 5. ประยุกต์ใช้การคาดการณ์การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับปัญหาที่กำหนดมาให้

5. ตรวจสอบและปรับปรุงคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

5.1 ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นโดยผู้ทรงคุณวุฒิ ดำเนินการโดยนำกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นให้ผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาตรวจสอบแก้ไข และให้ข้อเสนอแนะ จากนั้นนำผลการประเมินและข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไขกระบวนการเรียนการสอน

5.2 ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนเกี่ยวกับความเป็นไปได้ในการนาไปใช้ในสภาพการเรียนการสอนจริง โดยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ 3 แผน ตามขั้นตอนของกระบวนการที่พัฒนาขึ้น และปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้ทรงคุณวุฒิ แล้วนำไปทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษากรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง หลังจากการทดลองสอนแต่ละครั้งผู้วิจัยนำผลที่ได้จากการทดลองสอนไปปรับปรุงแก้ไขกระบวนการเรียนการสอน แนวทางการสอน วิธีการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ในแต่ละขั้นของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนที่ 2 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. กำหนดแบบแผนการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

กำหนดแบบแผนการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนแบบกึ่งทดลอง (Quasi-experimental Research) และใช้แบบแผนการทดลองมีกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม วัดก่อนและหลังการทดลอง (The Pretest-Posttest Control Group Design) ดังนี้

ตัวแปรจัดกระทำ	คือ	กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
ตัวแปรตาม	คือ	ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์
ผลที่วัดได้ก่อนการทดลอง	คือ	ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน
ผลที่วัดได้หลังการทดลอง	คือ	ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

2. กำหนดกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา จำนวน 8 โรงเรียน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองนี้ ผู้วิจัยเลือกนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขตกรุงเทพมหานครฯ ภาคการศึกษาปลาย ปีการศึกษา2559 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวน 64 คน และมีการจัดนักเรียนแต่ละห้องแบบคละความสามารถ แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน จำนวน 32 คน และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน จำนวน 32 คน โดยใช้การเลือกแบบเจาะจง

ผู้วิจัยนำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2559 ของนักเรียน 2 ห้องเรียน ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใกล้เคียงกัน มาวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยใช้สถิติการทดสอบเอฟ ($F-test$) เมื่อพบว่าความแปรปรวนไม่แตกต่างกันอย่างมีระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 จึงนำคะแนนมาวิเคราะห์เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยโดยใช้สถิติการทดสอบที ($T-test$) แล้วหากพบว่าคะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05 แล้วผู้วิจัยจึงใช้การสุ่มอย่างง่ายสุ่มห้องเรียน 1 ห้องเป็นกลุ่มทดลองและอีก 1 ห้องเป็นกลุ่มควบคุม

3. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และพัฒนาสื่อการเรียนรู้

1. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และตัวชี้วัดสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อนามาใช้เป็นแนวทางในจัดทาแผนการจัดการเรียนรู้

2. เลือกเนื้อหาในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อนามาใช้ในการทดลองสอน ได้เนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 จำนวน 2 บท คือ เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียวและการแปรผัน รวม 24 คาบ จำนวน 24 ชั่วโมง 12 สัปดาห์ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เนื้อหา และกำหนดจำนวนชั่วโมงเรียนให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์และเนื้อหาของรายวิชา ดังนี้

เรื่องที่ 1 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว จำนวน 12 ชั่วโมง

เรื่องที่ 2 การแปรผัน จำนวน 12 ชั่วโมง

ผู้วิจัยมีเหตุผลและหลักในการเลือกเนื้อหาคือ เป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงของนักเรียน

3. เขียนแผนการจัดการเรียนรู้และพัฒนาสื่อการเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้กับกลุ่มทดลอง ออกแบบตามขั้นตอนของการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น

2) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้กับกลุ่มควบคุม ออกแบบตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ

ซึ่งแสดงรายละเอียดในตารางที่ 6

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 6 กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้)	**กลุ่มควบคุม** (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ)
ครูจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน โดยได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งมี 5 ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียน เพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง ขั้นตอนที่ 4 ประเมินแบบจำลอง เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง	ขั้นตอนที่ 1 ขั้นนำ ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการทบทวนพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นต้องใช้ในการเรียน หรือจัดสถานการณ์ หรือใช้ถามคำถามเกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน ขั้นตอนที่ 2 ขั้นจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ซึ่งส่งเสริมให้นักเรียนเน้นการคิด มีคุณภาพดานความรู และมีทักษะที่จำเปนสำหรับการดำรงชีวิตในสังคมที่มีการเปลี่ยนแปลง และแสวงหาความรูเพื่อพัฒนาตนเองอยางตอเนื่องตลอดชีวิต ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งจัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและนอกจากนี้ในหนังสือยังได้นำเสนอขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ซึ่งมีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้ 1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา 2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า 3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสัญลักษณ์โดยใช้ความรู้ในเรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว 4. แก้สมการ 5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์ 6. สรุปคำตอบ ขั้นตอนที่ 3 ขั้นสรุป สรุปเนื้อหาสาระและความคิดรวบยอดที่ได้รับจากการทำกิจกรรม การสรุปในลักษณะต่าง ๆ เช่น ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปหรือทบทวนสิ่งที่ได้เรียนมาแล้วในคาบ

4. นำแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้นไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 2 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะจากนั้นนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โดยผู้ทรงคุณวุฒิแนะนำเรื่องการเลือกโจทย์ปัญหาในชีวิตจริงที่จะนำมาเสนอให้กับนักเรียนและความชัดเจนของบทบาทของครูและบทบาทนักเรียนในการจัดการเรียนการสอน

4. พัฒนาเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยพัฒนาเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อประเมินคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยพัฒนาเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล จำนวน 2 ฉบับ ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยดำเนินการพัฒนาโดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง สร้างตารางวิเคราะห์ข้อสอบ สร้างแบบทดสอบ สร้างเกณฑ์การให้คะแนน ให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบแล้วปรับปรุงแก้ไขก่อนจะนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบและแก้ไข จากนั้นนำไปทดลองใช้กับนักเรียนที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาค่าความยาก ค่าดัชนีอำนาจจำแนก และค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ ผลการตรวจสอบคุณภาพแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ แสดงในภาคผนวก จ

4.1 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน-ฉบับหลังเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จำนวน 5 ข้อ แบบอัตนัย ใช้เวลาในการสอบ 50 นาที เป็นแบบวัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้การเก็บข้อมูล ดังนี้

- ข้อมูลเชิงปริมาณ เป็นข้อมูลที่ได้จากคะแนนของแบบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน เพื่อใช้เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- ข้อมูลเชิงคุณภาพ เป็นข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ลักษณะการตอบคำถามในแบบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน-ฉบับหลังเรียน เพื่อศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

4.1.1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากตำราเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1.2. ศึกษาเนื้อหาของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์รายวิชาคณิตศาสตร์วิเคราะห์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตารางที่ 7 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	เนื้อหา
ก่อนเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว เกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด
หลังเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้สอน เกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 2 กลุ่มเนื้อหา ในการเรียนระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคปลาย ดังนี้ 1. เรื่องสมการกำลังสอง 2. เรื่องการแปรผัน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

4.1.3. สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหาที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังในเรื่องที่ต้องการวัด เป็นจำนวนประมาณ 1.5 เท่าของจำนวนที่ต้องการใช้ ก่อนนำไปวิเคราะห์คุณภาพ พร้อมทั้งเกณฑ์การประเมินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตารางที่ 8 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	จำนวนข้อที่ทดลองใช้	ข้อที่ทดลองใช้	จำนวนข้อที่ใช้จริง	ข้อที่ใช้จริง
เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** ● นำความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็มและสมบัติของเลขยกกำลัง มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ● นำความรู้เกี่ยวกับ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ● นำความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการเศษส่วน ทศนิยม มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลคำตอบที่ได้	2	1 , 2	1	
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ● เขียนสมการเชิงเสนตัวแปรเดียวจากสถานการณ หรือปญหาอย่างงายได้ ● แกโจทยปญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเสนตัวแปรเดียวอยางงายพรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	3	3 , 4 , 5	2	
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ● นำความรูเกี่ยวกับ อัตราสวน สัดสวน และ รอยละ มาใช้ในการแกโจทย์ปญหาพรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	2	6 , 7	1	
เรื่องการวัด ● ใชการคาดคะเน เกี่ยวกับการวัด ในสถานการณในชีวิตจริงต่าง ๆ รวมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้จากการคำนวณเมื่อเทียบกับการประมาณค่า ● ใชความรูเกี่ยวกับความยาว และพื้นที่แกปญหาในสถานการณตาง ๆ ได้พรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	2	8 ,9	1	
รวม	9	9	5	

ตารางที่ 9 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา –ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	**จำนวนข้อที่ทดลองใช้**	**ข้อที่ทดลองใช้**	**จำนวนข้อที่ใช้จริง**	**ข้อที่ใช้จริง**
เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว • แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบได้ และตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้	5	1 , 2 , 3 , 4, 5	3	
เรื่องการแปรผัน • แกโจทยปญหาเกี่ยวกับการแปรผัน พรอมทั้งตระหนักถึง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ	3	6 , 7 , 8	2	
รวม	8	8	5	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การประเมินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1) การวิเคราะห์โจทย์ (4 คะแนน)

ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาได้ถูกต้อง ครบถ้วน
1	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบได้ถูกต้อง ครบถ้วน
1	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา (4 คะแนน)

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
1	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
0	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
1	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
0	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ (4 คะแนน)

ดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ (3 คะแนน)	
3	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ถูกต้อง
2	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง หรือ นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ถูกต้อง
1	นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง
0	นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหา และไม่หาคำตอบ

การสรุปคำตอบ (1 คะแนน)	
1	นักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้อง ครบถ้วน
0.5	นักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป

4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด (4 คะแนน)

คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
0	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ นักเรียนไม่ระบุความเป็นไปได้ของคำตอบ และไม่อธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหา

วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือนักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
0	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือนักเรียนไม่ระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ และไม่อธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหา

4.1.4. นำแบบทดสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหา ความเหมาะสมของเวลาความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังความชัดเจนของสำนวนภาษาตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน

4.1.4.1 ผลการวิเคราะห์ ความสอดคล้องของภาษา ควรปรับปรุงภาษาที่ใช้ให้มีความชัดเจนมากขึ้น

โจทย์เดิม คอกม้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง 40 เมตรและยาว 50 เมตร โดยปลูกหญ้าไว้ เต็มพื้นที่ มีวัวตัวหนึ่งถูกล่ามไว้ที่เสาตรงมุมคอกด้วยเชือกยาว 10 เมตร อยากทราบว่าจะสามารถเดินกินหญ้าได้ในพื้นที่เท่าไร

โจทย์ใหม่ คอกม้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความกว้าง 40 เมตรและยาว 50 เมตร โดยปลูกหญ้าไว้เต็มพื้นที่ มีวัวตัวหนึ่งถูกล่ามไว้ที่เสาตรง มุมคอกด้วยเชือกยาว 10 เมตร อยากทราบว่าวัวตัวนี้จะสามารถเดินกินหญ้าได้ในพื้นที่อย่างมากที่สุดประมาณกี่ตารางเมตร

4.1.4.2 ลักษณะการจัดรูปแบบของแบบวัดให้กระชับ และไม่ซับซ้อนเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจและลดความย่อท้อในการทำงานให้แก่นักเรียน

4.1.4.3 ความยากหรือง่ายเกินไป ควรปรับปรุงให้มีความยากปานกลาง ไม่ยากหรือไม่ง่ายจนเกินไป

4.1.5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจความถูกต้องของเนื้อหาความเหมาะสมของเวลาความสอดคล้องระหว่างเนื้อหา กับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังความชัดเจนของสำนวนภาษาตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน โดยค่า IOC จากผู้ทรงคุณคุณวุฒิเป็น 1 ในทุกข้อคำถาม รายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก จ

ความสอดคล้องของภาษา ควรปรับปรุงภาษาให้มีความชัดเจนมากขึ้นและให้รายละเอียดสถานการณ์ของปัญหาอย่างครบถ้วน

โจทย์เดิม ต้องการติดพัดลมในห้องเรียนซึ่งกว้าง 27 เมตร ยาว 45 เมตร โดยพัดลมแต่ละตัวต้องมีระยะห่างเท่ากันและต้องห่างจากฝาผนังด้วยระยะห่างที่เท่ากับระยะห่างจากพัดลมตัวอื่น ๆ จงหาว่าต้องใช้พัดลมอย่างน้อยที่สุดกี่ตัว

โจทย์ใหม่ ต้องการติดตั้งพัดลมเพดานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในห้องเรียนซึ่งกว้าง 27 เมตร ยาว 45 เมตร โดยพัดลมแต่ละตัวมีระยะห่างเท่ากันและตัวที่อยู่ใกล้ฝาผนังมีระยะห่างจากฝาผนังเท่ากับระยะห่างจากพัดลมตัวอื่น ๆ จงหาว่าจะต้องใช้พัดลมอย่างน้อยที่สุดกี่ตัว

4.1.6. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนที่ผ่านการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้ว มาปรับปรุงและแก้ไขตามข้อแนะนำแล้วนำไปทดลองใช้ (try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม ห้องอื่นที่ไม่ใช่กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมและมีลักษณะเหมือนกับกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดโดยใช้สูตรของคูเดอร์ริชาร์ดสันสูตร 20 (Kuder Richardson-20: KR-20) ซึ่งมีเกณฑ์ว่าค่าความเที่ยงต้องมีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไปรวมทั้งหาค่าความยาก (Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก(Discrimination) ของแบบทดสอบโดยมีเกณฑ์ว่าค่าความยาก (p) ต้องอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไปหากข้อสอบดังกล่าวไม่ได้ตามเกณฑ์ต้องนำมาปรับปรุงแก้ไข โดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1.6.1. คุณภาพของการทดลองใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเป็น 0.8631 ค่าความยากตั้งแต่ 0.445 ถึง 0.656 และค่าอำนาจจำแนก 0.320 ถึง 0.656

4.1.6.2. คุณภาพของการทดลองใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเป็น 0.9455 ค่าความยากตั้งแต่ 0.695 ถึง 0.805 และค่าอำนาจจำแนก 0.359 ถึง 0.578

4.1.7. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดจำนวน 10 ข้อไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างและกลุ่มทดลอง โดยนำไปใช้ในระยะก่อนทดลอง 5 ข้อ และหลังทดลอง 5 ข้อ โดยมีรายละเอียด ในภาคผนวก จ

4.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน-ฉบับหลังเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น แบบอัตนัย ตอนที่ 1 จำนวน 10 ข้อ และ ตอนที่ 2 จำนวน 4 ข้อ ใช้เวลาในการสอบ 50 นาที เป็นแบบวัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้การเก็บข้อมูล ดังนี้

- ข้อมูลเชิงปริมาณ เป็นข้อมูลที่ได้จากคะแนนของแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน เพื่อใช้เปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

- ข้อมูลเชิงคุณภาพ เป็นข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ลักษณะการตอบคำถามในแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน-ฉบับหลังเรียน เพื่อศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

4.2.1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์จากตำราเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.2.2.ศึกษาเนื้อหาของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์รายวิชาคณิตศาสตร์วิเคราะห์การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 10 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาของแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	หัวเรื่อง
ก่อนเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด
หลังเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด

4.2.3. สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหาที่สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังในเรื่องที่ต้องการวัด เป็นจำนวนประมาณ 1.5 เท่าของจำนวนที่ต้องการใช้ ก่อนนำไปวิเคราะห์คุณภาพ พร้อมทั้งเกณฑ์การประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ตารางที่ 11 ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน

องค์ประกอบที่ / **กลุ่มเนื้อหา**	**องค์ประกอบที่ 1** การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ				**องค์ประกอบที่ 2** การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา			
	จำนวนข้อที่ทดลองใช้	**ข้อที่ทดลองใช้**	**จำนวนข้อที่ใช้จริง**	**ข้อที่ใช้จริง**	**จำนวนข้อที่ทดลองใช้**	**ข้อที่ทดลองใช้**	**จำนวนข้อที่ใช้จริง**	**ข้อที่ใช้จริง**
เรื่องจำนวนเต็มทศนิยมและเศษส่วนเลขยกกำลัง	5	1 , 2 ,3, 4 , 5	3		2	1 , 2	1	
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	3	6 , 7 ,8	2		2	3 , 4	1	
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ	5	9,10,11, 12,13	3		2	5 , 6	1	
เรื่องการวัด	3	14 , 15 , 16	2		2	7 , 8	1	
รวม	16	16	10		8	8	4	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (ก่อนเรียน-หลังเรียน)

เกณฑ์การให้คะแนน ตอนที่ 1

การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 1 (3 คะแนน).	
ระดับคะแนน	ลักษณะคำตอบ
3	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนอย่างน้อย 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ ***
2	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนอย่างน้อย 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ แต่ยังไม่ถึง 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนนั้น **
1	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนไม่ถึง 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ *
0	นักเรียนไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

หมายเหตุ

* หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนไม่ถึง 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ คือ จำนวนตัวแทนที่น้อยกว่า $\frac{1}{3}\times 6$ ตัวแทน นั่นคือ 1 ตัวแทนนั่นเอง

** หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนอย่างน้อย 1 ใน 3 ของจำนวน ตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้แต่ยังไม่ถึง 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนนั้น คือ จำนวนตัวแทนที่มากกว่า $\frac{1}{3}\times 6$ ตัวแทน แต่ไม่ถึง $\frac{2}{3}\times 6$ นั่นคือ 2 หรือ 3 ตัวแทนนั่นเอง

*** หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนมากกว่า 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ คือ จำนวนตัวแทนที่มากกว่า $\frac{2}{3}\times 6$ นั่นคือ 4 , 5 , 6 , ... ตัวแทนนั่นเอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การให้คะแนน ตอนที่ 2

การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2 (3 คะแนน)	
ระดับคะแนน	ลักษณะคำตอบ
3	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างเหมาะสม และนำไปสู่ในการแก้ปัญหา
2	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไม่เหมาะสม และนำไปสู่ในการแก้ปัญหา หรือ นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างเหมาะสม แต่ไม่นำไปสู่ในการแก้ปัญหา
1	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไม่เหมาะสม และไม่นำไปสู่ในกาแก้ปัญหา
0	นักเรียนไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

4.2.4. นำแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหาความเหมาะสมของเวลาความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังความชัดเจนของสำนวนภาษา ตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน

คำสั่งเดิม	จงใช้ ภาพ / กราฟ / ตาราง / ตัวแปร / สัญลักษณ์ หรือ ข้อความทางคณิตศาสตร์ในการแสดงข้อมูลต่อไปนี้ โดยสามารถได้มากกว่า 1 รูปแบบ เท่าที่จะสามารถแสดงได้
คำสั่งใหม่	จงใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจเป็น ภาพ / กราฟ / ตาราง / ตัวแปร / สัญลักษณ์ / ข้อความทางคณิตศาสตร์ หรือตัวแทนอื่น ๆ ในการแสดงข้อมูลต่อไปนี้ให้ได้รูปแบบมากที่สุด

4.2 ลักษณะการจัดรูปแบบของแบบวัดให้สอดคล้องกับเป้าหมายและลักษณะของคำตอบที่ต้องการ

4.3 ความยากหรือง่ายเกินไป ควรปรับปรุงให้มีความยากปานกลาง ไม่ยากหรือไม่ง่ายจนเกินไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

4.2.5. นำแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจความถูกต้องของเนื้อหาความเหมาะสมของเวลาความสอดคล้องระหว่างเนื้อหา กับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังความชัดเจนของสำนวนภาษา ตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน โดยค่า IOC จากผู้ทรงคุณคุณวุฒิมีค่าตั้งแต่ – 0.3 ถึง 1 รายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก จ

4.2.6. นำแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน ที่ผ่านการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้วมาปรับปรุงและแก้ไขตามข้อแนะนำแล้วนำไปทดลองใช้(Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ห้องอื่น ที่มีลักษณะเหมือนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยฝ่ายมัธยมเพื่อหาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดโดยใช้สูตรของคูเดอร์ริชาร์ดสันสูตร 20 (Kuder Richardson-20: KR-20) ซึ่งมีเกณฑ์ว่าค่าความเที่ยงต้องมีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไปรวมทั้งหาค่าความยาก (Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) ของแบบทดสอบโดยมีเกณฑ์ว่าค่าความยาก (p) ต้องอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไปหากข้อสอบดังกล่าวไม่ได้ตามเกณฑ์ต้องนำมาปรับปรุงแก้ไข

คุณภาพของการทดลองใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน มีค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเป็น 0.875 ค่าความยากตั้งแต่ 0.438 ถึง 0.728 และค่าอำนาจจำแนก 0.250 ถึง 0.583

4.2.7. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดจำนวน 14 ข้อไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างและกลุ่มทดลอง โดยมีรายละเอียด ในภาคผนวก จ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

5. ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนและเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยจะดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนและเก็บรวบรวมข้อมูลในภาคเรียนที่ 2 ปี การศึกษา 2559 ใช้เวลา 12 สัปดาห์ รวม 24 ชั่วโมง เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง คือ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียวและเรื่องการแปรผัน ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 2 มีขั้นตอนดำเนินการดังนี้

1. ก่อนการทดลอง ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน แบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน จากเครื่องมือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น พบว่า ผลการเปรียบเทียบคะแนนความสามรถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

2. ผู้วิจัยดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วยตนเอง โดยมีรายละเอียดดังนี้

1) กลุ่มทดลองจัดการเรียนการสอนโดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น

2) กลุ่มควบคุมจัดการเรียนการสอนโดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ

3) ในระหว่างดำเนินการสอน ผู้วิจัยสังเกตและจดบันทึกพฤติกรรมในชั้นเรียนของนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

4) หลังการทดลอง ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน แล้วนำผลคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ตามวัตถุประสงค์ของการวิจัยที่ได้กำหนด

6. วิเคราะห์ข้อมูล

6.1 วิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ กับนักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ วิเคราะห์โดยใช้สถิติ t-test for independent

2. การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ กับนักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ วิเคราะห์โดยใช้สถิติ t-test for independent

6.2 วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

การศึกษาพัฒนาการการความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียน ของนักเรียนกลุ่มทดลอง ที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยการวิเคราะห์จากลักษณะการตอบคำถามจากแบบวัด ต่อไปนี้

1.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

1.2 แบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

1.3 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

1.4 แบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัยโดยแบ่งออกเป็น 2 ตอน

ตอนที่ 1 กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

1.1. หลักการกระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้

1.2. วัตถุประสงค์ของกระบวนการจัดการเรียนการสอน

1.3. ขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอน

1.4. การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน

ตอนที่ 2 ผลการศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ได้ดังนี้

ผลการศึกษาเชิงปริมาณ

2.1. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.1.1. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 14 – 15

2.1.2. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 16 – 17

2.2. การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.2.1. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 18 – 19

2.2.2. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 20 – 21

ผลการศึกษาเชิงคุณภาพ

2.3. การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.3.1 สภาพทั่วไป

2.3.2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.3.3. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตอนที่ 1 กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

กระบวนการเรียนการสอนตามหลักการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้มีรายละเอียดดังนี้

1.1 หลักการกระบวนการเรียนการสอนตามการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนตามหลักการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ ได้มาจากการบูรณาการแนวคิดแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ แล้วพัฒนาเป็นหลักการของกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งหลักการของกระบวนการเรียนการสอนมีจุดเน้นที่การจำลองทางความคิดจาการปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แล้วดำเนินการหาคำตอบของปัญหาจากแบบจำลองคณิตศาสตร์นั้นโดยใช้กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และให้ความสำคัญในเรื่องการปฏิสัมพันธ์ทางสังคมในการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดเดิมของนักเรียนที่มีอยู่ให้เหมาะสมกับศักยภาพและระดับพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และค่อย ๆ ลดความช่วยเหลือลงเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาโดยใช้แบบจำลองด้วยตนเองได้อย่างหลากหลาย โดยมีหลักการของกระบวนการเรียนการสอนมี 5 ประการ ดังนี้

หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ทำให้เกิดความต้องการทำความเข้าใจหรือค้นหาคำตอบของปัญหา และการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสำรวจความรู้พื้นฐานเดิมเดียวกับปัญหาและเสริมต่อข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับบริบทของปัญหา

หลักการที่ 2 หลักการใช้การกำหนดเป้าหมายเพื่อแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง(The real world)ไปยังโลกแห่งความคิด(The conceptual world)

การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการเสริมต่อความรู้ความสามารถพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อกำหนดเป้าหมายและลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน

หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อได้มาซึ่งผลลัพธ์ในโลกแห่งความจริง

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้และเสริมต่อการเรียนรู้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ มีการประเมินข้อมูลป้อนกลับของนักเรียนเพื่อที่จะค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลง และให้นักเรียนสามารถฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง สรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงอ้างอิงข้อสรุปของผลลัพธ์นั้นกลับไปยังบริบทในโลกแห่งความจริง

หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิดเพื่อประเมินการทำงานของตนเอง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง การประเมินข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ให้นักเรียนมองเห็นแง่มุมที่หลากหลายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้น

หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย

การประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำนายไปสู่ปัญหาในโลกแห่งความจริงอื่น ๆ ในอนาคต เพื่อให้เกิดการขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

1.2 วัตถุประสงค์ของกระบวนการจัดการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เป็นกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นตามการบูรณาการแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1.3 ขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอน

ขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนโดยบูรณาการแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ประกอบด้วย 5 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ

เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง

เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง

เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียนเพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลองความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด

ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายละเอียดของกิจกรรมการเรียนการสอน บทบาทครู บทบาทนักเรียน ในขั้นตอนการเรียนการสอนแต่ละขั้น แสดงดังตารางที่ 12

ตารางที่ 12 รายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรใกล้เคียงกับบริบทของนักเรียนหรือเป็นสิ่งที่นักเรียนสนใจ 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนต่อปัญหาหรือสถานการณ์ที่นำเสนอ พร้อมทั้งสำรวจพื้นความรู้เดิมที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้ 3. ครูประเมินพื้นความรู้ตามความเข้าใจเดิมของนักเรียนพร้อมทั้งเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่ควรรู้เกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่นั้น 4. ครูสร้างบรรยากาศการเสริมต่อการเรียนรู้โดยครู หรือนักเรียนร่วมชั้นเรียนหรือผู้ที่มีความรู้มากกว่าร่วมกันอภิปราย 5. นักเรียนวิเคราะห์และทำความเข้าใจกับปัญหาหรือสถานการณ์	1. ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ บริบทชีวิตจริงที่มีความสอดคล้องกับเนื้อหา บริบทของนักเรียนและความเข้าใจสำคัญที่นักเรียนควรเข้าใจก่อนจะเรียน 2. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนและสำรวจความเข้าใจเดิมของนักเรียนต่อปัญหา 5. ประเมินความเข้าใจเดิมของนักเรียนด้วยการใช้คำถาม พร้อมทั้งวางประเด็นอภิปรายที่เป็นข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรทราบให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อเป็นการช่วยเหลือนักเรียนให้เข้าใจปัญหามากขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความเข้าใจเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา	1. นักเรียนร่วมกันรวบรวมสิ่งที่ปัญหากำหนดให้และสรุปสิ่งที่ปัญหาต้องการหาคำตอบเป็นเป้าหมายของแบบจำลอง 2. ครูมอบหมายงานให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 3. นักเรียนแต่ละคนบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาเพื่อสังเคราะห์ความคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือแบบกลุ่ม 4. ครูให้คำชี้แนะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	1. ส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอหรืออธิบายลักษณะแนวทางการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 2. ให้คำแนะนำเกี่ยวกับยุทธวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ เช่น ใช้คำถามหรือการยกตัวอย่างหรืออภิปรายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ	1. กำหนดสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ 2. วางแผนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ลงมือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียน เพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง	1. นักเรียนลงมือดำเนินการทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จนได้มาซึ่งผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ 2. นักเรียนเชื่อมโยงผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ไปยังผลลัพธ์ของสถานการณ์หรือปัญหาเสมือนชีวิตจริง 3. ครูประเมินความสามารถในการดำเนินการของนักเรียนเพื่อช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน 4. ประเมินงานที่นักเรียนพัฒนาการสามารถปฏิบัติได้ตามลำพังแล้วจึงลดความช่วยเหลือลง	1. สร้างบรรยากาศที่อำนวยความสะดวกให้นักเรียนดำเนินแก้ปัญหา 2. สังเกตความสามารถของนักเรียนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งประเมินและให้ความช่วยเหลือตามความสามารถของนักเรียนตามศักยภาพที่ควรจะพัฒนาไปได้ 3. สังเกตพัฒนาการของนักเรียนเมื่อสามารถปฏิบัติงานได้ตามลำพังแล้วจึงค่อย ๆ วางแผนลดความช่วยเหลือของนักเรียนคนนั้น ๆ ออกไป 4. ใช้คำถามวางประเด็นเพื่อให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์อ้างอิงกลับไปยังโลกแห่งความจริง	1. ลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเองอย่างอิสระในช่วงแรกและพยายามปรับปรุงตนเองจากคำชี้แนะหรือจากความช่วยเหลือของครูหรือเพื่อนนักเรียนที่มีความสามารถสูงกว่า 2. ตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นโดยการฝึกฝนการอธิบายความคิดของตนเองให้คนอื่นรับฟัง 3. อภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์เชื่อมโยงไปยังคำตอบในชีวิตจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียน และความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด	1. นักเรียนนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. ครูดำเนินการอภิปรายเพื่อให้นักเรียนได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ ข้อดี ข้อบกพร่องของแบบจำลองแต่ละแบบ	1. มอบหมายให้นักเรียนออกมานำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่มตนเอง 2. ดำเนินการอภิปรายให้เห็นถึงประสิทธิภาพของแบบจำลองแต่ละแบบ พร้อมทั้ง ชี้แนะการปรับปรุงข้อบกพร่อง 3. ใช้คำถามแบบซักค้านให้นักเรียนเห็นความแตกต่างและความหลากหลายของแบบจำลองแต่ละแบบจำลอง และเพื่อกระตุ้นความคิดของนักเรียน 4. ช่วยชี้แนะการประเมินแบบจำลอง	1. นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. อภิปราย เปรียบเทียบ โต้แย้ง ทบทวนและสะท้อนคิดคำตอบและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองและกับของเพื่อนักเรียนคนอื่น ๆ 3. สรุปและทำความเข้าใจลักษณะของแบบจำลองแต่ละแบบที่ได้จากการนำเสนอ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรเป็นสิ่งที่เป็นการได้ฝึกการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เคยสร้างมาแล้ว อย่างหลากหลาย 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจวางแผนการสร้างแบบจำลองและมอบหมายให้นักเรียนคาดการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ครูวางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น 4. ครูคอยให้คำแนะนำตามที่จะสามารถเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนได้ 5.นักเรียนร่วมอภิปรายเพื่อทำความเข้าใจปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง	1. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและสามารถประยุกต์ใช้ความรู้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้า 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียน 5. วางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความสามารถความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา 5. ประยุกต์ใช้การคาดการณ์การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับปัญหาที่กำหนดมาให้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1.4 การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดำเนินการวัดและประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแบ่งเป็นก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอนใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

2. การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอนใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 13 รายละเอียดของการวัดและประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	หัวเรื่อง
ก่อนเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด
	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	หัวเรื่อง
หลังเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้สอนเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 2 กลุ่มเนื้อหา ในการเรียนระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคปลาย ดังนี้ 1. เรื่องสมการกำลังสอง 2. เรื่องการแปรผัน
	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตอนที่ 2 ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

การศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดำเนินการโดยนำกระบวนการเรียนการสอนไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ในเขตกรุงเทพมหานคร ภาคการศึกษาปลาย จำนวน 64 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน จำนวน 32 คน ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน จำนวน 32 คน ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติตามแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551

การนำเสนอคุณภาพการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน แบ่งเป็น 3 ข้อ ตามวัตถุประสงค์การวิจัย ดังนี้

ผลการศึกษาเชิงปริมาณ

2.1. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.1.1. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 14 - 15

2.1.2. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 16 - 17

2.2. การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.2.1. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 18- 19

2.2.2. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 20 – 21

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ผลการศึกษาเชิงคุณภาพ

2.3. การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.3.1 สภาพทั่วไป

2.3.2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.3.3. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.1.1. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 14 - 15

