บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยนี้ ได้แก่ ระบบจำนวน ระบบจำนวนที่แสดงในรูปแบบส่วนเติมเต็ม ระบบจำนวนซ้ำซ้อน รวมถึงการแปลงชุดตัวเลขแบบดั้งเดิมอีกด้วย นอกจากนี้ยังกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องของการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนไปสู่รูปแบบส่วนเติมเต็มของสองด้วยขั้นตอนวิธีแบบต่างๆ ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ในรูปแบบที่เหมือนกัน หากแต่แตกต่างกันในรายละเอียดของขั้นตอนวิธี และ ลักษณะของกระบวนการทำงาน รวมถึงงานวิจัยที่นำเสนอสถาปัตยกรรมออนเดอะฟลาย ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีในการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนไปสู่ระบบจำนวนแบบไม่ซ้ำซ้อน โดยมีลักษณะการทำงานแบบขนาน

2.1 ระบบจำนวน (Number System)

ระบบจำนวน (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน β โดยที่ β สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|\beta| > 1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) D ที่ตัวเลขสามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ X เป็นจำนวนใดๆ X สามารถแสดงได้ในเลขฐาน β ในรูปแบบ

$$X = (x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $i \le n,\ \exists n \in \mathbb{Z}$

โดยค่าเชิงตัวเลขของ X ฐาน β สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i \beta^i$$

ซึ่งค่าเชิงตัวเลขทั้งหมดที่แสดงได้สามารถเขียนให้อยู่รูปของเซต $P[\beta, D]$ ได้ดังนี้

$$P_n^m[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, m \le i \le n \right\}$$
$$P_n[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, i \le n \right\}$$

โดย $P_n^m[\beta, D]$ และ $P_n[\beta, D]$ เท่ากับ เซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้วนิยมให้ $D = \{0,1,\cdots,|\beta|-1\}$ ซึ่งเลขฐาน β เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ D จะถูกเรียกว่าเป็น ชุดตัวเลขแบบบัญญัติ (canonical digit-set) เช่น ชุดตัวเลขแบบบัญญัติในระบบจำนวนฐานสิบ คือ $\{0,1,\cdots,8,9\}$

2.2 จำนวนในรูปแบบส่วนเติมเต็ม (Complement Number Representation)

ระบบจำนวน (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน β โดยที่ β เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|\beta|>1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) D โดยที่ตัวเลขเป็นจำนวนจริงใดๆ

กำหนดให้ X เป็นจำนวนใดๆ X สามารถแสดงได้ในระบบฐาน β ในรูปแบบ

$$X = (x_{n+1}x_n x_{n-1}\cdots x_2 x_1 x_0)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $0 \le i \le n+1$

โดยค่าเชิงตัวเลขของ X ฐาน β สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = -x_{n+1}\beta^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i \beta^i$$

โดยพจน์ที่ x_{n+1} เป็นตัวเลขบ่งชี้เครื่องหมายกำกับ กล่าวคือ เป็นตัวระบุเครื่องหมายสำหรับค่าเชิงตัวเลขว่าเป็นจำนวนบวกหรือลบ ยกตัวอย่างเช่น $(-6)_{10}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มฐานสองได้คือ $(11111010)_2$ ซึ่งสามารถแสดงวิธีคำนวณค่าเชิงตัวได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(11111010)_2 &= (-1\times 2^7)+(1\times 2^6)+(1\times 2^5)+(1\times 2^4)+ \\ &\quad (1\times 2^3)+(0\times 2^2)+(1\times 2^1)+(0\times 2^0) \\ &= -6_{10}\end{aligned}$$

2.3 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (Redundant Number System)

อเวเซียนิส [1] ได้พัฒนาระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายหรือสามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าระบบจำนวนซ้ำซ้อน โดยมีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหาการเกิดสายการแพร่ตัวทดในการบวกกันของตัวเลข ระบบจำนวนนี้กำหนดให้ β เป็นเลขฐาน เมื่อ β เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $\beta > 2$ และกำหนดให้ D เป็นชุดตัวเลขแบบสมมาตร (symmetric digit-set) ที่มีช่วงค่าอยู่ระหว่าง

$\{d \in \mathbb{Z} \mid a \le d \le b\}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ซึ่ง $a \le 0 \le b$ และ $b = |a|$ โดยสามารถอธิบายคุณสมบัติของชุดตัวเลขแบบสมมาตรได้ด้านล่างนี้