ตารางที่ 14 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม

กลุ่ม	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	s	df	t	p
กลุ่มทดลอง	80	32	59.813	13.214	62	1.448	0.5130
กลุ่มควบคุม	80	32	54.813	14.392			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 14 พบว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น ($\bar{x}$) เท่ากับ 59.813 คะแนน และ 54.813 คะแนน ตามลำดับ และจากการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย พบว่า ค่าสถิติ t-test มีค่าเท่ากับ 1.448 , df = 62 มีนัยสำคัญทางสถิติที่ 0.513 ซึ่งมีค่ามากกว่า .05 (Sig. >.05) แสดงว่ามีคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนสองกลุ่มนี้ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

ตารางที่ 15 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ

องค์ประกอบการแก้ปัญหา (ก่อนเรียน)	คะแนนเต็ม	กลุ่ม	n	$\bar{x}$	S	df	t	p
การวิเคราะห์ปัญหา	20	กลุ่มทดลอง	32	19.375	1.185	62	0.174	0.863
		กลุ่มควบคุม	32	19.313	1.655			
การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา	20	กลุ่มทดลอง	32	16.500	4.288	62	0.177	0.860
		กลุ่มควบคุม	32	16.300	4.602			
การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ	20	กลุ่มทดลอง	32	11.875	4.976	62	1.041	0.302
		กลุ่มควบคุม	32	10.633	4.367			
การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	20	กลุ่มทดลอง	32	12.125	6.142	62	1.319	0.192
		กลุ่มควบคุม	32	10.313	4.762			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จากตารางที่ 15 เมื่อพิจารณาจำแนกตามองค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่การวิเคราะห์ปัญหา การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด พบว่า คะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จำแนกตามองค์ประกอบก่อนเรียนทุกองค์ประกอบของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมสองกลุ่มนี้ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

2.1.2. ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 16 - 17

ตารางที่ 16 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและ
กลุ่มควบคุมในภาพรวม

กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	df	t	p
กลุ่มทดลอง	32	65.219	13.809	62	2.626	0.005*
กลุ่มควบคุม	32	57.250	10.201			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 16 พบว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น ($\bar{x}$) เท่ากับ 65.219 คะแนน และ 57.250 คะแนน ตามลำดับ และจากการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย พบว่า ค่าสถิติ t-test มีค่าเท่ากับ 2.626 , df = 62 มีนัยสำคัญทางสถิติแบบทางเดียวที่ 0.005 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 0.05 (Sig. >.05) แสดงว่ากลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 17 ผลการเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ

องค์ประกอบการแก้ปัญหา (หลังเรียน)	คะแนนเต็ม	กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	df	t	p
การวิเคราะห์ปัญหา	20	กลุ่มทดลอง	32	19.281	1.853	62	1.040	0.470
		กลุ่มควบคุม	32	19.250	1.414			
การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา	20	กลุ่มทดลอง	32	16.625	4.521	62	1.585	0.059
		กลุ่มควบคุม	32	15.094	3.073			
การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ	20	กลุ่มทดลอง	32	15.125	4.702	62	2.942	0.003*
		กลุ่มควบคุม	32	11.656	4.729			
การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	20	กลุ่มทดลอง	32	14.903	5.503	62	2.726	0.004*
		กลุ่มควบคุม	32	11.344	4.936			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 17 เมื่อพิจารณาจำแนกตามองค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่การวิเคราะห์ปัญหา การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด พบว่า คะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในเพียงสององค์ประกอบหลัง คือ องค์ประกอบการดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิดของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2.2.1. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 18 - 19

ตารางที่ 18 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม

กลุ่ม	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	S	df	t	p
กลุ่มทดลอง	42	32	26.875	7.979	62	0.441	0.661
กลุ่มควบคุม	42	32	26.063	6.711			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 18 พบว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น ($\bar{x}$) เท่ากับ 26.875 คะแนน และ 26.063 คะแนน ตามลำดับ และจากการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย พบว่า ค่าสถิติ t-test มีค่าเท่ากับ 0.441 , df = 62 มีนัยสำคัญทางสถิติที่ 0.661 ซึ่งมีค่ามากกว่า 0.05 (Sig. >.05) แสดงว่า คะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนสองกลุ่มนี้ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

ตารางที่ 19 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ

องค์ประกอบการใช้ตัวแทน (ก่อนเรียน)	คะแนนเต็ม	กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	df	t	p
การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์	30	กลุ่มทดลอง	32	20.781	5.796	62	0.213	0.832
		กลุ่มควบคุม	32	20.500	4.711			
การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	12	กลุ่มทดลอง	32	6.094	3.458	62	0.680	0.499
		กลุ่มควบคุม	32	5.563	2.747			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 19 เมื่อพิจารณาจำแนกตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ได้แก่การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ และการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา พบว่าคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์จำแนกตามองค์ประกอบทุกองค์ประกอบก่อนเรียน ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมสองกลุ่มนี้ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

2.2.2. ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แสดงดังตารางที่ 20 - 21

ตารางที่ 20 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ในภาพรวม

กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	df	t	p
กลุ่มทดลอง	32	31.438	8.273	62	2.291	0.01*
กลุ่มควบคุม	32	26.500	8.955			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 20 พบว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น ($\bar{x}$) เท่ากับ 31.437 คะแนน และ 26.500 คะแนน ตามลำดับ และจากการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย พบว่า ค่าสถิติ t-test มีค่าเท่ากับ 2.291 , df= 62 มีนัยสำคัญทางสถิติแบบทางเดียวที่ .01 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 0.05 (Sig. < .05) แสดงว่ามีคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 21 ผลการเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามองค์ประกอบ

องค์ประกอบการใช้ตัวแทน (ก่อนเรียน)	คะแนนเต็ม	กลุ่ม	n	$\bar{x}$	S	df	t	p
การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์	30	กลุ่มทดลอง	32	20.500	4.711	31	3.603	0.00*
		กลุ่มควบคุม	32	19.063	5.297			
การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	12	กลุ่มทดลอง	32	5.563	2.748	31	3.584	0.00*
		กลุ่มควบคุม	32	7.438	4.406			

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 21 เมื่อพิจารณาจำแนกตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ได้แก่การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ และการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา พบว่าคะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์จำแนกตามองค์ประกอบทุกองค์ประกอบ หลังเรียน ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

จาก ข้อ 1 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ข้อ 2 การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม สรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น

2.3 การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.3.1 สภาพทั่วไป

นักเรียน

นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ดีถึงดีมาก โดยนักเรียนมีระดับผลการเรียน ระดับคะแนน 4 คิดเป็นร้อยละ 32 ระดับคะแนน 3.5 คิดเป็นร้อยละ 10 ระดับคะแนน 3 คิดเป็นร้อยละ 12 ระดับคะแนน 2.5 คิดเป็นร้อยละ 14 ระดับคะแนน 2 คิดเป็นร้อยละ 16 ระดับคะแนน 1.5 คิดเป็นร้อยละ 11 ระดับคะแนน 1 คิดเป็นร้อยละ 4 และระดับคะแนน 0 คิดเป็นร้อยละ 1 ซึ่งเมื่อแบ่งเกรดเฉลี่ยเป็นช่วงระดับ 3.00-4.00 คิดเป็นร้อยละ 80 ช่วงระดับ 2.00-2.99 คิดเป็นร้อยละ 17 และระดับต่ำกว่า 2 คิดเป็นร้อยละ 3 มีผลการประเมินนักเรียนระดับนานาชาติ (PISA 2012) ด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของประเทศไทยและคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มประเทศ OECD นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบผลคะแนนตั้งแต่ PISA 2006 PISA 2009 และ PISA 2012 พบว่าผลการประเมินด้านการรู้คณิตศาสตร์ศาสตร์เพิ่มขึ้นในทุกปีอย่างต่อเนื่อง ลักษณะทั่วไปของนักเรียนมีความมั่นใจในตนเอง กล้าคิด กล้าทำ กล้าแสดงออก มีภาวะผู้นำ ส่งผลให้พฤติกรรมในห้องเรียนมีการปฏิสัมพันธ์สูง ทั้งระหว่างนักเรียนด้วยกันเองหรือระหว่างนักเรียนกับครูและชอบทำกิจกรรมในชั้นเรียน

ครู

ครูคณิตศาสตร์ที่รับผิดชอบกระบวนการเรียนการสอนประจำ 17 คน อาจารย์พิเศษที่เชิญมาสอนให้กับนักเรียนในกลุ่มอัจฉริยะภาพ (โครงการการเตรียมความพร้อมนักเรียนเพื่อเข้าร่วมการแข่งขันสู่โอลิมปิกวิชาการ) จำนวน 5 คน และนิสิตฝึกสอนเฉลี่ยภาคเรียนละ 4 คน โดยครูประจำทุกคนจบการศึกษาคณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และมีเข้าร่วมการอบรมพัฒนาตนเองอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้บางคนยังเป็นวิทยากรทางด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ให้กับครูอีกด้วย จำนวนคาบสอนเฉลี่ย 14 คาบต่อสัปดาห์ ซึ่งครูส่วนใหญ่จัดการเรียนการสอนโดยการใช้การจัดกิจกรรมประกอบกับการบรรยาย ใช้สื่อการเรียนการสอน เอกสารประกอบการเรียนการสอนและแบบฝึกหัดที่ผลิตขึ้นเอง ประกอบกับแบบฝึกหัดของหนังสือจากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

โรงเรียน

โรงเรียนเป็นโรงเรียนสวัสดิการของบุตรบุคลากรในจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีวัตถุประสงค์ทางด้านวิชาการอย่างสำคัญเพื่อเป็นสถานฝึกหัดวิชาชีพครู (Lab School) ของนิสิตคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นสถานศึกษาระดับมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ (นักเรียนจำนวน 1,294 คน) ที่ตั้งอยู่กลางใจเมืองของกรุงเทพมหานครฯ จำนวนครู 128 คน สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เขตกรุงเทพมหานครฯ เปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 จำนวนรวม 42 ห้องเรียน ระดับชั้นละ 7 ห้องเรียน มีการจัดห้องแบบคละความสามารถ ในแต่ละห้องจะมีจำนวนนักเรียนเฉลี่ย 35 คน ห้องเรียนเป็นห้องเรียนอัจฉริยะ มีคอมพิวเตอร์ กระดานไวท์บอร์ด โปรเจคเตอร์ และสมาร์ททีวี ผู้ปกครองประมาณครึ่งหนึ่งเป็นอาจารย์และบุคลากรระดับหัวหน้างานของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยและอีกครึ่งหนึ่งเป็นบุคคลทั่วไป ซึ่งส่วนใหญ่ประกอบอาชีพธุรกิจส่วนตัว โรงเรียนค่อนข้างมีความสมบูรณ์ทางด้านทรัพยากรสูงมาก ทั้งวัสดุและอุปกรณ์ที่พร้อมจะสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนในทุก ๆ ด้าน เนื่องจากได้รับการสนับสนุนจากผู้ปกครองและศิษย์เก่าเป็นอย่างดี

2.3.2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของกลุ่มทดลอง โดยการวิเคราะห์ตามองค์ประกอบ

การจัดการเรียนการสอนตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยเริ่มต้นตั้งแต่ ขั้นการนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ ขั้นการกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง ขั้นการดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง ขั้นการประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง และขั้นการขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ ได้ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามกระบวนการเรียนการสอนที่มีต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลอง สรุปตามองค์ประกอบ ได้ดังนี้

1) การวิเคราะห์ปัญหา

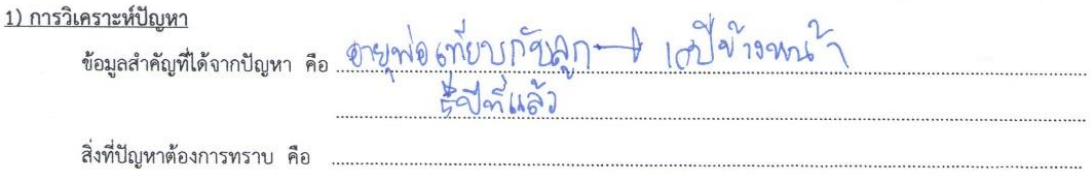
ก่อนเรียน

นักเรียนสามารถจำแนกข้อมูลที่ได้จากปัญหาออกจากสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบได้ โดยส่วนใหญ่ใช้การคัดลอกข้อความมาจากที่โจทย์กำหนดให้ ไม่มีการดัดแปลง สรุปหรือวิเคราะห์ให้เป็นข้อความของตนเอง และบางส่วนอาจจะสรุปแต่ทำให้รายละเอียดและความสมบูรณ์ของข้อความมีบางส่วนขาดหายไป

ตัวอย่าง การวิเคราะห์ปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

โจทย์ปัญหา *“เมื่อห้าปีที่แล้วพ่อมีอายุมากกว่าสิบเอ็ดเท่าของอายุของลูกอยู่ 2 ปี ถ้าในอีกสิบปีข้างหน้าพ่อมีอายุ 50 ปี อยากทราบว่าปัจจุบันพ่อและลูกมีอายุของรวมกันกี่ปี”*

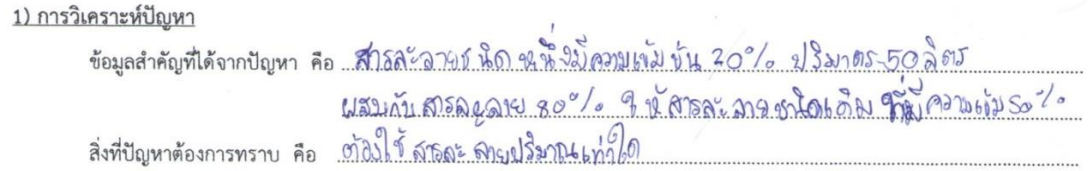
ตัวอย่างที่ 1



นักเรียนให้รายละเอียดข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาไม่ครบ ไม่ได้บอกรายละเอียดว่า ในอีกสิบปีข้างหน้าโจทย์ให้ข้อมูลอายุของใครมา นอกจากนี้ยังไม่ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบอีกด้วย

โจทย์ปัญหา *“สารละลายชนิดหนึ่งมีความเข้มข้น 20 % ปริมาตร 50 ลิตร นำไปผสมกับสารละลายชนิดเดิมที่มีความเข้มข้น 80 % เพื่อต้องการให้ได้สารละลายชนิดเดิมที่มีความเข้มข้น 50 % อยากทราบว่าต้องใช้สารละลายนี้เป็นปริมาณเท่าใด”*

ตัวอย่างที่ 2



นักเรียนคัดลอกข้อความจากจากโจทย์ปัญหา และจำแนกเป็นสองส่วน คือ ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ

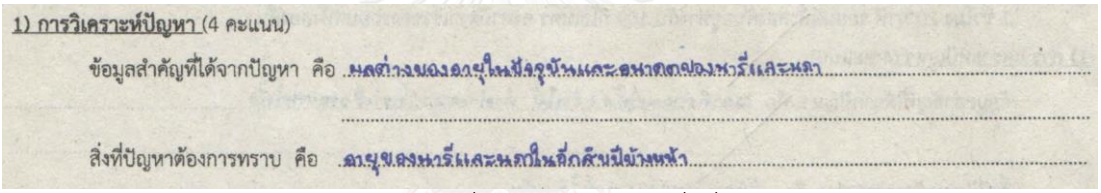
หลังเรียน

นักเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากปัญหาและสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ ซึ่งเป็นขั้นตอนสำคัญในการทำความเข้าใจโจทย์ ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนในปัญหาเดียวกัน มีนักเรียนวิเคราะห์ได้ในรูปแบบที่แตกต่างกัน ทั้งรายละเอียดและความสมบูรณ์ของข้อมูล นอกจากนี้ยังสามารถสรุปและเขียนข้อมูลที่ได้จากปัญหาและสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบเป็นภาษาของตนเองได้อย่างสมบูรณ์

ตัวอย่าง การวิเคราะห์ปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

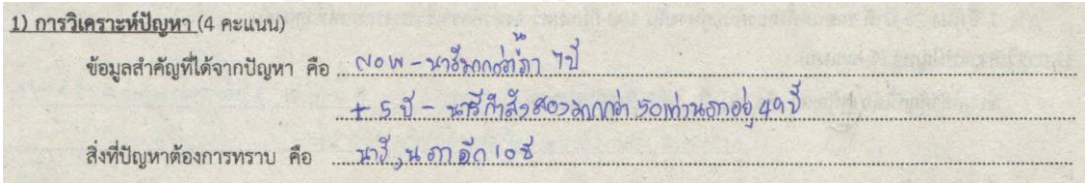
โจทย์ปัญหา *“ปัจจุบันนารีมีอายุมากกว่านภา 7 ปี และอีก 5 ปีข้างหน้ากำลังสองของอายุของนารีจะมากกว่า 50 เท่าของอายุนภาอยู่ 49 ปี จงหาอายุของนารีและนภาในอีกสิบปีข้างหน้า”*

ตัวอย่างที่ 1


1) การวิเคราะห์ปัญหา (4 คะแนน)
ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา คือ ผลต่างของอายุในปัจจุบันและอนาคตของนารีและนภา
สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ อายุของนารีและนภาในอีกสิบปีข้างหน้า

นักเรียนสามารถสรุปข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาและสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบเป็นภาษาของตนเองได้แต่ให้รายละเอียดได้ไม่ครบถ้วนสมบูรณ์ แสดงออกถึงระดับของความเข้าใจปัญหา

ตัวอย่างที่ 2


1) การวิเคราะห์ปัญหา (4 คะแนน)
ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา คือ ผลต่าง-นารีมากกว่า 7 ปี
+ 5 ปี - นารีก็สิ่งสองลากกว่า 50 เท่านภาอยู่ 49 ปี
สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ นารี, นภา อีก 10 ปี

นักเรียนใช้สัญลักษณ์ในการสรุปข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาและสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบโดยให้รายละเอียดครบถ้วนสมบูรณ์

2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

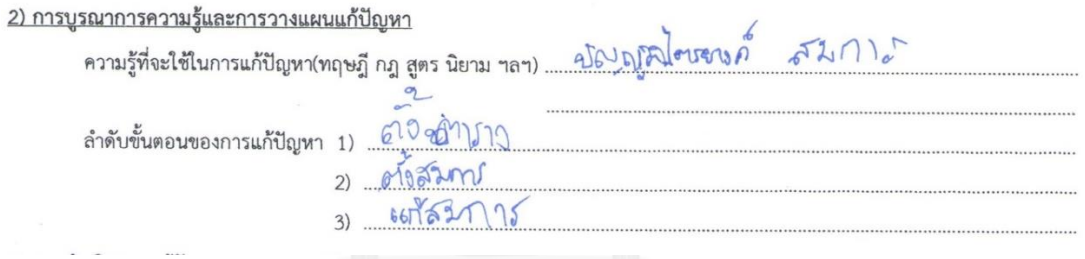
ก่อนเรียน

นักเรียนยังไม่สามารถระบุความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง อาจระบุมาเกินความจำเป็นหรือระบุมาไม่ถูกต้อง นอกจากนี้ยังไม่สามารถเรียงลำดับความคิดให้ออกมาเป็นลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพได้ หรือไม่สามารถลำดับความคิดที่มีออกมาได้อย่างเป็นรูปธรรมชัดเจน

ตัวอย่าง การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา ก่อนเรียน

โจทย์ปัญหา *“เมื่อห้าปีที่แล้วพ่อมีอายุมากกว่าสิบเอ็ดเท่าของอายุของลูกอยู่ 2 ปี ถ้าในอีกสิบปีข้างหน้าพ่อมีอายุ 50 ปี อยากทราบว่าปัจจุบันพ่อและลูกมีอายุของรวมกันกี่ปี”*

ตัวอย่างที่ 1


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) ปัญญัติไตรยางศ์ สมการ

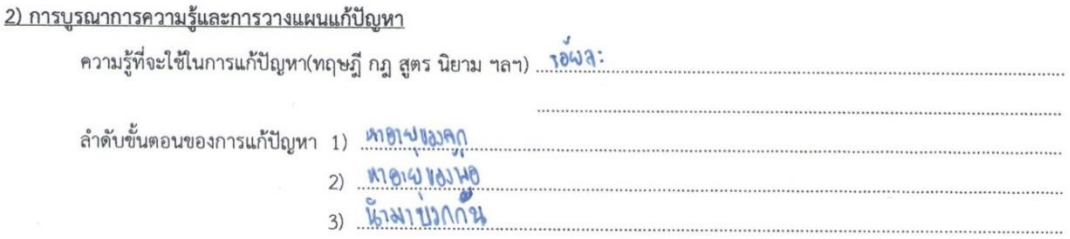
ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) ตั้งสมการ

2) คำนวณ

3) เฉลยคำตอบ

นักเรียนวางแผนที่จะใช้ความรู้กับปัญหายังไม่ถูกต้อง เพราะไม่สามรถใช้ความรู้เรื่องบัญญัติไตรยางศ์กับปัญหาในข้อนี้ และลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาที่ให้มายังไม่มีความเฉพาะเจาะจงและไม่มีความสัมพันธ์กับข้อมูลของปัญหา ยังไม่สามารถสื่อสารได้อย่างชัดเจนว่าลำดับขั้นตอนใดควรใช้ความรู้เรื่องใดและใช้อย่างไร

ตัวอย่างที่ 2


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) ...อัตราส่วน...

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) หาอายุของลูก

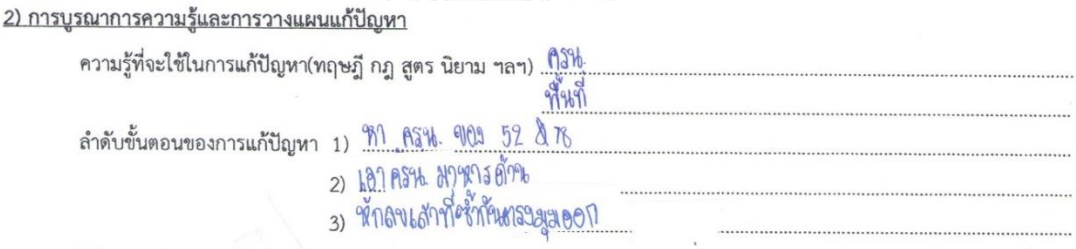
2) หาอายุของพ่อ

3) นำมาบวกกัน

นักเรียนไม่สามารถเลือกความรู้ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากการแก้ปัญหานี้ไม่ต้องใช้ความรู้เรื่องร้อยละ และยังคงไม่ให้รายละเอียดในการระบุลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาอย่างชัดเจน เนื่องจากในโจทย์ข้อนี้มีเรื่องระยะเวลามาเกี่ยวข้อง ควรระบุให้ชัดเจนว่าหาอายุของพ่อและอายุของลูกในช่วงระยะเวลาใดแล้วเอาอายุในช่วงเวลาใดมาบวกกัน

โจทย์ปัญหา *“คุณลุงต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินกว้าง 52 เมตร และยาว 78 เมตร โดยการปักเสาให้แต่ละเสามีระยะห่างเท่ากัน จงหาว่าคุณลุงสามารถใช้เสาได้อย่างน้อยที่สุดกี่ต้น”*

ตัวอย่างที่ 3


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) ครึ่งหนึ่งของพื้นที่

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) หา ครึ่ง. ของ 52 & 78

2) เอา ครึ่ง มาหารด้วย

3) นำลงเสาที่ซื้อก็จะได้ออกมา

นักเรียนมีความสับสนในการนำความรู้ไปใช้ของเรื่องตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย ทำให้ไม่สามารถระบุความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ทำให้ลำดับความคิดของการลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาผิดพลาดตามไปเช่นกัน

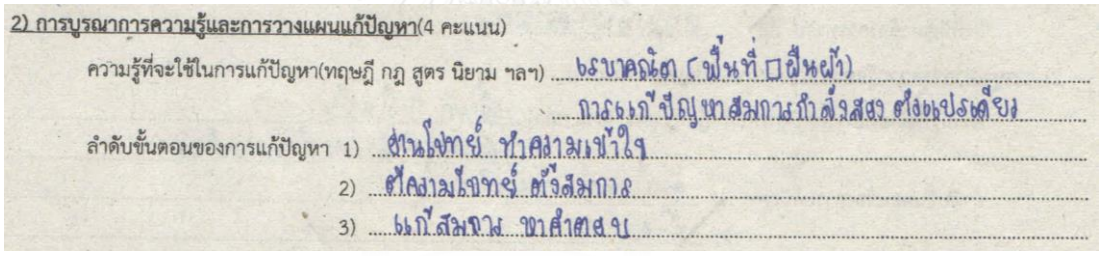
หลังเรียน

นักเรียนสามารถระบุความรู้ที่จะต้องใช้ในการแก้ปัญหาและวางแผนบูรณาการความรู้เหล่านั้นออกมาเป็นขั้นตอนการแก้ปัญหาของแต่ละบุคคล ซึ่งมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับความรู้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และประสบการณ์เดิมที่นักเรียนแต่ละคนมี

ตัวอย่าง การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา หลังเรียน

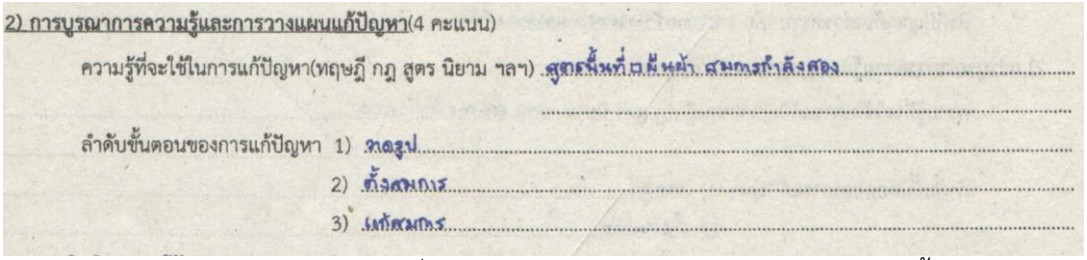
โจทย์ปัญหา *“สวนสาธารณะแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 14 เมตร ยาว 24 เมตร เมื่อทำทางเดินภายในรอบสวนให้มีความกว้างเท่ากันโดยตลอด จะเหลือบริเวณสวนที่ไม่รวมทางเดินคิดเป็นพื้นที่ 200 ตารางเมตร จงหาความกว้างของทางเดินรอบสวนนี้”*

ตัวอย่างที่ 1


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา(4 คะแนน)
ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) ...
ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) ...
2) ...
3) ...

นักเรียนระบุความรู้ที่จะใช้ในการบูรณาการแก้ปัญหาได้อย่างเฉพาะเจาะจงและลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้อย่างละเอียด

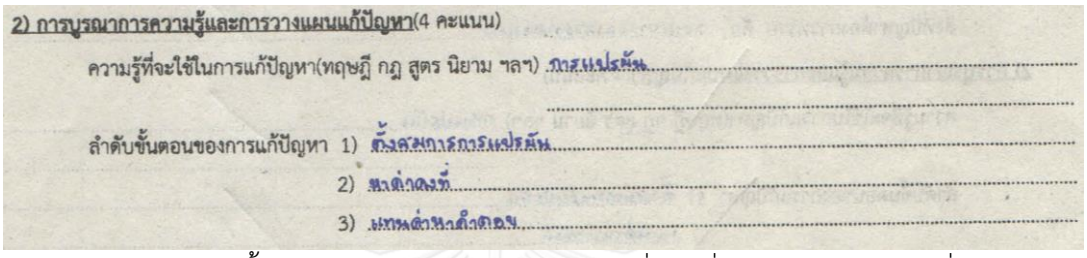
ตัวอย่างที่ 2


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา(4 คะแนน)
ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) ...
ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) ...
2) ...
3) ...

นักเรียนสามารถระบุความรู้ที่จะใช้ในการบูรณาการแก้ปัญหาและลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้อย่างครบถ้วนถูกต้องแต่ไม่ละเอียดเท่าตัวอย่างที่ 1

โจทย์ปัญหา *“บริษัทรับจ้างพิมพ์งานแห่งหนึ่ง มีพนักงานในบริษัท 15 คน ถ้าลูกค้าสั่งพิมพ์ใบปลิวโฆษณาสินค้าชนิดหนึ่ง ซึ่งถ้าพิมพ์งานทั้งหมด เสร็จใช้ระยะเวลา 5 ชั่วโมง อยากทราบว่าถ้าลูกค้าต้องการสั่งใบปลิวแบบเดิมและจำนวนเท่าเดิม และอยากจะพิมพ์งานทั้งหมด ให้เสร็จภายในเวลา 3 ชั่วโมงจะต้องจ้างพนักงานเพิ่มขึ้นกี่คนเมื่อจำนวนพนักงานในบริษัทแปรผกผันระยะเวลาที่ทำงานเสร็จ”*

ตัวอย่างที่ 3


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา(4 คะแนน)

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) การแปรผัน

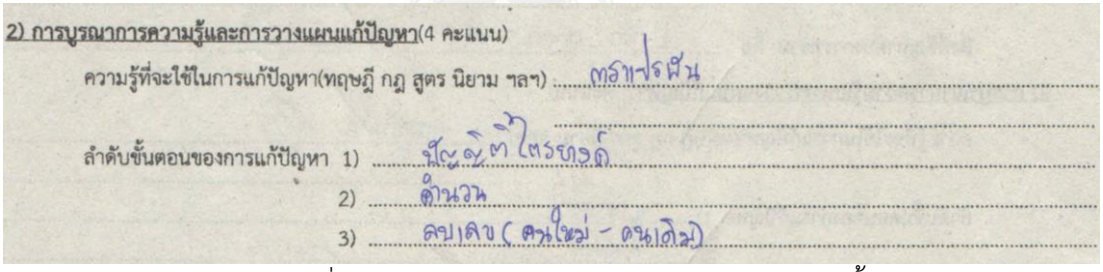
ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) ทั้งคงการการแปรผัน

2) หาค่าคงที่

3) แทนค่าหาคำตอบ

นักเรียนลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาในรูปแบบทั่วไปเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเรื่องการแปรผัน ไม่ชี้เฉพาะเจาะจงหรือเชื่อมโยงกับข้อมูลที่ได้จากปัญหา

ตัวอย่างที่ 4


2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา(4 คะแนน)

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) การแปรผัน

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) นิยามการแปรผัน

2) คำนวณ

3) ลบเลข (คนใหม่ - คนเดิม)

นักเรียนระบุความรู้ที่จะใช้ไม่สอดคล้องกับลำดับของการเกปัญหา ทั้งการแปรผันและการเทียบบัญญัติไตรยางศ์เป็นความรู้ที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้เช่นกัน และระบุขั้นตอนรายละเอียดในการคำนวณถึงสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบได้อย่างชัดเจนคือหาจำนวนคนงานที่เพิ่มขึ้น

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

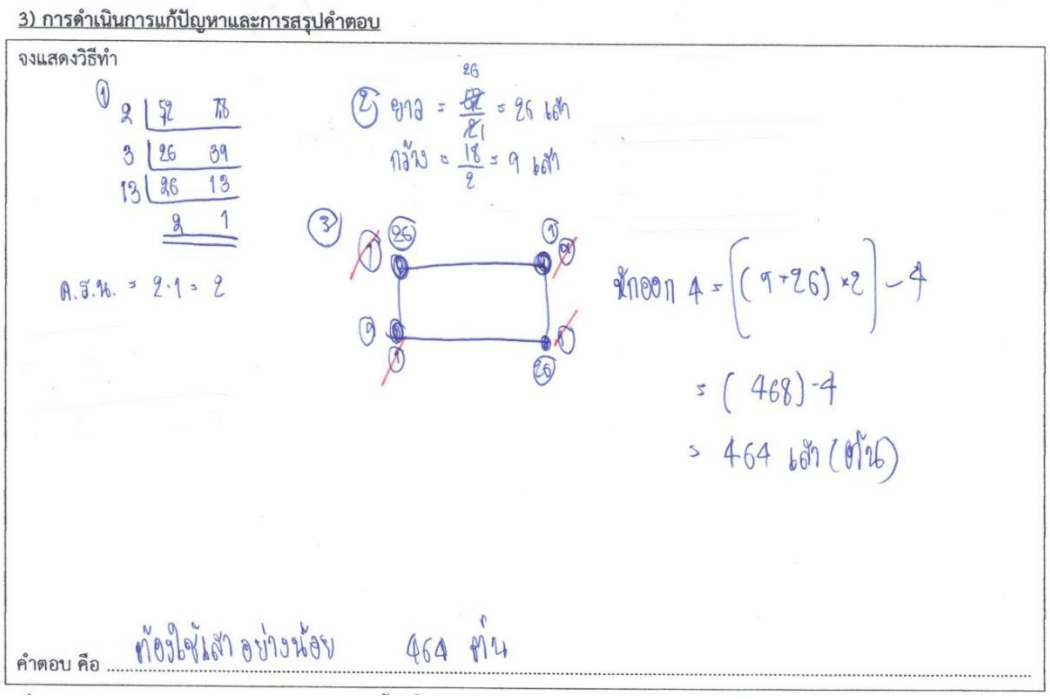
ก่อนเรียน

นักเรียนไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และใช้วิธีการที่ไม่หลากหลาย หรือดำเนินการแล้วไม่เสร็จสมบูรณ์จนสามารถหาคำตอบของปัญหาได้ หรือสรุปคำตอบจากการดำเนินการได้ผิดพลาด ขาดความละเอียดรอบคอบ

ตัวอย่างการดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ ก่อนเรียน

โจทย์ปัญหา *“คุณลุงต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินกว้าง 52 เมตร และยาว 78 เมตร โดยการปักเสาให้แต่ละเสามีระยะห่างเท่ากัน จงหาว่าคุณลุงสามารถใช้เสาได้อย่างน้อยที่สุดกี่ต้น”*

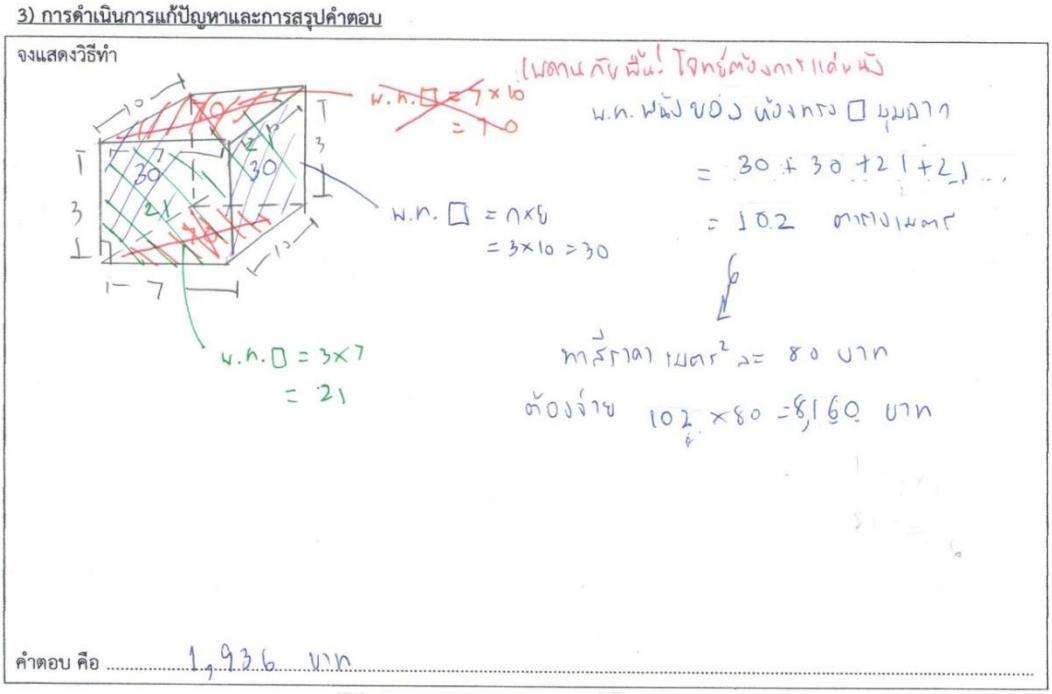
ตัวอย่างที่ 1



นักเรียนใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง แสดงให้เห็นถึงความไม่เข้าคณิตศาสตร์อย่างถ่องแท้ยังคงมีความสับสน และไม่ใช้เหตุผลประกอบการแก้ปัญหา เนื่องจากผลลัพธ์ที่สรุปได้มานั้นเป็นตัวเลขที่มีค่ามากเกินไป ไม่เหมาะสมกับข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้

โจทย์ปัญหา *“ห้องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 7 เมตร ยาว 10 เมตร และสูง 3 เมตร ถ้าต้องการทาสีผนังห้องภายในทั้งสี่ด้าน อยากทราบว่าต้องใช้จ่ายค่าทาสีเป็นเงินเท่าไร เมื่อช่างทาสีคิดเงินค่าทาสีราคาตารางเมตรละ 80 บาท”*

ตัวอย่างที่ 2

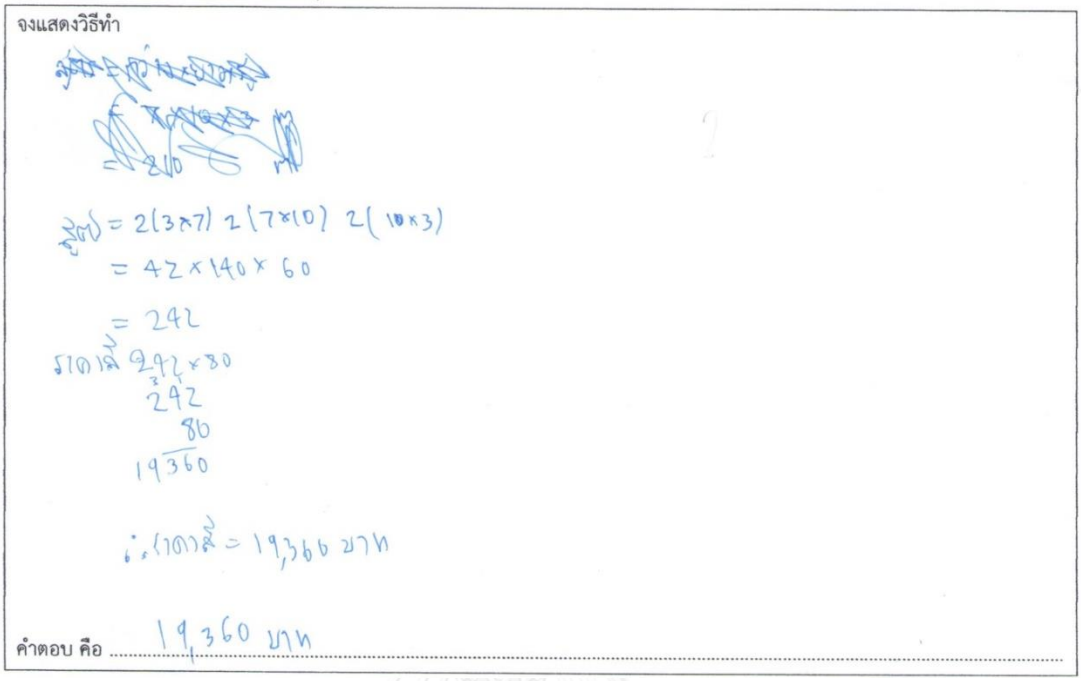


นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ เมื่อพิจารณาดูจากรายละเอียดการแสดงวิธีการคิดแต่ไม่สามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้องจากผลลัพธ์ที่ตนคิดได้

ตัวอย่างที่ 3

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

จงแสดงวิธีทำ



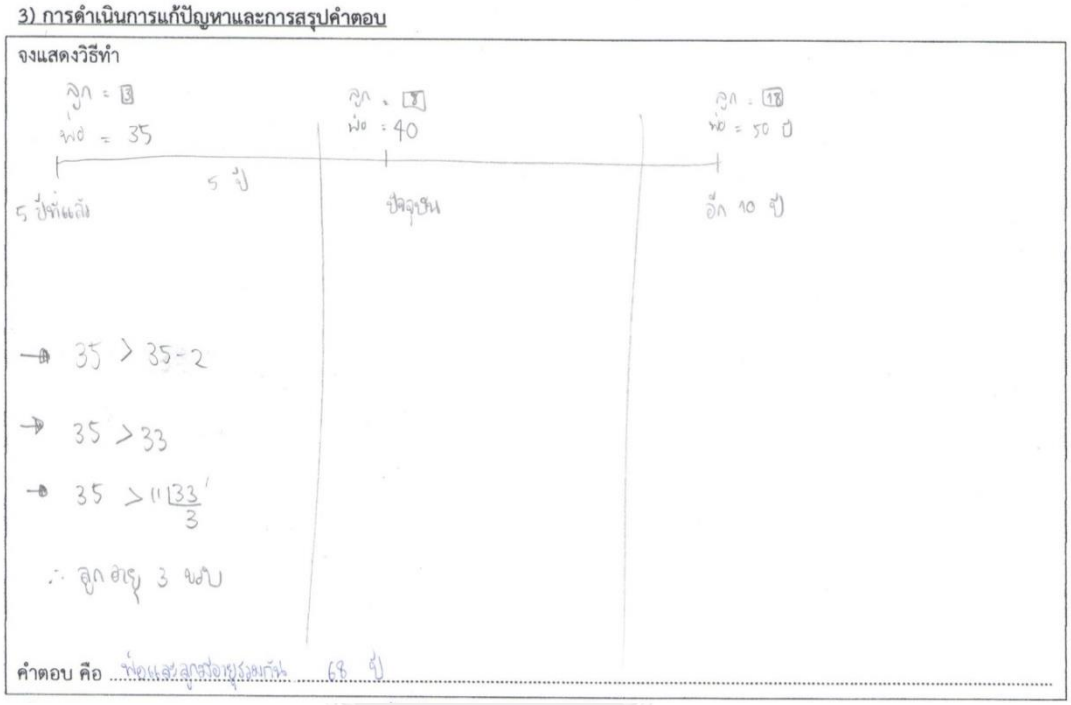
นักเรียนใช้พีชคณิตในการแก้ปัญหา แต่ไม่มีความละเอียดรอบคอบในการกำหนดสมการ โดยไม่คำนึงถึงรายละเอียดของโจทย์ที่กำหนดมาให้ว่าต้องการทาสีผนังห้องภายในทั้งสี่ด้านของห้องเท่านั้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

โจทย์ปัญหา *“เมื่อห้าปีที่แล้วพ่อมีอายุมากกว่าสิบเอ็ดเท่าของอายุของลูกอยู่ 2 ปี ถ้าในอีกสิบปีข้างหน้าพ่อมีอายุ 50 ปี อยากทราบว่าปัจจุบันพ่อและลูกมีอายุของรวมกันกี่ปี*

”

ตัวอย่างที่ 4



นักเรียนพยายามใช้เส้นจำนวนและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้สำเร็จ เนื่องจากไม่สามารถใช้ข้อมูลที่สำคัญที่ปัญหากำหนดมาให้ได้อย่างครบถ้วน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

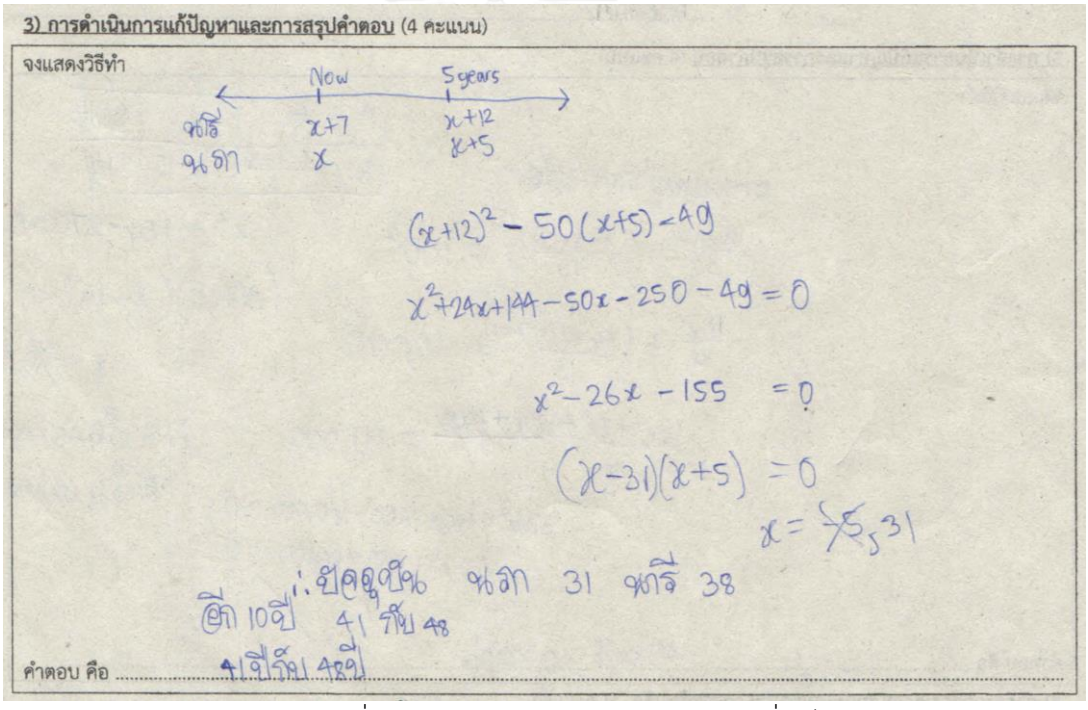
หลังเรียน

นักเรียนมีความสามารถในการดำเนินการที่หลากหลายและมีประสิทธิภาพแตกต่างกัน เช่นในขั้นต้นนักเรียนวาดภาพหรือตารางก่อน เพื่อทำความเข้าใจ หลังจากนั้นเมื่อเข้าใจมากขึ้นแล้วจึงสามารถเขียนสมการที่มีประสิทธิภาพเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ประสบความสำเร็จได้

ตัวอย่างการดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ หลังเรียน

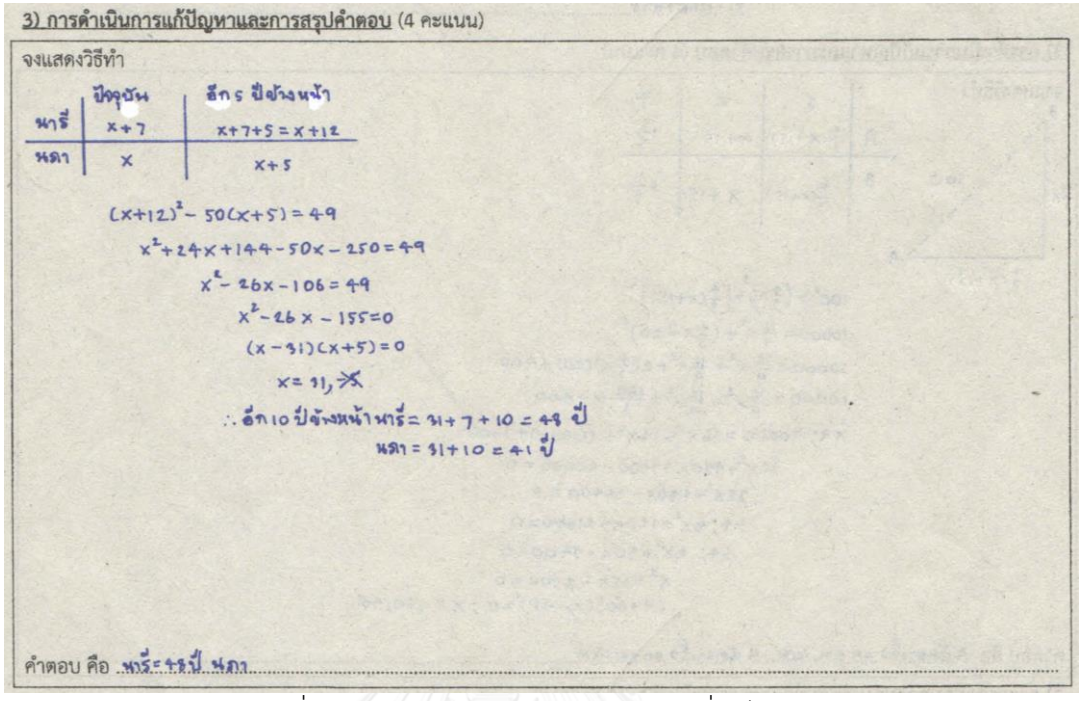
โจทย์ปัญหา *“ปัจจุบันนารีมีอายุมากกว่านภา 7 ปี และอีก 5 ปีข้างหน้ากำลังสองของอายุของนารีจะมากกว่า 50 เท่าของอายุนภาอยู่ 49 ปี จงหาอายุของนารีและนภาในอีกสิบปีข้างหน้า”*

ตัวอย่างที่ 1



นักเรียนใช้เส้นจำนวนเพื่อทำความเข้าใจความสัมพันธ์และเงื่อนไขของปัญหา ก่อนจะนำความเข้าใจนั้นมากำหนดสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2



3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ (4 คะแนน)

จงแสดงวิธีทำ

	ปัจจุบัน	อีก 5 ปีข้างหน้า
พรี่	$x+7$	$x+7+5=x+12$
หลา	x	$x+5$

$(x+12)^2-50(x+5)=49$

$x^2+24x+144-50x-250=49$

$x^2-26x-106=49$

$x^2-26x-155=0$

$(x-31)(x+5)=0$

$x=31,\cancel{-5}$

∴ อีก 10 ปีข้างหน้าพรี่ $=31+7+10=48$ ปี

หลา $=31+10=41$ ปี

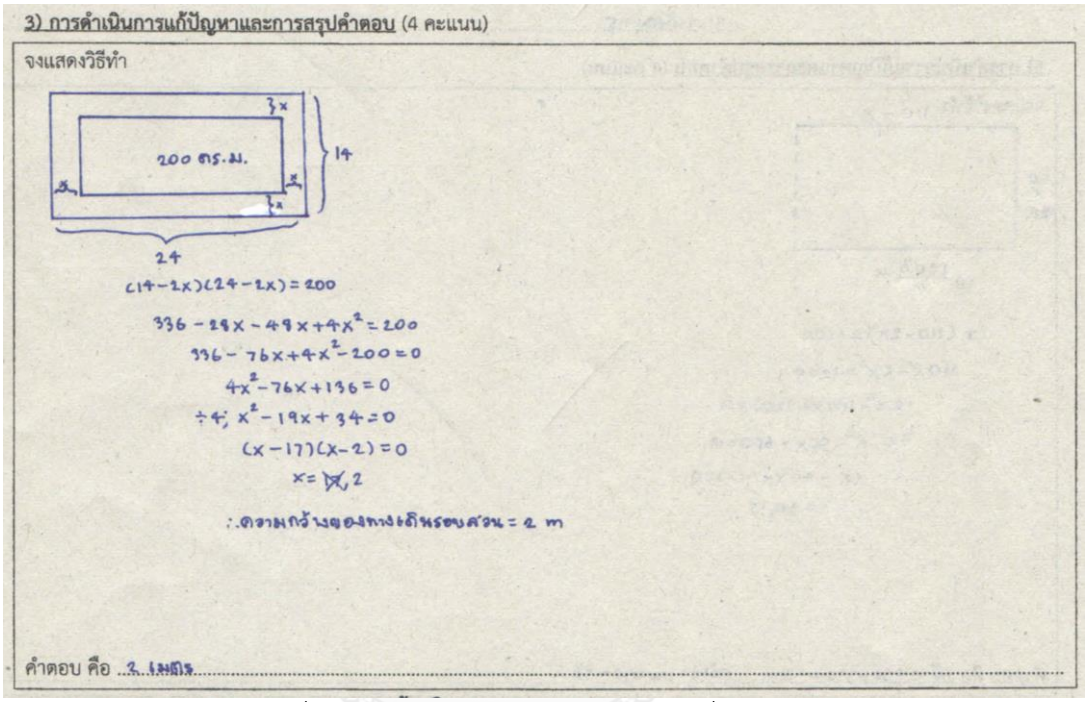
คำตอบ คือ พรี่ 48 ปี หลา 41

นักเรียนใช้ตารางเพื่อทำความเข้าใจความสัมพันธ์และเงื่อนไขของปัญหา ก่อนจะนำความเข้าใจนั้นมากำหนดสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

โจทย์ปัญหา *“สวนสาธารณะแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 14 เมตร ยาว 24 เมตร เมื่อทำทางเดินภายในรอบสวนให้มีความกว้างเท่ากันโดยตลอด จะเหลือบริเวณสวนที่ไม่รวมทางเดินคิดเป็นพื้นที่ 200 ตารางเมตร จงหาความกว้างของทางเดินรอบสวนนี้”*

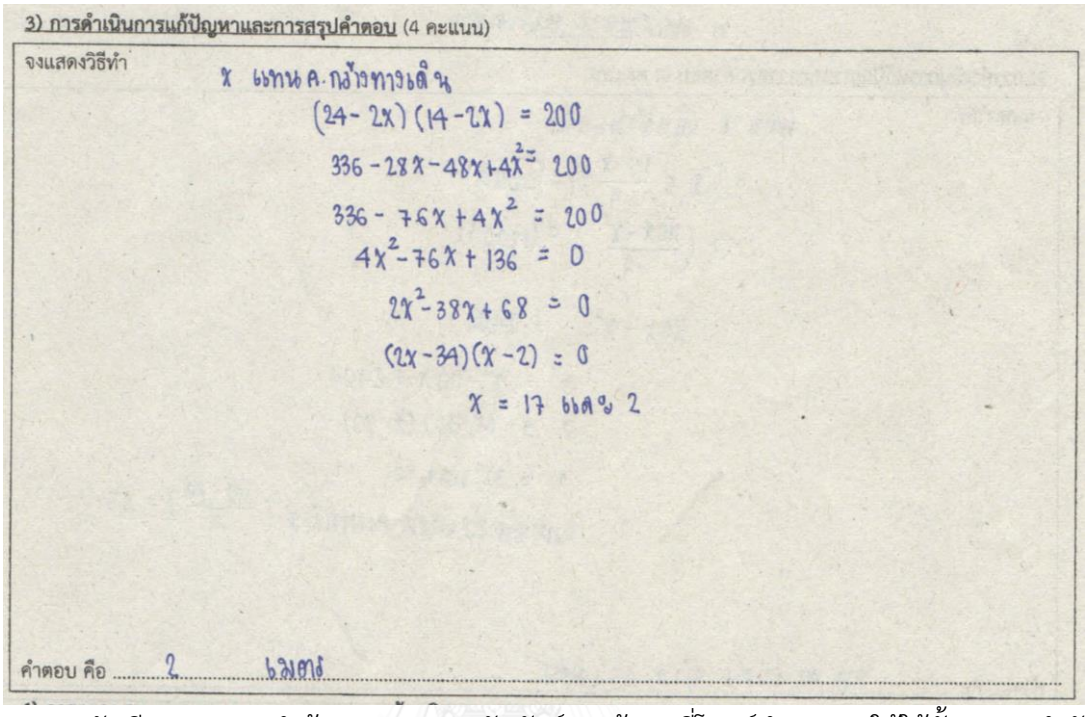
ตัวอย่างที่ 1



นักเรียนวาดภาพเพื่อทำความเข้าใจความสัมพันธ์และเงื่อนไขของปัญหา ก่อนจะนำความเข้าใจนั้นมากำหนดสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

Chulalongkorn University

ตัวอย่างที่ 2


3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ (4 คะแนน)

จงแสดงวิธีทำ

x แทน ค.กว้างทางเดิน

$(24-2x)(14-2x) = 200$

$336-28x-48x+4x^2 = 200$

$336-76x+4x^2 = 200$

$4x^2-76x+136 = 0$

$2x^2-38x+68 = 0$

$(2x-34)(x-2) = 0$

$x = 17$ และ 2

คำตอบ คือ 2 เมตร

นักเรียนสามารถนำข้อมูลและความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ใช้ตั้งสมการกำลังสองได้โดยไม่ต้องใช้ ตาราง กราฟ หรือรูปภาพเพื่อทำความเข้าใจโจทย์ก่อนกำหนดสมการและสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า ในช่วงก่อนเรียนพบว่านักเรียนยังไม่มีความหลากหลายในการดำเนินการแก้ปัญหา และเป็นการดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไม่มีประสิทธิภาพจนสามารถหาผลลัพธ์ของปัญหาได้ นอกจากนี้นักเรียนบางคนที่ไม่สามารถทำตามแผนการที่ได้วางไว้หรือไม่เชื่อมโยงกับแผนการเดิมที่วางไว้เลย หรือทำแล้วแต่ไปต่อไม่ได้จนสำเร็จเพราะวางแผนการไม่ละเอียดถี่ถ้วนพอ ดังนั้นครูจึงต้องสังเกตพฤติกรรมในการทำงานของนักเรียนแต่ละคนแล้วจึงให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำหรือตั้งประเด็นคำถามให้นักเรียนได้อภิปรายให้เห็นถึงจุดบกพร่องหรือจุดด้อยระหว่างการดำเนินการตามแผนการที่ได้วางไว้ เพื่อนำไปสู่คำตอบและข้อสรุปของปัญหา ทำให้ช่วงหลังการการทดลองนักเรียนจะมีความละเอียดรอบคอบ ดำเนินการหาคำตอบได้อย่างหลากหลายและมีประสิทธิภาพจนสำเร็จลุล่วง สมบูรณ์และสามารถสรุปคำตอบได้สมบูรณ์มากขึ้น

4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด

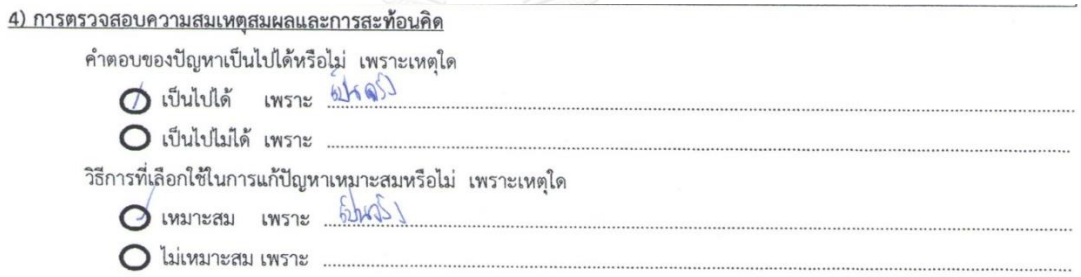
ก่อนเรียน

นักเรียนยังไม่สามารถให้เหตุผลในความเป็นไปได้ของคำตอบที่ตนเองคิดได้หรือวิธีการที่ตนเองเลือกใช้ โดยจะให้เหตุผลเป็นความรู้สึก ไม่เป็นเหตุผลที่เป็นรูปธรรม

ตัวอย่างการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด ก่อนเรียน

โจทย์ปัญหา *“ห้องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 7 เมตร ยาว 10 เมตร และสูง 3 เมตร ถ้าต้องการทาสีผนังห้องภายในทั้งสี่ด้าน อยากทราบว่าต้องใช้จ่ายค่าทาสีเป็นเงินเท่าไร เมื่อช่างทาสีคิดเงินค่าทาสีราคาตารางเมตรละ 80 บาท”*

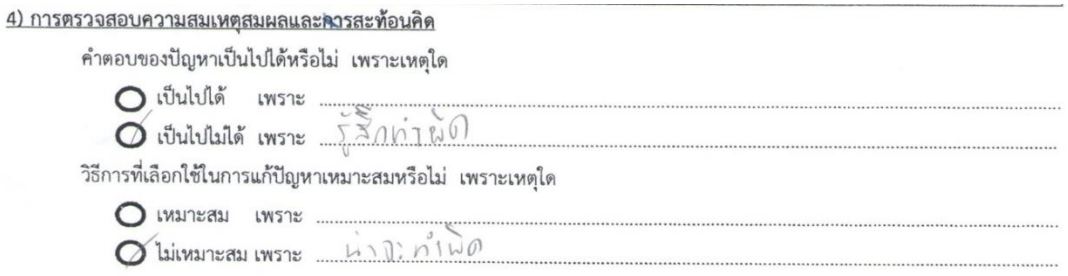
ตัวอย่างที่ 1


4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด
คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
เป็นไปได้ เพราะ เป็นจริง
เป็นไปไม่ได้ เพราะ .....
วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด
เหมาะสม เพราะ เป็นจริง
ไม่เหมาะสม เพราะ .....

นักเรียนให้เหตุผลว่าเป็นจริง แต่ไม่มีรายละเอียดยืนยันเกี่ยวข้องกับปัญหาหรือองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์แต่อย่างใด

โจทย์ปัญหา *“สารละลายชนิดหนึ่งมีความเข้มข้น 20 % ปริมาตร 50 ลิตร นำไปผสมกับสารละลายชนิดเดิมที่มีความเข้มข้น 80 % เพื่อต้องการให้ได้สารละลายชนิดเดิมที่มีความเข้มข้น 50 % อยากทราบว่าต้องใช้สารละลายนี้เป็นปริมาณเท่าใด”*

ตัวอย่างที่ 2


4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด
คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
เป็นไปได้ เพราะ .....
เป็นไปไม่ได้ เพราะ รู้สึกว่าผิด
วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด
เหมาะสม เพราะ .....
ไม่เหมาะสม เพราะ น่าจะทำผิด

นักเรียนใช้ความรู้สึกในการให้เหตุผลเกี่ยวกับความเป็นไปได้ของคำตอบและความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้

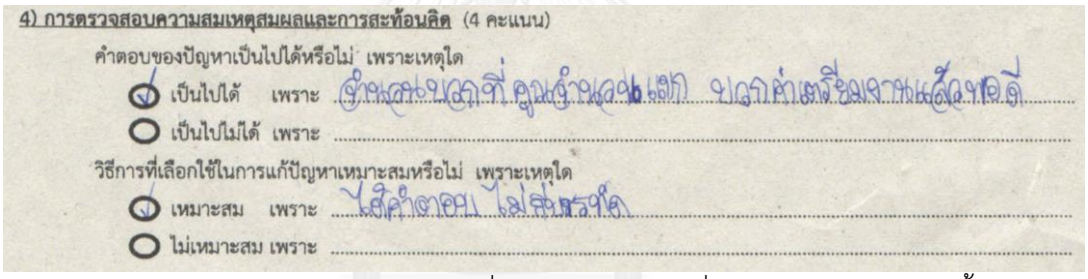
หลังเรียน

นักเรียนสามารถทบทวนวิธีการหาและคำตอบที่ตนเองหาได้ตนเอง ทำให้นักเรียนสามารถทำงานได้อย่างละเอียดรอบคอบมากขึ้น สามารถตระหนักในความสมเหตุสมผลของคำตอบและสามารถประเมินความสามารถของตนเองในกระบวนการแก้ปัญหาทั้งหมด

ตัวอย่างการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด หลังเรียน

โจทย์ปัญหา *“ค่าใช้จ่ายในการแต่งงานประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือ ค่าเตรียมงานทุกอย่างซึ่งเป็นค่าคงที่ และอีกส่วนหนึ่งแปรผันตรงกับจำนวนแขก ที่มาร่วมงาน ถ้าเขาเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 250,000 บาท เป็นค่าเตรียมงาน 50,000 บาท และมีแขกมาร่วมงาน 400 คน จงหาค่าใช้จ่ายต่อหัวของแขกที่มาร่วมงาน”*

ตัวอย่างที่ 1


4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด (4 คะแนน)

คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

- ☑ เป็นไปได้ เพราะ ตำแหน่งของค่าที่คูณกำหนดให้เอา ของค่าเตรียมงานแล้วหารดี
- ○ เป็นไปไม่ได้ เพราะ .....

วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด

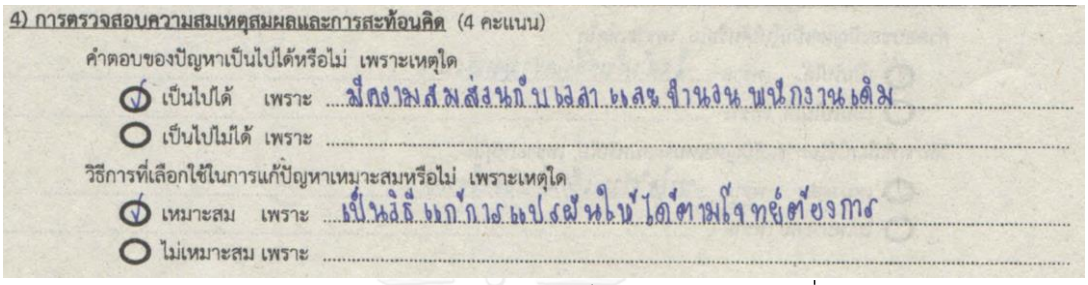
- ☑ เหมาะสม เพราะ ใช้คำตอบไม่ซับซ้อน
- ○ ไม่เหมาะสม เพราะ .....

นักเรียนใช้เหตุผลประกอบการคิดเพื่อประเมินคำตอบที่ตนเองหาได้ นอกจากนี้ยังตรวจคำย้อนกลับไปยังความสัมพันธ์ของปัญหา

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

โจทย์ปัญหา *“บริษัทรับจ้างพิมพ์งานแห่งหนึ่ง มีพนักงานในบริษัท 15 คน ถ้าลูกค้าสั่งพิมพ์ใบปลิวโฆษณาสินค้าชนิดหนึ่ง ซึ่งถ้าพิมพ์งานทั้งหมดเสร็จใช้ระยะเวลา 5 ชั่วโมง อยากทราบว่าถ้าลูกค้าต้องการสั่งใบปลิวแบบเดิมและจำนวนเท่าเดิม และอยากจะพิมพ์งานทั้งหมด ให้เสร็จภายในเวลา 3 ชั่วโมงจะต้องจ้างพนักงานเพิ่มขึ้นกี่คนเมื่อจำนวนพนักงานในบริษัทแปรผกผันระยะเวลาที่ทำงานเสร็จ”*

ตัวอย่างที่ 1


4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด (4 คะแนน)

คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

✓ เป็นไปได้ เพราะ มีความสัมพันธ์กันระหว่าง เวลา จำนวน พนักงาน เดิม

○ เป็นไปไม่ได้ เพราะ .....

วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด

✓ เหมาะสม เพราะ เป็นหลักการแปรผันที่ได้ตามโจทย์ต้องการ

○ ไม่เหมาะสม เพราะ .....

นักเรียนใช้การประมาณในการประเมินความเป็นไปได้ของคำตอบที่ตนเองหาได้ โดยใช้เพียงแค่หลักการของการการแปรผันตรง

การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการวิเคราะห์ลักษณะของการตอบคำถามพบว่า เมื่อพิจารณาการวิเคราะห์ปัญหา การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิดของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการสูงขึ้น โดยนักเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่สำคัญของปัญหาได้อย่างครบถ้วนสมบูรณ์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา สามารถบูรณาการความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และประสบการณ์เดิมมาใช้ในการวางแผนการแก้ปัญหา สามารถใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ไขปัญหาและมีประสิทธิภาพและสุดท้ายนักเรียนได้มีการทบทวนตนเองโดยการสะท้อนคิดถึงกระบวนการที่ผ่านมาและคำตอบที่ได้นั้นสมเหตุสมผลกับบริบทของปัญหาหรือไม่ด้วยตนเอง ซึ่งทั้งหมดทำให้นักเรียนมีการคิดอย่างเป็นระบบ ละเอียด รอบคอบ และมีพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงขึ้นอย่างชัดเจน โดยจำแนกรายละเอียดตามองค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

การวิเคราะห์ปัญหา

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนโดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจปัญหา มีการเรียนรู้อย่างมีความหมาย โดยเชื่อมโยงความรู้ความเข้าใจเดิมของนักเรียนกับข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ โดยครูจะค่อยๆ เสริมต่อการเรียนรู้ โดยการช่วยตั้งประเด็นให้นักเรียนช่วยกันอภิปราย ฝึกแสดงความคิดเห็น กล้าคิดและกล้าแสดงออก เนื่องจากสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงจะมีข้อมูลที่ซับซ้อน ข้อมูลที่ไม่

สมบูรณ์หรือการขาดหายไปของข้อมูล ดังนั้นการร่วมกันอภิปรายถึงสถานการณ์ของปัญหาจะทำให้นักเรียนเข้าใจอย่างลึกซึ้งและมองสถานการณ์ได้หลากหลายแง่มุม วิเคราะห์ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา และนำไปสู่การคิดต่อยอดในการวางแผนกลยุทธ์การแก้ปัญหาได้อย่างลึกซึ้งต่อไป ซึ่งในระยะก่อนเรียน นักเรียนจะยังไม่คุ้นเคยกับการวิเคราะห์ข้อมูลจึงลอกโจทย์ปัญหาทั้งหมด จนระยะหลังเรียนนักเรียนสามารถวิเคราะห์และสรุปได้เฉพาะสิ่งที่สำคัญที่โจทย์กำหนดให้และโจทย์ต้องการให้หาได้ชัดเจนและกระชับมากขึ้นด้วยภาษาของตนเอง ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับการดำเนินชีวิต ตระหนักถึงประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น

การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนโดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นทำให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องมีการบูรณาการความรู้ในการสร้างแบบจำลองเพื่อสร้างแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพ และนำไปสู่เป้าหมายของของแบบจำลองนั้น ทำให้นักเรียนต้องพยายามนำความรู้ที่มีเกี่ยวกับคณิตศาสตร์มาบูรณาการใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งอาจจะมีกลยุทธ์ที่แตกต่างและหลากกลายไปขึ้นความรู้และประสบการณ์เดิม ความถนัดและความคุ้นเคยของนักเรียนแต่ละคนที่เคย นำมาใช้ในการวางแผนแก้ปัญหา ครูควรช่วยแนะนำเทคนิควางแผนการแก้ปัญหาโดยการนำเสนอตัวอย่างการบูรณาการการแก้ปัญหาของเพื่อนนักเรียนให้นักเรียนได้เห็นเป็นตัวอย่าง และการตั้งประเด็นให้นักเรียนได้อภิปรายเพื่อวางแผนการดำเนินงานได้อย่างหลากหลายและมีประสิทธิภาพ โดยจะเริ่มต้นจากปัญหาที่มีความซับซ้อนน้อยและระดับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ง่ายและค่อย ๆเพิ่มความซับซ้อนและระดับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ยากขึ้น เพื่อเป็นกำลังใจในการพัฒนาตนเองให้กับนักเรียน ซึ่งในระยะก่อนเรียน นักเรียนไม่สามารถบูรณาการความรู้เพื่อใช้วางแผนให้สอดคล้องกับความถูกต้องของหลักการทางคณิตศาสตร์ได้ แต่ระยะหลังเรียนนักเรียนมีพัฒนาการในการบูรณาการความรู้ตามความถนัดของตนเองในการวางแผนการแก้ปัญหา

การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนโดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นทำให้นักเรียนได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ตนสร้างขึ้น และได้เสริมต่อการเรียนรู้ของตนเองโดยการศึกษาการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเพื่อนที่นำเสนอในชั้นเรียน ทำให้นักเรียนได้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน โดยมีการอภิปรายถึงประสิทธิภาพของแบบจำลองแต่ละแบบที่แต่ละคนสร้างขึ้น ดังนั้นครูจึงต้องสังเกตพฤติกรรมในการทำงานของนักเรียนแต่ละคนแล้วจึงให้ความ

ช่วยเหลือ ให้คำแนะนำหรือตั้งประเด็นคำถามให้นักเรียนได้อภิปรายให้เห็นถึงจุดบกพร่องหรือจุดด้อยของแบบจำลองที่สร้างขึ้น ในระยะก่อนเรียนพบว่านักเรียนยังไม่มีความหลากหลายในการดำเนินการแก้ปัญหา และเป็นการดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอที่จะสามารถหาผลลัพธ์ของปัญหาได้ นอกจากนี้นักเรียนบางคนที่ไม่สามารถทำตามแผนการที่ได้วางไว้หรือไม่เชื่อมโยงกับแผนการเดิมที่วางไว้เลย หรือทำแล้วแต่ไปต่อไม่ได้จนประสบความสำเร็จเพราะแผนการที่วางไว้ไม่ละเอียดถี่ถ้วนเพียงพอเพื่อนำไปสู่คำตอบและข้อสรุปของปัญหาได้ แตกต่างจากระยะหลังการเรียนนักเรียนจะมีความละเอียดรอบคอบ ดำเนินการหาคำตอบได้อย่างหลากหลายและมีประสิทธิภาพจนสำเร็จลุล่วง สมบูรณ์และสามารถสรุปคำตอบได้สมบูรณ์มากขึ้น

การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนโดยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นทำให้นักเรียนฝึกการทบทวนและสะท้อนคิดในการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งสิ้นสุดกระบวนการ พร้อมทั้งเสริมต่อการเรียนรู้โดยการร่วมกันอภิปราย ประเมินข้อดีและข้อด้อยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ตนสร้างขึ้น ฝึกรับฟังความคิดเห็นและเปิดโอกาสให้ตนเองได้เห็นมุมมองต่าง ๆ ของผู้อื่นต่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเอง และฝึกพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของผู้อื่นที่สร้างขึ้นจากสถานการณ์เดียวกันแต่มีลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันออกไป ครูช่วยชี้ให้มองให้เห็นถึงข้อบกพร่องและให้คำแนะนำในการแก้ไข และให้นักเรียนคนที่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้นำเสนอการแก้ปัญหาของตนเองตั้งแต่ต้นจนจบให้เพื่อนักเรียนได้เห็นแล้วให้นักเรียนแต่ละคนพิจารณาประเมินทบทวนการทำงานของตนเอง ความสมเหตุสมผล ความเหมาะสม ประสิทธิภาพและข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขอย่างไร ในระยะก่อนเรียนพบว่านักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับการทบทวนตนเองและการตรวจสอบคำตอบทำให้คำตอบที่นักเรียนสรุปมายังไม่สมเหตุสมผลมากนัก เพียงแต่ยืนยันว่าตนเองถูกต้องเท่านั้น แต่ระยะหลังเรียนนักเรียนมีพัฒนาการอย่างเห็นได้ชัดเจน โดยสามารถประเมินตนเองได้ดีพร้อมทั้งสามารถระบุเหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล

2.3.2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่แสดงถึงพัฒนาการของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของกลุ่มทดลอง โดยการวิเคราะห์ตามองค์ประกอบ

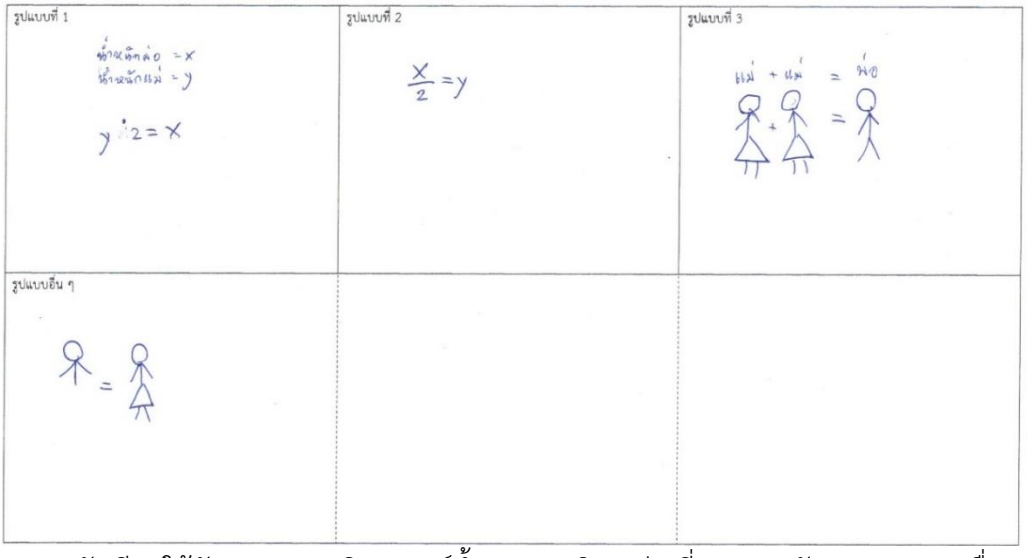
1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

ก่อนเรียน

นักเรียนไม่สามารถใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพได้อย่างหลากหลายรูปแบบ และยังใช้ได้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้ไม่สอดคล้องกับองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และสื่อความหมายไม่ถูกต้อง

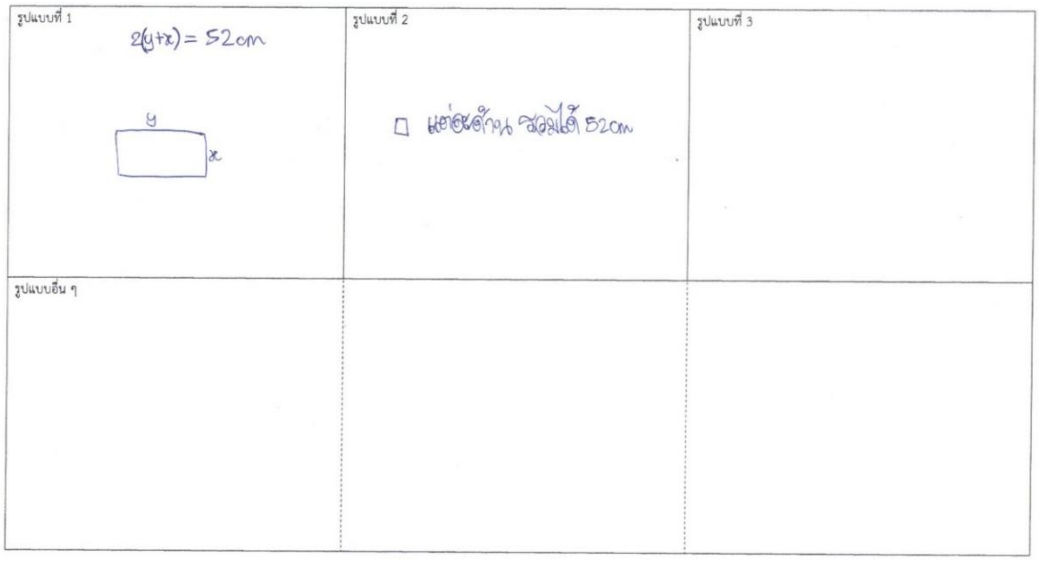
ตัวอย่าง การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ ก่อนเรียน

ข้อความ *“น้ำหนักของพ่อเป็นสองเท่าของน้ำหนักของแม่”*



นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ซ้ำรูปแบบเดิม แต่เปลี่ยนแปลงลักษณะของการสื่อความหมาย หรือตัวแปร

ข้อความ *“เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งเป็น 52 เซนติเมตร”*



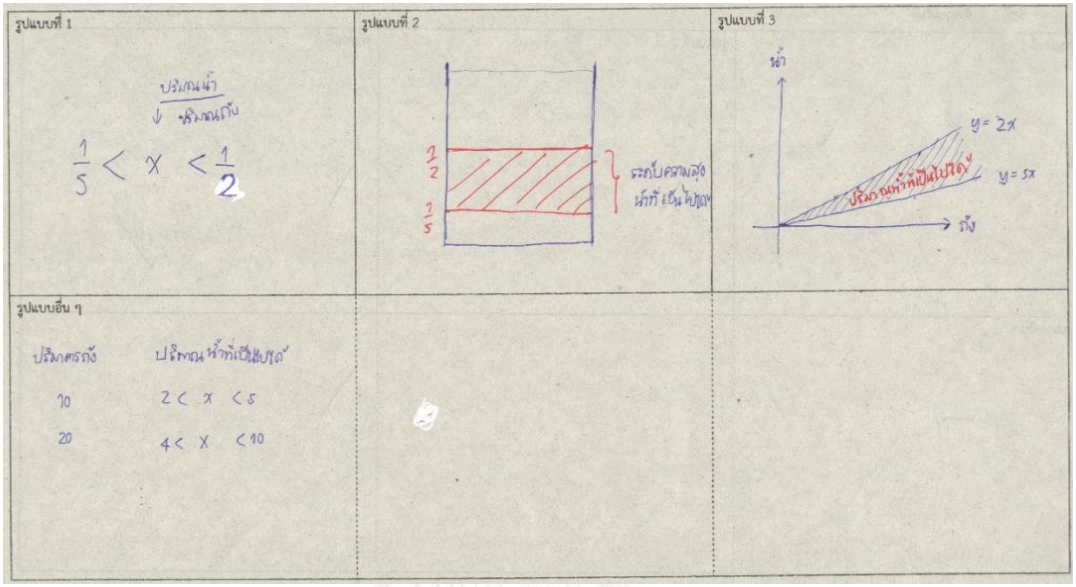
นักเรียนใช้รูปแบบของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้ไม่หลากหลายและในรูปแบบที่ 2 ที่นำเสนอไม่เหมาะสมต่อการสื่อความ

หลังเรียน

นักเรียนสามารถใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพได้อย่างหลากหลายรูปแบบ และยังใช้ได้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้สอดคล้องกับองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และสื่อความหมายถูกต้อง นักเรียนสามารถสื่อสารให้เห็นถึงความเข้าใจอย่างหลากหลาย นอกจากนี้ยังเห็นถึงจินตนาการของนักเรียนและความสามารถในการเขียนสื่อความ ซึ่งทำให้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มีระดับของความเหมาะสมในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ความเหมาะสมของการสื่อสารและความถูกต้องกับหลักการทางคณิตศาสตร์ และส่วนใหญ่นักเรียนจะเรียงลำดับการเลือกใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ตนถนัดหรือเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก ซึ่งขณะที่นักเรียนเลือกใช้ตัวแทน นักเรียนต้องเชื่อมโยงความเข้าใจของตนเองกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเองแล้วจึงสื่อความออกมาเป็นรูปธรรม

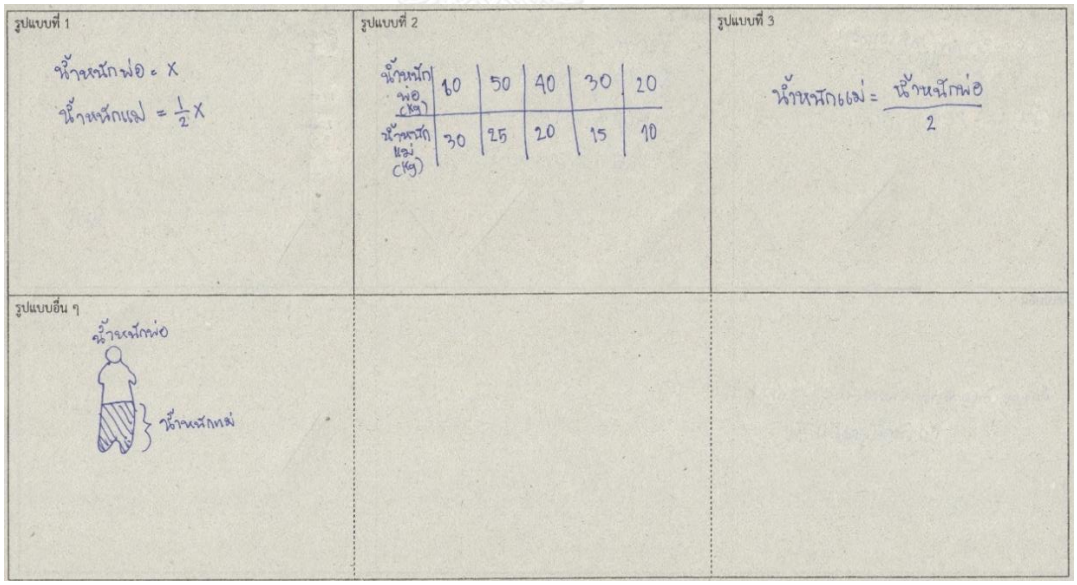
ตัวอย่างการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ หลังเรียน

ข้อความ *“มีน้ำอยู่ไม่ถึงครึ่งหนึ่งของถัง แต่มากกว่าหนึ่งในห้าของถัง”*



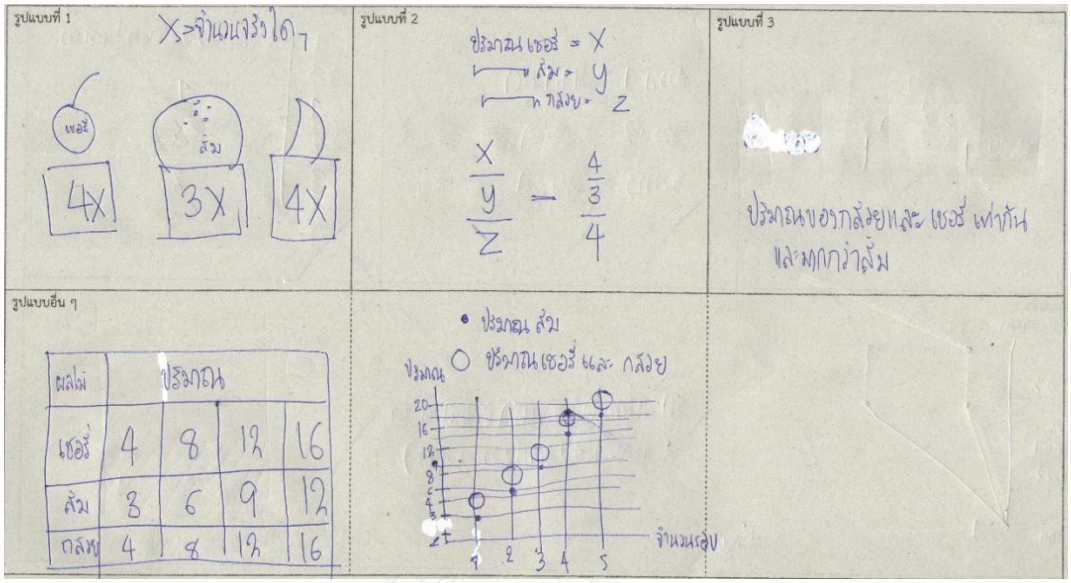
นักเรียนสามารถเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย โดยจะเห็นได้ว่านักเรียนต้องบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเองกับข้อความที่กำหนดมาให้ โดยเริ่มจากตัวแปร รูปภาพ กราฟและสมการ

ข้อความ *“น้ำหนักของแม่เป็นครึ่งหนึ่งของน้ำหนักของพ่อ”*



นักเรียนสามารถเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย โดยจะเห็นได้ว่านักเรียนต้องบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเองกับข้อความที่กำหนดมาให้ โดยเริ่มจากตัวแปร ตาราง สัญลักษณ์และรูปภาพ

ข้อความ *“อัตราส่วนของปริมาณเชอร์รี่ต่อปริมาณส้มต่อปริมาณกล้วยเป็น 4 : 3 : 4”*



นักเรียนสามารถเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย โดยจะเห็นได้ว่านักเรียนต้องบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเองกับข้อความที่กำหนดมาให้ โดยเริ่มจากรูปภาพ ตัวแปร ข้อความทางคณิตศาสตร์ ตารางและกราฟ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

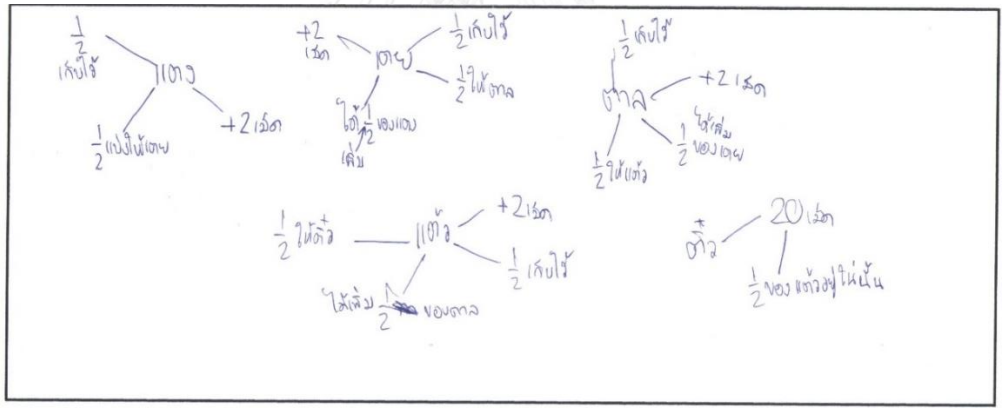
ก่อนเรียน

นักเรียนไม่สามารถใช้ข้อมูลและเงื่อนไขของปัญหา สร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพและนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

ตัวอย่างการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา ก่อนเรียน

ปัญหา *“ถ้าแตงมีลูกอมอยู่จำนวนหนึ่งแล้วแบ่งให้เตยครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด*
เตยแบ่งลูกอมให้ตาลครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
ตาลแบ่งลูกอมให้แต้วครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
แต้วแบ่งลูกอมให้ติ๋วครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
และสุดท้ายติ๋วมีลูกอมทั้งหมด 20 เม็ด”

ตัวอย่างที่ 1



นักเรียนเลือกใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของความสัมพันธ์ที่ได้จากปัญหาได้ถูกต้อง สามารถสื่อความหมายได้ไม่เหมาะสมและยังไม่สามารถนำไปสู่การประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา

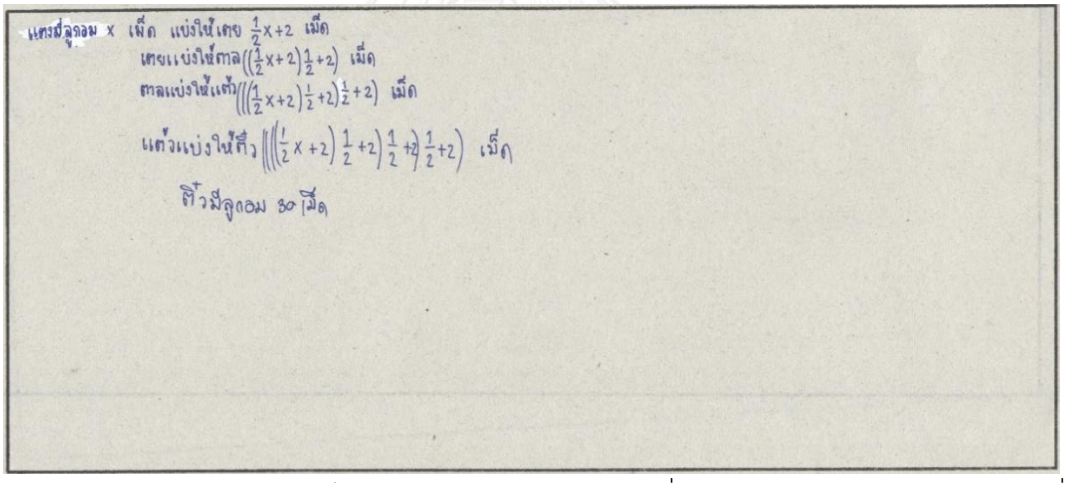
หลังเรียน

นักเรียนสามารถเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม สร้างความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างสมบูรณ์ สื่อสารได้อย่างเหมาะสมและมีความสอดคล้องกับหลักการทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างหลากหลายตามระดับความสามารถของนักเรียนแต่ละคน

ตัวอย่างการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา หลังเรียน

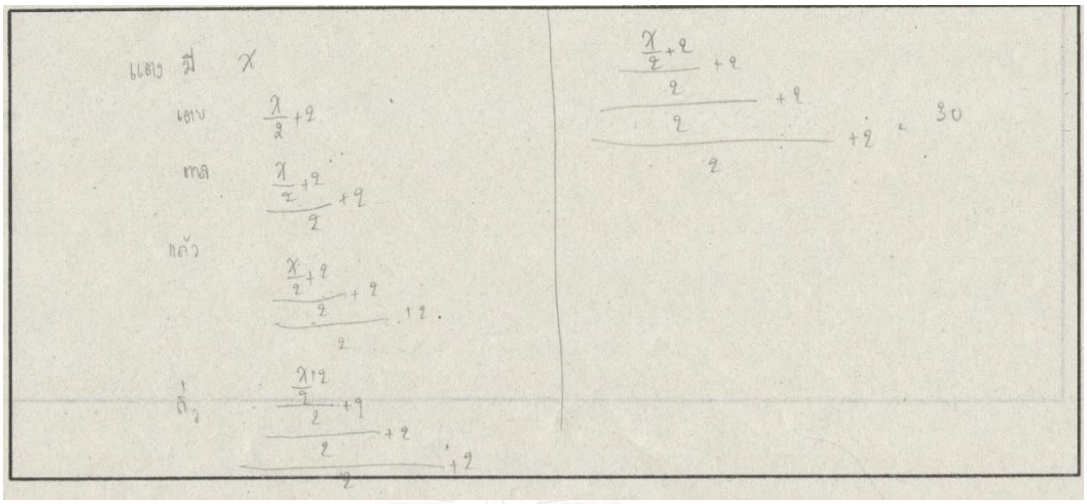
ปัญหา “ *ถ้าแตงมีลูกอมอยู่จำนวนหนึ่งแล้วแบ่งให้เตยครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด*
เตยแบ่งลูกอมให้ตาลครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
ตาลแบ่งลูกอมให้แต้วครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
แต้วแบ่งลูกอมให้ติ๋วครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ และแถมให้อีก 2 เม็ด
และสุดท้ายติ๋วมีลูกอมทั้งหมด 30 เม็ด”

ตัวอย่างที่ 1



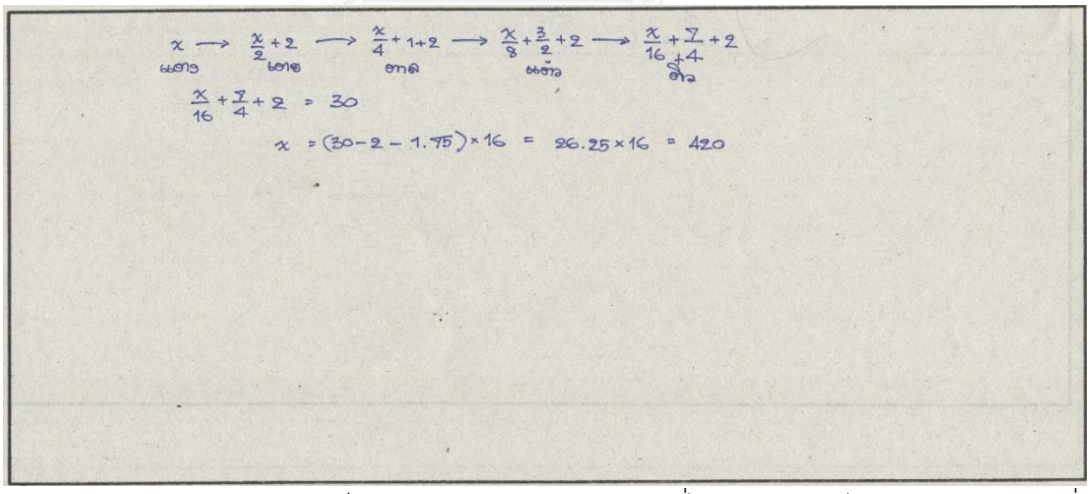
นักเรียนเลือกใช้ตัวแปรเป็นตัวเทนของความสัมพันธ์ที่ได้จากปัญหาได้ถูกต้องสามารถสื่อความหมายได้ และสามารถนำไปสู่การประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้ในอนาคต แต่ยังไม่ได้ดำเนินการไปถึงขั้นตอนการกำหนดสมการ

ตัวอย่างที่ 2



นักเรียนเลือกใช้ตัวแปรเป็นตัวเทนของความสัมพันธ์ที่ได้จากปัญหาได้ถูกต้องสามารถสื่อความหมายได้ และสามารถนำไปสู่การประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน และดำเนินการถึงขั้นตอนการกำหนดสมการได้ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 5



นักเรียนเลือกใช้ตัวแปรเป็นตัวเทนของความสัมพันธ์ที่ได้จากปัญหาได้ถูกต้องสามารถสื่อความหมายได้ และสามารถนำไปสู่การประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน และดำเนินการถึงขั้นตอนการกำหนดสมการได้ถูกต้อง นอกจากนี้ยังมีการคำนวณตัวแปรในแต่ละขั้นตอนเพื่อลดความซับซ้อนของสมการสุดท้ายลงได้

จากการศึกษาพัฒนาการความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ โดยการวิเคราะห์ลักษณะของการตอบคำถามพบว่า การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ และการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการสูงขึ้น โดยนักเรียนสามารถเลือกใช้รูปแบบของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ตนเองถนัดและเชี่ยวชาญได้อย่างเหมาะสม สามารถจัดการตัวแทนคณิตศาสตร์ให้เป็นระบบตามเงื่อนไขของปัญหา สามารถบูรณาหลักการทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งทั้งหมดทำให้นักเรียนได้ใช้ความคิด จินตนาการและบูรณาการหลักการทางคณิตศาสตร์ ทำความเข้าใจ สื่อสารและนำเสนอข้อมูลและสถานการณ์ปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสมและสมบูรณ์ ดังนั้นกลุ่มทดลองจึงมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มีพัฒนาสูงขึ้นอย่างชัดเจน โดยจำแนกรายละเอียดตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้นักเรียนเริ่มจากการวิเคราะห์และทำความเข้าใจสถานการณ์ของปัญหาเพื่อนำข้อมูลที่ได้มาบูรณาการกับประสบการณ์เดิมทั้งประการณ์เดิมในชีวิตจริงและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อวางแผนการในแก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ขึ้น ซึ่งการเริ่มสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นต้องจำลองความทางความคิดการจำลองทางความคิดจากปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริง(โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์) ดังนั้นจึงเป็นการฝึกฝนอย่างค่อยเป็นค่อยไปในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แทนโดยแสดงออกมาเป็นรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งอาจมีลักษณะเป็นภาพ กราฟ ตาราง ตัวแปร สัญลักษณ์และข้อความทางคณิตศาสตร์แทนปรากฏการณ์ที่ต้องการทำความเข้าใจ ทำให้นักเรียนได้ฝึกฝนการทำความเข้าใจและกระบวนการทางความคิดซึ่งเป็นนามธรรมแล้วถ่ายถอดออกมาในรูปแบบของรูปธรรมให้ได้ โดยเป็นการเริ่มต้นการใช้ตัวแทนเบื้องต้นที่แทนข้อความต่าง ๆ เช่น จำนวนคู่บวก มีน้ำอยู่หนึ่งในสามของแก้ว น้ำหนักของพ่อเป็นสองเท่าของน้ำหนักของแม่ ในระยะก่อนเรียน นักเรียนยังเลือกใช้ตัวแทนในรูปแบบที่ไม่หลากหลายและยังไม่สามารถสื่อความออกมาได้ถูกต้องหรือเป็นสิ่งที่ตนเข้าใจเพียงคนเดียว แต่คนอื่นอาจจะไม่สามารถเข้าใจได้เหมือนกับสิ่งที่พยายามจะสื่อความแตกต่างจากระยะหลังเรียนที่นักเรียนสามารถใช้จินตนาการของตนเองและบูรณาการองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมและหลากหลาย

การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

จากตัวอย่างข้างต้นเห็นได้ชัดเจนว่า กระบวนการเรียนการสอนที่มีจุดเน้นให้นักเรียนได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และเน้นการมีปฏิสัมพันธ์แบบช่วยเหลือกันนี้ ทำให้นักเรียนได้ฝึกจำลองความคิด ช่วงก่อนการทดลองนักเรียนยังใช้เลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ไม่หลากหลายและไม่นำไปสู่การแก้ปัญหา แตกต่างจากหลังเรียนอย่างชัดเจน นักเรียนสามารถเลือกใช้รูปแบบของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ผนวกกับจินตนาการและความถนัดของนักเรียนแต่ละคนในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างหลากกลายและมีประสิทธิภาพชัดเจน ในระยะก่อนเรียน นักเรียนพยายามใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แต่รูปแบบของตัวแทนที่ใช้ยังไม่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพได้ แตกต่างจะระยะหลังเรียนนักเรียนสามารถใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพและหลากหลาย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีสาระสำคัญดังนี้

วัตถุประสงค์การวิจัย

1.เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2. เพื่อศึกษาคุณภาพกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้โดยพิจารณาจาก

2.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้กับนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หลังการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้กับนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หลังการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.3 การศึกษาพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

สรุปผลการวิจัย

ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัยโดยแบ่งออกเป็น 2 ตอน ตามวัตถุประสงค์ของการวิจัย คือ ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน และตอนที่ 2 คุณภาพการของกระบวนการเรียนการสอน

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 4 ประการ หลักการ วัตถุประสงค์ ขั้นตอนการเรียนการสอนและการวัดและการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

หลักการของกระบวนการเรียนการสอน

หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ทำให้เกิดความต้องการทำความเข้าใจหรือค้นหาคำตอบของปัญหา และการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสำรวจความรู้พื้นฐานเดิมเดียวกับปัญหาและเสริมต่อข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับบริบทของปัญหา

หลักการที่ 2 หลักการใช้การกำหนดเป้าหมายเพื่อแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง(The real world)ไปยังโลกแห่งความคิด(The conceptual world)

การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการเสริมต่อความรู้ความสามารถพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อกำหนดเป้าหมายและลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน

หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อได้มาซึ่งผลลัพธ์ในโลกแห่งความจริง

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้และเสริมต่อการเรียนรู้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ มีการประเมินข้อมูลป้อนกลับของนักเรียนเพื่อที่จะค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลง และให้นักเรียนสามารถฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง สรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงอ้างอิงข้อสรุปของผลลัพธ์นั้นกลับไปยังบริบทในโลกแห่งความจริง

หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิดเพื่อประเมินการทำงานของตนเอง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง การประเมินข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ให้นักเรียนมองเห็นแง่มุมที่หลากหลายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้น

หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย

การประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำนายไปสู่ปัญหาในโลกแห่งความจริงอื่น ๆ ในอนาคต เพื่อให้เกิดการขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

วัตถุประสงค์ของการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

ขั้นตอนของการเรียนการสอน

ขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนโดยบูรณาการแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ

เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย

Chulalongkorn University

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง

เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง

เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียน

เพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด

ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ดำเนินการวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแบ่งเป็นก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีรายละเอียด ดังนี้

1). การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอน ใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

2). การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอน ใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ตอนที่ 2 คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

จากการนำกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ไปทดลองใช้ โดยใช้แบบแผนการทดลองแบบมีกลุ่มทดลองและมีกลุ่มควบคุม วัดก่อนและหลังการทดลอง กลุ่มทดลองได้รับการจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นและกลุ่มควบคุมได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติตามการจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ผลการทดลองสรุปได้ดังนี้

1. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้สถิติ t-test for independent ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 พบว่า หลังเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม และเมื่อพิจารณาในแต่ละองค์ประกอบ ทั้งสี่องค์ประกอบการแก้ปัญหา มีเพียง 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบการดำเนินการแก้ปัญหา และองค์ประกอบการสรุปคำตอบและการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม แสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองในภาพรวมสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ

2. การเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้สถิติ t-test for independent และเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้สถิติ t-test for dependent ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 พบว่า หลังเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม และเมื่อพิจารณาในแต่ละองค์ประกอบ ทั้งสององค์ประกอบของการใช้ตัวแทน พบว่า องค์ประกอบการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพและองค์ประกอบการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม แสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองในภาพรวมสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ

3. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพเกี่ยวกับพัฒนาการ

3.1). พัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการวิเคราะห์ทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง สามารถเชื่อมโยงความรู้เดิมกับเงื่อนไขของปัญหาเพื่อวางแผนกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา สามารถดำเนินการตามแผนการที่วางไว้จนสามารถหาคำตอบของปัญหาได้ประสบความสำเร็จ นอกจากนี้ยังมีความละเอียดรอบคอบมากขึ้นในการตรวจสอบและทบทวนขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหาที่ตนใช้ว่ามีประสิทธิภาพหรือไม่ มีคำตอบที่มีความสมเหตุสมผลกับบริบทของปัญหาหรือไม่ และมีการพัฒนากลยุทธ์ในการบูรณาการความรู้และวางแผนการแก้ปัญหาได้อย่างมีความประสิทธิภาพมากขึ้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพัฒนาการความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงขึ้นกว่าก่อนการทดลอง

3.2). พัฒนาการความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสมและหลากหลายมากขึ้น สามารถสื่อความหมายแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างสอดคล้องกับองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และนำไปสู่ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบและมีประสิทธิภาพมากขึ้น นอกจากนี้นักเรียนแต่ละคนยังแสดงให้เห็นถึงจินตนาการและความถนัดของแต่ละบุคคลในการเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แต่ละรูปแบบ ทั้ง ภาพ กราฟ ตาราง ตัวแปร สัญลักษณ์และข้อความทางคณิตศาสตร์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพัฒนาการความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้นก่อนการทดลอง

การอภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษาผลการใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีประเด็นในการอภิปราย 2 ประเด็น คือ กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และคุณภาพการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. การอภิปรายผลจากการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

การอภิปรายผลกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น มีประเด็นในการอภิปรายดังนี้

1.1. การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ถูกพัฒนาขึ้นอย่างเป็นระบบและมีแนวคิดและทฤษฎีรองรับ ขั้นตอนการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเริ่มจากการศึกษาข้อมูลและสภาพปัญหาเบื้องต้น เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้สอดคล้องหลักสูตรและแนวทางการจัดเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งพบว่านักเรียนไทยยังไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาและยังขาดพื้นฐานความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากเมื่อย้อนหลังไปเกือบสองทศวรรษที่ผ่านมาผลการวิจัยของผู้วิจัยหลายท่าน เช่น อัมพร ม้าคนอง (2536) กรรณิการ์ กรรณิการ์ ปวนกาศ (2543)ปวนกาศ (2543) เมตตา มาเวียง (2544) จิตอารีย์ ปัญญาแจ้งสกุล (2544) ปนัดดา สังข์ศรีแก้ว และคณะ (2552) ชลธิชา ใจพนัส และคณะ (2556) พบว่าการแปลความหมายโจทย์ การตีความและการเปลี่ยนจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ยังคงเป็นอุปสรรคต่อการแก้ปัญหาและการทำความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ซึ่งขัดแย้งกับหลักการและมาตรฐานของการเรียนคณิตศาสตร์โรงเรียนของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกาเมื่อปี 2000 ได้กล่าวไว้ว่า ความสามารถในการแปลภาษาเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหา (Gagatsis* & Shiakalli, 2004) หลังจากได้ข้อมูลเบื้องต้นแล้วจึงทำการศึกษาแนวคิด ทฤษฎีทางการศึกษาคณิตศาสตร์ พบว่า แนวคิดที่จะสามารถส่งเสริมการแก้ปัญหาและใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยที่มีความสามารถต่ำและค่อนข้างต้องการความช่วยเหลือจากผู้อื่น คือ แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยนำหลักการสำคัญของแนวคิดทั้งสองนี้มาวิเคราะห์และบูรณาการให้เกิดเป็นหลักการของกระบวนการเรียนการสอน เชื่อมโยงหลักการดังกล่าวมาสู่ขั้นตอนการเรียนการสอน แล้ววิเคราะห์บทบาทครูและบทบาทนักเรียนในขั้นตอนการเรียนการสอนแต่ละขั้น กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นได้ผ่านการให้คำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษา แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไขก่อนจะนำไปตรวจสอบคุณภาพโดยผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาและให้คำแนะนำ แล้วนำผลการพิจารณาของผู้ทรงมาปรึกษากับอาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อปรับปรุงแก้ไขกระบวนการเรียนการสอน จากนั้นนำไปทดลองใช้เพื่อ

ตรวจสอบคุณภาพก่อนนำไปสอนจริง แล้วนำผลที่ได้มาปรับปรุงพัฒนากระบวนการเรียนการสอน กล่าวโดยสรุปแล้วจะเห็นได้ว่ากระบวนการเรียนการสอนนี้มีการดำเนินการอย่างเป็นระบบ

1.2. จุดเด่นของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีขั้นตอนการเรียนการสอน 5 ขั้นตอน ได้แก่ 1). การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ 2). การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง 3). การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง 4). ประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง 5). การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ โดยมีจุดเด่นที่แตกต่างจากกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติคือ

1). โจทย์ปัญหาที่นำเสนอนักเรียนเป็นปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริง(โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์) กระบวนการเรียนการสอนนี้จะนำเสนอปัญหาที่มีข้อมูลซับซ้อนหรืออาจจะให้ข้อมูลไม่สมบูรณ์ทำให้กระตุ้นความอยากรู้และท้าทายความคิดของนักเรียน นักเรียนต้องใช้ความพยายามที่ต้องนำประสบการณ์เดิมทั้งในชีวิตจริงและความรู้ทางคณิตศาสตร์มาบูรณาการในการวางแผนการในการแก้ไขปัญหา ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายสามารถเชื่อมโยงสิ่งที่นักเรียนเคยคิดว่าอยู่แต่ในห้องเรียนกับสิ่งที่เคยคิดว่าอยู่แต่นอกห้องเรียนสองสิ่งนี้เข้าด้วยกัน นอกจากนี้นักเรียนยังได้ตระหนักถึงประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้จริงในการดำเนินชีวิตประจำวัน

2). การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ฝึกให้นักเรียนแสดงออกความคิดเห็นของตนเองในการนำเสนอความคิดในการอภิปราย พร้อมทั้งส่งเสริมให้นักเรียนมีความมั่นใจ ในการกล้าคิดกล้าแสดงออก และฝึกทักษะการนำเสนออย่างสมเหตุสมผล นอกจากนี้ยังฝึกให้มีมารยาทและการเปิดใจให้กว้างในการรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น ทำให้นักเรียนได้ฝึกความสามารถในการรวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล ทำให้เกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งและหลากหลายแง่มุมมากขึ้น

3). การช่วยเหลือซึ่งกันและกัน กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ให้บทบาทกับนักเรียนบางคนได้เป็นผู้ช่วยนำเสนอความคิดตนเองให้กับผู้อื่น และให้บทบาทกับนักเรียนบางคนได้เป็นผู้รับการช่วยเหลือคอยรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นแล้วนำมาปรับใช้กับตัวเอง

4). การทบทวนตนเอง กระบวนการเรียนการสอนนี้ได้ให้นักเรียนได้ประเมินตนเองพร้อมทั้งสะท้อนคิดอย่างสมเหตุสมผล เพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนและตรวจสอบคำตอบที่ตนเองคิดได้นั้นเป็นไปได้หรือไม่ เมื่อนำกลับไปอ้างอิงกับสถานการณ์ในชีวิตจริงนั้นแล้วเหมาะสมกับบริบทหรือไม่ ทำให้นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและระมัดระวังมากขึ้น นอกจากนี้ยังได้พิจารณาถึงยุทธวิธีที่ใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหานั้นว่าเป็นวิธีการที่เหมาะสมหรือไม่ หากไม่

เหมาะสมควรปรับปรุงอย่างไรกับหารแก้ปัญหาในครั้งต่อ ๆ ไป ในอนาคต ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และพัฒนาตนเองอย่างต่อเนื่อง

5). การประยุกต์ใช้ความรู้ กระบวนการเรียนการสอนนี้เมื่อนักเรียนได้เรียนรู้การแก้ปัญหาจนประสบความสำเร็จแล้ว ก็ยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้ความคิดกับสถานการณ์ที่มีการต่อยอดจากสถานการณ์เดิม โดยได้มีการขยายความคิดและเกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการคิดต่อไป

6) การพัฒนาและท้าทายศักยภาพการจัดการเรียนการสอน กระบวนการเรียนการสอนนี้เมื่อครูได้นำไปใช้จัดการเรียนการสอน ครูได้พัฒนาและท้าทายศักยภาพตนเองตั้งแต่การเตรียมการสอนที่ต้องเตรียมปัญหา คำถามและประเด็นอภิปราย นอกจากนี้ขณะสอนยังต้องใช้ไหวพริบปฏิภาณในการช่วยเหลือนักเรียนให้เหมาะสมตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน แล้วจึงค่อยพิจารณาหาช่วงจังหวะเวลาที่เหมาะสมในการลดความช่วยเหลือลง ทำให้ครูต้องมีสติและสมาธิอยู่กับการจัดการเรียนการสอนตลอดระยะเวลาที่อยู่ในชั้นเรียน เพราะการเรียนการสอนตามกระบวนการเรียนการสอนนี้มีรายละเอียดมากกว่าการจัดการเรียนการสอนแบบปกติ

1.3. ความสอดคล้องของกระบวนการเรียนการสอนกับการส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีหลักการของกระบวนการเรียนการสอน 5 หลักการ ได้แก่ หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงและการเข้าใจปัญหา หลักการที่ 2 หลักการกำหนดเป้าหมายและการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง(real world)ไปยังโลกแห่งความคิด (conceptual world) หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์ หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิด หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งหลักการของกระบวนการเรียนการสอนมีจุดเน้นที่การจำลองทางความคิดจากการปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แล้วดำเนินการหาคำตอบของปัญหาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นโดยใช้กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และให้ความสำคัญในเรื่องการปฏิสัมพันธ์ทางสังคมในการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดเดิมของนักเรียนที่มีอยู่ให้เหมาะสมกับศักยภาพและระดับพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และค่อย ๆ ลดความช่วยเหลือลงเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองด้วยตนเองได้อย่างหลากหลาย ซึ่งหลักการดังกล่าวสอดคล้องกับ Blum and Niss (1991) ที่กล่าวว่าการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้กระบวนการของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นปัญหาที่น่าสนใจ ไม่เป็นปัญหาซ้ำซากและสามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังได้ฝึกให้นักเรียนได้แปลงจากสถานการณ์ในโลกของความจริงไปยังโลกของคณิตศาสตร์ โดยการจำลองสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปยังสิ่งที่เป็นนามธรรม (Kellner, Madachy, & Raffo, 1999)และการสร้างแบบจำลองยังช่วยให้นักเรียนเข้าใจโลกได้ดีขึ้น ช่วยสนับสนุนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (แรงจูงใจ, ความคิดรวบยอด, ความเข้าใจ, การรักษาไว้)·ช่วยพัฒนาสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย ช่วยพัฒนาทัศนคติที่เหมาะสม และช่วยในการนำเสนอภาพที่เหมาะทางคณิตศาสตร์(Blum & Ferri, 2009) ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนตามกระบวนการที่พัฒนาขึ้นนี้ ทำให้นักเรียนได้พัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจและนำเสนอความเข้าใจนั้นออกมาเป็นรูปธรรม สอดคล้องกับ Hiebert และ Wearne(1992 อ้างถึงใน Bolden, Barmby, & Harries, 2013) ที่กล่าวว่า การทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศทางคณิตศาสตร์นั้น ขึ้นอยู่กับการเป็นตัวแทนภายในของมโนทัศน์ซึ่งได้รับอิทธิพลจากการนำเสนอการเป็นตัวแทนภายนอกของมโนทัศน์นั้นต่อผู้เรียน และ Wood(1999 อ้างถึงใน Bolden et al., 2013) ยังกล่าวอีกว่าว่าการทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้นเกี่ยวข้องกับระบบของสัญลักษณ์หรือการเป็นตัวแทนนั่นเอง

นอกจากนี้การจัดการเรียนการสอนยังเน้นการพัฒนาการแก้ปัญหาและการเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์อย่างค่อยเป็นค่อยไปตามขั้นตอนของแนวคิดของการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยเป็นการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการณ์ล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด ซึ่งสอดคล้องกับ Slavin and Davis (2006) ที่กล่าวว่า การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นสิ่งที่จัดหามาเพื่อช่วยเหลือในบางสิ่งในระหว่างช่วงแรกของการเรียนรู้ ครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถรอบรู้ในมโนทัศน์นั้น ๆ หรือสามารถปฏิบัติภาระงานทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับมอบหมายให้เสร็จสิ้นได้ ซึ่งแต่เดิมเป็นสิ่งที่นักเรียนคนดังกล่าวไม่สามารถเข้าถึงได้ ครูจะค่อย ๆ ให้อิสระแก่นักเรียนในการสำรวจความสามารถและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Machmud, 2011) และการที่ครูคอยให้ความช่วยเหลือ และทิ้งระยะเวลาจนนักเรียนสามารถปฏิบัติงานได้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนค่อย ๆ ทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และได้พัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจนั้นด้วย

2. การอภิปรายคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน พบว่า 1) ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) พัฒนาการของความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการสูงขึ้น จากผลการวิจัยดังกล่าว กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสามารถส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากปัจจัยดังนี้

2.1 การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผลการศึกษาและเปรียบเทียบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการวิจัยครั้งนี้ แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างคะแนนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างเห็นได้ชัดเจน

ก่อนเรียน กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีพื้นฐานของความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 ทั้งการวิเคราะห์โดยภาพรวมและการวิเคราะห์จำแนกตามองค์ประกอบของการแก้ปัญหา นั่นคือ การวิเคราะห์ปัญหา การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ และการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวัดเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ซึ่งมีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้นและภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1) เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2) เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3) เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4) เรื่องการวัด โดยทำการเก็บข้อมูลฉบับก่อนเรียน ในช่วงเริ่มต้นภาคปลาย ของระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

หลังเรียน กลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยภาพรวม สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวัดเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน ซึ่งมีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหาที่เรียนในภาคปลาย ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ดังนี้ 1) เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว 2) เรื่องการแปรผัน โดยผลการวิเคราะห์สอดคล้องกับ Kingsdorf & Krawec (2014) และ

Krawec (2010) ที่ได้ระบุทักษะที่ส่งเสริมในการแก้ปัญหาแต่ละระยะของการแก้ปัญหาของ Mayer(1984) ดังนี้

ระยะที่ 1 ระยะการแปลโจทย์ (Translation phase) ทักษะที่ใช้ในระยะนี้ คือ นักเรียนสามารถระบุจำนวนที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา โดยนักเรียนต้องอ่านเพื่อทำความเข้าใจแล้วถอดความเป็นภาษาของตนเอง

ระยะที่ 2 ระยะการบูรณาการ (Integration phase) ทักษะที่ใช้ในระยะนี้ คือ นักเรียนสามารถพิจารณาได้ว่าจะใช้การดำเนินการใดในการแก้โจทย์ปัญหา โดยนักเรียนต้องใช้ความคิดพิจารณามองปัญหาให้เห็นเป็นภาพได้

ระยะที่ 3 การวางแผน (planning phase) ทักษะที่ใช้ในขั้นตอนคือ นักเรียนสามารถระบุได้ว่ามีกี่ขั้นตอนในการดำเนินการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยนักเรียนต้องตั้งสมมติฐานหรือวางแผนที่จะแก้ปัญหาและประเมินคำตอบที่สมเหตุสมผลในระหว่างการแก้ปัญหา

ระยะที่ 4 การลงมือทำ (Execution phase)ทักษะที่ใช้ในขั้นตอนคือ นักเรียนสามารถคำนวณและหาคำตอบที่สมบูรณ์ได้ โดยนักเรียนต้องคำนวณหรือดำเนินการทางคณิตศาสตร์และตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการทุกอย่างที่ผ่านมา

จะเห็นได้ว่าทักษะและพฤติกรรมที่กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้ได้ส่งเสริม ได้ครอบคลุมทักษะและพฤติกรรมที่ Kingsdorf & Krawec (2014) และ Krawec (2010) ได้กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว ดังนี้ การทำความเข้าใจปัญหาเพื่อการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การแปลงข้อมูลในโลกของความจริงเป็นข้อมูลในโลกของคณิตศาสตร์ ตามความถนัดของตนเองโดยใช้จินตนาการบูรณาการองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ประกอบกัน การคิดคำนวณจนได้มาซึ่งผลลัพธ์ การตรวจสอบคำตอบและทบทวนกระบวนการทำงานของตนเอง การประยุกต์ใช้ความรู้และการช่วยเหลือโดยการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนและครู

แต่เมื่อวิเคราะห์เปรียบเทียบเฉพาะคะแนนหลังเรียนจำแนกตามองค์ประกอบของการแก้ปัญหา ของทั้งสองกลุ่มพบว่า คะแนนเฉลี่ยขององค์ประกอบแรกของกลุ่มทดลองไม่สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 ซึ่งเมื่อพิจารณาจากค่าเฉลี่ยในแต่ละองค์ประกอบของกลุ่มทดลองนั้นสูงกว่ากลุ่มควบคุมเพียงเล็กน้อยเท่านั้น นั่นคือ ในองค์ประกอบ การวิเคราะห์ปัญหาและ การบูรณาการความรู้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของจิรายุส สมานมิตร (2555) ที่ทำการศึกษาปัจจัย 5 ปัจจัย ได้แก่ ความวิตกกังวลในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ การรับรู้ความสามารถของตนเองในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความถนัดทางการเรียนด้านภาษา ความถนัดทางการเรียนด้านเหตุผล และทักษะการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาใน ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นการวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นการดำเนินการตามแผน และขั้นการตรวจสอบผล พบว่า ในขั้นการทำความเข้าใจปัญหาและขั้นการวางแผนการแก้ปัญหานั้นมีปัจจัยจาก 3 ใน 5 ปัจจัย

ที่ส่งผลกระทบ ส่วนขั้นตอนการดำเนินการตามแผน และขั้นการตรวจสอบผลนั้นมีปัจจัยเพียง 2 ใน 5 ปัจจัยที่ส่งผลกระทบ ที่ระดับนัยสำคัญ .01 จะเห็นได้ชัดเจนว่าการพัฒนาองค์ประกอบของความสามารถในการแก้ปัญหาใน องค์ประกอบการวิเคราะห์ปัญหา และ การบูรณาการความรู้นั้นต้องใช้ปัจจัยหลายด้านมากกว่าในองค์ประกอบ การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

และในองค์ประกอบหลังสององค์ประกอบ นั่นคือ การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ และการตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิดนั้น พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียนในองค์ประกอบดังกล่าวของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 เพราะกลุ่มทดลองได้ฝึก ได้รับการช่วยเหลือ ได้รับกระบวนการที่ค่อยเป็นค่อยไป สอดคล้องกับ Cai and Lester (2010) ซึ่งกล่าวว่าการที่จะช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาครูต้องยอมรับว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนเป็นสิ่งที่ค่อย ๆ พัฒนาอย่างช้า ๆ ต้องการเวลาระยะยาวค่อย ๆ ทำโดยการนำเอาประสบการณ์เดิมทั้งในชีวิตจริงและความรู้ทางคณิตศาสตร์มาบูรณาการในการวางแผนการในการแก้ไขปัญหาเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และมีการช่วยเหลือโดยการเสริมต่อการเรียนรู้ตามพื้นฐานและศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ทำให้นักเรียนสามารถดำเนินการแก้ปัญหาตามที่ได้วางแผนไว้ได้ สามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้อง สามารถทบทวนตนเองและสะท้อนคิดกระบวนการทำงานได้ด้วยตนเอง และมีความละเอียดรอบคอบและใช้เป็นเหตุเป็นผลในการแก้ปัญหาจนสำเร็จลุล่วง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.2. การอภิปรายเกี่ยวกับผลการเปรียบเทียบความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ผลการศึกษาและเปรียบเทียบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการวิจัยครั้งนี้ แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างการเพิ่มขึ้นของคะแนนการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมนั้นมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดเจน

ก่อนเรียน กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีพื้นฐานของความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 ทั้งการวิเคราะห์โดยภาพรวมและการวิเคราะห์จำแนกตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ และการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวัดเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ซึ่งมีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น และ ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1) เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2) เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3) เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4) เรื่องการวัด ก่อนที่จะดำเนินการทดลองในช่วงภาคปลายจนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

หลังเรียน กลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวัดเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน เป็นฉบับคู่ขนานกับฉบับก่อนเรียน ทั้งการวิเคราะห์โดยภาพรวมและการวิเคราะห์จำแนกตามองค์ประกอบของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นนี้เน้นการฝึกให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจและแสดงความเข้าใจที่ได้นั้นออกมาเป็นรูปธรรม สอดคล้องกับ Lesh, Landau, and Hamilton (1983) ที่ให้คำจำกัดความมโนทัศน์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแปลหรือการแปลงระหว่างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้ในหลากหลายรูปแบบ ดังนั้นเมื่อนักเรียนเกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งและได้ทบทวนความเข้าใจก่อนจะนำเสนอ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีความหมายและได้ฝึกการแสดงความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์หรือการใช้ตัวแทนอย่าง

ต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องกับ Turker et al. (2010 อ้างถึงใน Been, A. L., 2016)) มองว่า การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนและครูสามารถพัฒนาการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะหาแนวทางการแก้ปัญหาที่เราเจอในชีวิต และ Kaput(2002) ที่กล่าวว่าการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ถูกพิจารณาได้ว่าเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจและใช้ในการสื่อสารข้อมูลและแสดงความเข้าใจ

วิเคราะห์ความเชื่อมโยงของกระบวนการเรียนการสอนที่นำไปสู่ความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

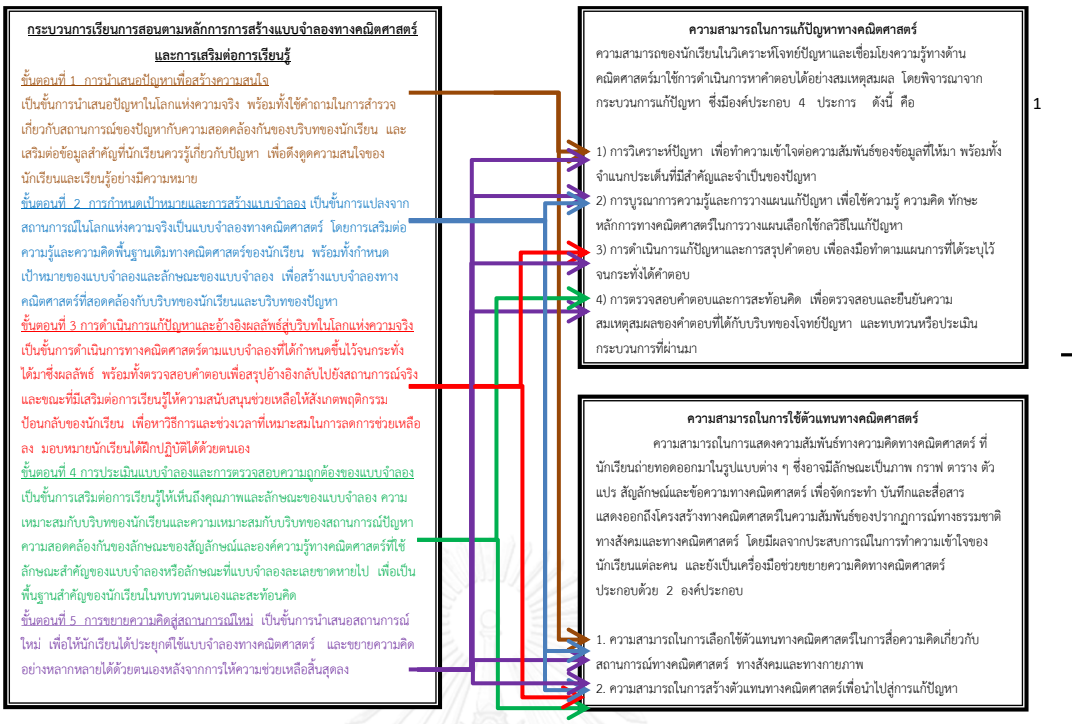
ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ นำไปสู่การวิเคราะห์ปัญหาและความสามารถในการเลือกตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง นำไปสู่การวิเคราะห์ปัญหา การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด ความสามารถในการเลือกตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ และความสามารถในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง นำไปสู่การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ และความสามารถในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง นำไปสู่ การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิดและความสามารถในการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

แสดงรายละเอียดในภาพที่ 19



ภาพที่ 19 ความเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

จากผลการวิจัยครั้งนี้มีข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ ดังนี้

1.1. เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนในการวิจัยครั้งนี้ เน้นการพัฒนาการคิดจากรูปธรรมไปสู่นามธรรมจากปัญหาในชีวิตจริงที่มีความซับซ้อนไปสู่ปัญหาคณิตศาสตร์ในห้องเรียน ดังนั้น ครูจึงต้องมีความมุ่งมั่นและทุ่มเทในการคัดเลือกโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์เสมือนชีวิตจริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจและเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย

1.2. เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนในการวิจัยครั้งนี้ มุ่งพัฒนาการแก้ปัญหาซึ่งเป็นเป้าหมายหลักของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริงและการใช้ตัวแทนซึ่งเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์มากขึ้น ดังนั้น ครูควรมีความเข้าใจต่อความหลากหลายของพื้นฐานของความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน และมีความอดทนในช่วงแรกของการจัดกระบวนการเรียนการสอนและพร้อมที่จะช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน เพราะในช่วงแรกนักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับกระบวนการเรียนการสอนนี้ ทำให้ต้องใช้เวลา แต่เมื่อระยะเวลาผ่านไปสักช่วงหนึ่ง นักเรียนจะมีการปรับตัวและสามารถพัฒนาการการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น

1.3. เนื่องจากกระบวนการเรียนการสอนในงานวิจัยครั้งนี้ เน้นให้นักเรียนที่มีความสามารถน้อยกว่าได้รับช่วยเหลือจากครูหรือนักเรียนที่มีความสามารถมากกว่าผ่านการกระบวนการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การอภิปรายและการนำเสนอ ดังนั้นครูควรสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ท้าทายความคิด ช่วยให้นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็น มีความมั่นใจในตนเองในการแสดงเหตุผล

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งถัดไป

2.1. จากผลการวิจัยพบว่า หลังเรียนคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเมื่อจำแนกตามองค์ประกอบแล้วของกลุ่มทดลองไม่แตกต่างจากกลุ่มควบคุมในบางองค์ประกอบ และจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องมีปัจจัยอื่นที่มีผลต่อองค์ประกอบดังกล่าว ดังนั้น ในการวิจัยครั้งถัดไป ควรนำปัจจัยดังกล่าวมาบูรณาการกับการจัดการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น แล้วพัฒนาเป็นกระบวนการเรียนการสอนที่มีศักยภาพในการพัฒนาองค์ประกอบการแก้ปัญหาได้ทุกองค์ประกอบ

2.2. จากผลการวิจัยพบว่า หลังจากนักเรียนได้เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ทำให้การ

แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงขึ้นมาก ซึ่งเป็นผลดีจึงควรสำรวจความคิดเห็นของทั้งครูและนักเรียนต่อกระบวนการเรียนการสอนเพื่อปรับปรุงและต่อยอดต่อไป

2.3. ควรมีการศึกษาผลของการใช้กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ที่มีผลต่อทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านอื่น ๆ เช่น ความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ ความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการเชื่อมโยง

2.4. เนื่องจากระดับการการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์นั้นมีหลากหลายระดับ (NCTM,1996) ดังนั้นควรพัฒนากระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

เทพสุดา เกตุทอง (2551). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรี: 2551.