สามารถกล่าวว่า ชุดตัวเลข D มีคุณสมบัติ

ไม่ซ้ำซ้อน (nonredundant for base β)	ต่อเมื่อ $b - a = \beta$
ซ้ำซ้อนน้อยที่สุด (minimally redundant for base β)	ต่อเมื่อ $b - a = \beta + 1$
ซ้ำซ้อนมากที่สุด (maximally redundant for base β)	ต่อเมื่อ $b - a = 2\beta - 1$

ในระบบจำนวนซ้ำซ้อน จำนวน X จะมีรูปแบบการแสดงค่ามากกว่าหนึ่งแบบ แต่จะมีค่าเชิงตัวเลข (Numerical Value) ที่เท่ากันในทุกรูปแบบที่แสดงได้ ยกตัวอย่างเช่น สมมติชุดตัวเลข D ให้มีค่าอยู่ในช่วง $\{\bar{7}, \bar{6}, \ldots 0, 6, 7\}$ บนเลขฐาน $\beta = 10$ และค่าเชิงตัวเลข $X = 295$ จะมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{1} & 5 \end{pmatrix}_{10} = 3 \times 10^2 + (-1) \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 295_{10}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \bar{5} \end{pmatrix}_{10} = 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + (-5) \times 10^0 = 295_{10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{7} & 0 & \bar{5} \end{pmatrix}_{10} = 1 \times 10^3 + (-7) \times 10^2 + 0 \times 10^1 + (-5) \times 10^0 = 295_{10}$$

โดยที่ $\bar{a}$ หมายถึง ตัวเลข $-a$

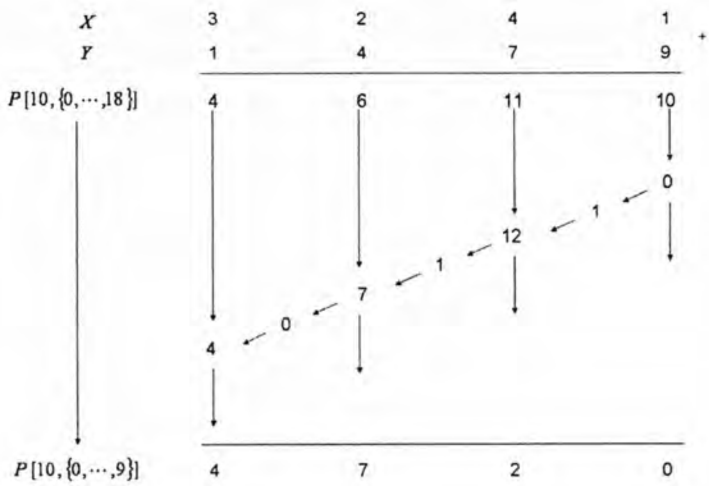
อย่างไรก็ตามชุดตัวเลขไม่ได้จำกัดอยู่แค่แบบสมมาตรเพียงเท่านั้น ต่อมาในภายหลัง ฟาร์ฮามี (Parhami) [12] ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับชุดตัวเลขแบบไม่สมมาตร (asymmetric digit-set) โดยกำหนดชุดตัวเลขที่มีช่วงค่าอยู่ระหว่าง $\{d \in \mathbb{Z} \mid a \le d \le b\}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ซึ่ง $a \le 0 \le b$ และ $b \ne |a|$ และ สามารถคำนวณหาจำนวนตัวเลขที่อยู่ในชุดตัวเลข D นั้นได้โดยสมการ $|D| = a + b + 1$

2.4 การแปลงชุดตัวเลข (Digit-Set Conversion)

กำหนดให้ D และ E เป็นชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) และกำหนดให้ β เป็นเลขฐานที่เป็นจำนวนจริง การแปลงชุดตัวเลขในระบบเลขฐาน β จากชุดตัวเลข D ไปชุดตัวเลข E สามารถเขียนเป็นสมการฟังก์ชันดังนี้