เมตตา มาเวียง. (2544). การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมบัติของจำนวนนับของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น: [ขอนแก่น] : วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2544.

โครงการ PISA ประเทศไทย. (2556). ผลการประเมิน *PISA* 2012 คณิตศาสตร์ การอ่าน และวิทยาศาสตร์ บทสรุปสำหรับผู้บริหาร: กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2556.

โครงการ PISAประเทศไทย. (2554). ตัวอย่าง ข้อสอบ การ ประเมิน ผล นานาชาติ PISA และ TIMSS: วิทยาศาสตร์.

โครงการPISAประเทศไทย. (2554). ผลการประเมิน PISA 2009 การอ่านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์: บทสรุปเพื่อการบริหาร.

โศจิวัจน์ เสริฐศรี. (2553). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา: 2553.

ไชยพร พิมพ์มะสอน. (2554). การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้สื่อการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์: [ขอนแก่น] : วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2555.

ไพศาล ศรีสวัสดิ์. (2554). การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนโดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์. (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยทักษิณ

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ. (2544). กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กรณีศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

กรมวิชาการ, ก. (2545). หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544: กรุงเทพฯ : กรม, 2545.

พิมพ์ครั้งที่ 2.

กรรณิการ์ ปวนกาศ. (2543). การใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมนเพื่อวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมการกำลังสองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนปานวิทยาจังหวัดลำปาง. (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

จันทร์ศรี จันทร์คำ. (2544). การสอนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมทักษะการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวันของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

จิตติมา คงเมือง. (2553). การส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการวาดแบบจำลองของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6= *Fostering abilities to solve mathematical wors problems using the model method of prathom suksa 6 students.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

จิตอารีย์ ปัญญาแจ้งสกุล. (2544). ความสัมพันธ์ระหว่างทักษะทางคณิตศาสตร์สมรรถภาพทางจำนวนสมรรถภาพทางภาษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์และความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1 จังหวัดนครราชสีมา. . (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

จิรายุส สมานมิตร. (2555). การศึกษาปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สังกัด สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษานครปฐมเขต 1. (ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ชมพู สีสัน. (2551). การใช้รูปแบบการนำเสนอเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลายในกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 วิทยาลัยการอาชีพศีขรภูมิ จังหวัดสุรินทร์: [ขอนแก่น] : วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2551.

ชมพูนุท ชาวบ้านเกาะ. (2555). ผลการจัดกิจกรรมการ รียนรู้ โดยใช้ตัวแทน (*Representation)* ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.

ชลธิชา ใจพนัส และ อรอุมา เจริญสุข. (2556). ปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ฉบับ ภาษา ไทย สาขา มนุษยศาสตร์ สังคมศาสตร์ และ ศิลปะ และ ฉบับ *International Humanities, Social Sciences and arts,* 6(3), 286-304.

ทิศนา แขมมณี. (2545). ศาสตร์การสอน : องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ: กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

พิมพ์ครั้งที่ 1.

ทิศนา แขมมณี. (2544). วิทยาการด้านการคิด: กรุงเทพฯ : สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ, 2544.

พิมพ์ครั้งที่ 1.

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (*Mathematical Modeling.)* คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏนครปฐม.

ปนัดดา สังข์ศรีแก้ว. (2552). การวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนนับของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมน. มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

พรรณทิภา ทองนวล. (2555). ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความ สามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.

พินิจ ศรีจันทร์ดี. (2530). องค์ประกอบบางประการที่สัมพันธ์ต่อผลสัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหง. .

วัฒนิตา นำแสงวานิช. (2539). ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที 1 โดยการใช้แบบฝึกทักษะ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ศึกษาธิการ, ก. (2550). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. โรงพิมพ์: คุรุสภาลาดพร้าว.: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ศึกษาธิการ, ก. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551: กระทรวงศึกษาธิการ.

สสวท. (ม.ป.ป.). การแก้โจทย์ปัญหา. from สาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สาวิตรี มูลสุวรรณ. (2557). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2: 2557.

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, ก. (2553). แผนการศึกษาแห่งชาติ ฉบับปรับปรุง (พ.ศ. 2552-2559): กรุงเทพฯ : สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2553.

พิมพ์ครั้งที่ 1.

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, ก. (2557). สภาวการณ์การศึกษาไทยในเวทีโลก ปี2557. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิก.

สุจินดา เอี่ยมโอภาส. (2552). ผลการใช้ชุดการเรียน "*Learning Mathematics Through English*" ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน (*representation)* เรื่อง ความน่าจะเป็น ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนสายคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุพัตรา จอมคำสิงห์. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างงานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3: 2552.

สุรางค์ โค้วตระกูล. (2536). จิตวิทยาการศึกษา: กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536

พิมพ์ครั้งที่ 2.

อภิชญา ลือชัย. (2555). การวิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1: 2555.

อรชร ภูบุญเดิม. (2550). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (*Representation).* (วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

อัมพร ม้าคนอง. (2536). การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย : รายงานการวิจัย.

ภาษาอังกฤษ

Adams, S., Ellis, L., & Beeson, B. F. (1977). *Teaching mathematics: with emphasis on the diagnostic approach*: HarperCollins Publishers.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education,* 33(2), 131-152.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction,* 16(3), 183-198.

Alibali, M. (2006). Does visual scaffolding facilitate students' mathematics learning. *Evidence from early algebra. Retrieved September,* 12, 2008.

Arends, R. (2014). *Learning to teach*: McGraw-Hill Higher Education.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Asmara, A. (2014). *Mathematical Representation Ability And Self Confidence Students Through Realistic Mathematics Approach.* Paper presented at the International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics Education.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* Michigan State University.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education,* 59(5), 389-407.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2007). *How can we assess mathematical understanding.* Paper presented at the Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application,* 1(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical Modelling (ICTMA* 12): *Education, Engineering and Economics, Chichester, Horwood Publishing*, 222-231.

Blum , W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in Mathematics,* 22(1), 37-68.

Bolden, D., Barmby, P., & Harries, T. (2013). A representational approach to developing primary ITT students' confidence in their mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology,* 44(1), 70-83.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. *Mathematical Modelling* (*ICTMA* 12): *Education, Engineering and Economics, Chichester, Horwood Publishing*, 260-270.

Brodesky, A., Caroline, P., Elizabeth, M., & Lauren, K. (2002, 18/4/2015). Accessibility strategies for mathematics. *Education Development Center.*

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National Council of Teachers of Mathematics*, 1-6.

Cezikturk, O. (2003). *The effect of interactive diagrams on secondary students' understandings of selected mathematical representations based onvan Hiele theory and representation theory.* (3098300 Ph.D.), State University of New York at Albany, Ann Arbor. ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Cifarelli, V. V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 239-264.

Clark, K. F., & Graves, M. F. (2005). Scaffolding students' comprehension of text. *The Reading Teacher,* 58(6), 570-580.

Cruikshank, D. E., & Sheffield, L. J. (1992). *Teaching and learning elementary and middle school mathematics*: Prentice Hall.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*: Greenwood Publishing Group.

Deming, W. E., & Renmei, N. K. G. (1952). *Elementary Principles of the Statistical Control of Quality: A Series of Lectures*: Nippon Kagaku Gijutsu Remmei.

Dobson, D. C. (2003). Mathematical Modelling Lecture Notes.

Dym, C. L. (2004). *Principles of mathematical modeling*: Academic press.

Dym, C. L., Ivey, E. S., & Stewart, M. B. (1980). PrinciplesofMathematicalModeling. *American Journal of Physics,* 48(11), 994-995.

Eggen, P. D., & Kauchak, D. P. (2007). *Educational psychology: Windows on classrooms*: Prentice Hall.

Ellis, E., & Larkin, M. (1998). Strategic instruction for adolescents with learning disabilities. *Learning about learning disabilities,* 2, 585-656.

English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem Posing and Solving with Mathematical Modeling. *Teaching Children Mathematics,* 12(3), 156.

English, L. D., & Lesh, R. A. (2003). Ends-in-view problems *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 297-316): Lawrence Erlbaum Associates.

Eseryel, D., Ifenthaler, D., & Ge, X. (2011). Alternative assessment strategies for complex problem solving in game-based learning environments *Multiple*

perspectives on problem solving and learning in the digital age (pp. 159-178): Springer.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 105-121.

Fisher, R. (1987). *Problem solving in primary schools*: Basil Blackwell.

Gagatsis, A., Elia, E., & Kyriakides, L. (2003). *The nature of multiple representations in developing mathematical relationships.* Paper presented at the PME CONFERENCE.

Gagatsis*, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology,* 24(5), 645-657.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM,* 38(2), 143-162.

Garofalo , J., & Lester Jr , F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*, 163-176.

Ge, X., & Land, S. M. (2003). Scaffolding students' problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development,* 51(1), 21-38.

Gerofsky, S. (2010). The impossibility of 'real-life'word problems (according to Bakhtin, Lacan, Zizek and Baudrillard). *Discourse: Studies in the Cultural Politics of Education,* 31(1), 61-73.

Giordano, F. R., Weir, M. D., & Fox, W. P. (2003). Mathematical modeling. *Thomson-Brookes/Cole*.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics,* 2001, 1-23.

Goldin , G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 137-165.

Good, C. V., & Merkel, W. R. (1959). *Dictionary of education* (Vol. 553): McGraw-Hill New York.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan,* 78(5), 361.

Harries, T., & Barmby, P. (2011). *The importance of using representations to help primary pupils give meaning to numerical concepts*: HTW Dresden.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology,* 91(4), 684.

Henderson, K. B., & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. *The learning of mathematics: Its theory and practice*, 228-270.

Henning, H., & Keune, M. (2007). Levels of Modelling Competencies. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The* 14*th ICMI Study* (pp. 225-232). Boston, MA: Springer US.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding.

Hodgson, T. (1995). Secondary mathematics modeling: Issues and challenges. *School Science and Mathematics,* 95(7), 351-358.

Holton, D., & Clarke, D. (2006). Scaffolding and metacognition. *International journal of mathematical education in science and technology,* 37(2), 127-143.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple representation skills and creativity effects on mathematical problem solving using a multimedia whiteboard system. *Journal of Educational Technology & Society,* 10(2), 191-212.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics,* 27, 32.

Joyce, B., & Weil, M. (1996). *Models of teaching*.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2006). Vorstellungen über Mathematik und ihre Bedeutung für die Behandlung von Realitätsbezügen. *Realitätsnaher Mathematikunterricht vom Fach aus und für die Praxis*, 83-94.

Kang, N., & Noh, J. (2012). *Teaching Mathematical Modeling in School Mathematics.* Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul.

Kaput, J. J. (2002). Notations and representations as mediators of constructive processes *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74): Springer.

Kellner, M. I., Madachy, R. J., & Raffo, D. M. (1999). Software process simulation modeling: Why? what? how? *Journal of Systems and Software,* 46(2), 91-105.

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error Analysis of Mathematical Word Problem Solving Across Students with and without Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice,* 29(2), 66-74.

Krawec, J. L. (2010). *Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability.* (3424773 Ph.D.), University of Miami, Ann Arbor. ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Krulik, S., & Reys, R. E. (1980). *Problem solving in school mathematics:* 1980 *yearbook*: National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*: Allyn and Bacon.

Larson, C., Harel, G., Oehrtman, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., Speiser, R., & Walter, C. (2010). Modeling perspectives in math education research *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 61-71): Springer.

Laterell, C. M. (2000). What Is Problem-solving Ability?

Leong, K. E. (2013). Mathematical Modelling in the Malaysian Secondary Curriculum. *Browser Download This Paper*.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. *Applied mathematical problem solving*, 111-180.

Lesh, R., & Landau, M. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 263-343.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 33-40.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 2, 763-804.

Lesh , R. A., & Doerr , H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*: Routledge.

Lester, F. K. (1977). Ideas About Problem Solving: A Look at Some Psychological Research. *Arithmetic Teacher,* 25(2), 12-14.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education,* 25(6), 660-675.

Lina, W., Ling, C., & Cui, K. (2011). *SET: A Conceptual Framework for Designing Scaffolds in Support of Mathematics Problem Solving in One-to-One Learning Environment.* Paper presented at the International Conference on Information and Management Engineering.

Links, N. G. (2008). TA Connections Newsletter-Fall 2008.

Llinares, S., & Roig, A. I. (2008). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International journal of science and mathematics education,* 6(3), 505-532.

Lubinski, C. A., & Otto, A. D. (2002). Meaningful mathematical representations and early algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics,* 9(2), 76.

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM,* 38(2), 113-142.

Machmud, T. (2011). *Scaffolding Strategy In Mathematics Learning.* Paper presented at the Proceeding International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education.

Meyer, W. J. (2012). *Concepts of mathematical modeling*: Courier Corporation.

Mousoulides, N. G., Christou, C., & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning,* 10(3), 293-304.

NCTM, N. (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the l980s*: Natl Council of Teachers of.

NCTM, N. (2000a). Accessibility strategies for mathematics *Principles and standards for school Mathematics* (pp. 12).

NCTM, N. (2000b). Principles and standards for school mathematics: National Council of Teachers of Mathematics Reston, VA.

Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.* Paper presented at the 3rd Mediterranean conference on mathematical education.

Oswalt, S. (2012). *Mathematical Modeling in the High School Classroom.* Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Natural Sciences in The Interdepartmental Program in Natural Sciences by Selena Oswalt BS, Mississippi State University.

Özdemir, E., & Üzel, D. (2012). Student Opinions On Teaching Based On Mathematical Modelling. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 55, 1207-1214.

Paivio, A. (1969). Mental imagery in associative learning and memory. *Psychological review,* 76(3), 241.

Polya, G. (1957a). *How to Solve it: A New Aspects of Mathematical Methods*: Prentice University Press.

Polya, G. (1957b). How to Solve It: a new mathematical method: New York: Doubleday.

Reigeluth, C. M. (2013). *Instructional design theories and models: An overview of their current status*: Routledge.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction,* 7(4), 309-327.

Reys, R. E., Lindquist, M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2014). *Helping children learn mathematics*: John Wiley & Sons.

Rider, R. (2007). Shifting from Traditional to Nontraditional Teaching Practices Using Multiple Representations. *Mathematics Teacher,* 100(7), 494-500.

Rosenshine, B., & Meister, C. (1992). The use of scaffolds for teaching higher-level cognitive strategies. *Educational leadership,* 49(7), 26-33.

Sajadi, M., Amiripour, P., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2013). The Examining mathematical word problems solving ability under efficient representation aspect. *Mathematics Education Trends and Research,* 2013, 1-11.

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational studies in Mathematics,* 79(2), 215-237.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 4-14.

Slavin, R. E., & Davis, N. (2006). Educational psychology: Theory and practice.

Steimann, F. (2000). On the representation of roles in object-oriented and conceptual modelling. *Data & Knowledge Engineering,* 35(1), 83-106.

Stillman, G. (2012). *Applications and modelling research in secondary classrooms: what have we learnt.* Paper presented at the Pre-proceedings of ICME12, The 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. *Mathematics: Essential research, essential practice,* 2, 688-697.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*: ERIC.

Szetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational leadership,* 49(8), 42-45.

Tedy, M. (2011). *Scaffolding Strategy In Mathematics Learning.* Paper presented at the PROCEEDINGS International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education.

Thomas, V. L. (2004). *A model for professional development with a strategy for improving mathematics problem solving performance*.

Thompson, D. R., & Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematical literacy. *Reading & Writing Quarterly,* 23(2), 179-196.

CHULALONGKORN UNIVERSITY

Uzun, S. Ç., & Arslan, S. (2009). Semiotic representations skills of prospective elementary teachers related to mathematical concepts. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 1(1), 741-745.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction,* 7(4), 339-359.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children,* 23(3), 34-41.

Wethall, N. (2011). The Impact of Mathematical Modeling on Student Learning and Attitudes.

White, A. (2000). Mathematical modelling and the general mathematics syllabus. *Curriculum Support for Teaching in Mathematics,* 5(3), 7-12.

Winn, W. (1993). Instructional design and situated learning: Paradox or partnership. *Educational Technology,* 33(3), 16-21.

Wu, M. (2009). *A critical comparison of the contents of PISA and TIMSS mathematics assessments.* Paper presented at the NCES "What we can learn from PISA" research conference held on June.

Zanzali, N. A. A., & NAM, L. (1999). Evaluating the levels of problem solving abilities in mathematics.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ก
กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

ความเป็นมาของกระบวนการเรียนการสอน

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ. 1980 : Problem solving in school Mathematics ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (ศึกษาธิการ, 2550) ซึ่งสอดคล้องกับเป้าหมายหลักของคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา คือ เพื่อให้นักเรียนมีความรู้และมีเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการกำหนดวิธีการในการแก้ปัญหาในระดับที่สูงเกินกว่าการศึกษาของเขา โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาควรจะมีโอกาสในการทดลองสร้างและปรับปรุงปัญหาเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริง เพราะปัญหาที่เกิดขึ้นในโลกแห่งความจริงนั้นมักประกอบด้วยองค์ประกอบที่ไม่เป็นระเบียบ ไม่สมบูรณ์ (NCTM, 2000b) แม้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาจะเป็นความสามารถที่มีความจำเป็นในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่จากผลการผลการประเมิน PISA (Programme for International Student Assessment) และ TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) ยังคงแสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ศึกษาในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานยังคงมีความสามารถในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับที่ไม่น่าพึงพอใจนัก เห็นได้จากจากผลการประเมินการศึกษาระดับนานาชาติ พบว่าผลการประเมิน PISA จากผู้ที่จบการศึกษาภาคบังคับหรือกลุ่ม อายุ 15 ปี (สกศ.,2553) มีผลการประเมินต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติทุกครั้ง และตั้งแต่ครั้งแรก PISA 2000 จนถึง PISA 2012 พบว่า ในสามด้านที่ประเมิน ด้านวิทยาศาสตร์กับการอ่านมีแนวโน้มสูงขึ้น แต่คณิตศาสตร์ยังคงมีแนวโน้มลดต่ำลงกว่าใน PISA 2000 การเพิ่มขึ้นของคณิตศาสตร์มีขึ้นเฉพาะช่วง PISA 2009 ถึง PISA 2012 เท่านั้น และที่สำคัญคณิตศาสตร์มีคะแนนต่ำที่สุดในบรรดาสามด้านที่ประเมิน ซึ่งในปี 2012 ปรากฏว่านักเรียนไทยมีคะแนน 427 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติ (OECD) 494 คะแนน นักเรียนไทยที่รู้คณิตศาสตร์ไม่ถึงระดับพื้นฐานแม้จะมีสัดส่วนลดลงจากPISA 2009 บ้าง แต่ก็ลดลงเพียงเล็กน้อย กล่าวคือ ลดลงจากร้อยละ 53 เป็นร้อยละ 50 ซึ่งยังคงเป็นสัดส่วนที่สูงไป เพราะมีมากกว่าค่าเฉลี่ยOECD เกินเท่าตัว สัดส่วนนักเรียนที่มีความรู้และทักษะคณิตศาสตร์ไม่ถึง

ระดับพื้นฐานหรือระดับต่ำสุดที่ควรจะมี ซึ่งเป็นตัวเลขที่ระบบการศึกษาโดยทั่วไปให้ความสำคัญมาก เพราะชี้นัยถึงศักยภาพของพลเมืองในอนาคต(โครงการ PISA ประเทศไทย, 2556; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557)

นอกจากนี้ผลการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติ พ.ศ. 2554 (TIMSS 2011) ซึ่งเป็นโครงการที่สมาคมนานาชาติเพื่อประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้น ม.2 ในวิชาคณิตศาสตร์และ วิทยาศาสตร์ จัดโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ร่วมมือกับสมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (International Association for the Evaluation of Educational Achievement; IEA) พบว่าประเทศไทยมีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์เป็น 427 คะแนน ซึ่งคะแนนเฉลี่ยของนานาชาติมีค่าเป็น 500 คะแนน ประเทศไทยจัดอยู่ในลำดับที่ 28 จากประเทศที่เข้าร่วมโครงการ 45 ประเทศในระดับชั้นมัธยมศึกษา จึงถือว่าอยู่ในระดับต่ำ (Low International Benchmark) ทั้งด้านเนื้อหาและด้านพฤติกรรมการเรียนรู้และยังต่ำกว่าค่ากลางของการประเมินอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ และมีแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยลดลงอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน (โครงการ PISAประเทศไทย, 2554; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2557)

จากรายงานผลการประเมินดังกล่าวเห็นได้อย่างชัดเจนว่าผลของการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยมีคุณภาพต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของนานาชาติอย่างต่อเนื่องโดยเฉพาะทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะสำคัญที่คนไทยมีอยู่ในระดับต่ำ (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์และคณะ, 2544) สอดคล้องกับผลงานวิจัยของชลธิชา ใจพนัส และ อรอุมา เจริญสุข (2556) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัจจัยบางประการที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พบว่าตัวแปรปัจจัยที่มีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มากที่สุดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 คือ ความสามารถในการเปลี่ยนภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ อัมพร ม้าคนอง (2536) ที่ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยฝ่ายมัธยม พบว่าความถี่ของข้อผิดพลาดด้านการตีความโจทย์นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนการนำข้อมูลมาใช้ผิดมากที่สุด และรองลงมา คือการแปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยค

สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ วัฒนิตา นำแสงวานิช (2539) ที่ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม โดยการใช้แบบฝึกทักษะพบว่าข้อบกพร่องหนึ่งที่พบคือการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์

จะเห็นได้ว่าจากผลของกลุ่มงานวิจัยข้างต้นย้อนหลังไปเกือบสองทศวรรษที่ผ่านมา พบว่าการแปลความหมายโจทย์ การตีความและการเปลี่ยนจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ยังคงเป็นอุปสรรคต่อการแก้ปัญหาของเด็กนักเรียนไทย เพราะว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ต้องมีการฝึกฝนให้เกิดเป็นทักษะและเป็นวิชาที่ต้องการพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นประกอบการเรียนมโนทัศน์ในขั้นสูงขึ้น ดังนั้นถ้าความรู้พื้นฐานดีจะมีผลต่อการเรียนในระดับต่อไปด้วย เพราะเรื่องราวต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหานั้นต้องใช้ความรู้ ความเข้าใจของความหมายของคำหรือข้อความที่เป็นภาษาไทย ดังนั้นถ้าเข้าใจภาษาไทยได้ดี ก็น่าจะตีปัญหาโจทย์หรือเข้าใจความหมายของคำถามได้ดีจึงจะทำคะแนนได้ดี (พินิจ ศรีจันทร์ดี, 2530) สอดคล้องกับงานวิจัยของ Cifarelli (1998) ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแปลและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Duval (1987 cite in Gagatsis* & Shiakalli, 2004) ได้ให้นิยามของการตีความหรือการแปลโจทย์ปัญหาว่าเป็นความเข้าใจความหมายของมโนทัศน์และระบุความหมายที่เท่าเทียบกันของการใช้ตัวแทน (representation) นอกจากการใช้ตัวแทนจะมีความสำคัญต่อครูแล้ว การใช้ตัวแทนยังมีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เป้าหมายทางการศึกษาที่สำคัญหนึ่งคือเพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้รูปแบบต่าง ๆ ของการใช้ตัวแทนในการสื่อสารกับผู้อื่น (Greeno & Hall, 1997) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง บทบาทของการใช้ตัวแทนที่ใช้ในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์แบบนามธรรมให้กลายเป็นประสบการณ์ที่สามารถจับต้องได้ของนักเรียน (Harries & Barmby, 2011) และ การใช้ตัวแทนยังสนับสนุนความจำที่ใช้งานอยู่ของนักเรียน (Paivio, 1969)

ถึงแม้ว่าโครงสร้างการแก้ปัญหาความจริงแล้วยังไม่ชัดเจนนัก แต่คนทั่วไปกล่าวว่าการแก้ปัญหาโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต้องการสองสิ่ง คือ การตีความโจทย์ (interpretation) และการวิเคราะห์โจทย์ (analysis) ซึ่งทั้งสองสิ่งนี้อาจจะมีขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอนก็ได้ แต่ต้อง

สามารถระบุได้ว่าสิ่งใดเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหาบางโจทย์อาจจะมีทั้งข้อมูลที่เกี่ยวข้องและข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง (เพื่อเบนความสนใจไปทางอื่น) โดย Mayer (1985 อ้างถึงใน Kingsdorf and Krawec (2014)) ได้เสนอแนวทางการแบ่งระยะของการแก้โจทย์ปัญหาไว้เป็น 4 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 ระยะการแปลโจทย์ (translation phase) ระยะที่ 2 ระยะการบูรณาการ (integration phase)

ระยะที่ 3 ระยะการวางแผน (planning phase) ระยะที่ 4 ระยะการดำเนินการ (execution phase)

จากผลของงานวิจัยที่ได้รวบรวมมาข้างต้นพบว่าระยะที่เป็นอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนไทยเริ่มต้นตั้งแต่ระยะที่ 1 ที่นักเรียนไม่สามารถแปลโจทย์ได้ ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจในสิ่งที่โจทย์ถามหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ดังนั้นจึงไม่สามารถเข้าสู่ระยะที่ 2 ที่เป็นการบูรณาการองค์ความรู้ มโนทัศน์และทักษะกระบวนทางคณิตศาสตร์ที่มีเพื่อเลือกใช้ยุทธวิธีในการดำเนินการได้ และไม่สามารถระบุขั้นตอนวางแผนวิธีการดำเนินการที่เลือกไว้จากขั้นตอนที่ 2 ไปสู่ระยะที่ 3 ได้ และท้ายที่สุดนักเรียนก็ไม่สามารถลงมือแก้ปัญหาได้จริงในระยะที่ 4 ทำให้นักเรียนไม่สามารถดำเนินการตั้งแต่ระยะที่ 1 ถึงระยะที่ 4 ได้อย่างลุล่วงสมบูรณ์ ในที่สุดนักเรียนจึงไม่ประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา ซึ่งจากระยะที่ 1 และระยะที่ 2 เป็นระยะที่มีความสำคัญมาก เพราะนอกจากจะเป็นระยะเริ่มต้นแล้วยังประกอบด้วยการแปลโจทย์และการพิจารณาเลือกใช้วิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ หากเกิดอุปสรรคขึ้นในระยะนี้ก็จะทำให้นักเรียนดำเนินการต่อเนื่องไปยังระยะอื่นไม่ได้ ดังนั้นเราจึงควรให้ความสนใจในการพัฒนากระบวนการเรียนการเรียนที่ส่งเสริมความเข้าใจของนักเรียนในการแปลจากโจทย์ปัญหาไปสู่ประโยคสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เพื่อนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จได้อย่างสมบูรณ์

English and Lesh (2003) กล่าวว่าการสอนคณิตศาสตร์โดยครูนั้นเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง โดยผ่านกระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อดำเนินการแก้ปัญหานั้นจะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจปัญหาและสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าการสอนแก้ปัญหาจากโจทย์ปัญหาแบบปกติ

เนื่องจากนักเรียนแต่ละคนมีความแตกต่างระหว่างบริบทของแต่ละบุคคลและมีประสบการณ์เดิมที่ส่งผลขอบเขตการเรียนรู้ที่จำกัด ทำให้ความแตกต่างเหล่านี้มีผลต่อความยากง่ายต่อการทำ

ความเข้าใจโจทย์ปัญหา การตีความ การแปล การสื่อสารความคิดออกมาเป็นตัวแทนคณิตศาสตร์ และท้ายที่สุดยังต่อเนื่องไปถึงการแก้ปัญหาอีกด้วย ดังนั้นนักเรียนจึงควรได้รับการช่วยเหลือจากครู หรือเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่า นักเรียนก็จะสามารถประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ของตนเองได้ในที่สุด ฉะนั้นวิธีหนึ่งที่จะสามารถนำมาพัฒนาความสามารถของนักเรียนเป็นแนวคิดในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนในกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในครั้งนี้คือ การจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ (โศจิวัจน์ เสริฐศรี, 2553)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นงานที่บุคคลนั้น ๆ เผชิญอยู่และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้ความรู้และความสามารถทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ไม่ว่าปัญหานั้นจะเกิดขึ้นในชีวิตจริงหรือเป็นสถานการณ์จำลองในห้องเรียนในรูปแบบของโจทย์ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นในการดำรงชีวิตและเป็นเป้าหมายสำคัญเป้าหมายถึงของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ นอกจากนี้การแก้ปัญหายังเป็นสมรรถนะและทักษะการบวนการทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ศึกษาธิการ, 2551)และจากการค้นคว้าจากงานวิจัยต่าง ๆ พบว่า สิ่งหนึ่งที่จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้นั้นคือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพราะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นการที่นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางความคิดประกอบกับความรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการเลือกตัวแทนของข้อมูล วิเคราะห์ความสัมพันธ์สถานการณ์ปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาคำตอบและการทำงานร่วมกันของระบบของแบบจำลอง พร้อมทั้งตรวจสอบผลลัพธ์กับสภาพกับโลกแห่งความเป็นจริงว่าถูกต้องสอดคล้องกันหรือไม่ และในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นนั้น นักเรียนก็ยังคงต้องใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มาใช้เป็นตัวแทนสถานการณ์หรือบริบทในโลกแห่งในการสื่อสารกลับไปกลับมาระหว่างโลกแห่งความคิดให้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปด้วยเสมอ ดังนั้นในขณะที่นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาใด ๆ นั้นนักเรียนก็จะได้ฝึกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์และส่งเสริมการแก้ปัญหาของนักเรียนไปด้วยพร้อมกัน

นอกจากนี้จากงานวิจัยที่มาก่อนหน้ายังพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้การตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนนั้นมีระดับที่แตกต่างกันดังนั้นหากจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยนำแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาบูรณาการกับแนวคิดการเสริม

ต่อการเรียนรู้ จะสามารถเสริมสร้างศักยภาพของนักเรียนแต่ละคนตามสภาพจริงและน่าจะเหมาะสมที่จะนำมาใช้กับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการใช้สติปัญญาและมีลักษณะเป็นนามธรรม ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และสร้างองค์ความรู้อย่างมีความหมายโดยเป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ให้นักเรียนมีบทบาทในการคิดและตัดสินใจในการแก้ปัญหา โดยเปิดโอกาสให้ครู เพื่อนร่วมชั้นเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่มีความรู้ทำหน้าที่เป็นผู้เสริมต่อความคิด เพื่อให้นักเรียนสามารถพัฒนาตนเองไปตามศักยภาพของตนเองที่ควรจะเป็น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจทำการศึกษาการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหากับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยผลการวิจัยที่ได้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และครูคณิตศาสตร์ที่จะนำกระบวนการเรียนการสอนที่บูรณาการแนวคิดการสร้างแบบจำลองและแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการเรียนการสอน

1. แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หมายถึง แนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำลองทางความคิดจากปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริง(โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์) เป็นสัญลักษณ์หรือภาษาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสาร นำเสนอไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วตรวจสอบยืนยันผลลัพธ์ที่ได้กลับไปยังสถานการณ์หรือบริบทเดิมในโลกแห่งความเป็นจริงและประเมินคุณภาพของแบบจำลองเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาอื่น ๆ ต่อไป (Henry& McAuliffe, 1994, Pollak, 2003, Dym, 2004, Niss,Blum&Galbraith, 2007, CCSSM, 2010, Pollak,2012)

หลักการ 1 ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง (Real-world problem) ปัญหาในสถานการณ์ทั่ว ๆ ไปที่สามารถพบเจอได้ในชีวิตประจำวันหรือตัวอย่างปัญหาในห้องเรียนที่มีการดัดแปลงมาจากปัญหาในสถานการณ์จริงเพื่อให้ดูกระชับมากขึ้น และเป็นปัญหาที่ต้องการทำความเข้าใจ

หลักการ 2 การกำหนดปัญหาและการสรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ (Formulate mathematical problem , Summarize , Verify) การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการจำลองความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญที่ได้จากปัญหาและดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ และสรุปตรวจสอบผลลัพธ์ของปัญหาที่กำหนดขึ้น

หลักการ 3 การอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง (Infer) การพิจารณาและเชื่อมโยงตำตอบที่ได้กับบริบทของสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง

หลักการ 4 ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง (Verify the model) การประเมินถึงข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองที่สร้างขึ้น การอภิปรายให้เห็นถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดไป

หลักการ 5 การประยุกต์ใช้และการคาดการณ์แบบจำลองกับสถานการณ์อื่น ๆ (Apply , Predict) การนำแบบจำลองไปใช้กับสถานการณ์อื่น ๆ และการทำนายขยายไปสู่ปัญหาอื่น ๆ ในอนาคต

2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

หมายถึง แนวทางการเสริมต่อการเรียนรู้ หมายถึง การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดของนักเรียนที่มีอยู่ เพื่อเชื่อมโยงไปยังเป้าหมายงานที่ต้องการให้ประสบความสำเร็จได้ตามศักยภาพของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งขึ้นอยู่กับพื้นที่รอยต่อพัฒนาการหรือระยะห่างระหว่างระดับของการพัฒนาจากระดับที่เป็นอยู่จริงไปยังระดับที่สามารถจะเป็นไปได้ และในที่สุดการเสริมต่อการเรียนรู้จำเป็นต้องลดบทบาทลง เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการทั้งหมดด้วยตนเอง โดยมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินนักเรียนเพื่อวางแผนการล่วงหน้าที่จะนำการเสริมต่อการเรียนรู้ออกเมื่อใดและด้วยวิธีการใด ตามแนวคิดของ (Vygotsky, 1978, Rosenshine & Guenther, 1992, Hogan & Pressley, 1997, Ellis & Larkin, 1998, TA, 2008) และ ดังนี้

หลักการ 1. การสำรวจองค์ความรู้และความคิดพื้นฐานเดิม (foundational Knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

หลักการ 2. การสำรวจภาระงานที่ไม่คุ้นเคย (new Task) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนยังไม่สามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

หลักการ 3. การเสริมต่อการเรียนรู้ (scaffold) เพื่อให้ความช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนโดยผ่านกระบวนการการจัดการเรียนการสอน ซึ่งมีโครงสร้างของการช่วยเหลือสนับสนุนเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

3.1 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยครู (the instructor does it)

3.2 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยชั้นเรียน (the class does it)

3.3 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยกลุ่มย่อย (the group does it)

3.4 การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนโดยตนเอง (the individual does it)

หลักการ 4. การได้มาซึ่งองค์ความรู้ใหม่ (new knowledge) เพื่อระบุภาระงานที่นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสนับสนุนสิ้นสุดลง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

หลักการของการเรียนการสอน

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีหลักการสำคัญ คือ กระบวนการเรียนการสอนที่มีจุดเน้นในการจำลองทางความคิดจาการปัญหาในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนชีวิตจริงเป็นภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ แล้วดำเนินการหาคำตอบของปัญหาจากแบบจำลองคณิตศาสตร์นั้น โดยใช้กระบวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และให้ความสำคัญในเรื่องการปฏิสัมพันธ์ทางสังคมในการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนบนพื้นฐานความรู้และความคิดเดิมของนักเรียนที่มีอยู่ ให้เหมาะสมกับศักยภาพและระดับพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และค่อย ๆ ลดความช่วยเหลือลงเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาโดยใช้แบบจำลองด้วยตนเองได้อย่างหลากหลาย ซึ่งหลักการของกระบวนการเรียนการสอนมี 5 หลักการ ดังนี้

หลักการที่ 1 หลักการใช้ปัญหาเสมือนโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

การนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริงหรือสถานการณ์ปัญหาเสมือนในโลกแห่งความจริงเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ทำให้เกิดความต้องการทำความเข้าใจหรือค้นหาคำตอบของปัญหา และการเรียนรู้อย่างมีความหมาย การเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสำรวจความรู้พื้นฐานเดิมเดียวกับปัญหาและเสริมต่อข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับบริบทของปัญหา

หลักการที่ 2 หลักการใช้การกำหนดเป้าหมายเพื่อแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริง(The real world)ไปยังโลกแห่งความคิด(The conceptual world)

การแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการเสริมต่อความรู้ความสามารถพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อกำหนดเป้าหมายและลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน

หลักการที่ 3 หลักการดำเนินการตามแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อได้มาซึ่งผลลัพธ์ในโลกแห่งความจริง

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้และเสริมต่อการเรียนรู้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ มีการประเมินข้อมูลป้อนกลับของนักเรียนเพื่อที่จะค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลง และให้นักเรียนสามารถฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง สรุปตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงอ้างอิงข้อสรุปของผลลัพธ์นั้นกลับไปยังบริบทในโลกแห่งความจริง

หลักการที่ 4 หลักการทบทวนความคิดเพื่อประเมินการทำงานของตนเอง

การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง การประเมินข้อดีและข้อบกพร่องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการเสริมต่อการเรียนรู้ให้นักเรียนมองเห็นแง่มุมที่หลากหลายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้น

หลักการที่ 5 หลักการประยุกต์ใช้การแก้ปัญหาที่หลากหลาย

การประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำนายไปสู่ปัญหาในโลกแห่งความจริงอื่น ๆ ในอนาคต เพื่อให้เกิดการขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

วัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในวิเคราะห์โจทย์ปัญหาและเชื่อมโยงความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์มาใช้การดำเนินการหาคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล โดยพิจารณาจากกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งมีองค์ประกอบ 4 ประการ ดังนี้ คือ

1). การวิเคราะห์ปัญหา เพื่อทำความเข้าใจต่อความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ให้มา พร้อมทั้งจำแนกประเด็นที่มีสำคัญและจำเป็นของปัญหา

2). การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา เพื่อใช้ความรู้ ความคิด ทักษะหลักการทางคณิตศาสตร์ในการวางแผนเลือกใช้กลวิธีในแก้ปัญหา

3). การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ เพื่อลงมือทำตามแผนการที่ได้ระบุไว้ จนกระทั่งได้คำตอบ

4). การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด เพื่อตรวจสอบและยืนยันความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้กับบริบทของโจทย์ปัญหา และทบทวนหรือประเมินกระบวนการที่ผ่านมา

ซึ่งความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในที่นี้สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representation) หมายถึง ความสามารถในการแสดงความสัมพันธ์ทางความคิดทางคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนถ่ายทอดออกมาในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งอาจมีลักษณะเป็นภาพ กราฟ ตาราง ตัวแปร สัญลักษณ์และข้อความทางคณิตศาสตร์ เพื่อจัดกระทำ บันทึกและสื่อสารแสดงออกถึงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในความสัมพันธ์ของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ทางสังคมและทางคณิตศาสตร์ โดยมีผลจากประสบการณ์ในการทำความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน และยังเป็นเครื่องมือช่วยขยายความคิดทางคณิตศาสตร์ (NCTM, 2000, Mandasarari, 2011, Asmara, 2014, Puri, 2014)

ซึ่งความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในที่นี้สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

องค์ประกอบเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (Indicators of Mathematical representation) ประกอบด้วย 3 ตัวชี้วัด (NCTM, 2000) ดังนี้

ตัวชี้วัดที่ 1 การสร้างและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการจัดการ การบันทึกและสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์

ตัวชี้วัดที่ 2 การเลือก การประยุกต์ใช้และการแปลงระหว่างรูปแบบการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา

ตัวชี้วัดที่ 3 การใช้การตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบที่นำไปสู่การแก้ปัญหาและการแปลความในปรากฏการณ์ทางกายภาพทางสังคมและทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ดังนั้นผู้วิจัยจึงจัดกลุ่มองค์ประกอบใหม่เป็น 2 องค์ประกอบ เพื่อให้สอดคล้องกับพื้นฐานความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในประเทศไทยที่ยังคงต่ำ เนื่องจากเมื่อย้อนหลังไปเกือบสองทศวรรษที่ผ่านมาผลการวิจัยของผู้วิจัยหลายท่าน เช่น อัมพร ม้าคนอง (2536) กรรณิการ์ ปวนกาศ (2543) เมตตา มาเวียง (2544) จิตอารีย์ ปัญญาแจ้งสกุล (2544) ปนัดดา สังข์ศรีแก้ว และคณะ (2552)ชลธิชา ใจพนัส และคณะ (2556) พบว่าการแปลความหมายโจทย์ การตีความและการเปลี่ยนจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ยังคงเป็นอุปสรรคต่อการแก้ปัญหาและการทำความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ดังนี้

องค์ประกอบที่ 1 การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

องค์ประกอบที่ 2 การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

ระดับของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (Level of Mathematical Representation)(National Educational Goals Panel, 1996)

ระดับที่ 1 นักเรียนที่ใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไม่เหมาะสมหรือไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ใด ๆ เลยในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 2 นักเรียนมีความพยายามที่ใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสมในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 3 นักเรียนใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม ถูกต้องแม่นยำในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ระดับที่ 4 นักเรียนใช้การเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างซับซ้อนและหลากหลายในการสื่อสารถึงวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน

ขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ

เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง

เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง

เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียนเพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลองความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด

ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่

เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง

รายละเอียดของกิจกรรมการเรียนการสอน บทบาทครู บทบาทนักเรียนในขั้นตอนการเรียนการสอนแต่ละขั้น แสดงดังตารางต่อไปนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 22 ตารางแสดงรายละเอียดของขั้นตอนการเรียนการสอน

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ เป็นขั้นการนำเสนอปัญหาในโลกแห่งความจริง พร้อมทั้งใช้คำถามในการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหากับความสอดคล้องกันของบริบทของนักเรียน และเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับปัญหา เพื่อดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเรียนรู้อย่างมีความหมาย	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรใกล้เคียงกับบริบทของนักเรียนหรือเป็นสิ่งที่นักเรียนสนใจ 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนต่อปัญหาหรือสถานการณ์ที่นำเสนอ พร้อมทั้งสำรวจพื้นความรู้เดิมที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้ 3. ครูประเมินพื้นความรู้ตามความเข้าใจเดิมของนักเรียนพร้อมทั้งเสริมต่อข้อมูลสำคัญที่ควรรู้เกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่นั้น 4. ครูสร้างบรรยากาศการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยครู หรือนักเรียนร่วมชั้นเรียนหรือผู้ที่มีความรู้มากกว่าร่วมกันอภิปราย 5. นักเรียนวิเคราะห์และทำความเข้าใจกับปัญหาหรือสถานการณ์	1. ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ บริบทชีวิตจริงที่มีความสอดคล้องกับเนื้อหาบริบทของนักเรียนและความเข้าใจสำคัญที่นักเรียนควรเข้าใจก่อนจะเรียน 2. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียน 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียนและสำรวจความเข้าใจเดิมของนักเรียนต่อปัญหา 5. ประเมินความเข้าใจเดิมของนักเรียนด้วยการใช้คำถาม พร้อมทั้งวางประเด็นอภิปรายที่เป็นข้อมูลสำคัญที่นักเรียนควรทราบให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อเป็นการช่วยเหลือนักเรียนให้เข้าใจปัญหามากขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความเข้าใจเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการสร้างแบบจำลอง เป็นขั้นการแปลงจากสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยการเสริมต่อความรู้และความคิดพื้นฐานเดิมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายของแบบจำลองและลักษณะของแบบจำลอง เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและบริบทของปัญหา	1. นักเรียนร่วมกันรวบรวมสิ่งที่ปัญหากำหนดให้และสรุปสิ่งที่ปัญหาต้องการหาคำตอบเป็นเป้าหมายของแบบจำลอง 2. ครูมอบหมายงานให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 3. นักเรียนแต่ละคนบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหาเพื่อสังเคราะห์ความคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือแบบกลุ่ม 4. ครูให้คำชี้แนะการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	1. ส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอหรืออธิบายลักษณะแนวทางการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง 2. ให้คำแนะนำเกี่ยวกับยุทธวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ เช่น ใช้คำถามหรือการยกตัวอย่างหรืออภิปรายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ	1. กำหนดสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ 2. วางแผนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ลงมือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง เป็นขั้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นไว้จนกระทั่งได้มาซึ่งผลลัพธ์ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบเพื่อสรุปอ้างอิงกลับไปยังสถานการณ์จริง และขณะที่มีเสริมต่อการเรียนรู้ให้ความสนับสนุนช่วยเหลือให้สังเกตพฤติกรรมป้อนกลับของนักเรียนเพื่อหาวิธีการและช่วงเวลาที่เหมาะสมในการลดการช่วยเหลือลง มอบหมายนักเรียนได้ฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง	1. นักเรียนลงมือดำเนินการทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จนได้มาซึ่งผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ 2. นักเรียนเชื่อมโยงผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ไปยังผลลัพธ์ของสถานการณ์หรือปัญหาเสมือนชีวิตจริง 3. ครูประเมินความสามารถในการดำเนินการของนักเรียนเพื่อช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน 4. ประเมินงานที่นักเรียนพัฒนาการสามารถปฏิบัติได้ตามลำพังแล้วจึงลดความช่วยเหลือลง	1. สร้างบรรยากาศที่อำนวยความสะดวกให้นักเรียนดำเนินแก้ปัญหา 2. สังเกตความสามารถของนักเรียนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งประเมินและให้ความช่วยเหลือตามความสามารถของนักเรียนตามศักยภาพที่ควรจะพัฒนาไปได้ 3. สังเกตพัฒนาการของนักเรียนเมื่อสามารถปฏิบัติงานได้ตามลำพังแล้วจึงค่อย ๆ วางแผนลดความช่วยเหลือของนักเรียนคนนั้น ๆ ออกไป 4. ใช้คำถามวางประเด็นเพื่อให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์อ้างอิงกลับไปยังโลกแห่งความจริง	1. ลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเองอย่างอิสระในช่วงแรกและพยายามปรับปรุงตนเองจากคำชี้แนะหรือจากความช่วยเหลือของครูหรือเพื่อนนักเรียนที่มีความสามารถสูงกว่า 2. ตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นโดยการฝึกฝนการอธิบายความคิดของตนเองให้คนอื่นรับฟัง 3. อภิปรายคำตอบทางคณิตศาสตร์เชื่อมโยงไปยังคำตอบในชีวิตจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 4 การประเมินแบบจำลองและตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง เป็นขั้นการเสริมต่อการเรียนรู้ให้เห็นถึงคุณภาพและลักษณะของแบบจำลอง ความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและความเหมาะสมกับบริบทของสถานการณ์ปัญหา ความสอดคล้องกันของลักษณะของสัญลักษณ์และองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ ลักษณะสำคัญของแบบจำลองหรือลักษณะที่แบบจำลองละเลยขาดหายไป เพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญของนักเรียนในทบทวนตนเองและสะท้อนคิด	1. นักเรียนนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. ครูดำเนินการอภิปรายเพื่อให้นักเรียนได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ ข้อดี ข้อบกพร่องของแบบจำลองแต่ละแบบ	1. มอบหมายให้นักเรียนออกมานำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่มตนเอง 2. ดำเนินการอภิปรายให้เห็นถึงประสิทธิภาพของแบบจำลองแต่ละแบบพร้อมทั้ง ชี้แนะการปรับปรุงข้อบกพร่อง 3. ใช้คำถามแบบซักค้านให้นักเรียนเห็นความแตกต่างและความหลากหลายของแบบจำลองแต่ละแบบจำลอง และเพื่อกระตุ้นความคิดของนักเรียน 4. ช่วยชี้แนะการประเมินแบบจำลอง	1. นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองหรือของกลุ่ม 2. อภิปรายเปรียบเทียบ โต้แย้ง ทบทวนและสะท้อนคิดคำตอบและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองและกับของเพื่อนักเรียนคนอื่น ๆ 3. สรุปและทำความเข้าใจลักษณะของแบบจำลองแต่ละแบบที่ได้จากการนำเสนอ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ขั้นตอนการเรียนการสอน	กิจกรรมการเรียนการสอน	บาทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ เป็นขั้นการนำเสนอสถานการณ์ใหม่ เพื่อให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และขยายความคิดอย่างหลากหลายได้ด้วยตนเองหลังจากการให้ความช่วยเหลือสิ้นสุดลง	1. ครูนำเสนอสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริง ที่มีความซับซ้อนของข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ นอกจากนี้สถานการณ์ควรเป็นสิ่งที่เป็นการได้ฝึกการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เคยสร้างมาแล้ว อย่างหลากหลาย 2. ครูใช้คำถามกระตุ้นความสนใจวางแผนการสร้างแบบจำลองและมอบหมายให้นักเรียนคาดการการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3. ครูวางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น 4. ครูคอยให้คำแนะนำตามที่จะสามารถเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนได้ 5.นักเรียนร่วมอภิปรายเพื่อทำความเข้าใจปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง	1. กำหนดสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือปัญหาเสมือนสถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับบริบทของนักเรียนและสามารถประยุกต์ใช้ความรู้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้า 3. เสนอปัญหาแก่นักเรียน 4. ใช้คำถามกระตุ้นความสนใจของนักเรียน 5. วางประเด็นการอภิปรายให้นักเรียนได้คาดการณ์การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น	1. รับฟังการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ของครู 2. ตอบปัญหาเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนด ตามความรู้ความเข้าใจเดิม 3. มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยการแสดงความคิดเห็น 4. นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการอภิปรายมาวิเคราะห์และเชื่อมโยงเข้ากับความสามารถ ความเข้าใจเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองเดิมเพื่อทำความเข้าใจปัญหา 5. ประยุกต์ใช้การคาดการณ์การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับปัญหาที่กำหนดมาให้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดำเนินการวัดและประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแบ่งเป็นก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนการใช้กระบวนการเรียนการสอนใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

2. การวัดและการประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์หลังการใช้กระบวนการเรียนการสอนใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายละเอียดของการวัดและประเมินการแก้ปัญหาและการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	หัวเรื่อง
ก่อนเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด
	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด

ระยะ	เครื่องมือ	องค์ประกอบที่วัด	หัวเรื่อง
หลังเรียน	แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 1) การวิเคราะห์ปัญหา 2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ 4) การตรวจสอบคำตอบและการสะท้อนคิด	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้สอนเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 2 กลุ่มเนื้อหา ในการเรียนระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคปลาย ดังนี้ 1. เรื่องสมการกำลังสอง 2. เรื่องการแปรผัน
	แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน	การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ 1) การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ 2) การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา	ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1. เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2. เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3. เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ 4. เรื่องการวัด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แบบทดสอบวัดความสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน แบ่งออกเป็น 2 ฉบับ

ฉบับก่อนเรียน แบบทดสอบวัดความสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน จำนวน 5 ข้อ แบบอัตนัย มีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1). เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2).เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3). เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ และ 4).เรื่องการวัด

ฉบับหลังเรียน แบบทดสอบวัดความสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน จำนวน 5 ข้อ แบบอัตนัย มีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหา 2 กลุ่มเนื้อหาที่ใช้ในการสอน ในการเรียนระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคปลาย ดังนี้ 1). เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว และ 2).เรื่องการแปรผัน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การประเมินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (ก่อนเรียน-หลังเรียน)

1) การวิเคราะห์โจทย์ (4 คะแนน)

ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาได้ถูกต้อง ครบถ้วน
1	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญจากปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบได้ถูกต้อง ครบถ้วน
1	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา (4 คะแนน)

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
1	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
0	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
1	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหา
0	นักเรียนระบุลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุ

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ (4 คะแนน)

ดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ (3 คะแนน)	
3	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ถูกต้อง
2	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง หรือ นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ถูกต้อง
1	นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหาได้ตามลำดับขั้นตอนที่วางแผนไว้ และหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง
0	นักเรียนไม่ดำเนินการแก้ปัญหา และไม่หาคำตอบ

การสรุปคำตอบ (1 คะแนน)	
1	นักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้อง ครบถ้วน
0.5	นักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป

4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด (4 คะแนน)

คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
0	นักเรียนระบุความเป็นไปได้ของคำตอบไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ นักเรียนไม่ระบุความเป็นไปได้ของคำตอบ และไม่อธิบายเหตุผลของความเป็นไปได้ของคำตอบกับปัญหา

วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด (2 คะแนน)	
2	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือนักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
0	นักเรียนระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ไม่ถูกต้อง และอธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือนักเรียนไม่ระบุความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้ และไม่อธิบายเหตุผลของความเหมาะสมของวิธีการที่เลือกใช้กับปัญหา

แบบทดสอบวัดความสามารถการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามารถการการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนเป็นแบบคู่ขนาน แบ่งออกเป็น 2 ตอน มีเนื้อหาครอบคลุมเรื่องโจทย์ปัญหา 4 กลุ่มเนื้อหาใหญ่ ๆ จากที่เคยเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคต้น – ภาคปลาย จนถึงระดับระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคต้น ดังนี้ 1). เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง 2).เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3). เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ และ 4).เรื่องการวัด

ตอนที่ 1 การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ จำนวน 10 ข้อ แบบอัตนัย ข้อละ 3 คะแนน

ตอนที่ 2 การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา จำนวน 4 ข้อ แบบอัตนัย ข้อละ 3 คะแนน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การประเมินการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (ก่อนเรียน-หลังเรียน)

เกณฑ์การให้คะแนน ตอนที่ 1

การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 1 (3 คะแนน).	
ระดับคะแนน	ลักษณะคำตอบ
3	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนอย่างน้อย 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ ***
2	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนอย่างน้อย 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ แต่ยังไม่ถึง 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนนั้น **
1	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม โดยมีจำนวนตัวแทนไม่ถึง 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ *
0	นักเรียนไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

หมายเหตุ

* หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนไม่ถึง 1 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ คือ จำนวนตัวแทนที่น้อยกว่า $\frac{1}{3}\times 6$ ตัวแทน นั่นคือ 1 ตัวแทนนั่นเอง $\frac{1}{3}\times 6$

** หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนมากกว่า 1 ใน 3 ของจำนวน ตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้แต่ยังไม่ถึง 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนนั้น คือ จำนวนตัวแทนที่มากกว่า $\frac{1}{3}\times 6$ ตัวแทน แต่ไม่ถึง $\frac{2}{3}\times 6$ นั่นคือ 2 หรือ 3 ตัวแทนนั่นเอง

*** หมายถึง ถ้าจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้เป็น 6 ตัวแทน แล้วจำนวนตัวแทนมากกว่า 2 ใน 3 ของจำนวนตัวแทนสูงสุดที่นักเรียนสามารถใช้ได้ คือ จำนวนตัวแทนที่มากกว่า $\frac{2}{3}\times 6$ นั่นคือ 4 , 5 , 6 , ... ตัวแทนนั่นเอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

เกณฑ์การให้คะแนน ตอนที่ 2

การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2 (3 คะแนน)	
ระดับคะแนน	ลักษณะคำตอบ
3	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างเหมาะสม และนำไปสู่ในการแก้ปัญหา
2	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไม่เหมาะสม และนำไปสู่ในการแก้ปัญหา หรือ นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างเหมาะสม แต่ไม่นำไปสู่ในการแก้ปัญหา
1	นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไม่เหมาะสม และไม่นำไปสู่ในกาแก้ปัญหา
0	นักเรียนไม่ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ภาคผนวก ข

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจกระบวนการเรียนการสอนและแผนการสอน

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล
   คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร
2. อาจารย์ ดร.ศันสนีย์ เณรเทียน
   คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด
   คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ บางเขน กรุงเทพมหานคร
2. อาจารย์จงกลนี เขียวหวาน
   โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร
3. อาจารย์ณัฐไฉไล พริ้งมาดี
   โรงเรียนวัดราชบพิธ กรุงเทพมหานคร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

1. อาจารย์ ดร.อรรถศาสตร์ นิมิตรพันธ์
   คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต กรุงเทพมหานคร
2. ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์
   สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กรุงเทพมหานคร
3. อาจารย์สุธิดา นานช้า
   โรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์ จังหวัดตรัง

ภาคผนวก ค
ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มทดลอง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ **วิชา** คณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 22212) **<u>กลุ่มทดลอง</u>**

วันที่สอน **เวลา** **ระยะเวลา** 1 คาบ (50 นาที)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

เรื่อง โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองตัวแปรเดียว (รูปเรขาคณิต)

<u>1. จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

<u>ด้านความรู้</u> : นักเรียนสามารถ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. หาคำตอบของปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้

<u>ด้านทักษะ/กระบวนการ</u> : นักเรียนสามารถ

1. ให้เหตุผลงความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหา
2. เชื่อมโยงคำตอบทางคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความจริง

<u>ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์</u> : นักเรียน

1. มีส่วนร่วมกับกิจกรรมในชั้นเรียน
2. มีความละเอียดรอบคอบในการทำงาน
3. มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน

<u>2. สาระสำคัญ</u>

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว คือสมการซึ่งมี x เป็นตัวแปรและมีรูปทั่วไปเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว มีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
6. สรุปคำตอบ

3.สาระการเรียนรู้

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว มีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
6. สรุปคำตอบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างที่ 1

ชาวสวนปลูกต้นฝรั่งไว้ในแปลงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นอกนั้นปลูกต้นสนไว้รอบแปลงฝรั่ง เพื่อป้องกันลม โดยมีเงื่อนไขว่าหากต้องการให้ได้ผลผลิตสูงสุดควรเว้นระยะห่างระหว่างต้นฝรั่งแต่ละต้นเป็น ระยะ 2 เมตร ระยะห่างระหว่างต้นสนเป็นระยะ 1 เมตร และระยะห่างระหว่างต้นฝรั่งกับต้นสนเป็น ระยะ 1 เมตร

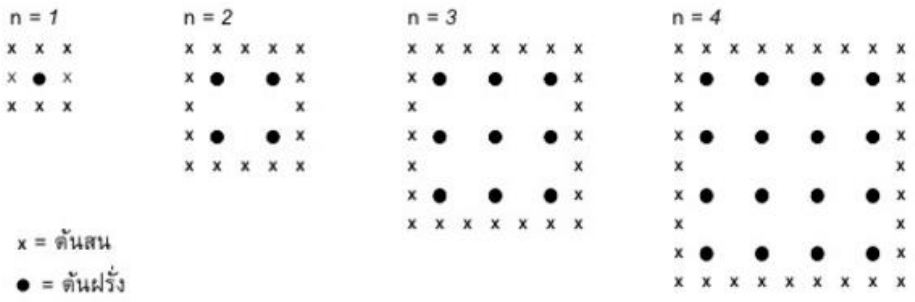
1. 1. อยากทราบว่า หากชาวสวนปลูกสวนฝรั่งบนที่ดินจัตุรัสขนาด 1 ไร่ เขาต้องลงทุนซื้อต้นกล้าฝรั่งและต้นกล้าสนเป็นเงินเท่าไร เมื่อต้นกล้าฝรั่งราคาต้นละ 35 บาท และต้นกล้าสนราคาต้นละ 150 บาท

1. 2 อยากทราบว่าหากชาวสวนปลูกต้นฝรั่งและต้นสนรวมเป็นจำนวน 513 ต้น เขาต้องปลูกบนที่ดินอย่างน้อยเท่าไร

1. 3 อยากทราบว่า หากชาวสวนมีงบประมาณในการลงทุนซื้อต้นกล้าเพียง 30,000 บาท เขาควรจะวางแผนในการปลูกต้นฝรั่งและต้นส้นอย่างละกี่ต้น

วิธีทำ

1.1



ความยาวด้าน (เมตร)	2	4	6	...	x
จำนวนต้นฝรั่ง (ต้น)	1	4	9	...	$\left(\frac{x}{2}\right)^2$
จำนวนต้นสน(ต้น)	8	16	24	...	$4x$

ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้ จำนวนต้นฝรั่ง $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

จำนวนต้นสน $4x$

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวด้านละ 40 เมตร

จะได้ว่ามีจำนวนต้นฝรั่ง $\left(\frac{40}{2}\right)^2 = 20^2 = 400$ ต้น

มีจำนวนต้นสน $8(40) = 160$ ต้น

จำนวนที่ต้องจ่ายเงินซื้อต้นกล้าฝรั่งเป็นเงิน $400 \times 35 = 14{,}000$ บาท

ต้นกล้าสนเป็นเงิน $160 \times 150 = 24{,}000$ บาท

รวมต้องจ่ายเงินทั้งสิ้น $14{,}000 + 24{,}000 = 38{,}000$ บาท

1.2 ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdot 4x = 513$$

ให้ $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdot 4x = 513$

จะได้ว่า $\frac{x^2}{4} + \cdot 4 \cdot x = 513$

$$x^2 + 16x - 2{,}052 = 0$$

$$(x-38)(x+54) = 0$$

$$x = 38$$

ดังนั้น ที่ดินมีขนาดพื้นที่ $\left(\frac{38}{2}\right)^2 = 19^2 = 361$ ตารางเมตร

1.3 ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$35 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 150 \cdot (4x) < 30{,}000$$

$$\frac{7x^2}{4} + 30 \cdot (4x) < 6{,}000$$

$$7x^2 + 480x < 24{,}000$$

ค่า x ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ เท่ากับ 33 ที่ทำให้อสมการเป็นจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

4.กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอปัญหาเพื่อสร้างความสนใจ (10 นาที)

1. ครูทบทวนขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว (การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

    1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
    2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
    3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
    4. แก้สมการ
    5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
    6. สรุปคำตอบ

2. ครูกล่าวว่า ในวันนี้เราจะมาเรียนในเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในเรื่องเกี่ยวกับหน่วยความยาวและพื้นที่ ซึ่งต้องนำความรู้พื้นฐานเดิมเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปขาคณิตมาเป็นพื้นฐานเพื่อที่จะต่อยอดเรียนรู้เรื่องในวันนี้ โดยครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนสูตรการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตเท่าที่ตนจำได้ทั้งหมดลงในสมุด
3. ครูเดินดูรอบ ๆ ห้องเรียน เพื่อดูว่านักเรียนส่วนใหญ่มีพื้นฐานความรู้เดิมเกี่ยวกับเรื่องสูตรอย่างไร โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

    3.1 หากนักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนสูตรได้ ครูจึงให้นักเรียนอาสาสมัครพูดสูตรที่ตนเขียนได้คนละ 1 สูตร และครูจึงจดสูตรนั้นบนกระดานตามที่นักเรียนแต่ละคนนำเสนอพร้อมทั้งวาดรูปประกอบ โดยหากสูตรใดที่นักเรียนไม่ได้กล่าวถึงให้ครูค่อย ๆ วาดรูปและนำความรู้เรื่องการหาพื้นที่ที่นักเรียนทราบ เชื่อมโยงไปยังรูปที่ต้องการหา

    3.2 หากนักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามรถเขียนสูตรได้ ครูจึงช่วยทบทวนสูตรโดยการวาดรูปรูปเรขาคณิตนั้น ระบุคุณลักษณะ พร้อมทั้งเชื่อมโยงไปยังสูตรการหาพื้นที่ของรูปนั้น ๆ

4. ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 1 โดยกล่าวถึงการทำเกษตรกรรม ที่เป็นอาชีพที่อยู่คู่คนไทยมาช้านาน และปัจจุบันทางรัฐบาลยังส่งเสริมให้คนไทยดำเนินชีวิตตามเศรษฐกิจพอเพียง ตามรอยพ่อหลวง ของปวงชนชาวไทย โดยครูใช้คำถามดังต่อไปนี้เพื่อเสริมต่อความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับสถานการณ์ของปัญหา

"นักเรียนทราบหรือไม่ภัยตามธรรมชาติใดที่ทำความเสียหายแก่เกษตรกรได้บ้าง" (แผ่นดินถล่ม น้ำท่วม ฝนแล้ง ไฟป่า ลมพายุ)

"ลมพายุหรือวาตภัยนี้ เกษตรกรจะป้องกันได้อย่างไร" (สร้างกำแพง ปลูกต้นไม้บังลม)

"นักเรียนคิดว่าต้นไม้ลักษณะใดที่เหมาะจะเป็นต้นไม้กันลม" (ไม้ยืนต้น ไม่มีการผลัดใบ มีพุ่มหนาพอจะลดความเร็วหรือลดแรงปะทะของลมลงได้)

5. ครูทบทวนเกี่ยวกับลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแง่มุมที่ให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ลักษณะที่เหมือนกันและแตกต่างกัน อย่างไร โดยใช้คำถาม ตามลำดับดังนี้ หากนักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถตอบคำถามได้ให้ครูนำนักเรียนอภิปรายถึงรูปเรขาคณิตนั้นอย่างละเอียด

".ให้นักเรียนระบุลักษณะสำคัญของของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า" (มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันมีความยาวเท่ากัน มีด้านขนานกันสองคู่)

".ให้นักเรียนระบุลักษณะสำคัญของของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส" (มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ติดกันมีความยาวเท่ากัน มีด้านขนานกันสองคู่)

"อยากทราบว่าถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมใดมีพื้นที่มากกว่ากัน ให้นักเรียนลองยกตัวอย่าง" (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดเป้าหมายและการเสริมสร้างแบบจำลอง (10 นาที)

1. ครูให้นักเรียนอ่านโจทย์และวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดข้อมูลสำคัญมาให้ สิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา
2. ครูและนักเรียนช่วยกันวาดรูป และตีตารางหาความสัมพันธ์ของจำนวนต้นไม้แต่ละชนิด ครูใช้คำถาม