$$\chi : D^N \to E^N \text{ โดยที่ } X \in D^N, \|\chi(X)\| = \|X\|$$

การแปลงชุดตัวเลขจาก $D=\{d\in\mathbb{Z}\mid a\le d\le b\}$ โดยที่ $a\le 0\le b$ ไปเป็นชุดตัวเลข $E=\{e\in\mathbb{Z}\mid na\le e\le nb\}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ การแปลงชุดตัวเลขนี้ถือเป็นส่วนสำคัญของการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยเนื่องจากการคำนวณดังกล่าวสามารถพิจารณาให้อยู่ในรูปของการแปลงชุดตัวเลขได้ เช่น การบวก เป็นต้น ซึ่งสามารถแสดงตัวอย่างได้โดยการบวกเลขสองจำนวนบนฐานสิบ กำหนดให้ $X=3241$ และ $Y=1479$ การบวกเลขฐานสิบ สามารถพิจารณาเป็นการทำการแปลงชุดตัวเลขจาก ระบบจำนวนที่แสดงได้ใน $P[10,\{0,\cdots,18\}]$ ไปยังระบบจำนวนที่แสดงได้ใน $P[10,\{0,\cdots,9\}]$ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การบวกเลขสองจำนวนบนฐานสิบ

อนึ่งในการแปลงชุดตัวเลขนี้จำนวน X บางตัวที่สามารถแสดงได้ในระบบจำนวน $P[\beta,D]$ อาจไม่สามารถทำการแปลงไปเป็น Y ที่สามารถแสดงได้ในระบบจำนวน $P[\beta,E]$ ได้เสมอไป ยกตัวอย่างเช่น ค่าจำนวน $(\bar{1}101)_2$ ในระบบจำนวน $P[2,\{\bar{1},0,1\}]$ ไม่อาจแสดงค่าได้ในระบบจำนวน $P[2,\{0,1,2\}]$ เนื่องจากจำนวนลบในเซตที่หนึ่งไม่เป็นสมาชิกในเซตที่สอง เนื่องด้วยข้อจำกัดดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงสนใจการแปลงชุดตัวเลขของจำนวน X ในระบบเลขฐาน β ด้วยชุดตัวเลข $D=\{d\in \mathrm{Z}\mid a\le d\le b\}$ ไปเป็นจำนวน Y ในระบบเลขฐาน β ด้วยชุดตัวเลข $E=\{e\in \mathrm{Z}^{+}\cup\{0\}\mid 0\le e\le b\}$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่แสดงจำนวนลบได้โดยใช้การแสดงจำนวนให้อยู่ในรูปแบบของส่วนเติมเต็ม

2.5. การแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสอง ไปสู่รูปของส่วนเติมเต็มของสอง

จากงานวิจัยของอเวเซียนีส [1] ระบบจำนวนซ้ำซ้อนฐานสอง (redundant binary number) ได้ถูกคิดค้นขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาการสิ้นเปลืองทรัพยากรของระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบเก่า

และ ช่วยให้การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น ต่อมาภายหลังจึงได้มีการเสนอวิธีการแปลงตัวเลขจากจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองให้ไปอยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง [7-11] โดยมีขั้นตอนวิธีการแปลงที่เป็นที่สนใจสำหรับงานวิจัยนี้อยู่สามแบบด้วยกันที่แสดงให้เห็นถึงการพัฒนาของขั้นตอนวิธีในการแปลงชุดตัวเลขดังกล่าวจากอดีตสู่ปัจจุบัน คือ วิธีการแปลงของฮวง (Hwang) [7] วิธีการแปลงของโชและเดชมุค (Choo and Deshmukh) [10] และวิธีการแปลงของหว่องและทูล (Wong and Tull) [11]

วิธีการแปลงของฮวง

กำหนดให้ $X_{sd2} = (x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_2x_1x_0)_{sd2}$ เป็นจำนวนในระบบจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองโดย $x_i \in \{\,\overline{1},0,1\,\}$ ซึ่ง X_{sd2} สามารถแสดงค่าเชิงตัวเลขด้วยสมการ $\|X_{sd2}\| = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ มีขอบเขตค่าเชิงตัวเลขอยู่ในช่วง $[-(2^n-1), 2^n-1]$ และ กำหนดให้ $Y = (y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1, y_0)_2$ โดย $y_i \in \{\,0,1\,\}$ เป็นจำนวนส่วนเติมเต็มของสอง ซึ่ง Y สามารถแสดงค่าเชิงตัวเลขด้วยสมการ $-y_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} y_i 2^i$ มีขอบเขตของค่าเชิงตัวเลขอยู่ในช่วง $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$ เนื่องจากขอบเขตของจำนวนส่วนเติมเต็มของสอง มีขนาดเล็กกว่า X_{sd2} อาจทำให้ค่าบางค่าอาจไม่สามารถทำการแปลงได้ จึงต้องทำการเพิ่มขอบเขตค่าของตัวเลข Y โดยเพิ่มบิตตำแหน่งที่ n ซึ่งเป็นหลักที่มีนัยสำคัญมากสุด เพื่อให้การแปลงสามารถกระทำได้อย่างสมบูรณ์ ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง $Y_2 = (y_ny_{n-1}y_{n-2}\cdots y_2y_1y_0)_2$ จากนั้นเริ่มขั้นตอนการแปลงดังนี้