"ถ้าต้นฝรั่ง 1 ต้น ต้องล้อมรอบด้วยต้นสนกี่ต้น ใช้การวาดรูปช่วยได้" (ถ้าต้นฝรั่ง 1 ต้น จะใช้ต้นสน 8 ต้น)

"ถ้าต้องการปลูกให้เป็นแปลงแบบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะต้องปลูกต้นขยายขึ้นไปเป็นกี่ต้น" (2×2 , 3×3 , 4×4 ... ต้น)

3. ให้นักเรียนช่วยกันวาดรูปช่วยได้ ต้นฝรั่งและต้นสน เมื่อต้นฝรั่งเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ เพื่อให้นักเรียนสังเกตแบบรูปความสัมพันธ์ของจำนวนต้นฝรั่งและต้นสน
4. ครูใช้คำถาม

"หากแปลงฝรั่งใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ จำนวนต้นฝรั่งและต้นสน ต้นใดมีการเพิ่มขึ้นมากกว่ากัน" (ต้นฝรั่ง)

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ลองสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ข้อที่ 1.1 และข้อที่ 1.2
6. ครูเดินดูนักเรียนทั้งชั้น พร้อมทั้งให้คำชี้แนะเพิ่มเติมตามศักยภาพของนักเรียนเมื่อนักเรียนต้องการความช่วยเหลือในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
7. ครูสุ่มให้นักเรียนบางคู่นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตนเองให้เพื่อน ๆ รับฟัง พร้อมทั้งอภิปรายถึงลักษณะความเหมือนและความแตกต่างของแบบจำลองที่นักเรียนสร้างขึ้น
8. ครูนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพที่เตรียมไว้ของข้อที่ 1.1 และข้อที่ 1.2

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหาและอ้างอิงผลลัพธ์สู่บริบทในโลกแห่งความจริง (15 นาที)

1. ครูให้นักเรียนคู่เดิม ช่วยกันหาดำเนินการหาคำตอบและสรุปคำตอบโดยใช้แบบจำลองที่คู่ของตนเองสร้างขึ้น พร้อมทั้งสังเกตความสามารถในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและประเมินการให้ความช่วยเหลือตามศักยภาพของนักเรียน
2. ครูให้นักเรียนทั้งสองคนที่จับคู่กันนั้น นำคำตอบที่คิดได้นำไปแทนค่าสมการ เพื่อตรวจสอบคำตอบทางคณิตศาสตร์
3. ครูช่วยเฉลยวิธีการหาคำตอบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ตามหลักการทางคณิตศาสตร์
4. เมื่อนักเรียนสรุปคำตอบเสร็จแล้ว ครูนำนักเรียนอภิปรายถึงลักษณะคำตอบของข้อที่ 1.2 ที่มีลักษณะของสมการเป็นสมการกำลังสองที่มีสองคำตอบที่แตกต่างกัน โดยใช้คำถาม “เนื่องจากสมการกำลังสองตัวแปรเดียวมี 2 คำตอบ จะทราบได้อย่างไรว่าคำตอบใดถูกต้อง และสามามารถนำไปใช้ได้จริงทั้งสองคำตอบหรือไม่ (คำตอบที่เป็นจำนวนเต็มลบไม่ถูกต้อง เพราะว่ายาวของด้านต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ดังนั้นคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มลบจึงไม่ถูกต้องและเป็นไปไม่ได้)
5. ครูให้นักเรียนนำค่าตัวแปรที่ได้มาคิดหาค่าขนาดที่ดินในข้อที่ 1.2 เพื่อสรุปหาลักษณะรูปร่างของที่ดิน โดยใช้คำถาม
   “นักเรียนคิดว่า ที่ดินที่ได้เป็นรูปอะไร” (สี่เหลี่ยมจัตุรัส)

ขั้นที่ 4 การประเมินแบบจำลอง (5 นาที)

1. ครูนำนักเรียนอภิปรายถึงแบบจำลองที่สร้างขึ้น ทั้งรูปภาพและสมการ โดยการใช้คำถาม “นักเรียนคิดว่าตั้งแต่เริ่มต้นอ่านโจทย์และทำความเข้าใจ เราได้วาดรูปก่อนแล้วจึงสร้างสมการ อยากทราบว่าหากเราไม่วาดรูปก่อนเราจะสามารถสร้างสมการได้หรือไม่ (อาจจะสร้างได้หรือสร้างไม่ได้ขึ้นอยู่กับความถนัดของแต่ละบุคคล)

"แต่หากนักเรียนได้วาดรูปก่อนแล้วจึงสร้างสมการ นักเรียนคิดว่ามีผลดีอย่างไร (การวาดรูปทำเข้าใจความสัมพันธ์ของข้อมูล และเห็นเป็นรูปธรรมมากขึ้นทำให้สร้างสมการได้ง่ายขึ้น)
"นักเรียนจะทราบได้อย่างไรว่าสมการที่นักเรียนสร้างขึ้นเป็นสมการที่ถูกต้อง"
(ตรวจสอบคำตอบที่ได้กับบริบทจริง)

2. อภิปรายว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันของแต่ละคน มีจุดเด่นและจุดด้อยอย่างไร
3. ครูนำนักเรียนทบทวนการทำงานของแต่ละคน พร้อมทั้ง ใช้คำถามดังนี้
"นักเรียนคิดว่าปัญหาใดปัญหาหนึ่งควรจะมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพียงแบบเดียวที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุดหรือไม่"
"นักเรียนคิดว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสร้างขึ้นเหมาะสมที่สุดหรือไม่"
"นักเรียนคิดความเหมาะสมหรือประสิทธิภาพของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแต่ละบุคคล ในสถานการณ์หรือปัญหาเดียวกันนั้นเหมือนกันหรือไม่"
"นักเรียนคิดว่าควรมีเหตุผลใดในการสนับสนุนประกอบการประเมินแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ"

ขั้นตอนที่ 5 การขยายความคิดสู่สถานการณ์ใหม่ (10 นาที)

1. ครูให้นักเรียนนำเสนอแบบจำลองอื่น ๆ โดยใช้คำถาม "หากครูให้นักเรียนเปลี่ยนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ตนเองสร้างขึ้นของปัญหาไปเป็นรูปแบบอื่น ๆ ได้หรือไม่" (ตาราง หรือ สมการในรูปแบบอื่น ๆ ที่มีการกำหนดค่าของตัวแปรแตกต่างไปจากเดิมแต่ความสัมพันธ์ของข้อมูลยังคงเดิม)
2. ครูช่วยนักเรียนขยายความคิดโดยการยกตัวอย่างปัญหาที่ประยุกต์ต่อจากปัญหาข้อที่ 1.1 และ 1.2 โดยใช้คำถาม 1.3
3. ครูทิ้งเวลาให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายหาคำตอบ และให้ได้ข้อสรุป และจะมีสมการอย่างไรและหารูปแบบทั่วไปของสมการโจทย์ข้อนี้เมื่อเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของโจทย์
4. ครูเฉลยปัญหาที่ 1.3

5.สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่2 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
2. เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 22212 จัดทำโดยกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม

6.การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน	ผลการประเมิน
ด้านความรู้				
สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้	พิจารณาจากประสิทธิภาพของแบบจำลอง	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดตอบคำถามได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
หาคำตอบของปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้	พิจารณาจากคำตอบของปัญหา	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดตอบคำถามได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านทักษะ / กระบวนการ				
ให้เหตุผลความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหา	สังเกตจากการตอบคำถาม	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำตัวอย่างได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
เชื่อมโยงคำตอบทางคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความจริง	สังเกตจากการตอบคำถาม	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำตัวอย่างได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์				
มีส่วนร่วมกับกิจกรรมในชั้นเรียน	การสังเกตการร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	แบบประเมินพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนให้ความร่วมมือและแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียนอย่างน้อยร้อยละ70 ของทั้งหมด ถือว่าผ่าน	
มีความละเอียดรอบคอบในการทำงาน	สังเกตจากการทำงาน	ภาระงานที่มอบหมาย	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำงาน ได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน	สังเกตจากบันทึกการส่งงาน	แบบบันทึกการส่งงาน	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมด มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาถือว่าผ่าน	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แบบประเมินพฤติกรรมนักเรียน

ระดับคะแนน

มากที่สุด = 5 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 80 %

มาก = 4 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 70% แต่ไม่เกิน 80%

ปานกลาง = 3 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 60% แต่ไม่เกิน 70%

น้อย = 2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 50% แต่ไม่เกิน 60%

น้อยที่สุด = 1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ไม่เกิน 50 %

ข้อที่	หัวข้อการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน					รวม (20)
		5	4	3	2	1	
1	การมีส่วนร่วมในชั้นเรียน						
2	การมีความรอบคอบในการทำงาน						
3	การมีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน						
	รวม						

ระดับคุณภาพ

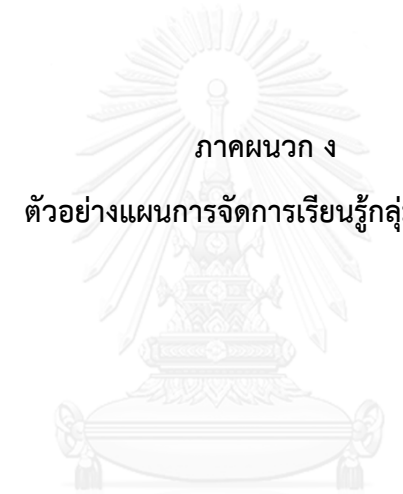
คะแนน 12 – 15 หมายถึง ดีมาก

คะแนน 8 – 11 หมายถึง ดี

คะแนน 4 – 7 หมายถึง พอใช้

คะแนน 1 – 3 หมายถึง ปรับปรุง

ภาคผนวก ง
ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มควบคุม



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ **วิชา** คณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค 22212) **<u>กลุ่มควบคุม</u>**

วันที่สอน **เวลา** **ระยะเวลา** 1 คาบ (50 นาที)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

เรื่อง โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองตัวแปรเดียว (รูปเรขาคณิต)

<u>1. จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

<u>ด้านความรู้</u> : นักเรียนสามารถ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. หาคำตอบของปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้

<u>ด้านทักษะ/กระบวนการ</u> : นักเรียนสามารถ

1. ให้เหตุผลความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหา
2. เชื่อมโยงคำตอบทางคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความจริง

<u>ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์</u> : นักเรียน

1. มีส่วนร่วมกับกิจกรรมในชั้นเรียน
2. มีความละเอียดรอบคอบในการทำงาน
3. มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน

<u>2. สาระสำคัญ</u>

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว คือ สมการซึ่งมี x เป็นตัวแปรและมีรูปทั่วไปเป็น

$ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว มีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
6. สรุปคำตอบ

3.สาระการเรียนรู้

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว มีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
6. สรุปคำตอบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างที่ 1

ชาวสวนปลูกต้นฝรั่งไว้ในแปลงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นอกนั้นปลูกต้นสนไว้รอบแปลงฝรั่ง เพื่อป้องกันลม โดยมีเงื่อนไขว่าหากต้องการให้ได้ผลผลิตสูงสุดควรเว้นระยะห่างระหว่างต้นฝรั่งแต่ละต้นเป็น ระยะ 2 เมตร ระยะห่างระหว่างต้นสนเป็นระยะ 1 เมตร และระยะห่างระหว่างต้นฝรั่งกับต้นสนเป็น ระยะ 1 เมตร

Chulalongkorn University

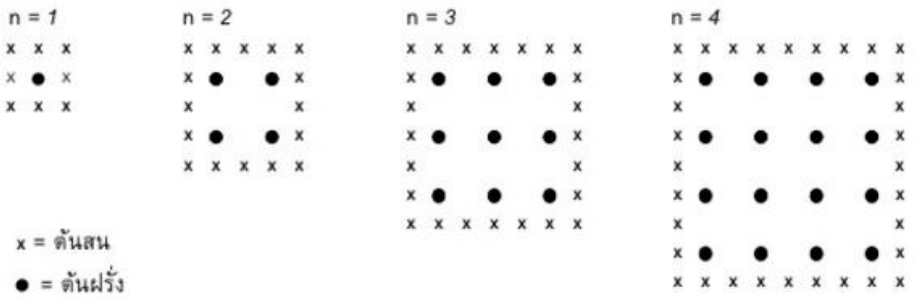
1.1 อยากทราบว่า หากชาวสวนปลูกสวนฝรั่งบนที่ดินจัตุรัสขนาด 1 ไร่ เขาต้องลงทุนซื้อต้นกล้าฝรั่งและต้นกล้าสนเป็นเงินเท่าไร เมื่อต้นกล้าฝรั่งราคาต้นละ 35 บาท และต้นกล้าสนราคาต้นละ 150 บาท

1.2 อยากทราบว่าหากชาวสวนปลูกต้นฝรั่งและต้นสนรวมเป็นจำนวน 513 ต้น เขาต้องปลูกบนที่ดินอย่างน้อยเท่าไร

1.3 อยากทราบว่า หากชาวสวนมีงบประมาณในการลงทุนซื้อต้นกล้าเพียง 30,000 บาท เขาควรจะวางแผนในการปลูกต้นฝรั่งและต้นส้นอย่างละกี่ต้น

วิธีทำ

1.1



ความยาวด้าน(เมตร)	2	4	6	...	x
จำนวนต้นฝรั่ง(ต้น)	1	4	9	...	$\left(\frac{x}{2}\right)^2$
จำนวนต้นสน(ต้น)	8	16	24	...	$4x$

ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้ จำนวนต้นฝรั่ง $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

จำนวนต้นสน $4x$

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวด้านละ 40 เมตร

จะได้ว่ามีจำนวนต้นฝรั่ง $\left(\frac{40}{2}\right)^2 = 20^2 = 400$ ต้น

มีจำนวนต้นสน $8(40) = 160$ ต้น

จำนวนที่ต้องจ่ายเงินซื้อต้นกล้าฝรั่งเป็นเงิน $400 \times 35 = 14{,}000$ บาท

ต้นกล้าสนเป็นเงิน $160 \times 150 = 24{,}000$ บาท

รวมต้องจ่ายเงินทั้งสิ้น $14{,}000 + 24{,}000 = 38{,}000$ บาท

1.2

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdot 4x = 513$$

ให้ $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdot 4x = 513$

จะได้ว่า $\frac{x^2}{4} + \cdot 4 \cdot x = 513$

$$x^2 + 16x - 2{,}052 = 0$$

$$(A-38)(A+54) = 0$$

ดังนั้น ที่ดินมีขนาดพื้นที่ $(19)^2 = 361$ ตารางเมตร

1.3

$$35 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 150 \cdot (4x) < 30{,}000$$

$$\frac{7x^2}{4} + 30 \cdot (4x) < 6{,}000$$

$$7x^2 + 480x < 24{,}000$$

ค่า x ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ เท่ากับ 33 ที่ทำให้อสมการเป็นจริง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

4.กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ(5นาที)

1. ครูทบทวนรูปแบบคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว โดยครูใช้คำถาม “ในการหาค่า x ของสมการกำลังสอง เป็นไปได้กี่รูปแบบ”(มี 3 รูปแบบคือ 1) มีสองคำตอบ2) มีคำตอบเดียว 3) ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง)
2. ครูทบทวนขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ‘

(การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ มีขั้นตอนและแนวคิดดังนี้

1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
6. สรุปคำตอบ

ครูกล่าวว่า ในวันนี้เราจะมาเรียนในเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในเรื่องเกี่ยวกับ

หน่วยความยาวและพื้นที่

ขั้นสอน (40 นาที)

1. ครูยกตัวอย่างที่ 1 เพื่อนำเสนอโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ การประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องการหาพื้นที่และเส้นรอบรูปพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันอ่านโจทย์
3. ครูให้นักเรียนวิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์กำหนดมาให้เป็นสิ่งที่สำคัญ หรือสิ่งใดเป็นสิ่งที่ไม่สำคัญ (โดยครูฟังคำตอบจากนักเรียน และพยายามเติมเต็มในส่วนที่ขาดหายไปหรือในส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์)
4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหา (สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ เงื่อนที่ที่จะทำให้ผลผลิตสูงสุด)
5. ครูให้นักเรียนช่วยกันสร้างสมการจากข้อมูลและความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดมา รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวคงที่และเท่ากัน (กำหนดให้เป็น x)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

6. ครูใช้คำถาม “เราสามารถสร้างสมการได้เป็นอย่างไร” [$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdot 4x = 513$] จากนั้น ครูและนักเรียนร่วมกันดำเนินการหาคำตอบโดยการแก้สมการโดยการใช้ความรู้ใน เรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว เมื่อได้คำตอบแล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้
7. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบโดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์
8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบ
9. ครูให้นักเรียนประยุกต์ใช้ความรู้ ในคำถามที่1.3 และครูเฉลยช่วยท้ายคาบ

ขั้นสรุป (5นาที)

1. ครูใช้คำถามนำเพื่อสรุปบทเรียน ดังนี้
   “วันนี้นักเรียนได้เรียนเกี่ยวเรื่องอะไร” (การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียว)
   “ ขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ มีอะไรบ้าง”
   (1. อ่านและวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ให้หา
   2. กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ยังไม่ทราบค่า
   3. นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาเขียนเป็นสมการโดยใช้ความรู้ในเรื่อง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
   4. แก้สมการ
   5. ตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขในโจทย์
   6. สรุปคำตอบ
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่าขั้นตอนใดใน 6 ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนทีสำคัญที่สุดอย่างไร จงยกตัวอย่าง (ไม่มี มีความสำคัญเท่ากันหมด)
3. ครูมอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน

5.สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่2 ของสถาบันส่งเสริมกาสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)
2. เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค 22212 จัดทำโดยกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

6.การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน	ผลการประเมิน
ด้านความรู้				
สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้	พิจารณาจากประสิทธิภาพของแบบจำลอง	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดตอบคำถามได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
หาคำตอบของปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้	พิจารณาจากคำตอบของปัญหา	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดตอบคำถามได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านทักษะ / กระบวนการ				
ให้เหตุผลความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหา	สังเกตจากการตอบคำถาม	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำตัวอย่างได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
เชื่อมโยงคำตอบทางคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความจริง	สังเกตจากการตอบคำถาม	การใช้คำถาม	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำตัวอย่างได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์				
มีส่วนร่วมกับกิจกรรมในชั้นเรียน	การสังเกตการร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	แบบประเมินพฤติกรรม	นักเรียนทุกคนให้ความร่วมมือและแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียนอย่างน้อยร้อยละ70 ของทั้งหมด ถือว่าผ่าน	
มีความละเอียดรอบคอบในการทำงาน	สังเกตจากการทำงาน	ภาระงานที่มอบหมาย	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมดทำงาน ได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน	สังเกตจากบันทึกการส่งงาน	แบบบันทึกการส่งงาน	นักเรียนร้อยละ 70 ของทั้งหมด มีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาถือว่าผ่าน	

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

แบบประเมินพฤติกรรมนักเรียน

ระดับคะแนน

มากที่สุด = 5 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 80 %

มาก = 4 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 70% แต่ไม่เกิน 80%

ปานกลาง = 3 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 60% แต่ไม่เกิน 70%

น้อย = 2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้มากกว่า 50% แต่ไม่เกิน 60%

น้อยที่สุด = 1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถปฏิบัติได้ไม่เกิน 50 %

ข้อที่	หัวข้อการประเมิน	เกณฑ์การให้คะแนน					รวม (20)
		5	4	3	2	1	
1	การมีส่วนร่วมในชั้นเรียน						
2	การมีความรอบคอบในการทำงาน						
3	การมีความรับผิดชอบและตรงต่อเวลาในการส่งงาน						
	รวม						

ระดับคุณภาพ

คะแนน 12 – 15 หมายถึง ดีมาก

คะแนน 8 – 11 หมายถึง ดี

คะแนน 4 – 7 หมายถึง พอใช้

คะแนน 1 – 3 หมายถึง ปรับปรุง

ภาคผนวก จ
ตารางการหาค่าดัชนีความสอดคล้องของวัตถุประสงค์

1. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน
2. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน
3. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน- ฉบับหลังเรียน
4. ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา –ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน
5. ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา –ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน
6. ตารางวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหาและองค์ประกอบกับจำนวนข้อของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน- ฉบับหลังเรียน

1. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ตารางที่ 23 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	ผู้ทรงท่านที่ 1	ผู้ทรงท่านที่ 2	ผู้ทรงท่านที่ 3	คะแนนรวม	IOC	สรุป
1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	-1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	1	1	1	3	1	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1	ใช้ได้
9	1	1	1	3	1	ใช้ได้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 24 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ผู้ทรงท่านที่ 1	ผู้ทรงท่านที่ 2	ผู้ทรงท่านที่ 3	คะแนนรวม	IOC	สรุป
1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	1	1	1	3	1	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1	ใช้ได้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

3. ผลการประเมินความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน- ฉบับหลังเรียน

ความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียนตอนที่ 1 การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ

ตารางที่ 25 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 1

ข้อที่	ผู้ทรงท่านที่ 1	ผู้ทรงท่านที่ 2	ผู้ทรงท่านที่ 3	คะแนนรวม	IOC	สรุป
1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	0	0	-1	-1	$-0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1	ใช้ได้
7	1	-1	1	1	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
8	1	0	1	2	$0.\dot{6}$	ใช้ได้
9	1	1	1	3	1	ใช้ได้
10	1	1	1	3	1	ใช้ได้
11	1	1	1	3	1	ใช้ได้
12	1	1	1	3	1	ใช้ได้
13	0	1	1	2	$0.\dot{6}$	ใช้ได้
14	1	1	1	3	1	ใช้ได้
15	1	1	1	3	1	ใช้ได้
16	1	1	0	2	$0.\dot{6}$	ใช้ได้

ความคิดเห็นผู้ทรงคุณวุฒิของแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน ตอนที่ 2 การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา

ตารางที่ 26 การประเมินของผู้ทรงคุณวุฒิที่มีต่อแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2

ข้อที่	ผู้ทรงท่านที่ 1	ผู้ทรงท่านที่ 2	ผู้ทรงท่านที่ 3	คะแนนรวม	IOC	สรุป
1	0*	1	1	2	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
2	0*	1	0	1	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
3	0*	1	0	1	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
4	0*	1	0	1	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้
5	0*	1	1	2	$0.\dot{6}$	ใช้ได้
6	0*	1	-1	0	0	ใช้ไม่ได้
7	0*	1	1	2	$0.\dot{6}$	ใช้ได้
8	0*	1	0	1	$0.\dot{3}$	ใช้ไม่ได้

หมายเหตุ : * หมายถึง ผู้ทรงคุณวุฒิท่านที่ 1 แนะนำให้ปรับปรุงโจทย์เป็นข้อคำถามที่ต้องการคำตอบหรือผลลัพธ์ของปัญหาแต่เนื้อความของโจทย์ใช้ได้ ดังนั้นผู้วิจัยได้นำประเด็นดังกล่าวมาขอคำปรึกษาและศึกษาองค์ประกอบของตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม แล้วจึงคงไว้ดังเดิมเนื่องจากองค์ประกอบของตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไม่ได้กล่าวถึงการหาผลลัพธ์ของปัญหา

4. ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ตารางที่ 27 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	จำนวนข้อที่ทดลองใช้	ข้อที่ทดลองใช้	จำนวนข้อที่ใช้จริง	ข้อที่ใช้จริง
เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** ● นำความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็มและสมบัติของเลขยกกำลัง มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ● นำความรู้เกี่ยวกับ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ● นำความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการเศษส่วน ทศนิยม มาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลคำตอบที่ได้	2	(1 , 2)	1	2
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ● เขียนสมการเชิงเสนตัวแปรเดียวจากสถานการณ หรือปญหาอย่างงายได้ ● แกโจทยปญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเสนตัวแปรเดียวอยางงายพรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	3	(3 , 4 , 5)	2	4 , 5
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ● นำความรูเกี่ยวกับ อัตราสวน สัดสวน และ รอยละ มาใช้ในการแกโจทย์ปญหาพรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	2	(6 , 7)	1	7
รวม	9	9	5	5

ตารางที่ 28 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน รายข้อ

ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.8631

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ข้อที่ทดลองใช้	ค่าความยาก(P)	ค่าอำนาจจำแนก (D)	ความหมาย
เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง	1	0.637	0.555	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	2	0.559	0.633	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกสูง
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	3	0.621	0.320	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง
	4	0.656	0.531	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	5	0.594	0.656	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกสูง
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ	6	0.445	0.484	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	7	0.535	0.539	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
เรื่องการวัด	8	0.535	0.617	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกสูง
	9	0.589	0.617	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกสูง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

5. ตารางการวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับจำนวนข้อของแบบวัดความสามในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 29 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	จำนวนข้อที่ทดลองใช้	ข้อที่ทดลองใช้	จำนวนข้อที่ใช้จริง	ข้อที่ใช้จริง
เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว • แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบได้ และตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้	5	1 , 2 , 3 , 4, 5	3	2 , 3 , 5
เรื่องการแปรผัน • แกโจทยปญหาเกี่ยวกับการแปรผัน พรอมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ	3	6 , 7 , 8	2	7 , 8
รวม	8	8	5	5

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 30 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน รายข้อ

ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.9455

กลุ่มเนื้อหา – ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ข้อที่ทดลองใช้	ค่าความยาก(P)	ค่าอำนาจจำแนก (D)	ความหมาย
เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว	1	0.727	0.359	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง
	2	0.695	0.578	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	3	0.715	0.555	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	4	0.711	0.547	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	5	0.746	0.477	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
เรื่องสมการกำลังสองตัวแปรเดียว	6	0.805	0.391	ง่ายมาก อำนาจจำแนกปานกลาง
	7	0.723	0.508	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	8	0.707	0.523	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

6. ตารางวิเคราะห์กลุ่มเนื้อหาและตัวชี้วัดกับจำนวนข้อของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน-ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 31 ตารางสรุปคุณภาพรายข้อของแบบวัดความสามารถในใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน

ตัวชี้วัด / กลุ่มเนื้อหา	ตัวชี้วัดที่ 1 การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ				ตัวชี้วัดที่ 2 การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา			
	จำนวนข้อที่ทดลองใช้	**ข้อที่ทดลองใช้**	**จำนวนข้อที่ใช้จริง**	**ข้อที่ใช้จริง**	**จำนวนข้อที่ทดลองใช้**	**ข้อที่ทดลองใช้**	**จำนวนข้อที่ใช้จริง**	**ข้อที่ใช้จริง**
เรื่องจำนวนเต็มทศนิยมและเศษส่วนเลขยกกำลัง	5	1 , 2 ,3, 4 , 5	3	1 , 2 , 5	2	1 , 2	1	1
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	3	6 , 7 ,8	2	6 , 8	2	3 , 4	1	3
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ	5	9,10,11, 12,13	3	9 , 10 ,12	2	5 , 6	1	5
เรื่องการวัด	3	14 , 15 , 16	2	15 , 16	2	7 , 8	1	7
รวม	16	16	10	4	8	8	4	4

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 32 ตารางวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดของการทดลองใช้แบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน - ฉบับหลังเรียน รายข้อ

ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.875

ตัวชี้วัด / กลุ่มเนื้อหา	ตัวชี้วัดที่ 1 การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทางสังคมและทางกายภาพ				ตัวชี้วัดที่ 2 การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา			
	ข้อที่ทดลองใช้	ค่าความยาก(P)	ค่าอำนาจจำแนก (D)	ความหมาย	ข้อที่ทดลองใช้	ค่าความยาก(P)	ค่าอำนาจจำแนก (D)	ความหมาย
เรื่องจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วน เลขยกกำลัง	1	0.500	0.417	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง	1	0.583	0.583	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	2	0.667	0.50	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง	2	0.646	0.542	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	3	0.583	0.250	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง				
	5	0.458	0.500	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง				
เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	6	0.708	0.333	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง	3	0.479	0.375	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง
	8	0.500	0.417	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง	4	0.500	0.250	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง
เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ	9	0.604	0.375	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง	5	0.333	0.333	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	10	0.563	0.375	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง				
	11	0.438	0.292	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง				
	12	0.521	0.375	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง				
	13	0.625	0.333	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง				
เรื่องการวัด	14	0.542	0.250	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง	7	0.583	0.583	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง
	15	0.583	0.333	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง	8	0.728	0.250	ค่อนข้างง่าย อำนาจจำแนกปานกลาง
	16	0.438	0.375	ความยากปานกลาง อำนาจจำแนกปานกลาง				

ค่าความยาก

$p < 0.20$ ยากมาก

$0.20 \le p \le 0.39$ ค่อนข้างยาก

$0.40 \le p \le 0.59$ ยากปานกลาง

$0.60 \le p \le 0.80$ ค่อนข้างง่าย

ความยากที่เหมาะสม

$p > 0.80$ ง่ายมาก

ค่าอำนาจจำแนก

$0 \le d < 0.19$ อำนาจจำแนกต่ำ

$0.20 \le d \le 0.39$ อำนาจจำแนกปานกลาง

$0.40 \le d \le 0.59$ อำนาจจำแนกค่อนข้างสูง

$d \ge 0.60$ อำนาจจำแนกสูง

อำนาจจำแนกดี

ภาคผนวก ฉ
เครื่องมือวิจัย

1. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน
2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน
3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ฉบับหลังเรียน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เมื่อห้าปีที่แล้วพ่อมีอายุมากกว่าสิบเอ็ดเท่าของอายุของลูกอยู่ 2 ปี ถ้าในอีกสิบปีข้างหน้าพ่อมีอายุ 50 ปี อยากทราบว่าปัจจุบันพ่อและลูกมีอายุของรวมกันกี่ปี

1) การวิเคราะห์ปัญหา

ข้อมูลสำคัญที่ได้จากปัญหา คือ.....

.....

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ .....

.....

2) การบูรณาการความรู้และการวางแผนแก้ปัญหา

ความรู้ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา(ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ) .....

.....

ลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา 1) .....

2) .....

3) .....

3) การดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ

จงแสดงวิธีทำ

คำตอบ คือ.....

4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสะท้อนคิด

คำตอบของปัญหาเป็นไปได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

- ○ เป็นไปได้ เพราะ .....
- ○ เป็นไปไม่ได้ เพราะ .....

วิธีการที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาเหมาะสมหรือไม่ เพราะเหตุใด

- ○ เหมาะสม เพราะ .....
- ○ ไม่เหมาะสม เพราะ .....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

<u>ตอนที่ 1</u> การเลือกใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความคิดเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ทางสังคมและทางกายภาพ (ข้อละ 4 คะแนน)

จงใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจเป็น ภาพ / กราฟ / ตาราง / ตัวแปร / สัญลักษณ์ / ข้อความทางคณิตศาสตร์ หรือตัวแทนอื่น ๆ ในการแสดงข้อมูลต่อไปนี้ให้ได้รูปแบบมากที่สุด

ข้อที่ 1 อัตราส่วนของปริมาณเซอร์รี่ต่อปริมาณส้มต่อปริมาณกล้วย เป็น 4 : 3 : 4

รูปแบบที่ 1	รูปแบบที่ 2	รูปแบบที่ 3
รูปแบบอื่น ๆ		

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

<u>ตอนที่ 2</u> การสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา (ข้อละ 3 คะแนน)

จงใช้ ภาพ / กราฟ / ตาราง / ตัวแปร / สัญลักษณ์ หรือ ข้อความทางคณิตศาสตร์ ในการแสดงความเกี่ยวข้องของข้อมูลในสถานการณ์ต่อไปนี้ เพียง 1 รูปแบบ

1. ในการสอบชิงทุนรัฐบาลไปต่างประเทศมีเงื่อนไขว่าผู้ที่จะได้รับทุนจะต้องได้คะแนนอย่างน้อย 80 % ของคะแนนเต็มของทุกวิชารวมกัน ถ้าเด็กคนหนึ่งได้คะแนนดังนี้

วิชา	คะแนนเต็ม(คะแนน)	เปอร์เซ็นต์ของคะแนนที่ได้
วิทยาศาสตร์	40	.....
คณิตศาสตร์	40	90
ภาษาไทย	40	80
ภาษาอังกฤษ	80	.....

เมื่อเขาสอบได้เปอร์เซ็นต์ของคะแนนวิชาภาษาอังกฤษเป็นสองเท่าของวิชาวิทยาศาสตร์และคะแนนที่ได้**<u>เป็นจำนวนเต็ม</u>**

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางกุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช (นามสุกลเดิม วรสารนันท์) เกิดวันที่ 9 พฤษภาคม 2526 ภูมิลำเนาเดิม อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยม) สาขาวิชามัธยมศึกษา วิชาเอกวิทยาศาสตร์ทั่วไป – คณิตศาสตร์ จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2548 และสำเร็จครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2552 เมื่อปีการศึกษา 2555 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปัจจุบันเป็นพนักงานมหาวิทยาลัยตำแหน่ง AD5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University