ขั้นตอนที่หนึ่ง ทำการแยกเครื่องหมายออกจากจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองโดยแบ่งออกเป็น 2 จำนวนคือ จำนวนที่แสดงถึงตัวเลขที่เป็นบวก และจำนวนที่แสดงถึงตัวเลขที่เป็นลบ โดยในขั้นตอนนี้หลังจากการแยกจะทำให้ได้ตัวเลขที่ไม่มีเครื่องหมายลบกำกับอยู่

$$Y_2 = X^{+}_{sd2} - X^{-}_{sd2}$$

โดยที่

$$X^{+}_{sd2} = \sum_{x_i=1} x_i 2^i$$

และ

$$X^{-}_{sd2} = \sum_{x_i=-1} (-x_i) 2^i$$

ขั้นตอนที่สอง ทำ X^{-}_{sd2} ให้อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง

ขั้นตอนที่สาม นำ X^{+}_{sd2} บวกกับผลลัพธ์จากการทำขั้นตอนที่ 2 โดยไม่ต้องสนใจตัวทดในตำแหน่งที่ n

ขั้นตอนที่สี่ เพิ่มบิตที่ตำแหน่ง $n+1$ โดยให้เท่ากับ 0 เมื่อ $x_{n-1} = 1$ และให้เท่ากับ 1 เมื่อ $x_{n-1} = \overline{1}$

ตัวอย่างการแปลง

$$X_{sd2} = (\overline{1} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \overline{1} \quad 0 \quad 0 \quad \overline{1} \quad 0 \quad 1)_{sd2}$$

ทำการแยกตัวเลขเป็น 2 จำนวน

$$X^{+}_{sd2} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)_2$$

$$X^{-}_{sd2} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)_2$$

ทำ X^{-}_{sd2} ให้อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง X_{compl}

$$X_{compl} = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)_2$$

นำมาบวกกับ X^{+}_{sd2}

$$\begin{array}{lcccccccccccccl}
X^{+}_{sd_2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
X_{compl} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & + \\
\hline
Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

เพิ่มบิตที่ตำแหน่ง $n+1$ ในที่นี้มีค่าเท่ากับ 1 เนื่องจาก $x_{n-1} = \overline{1}$

เพราะฉะนั้นผลลัพธ์ Y_2 จะเท่ากับ

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)_2$$

จากตัวอย่างดังกล่าว เห็นได้ว่าขั้นตอนวิธีการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองไปสู่รูปของส่วนเติมเต็มของสองโดยวิธีของฮวงนี้มีลักษณะการทำงานแบบลำดับ ถึงแม้ในขั้นตอนแรกการ

แบ่งจำนวนบวกและจำนวนลบสามารถทำงานได้ในลักษณะขนาน แต่ในภายหลังมีการบวกด้วยวิธีการบวกแบบเลขฐานสองปกติของจำนวน X^{+}_{sd2} และ X_{compl} ซึ่งมีลักษณะการทำงานแบบลำดับ

วิธีการแปลงแบบของโชและเดชมุค

การแปลงนี้มีแนวคิดคล้ายกับวิธีการแปลงของฮวง [7] คือ เริ่มต้นมีการแบ่งจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองออกเป็นสองส่วนคือ จำนวน X และ Y เช่นเดียวกัน แต่มีการใช้ขั้นตอนวิธีในการแปลงที่ต่างกัน โดยกฎการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองและกฎการบวกจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองมีดังนี้

กฎการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสอง

กำหนด RBN และ Y เป็นจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองใดๆ โดย $d_i \in RBN$ และ $y_i \in Y$ กำหนดให้ $X = \{1\}$ โดย $x_i \in X$

1) สำหรับบิตที่ n (LSB) ให้ $x_n = 1$

$y_n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $d_n = 1, \overline{1}$

$y_n = 1$ ก็ต่อเมื่อ $d_n = 0$

2) สำหรับบิตที่ $n-1$ ถึง 1 ให้ $x_i = 1$ และ

$y_i = 0$ ก็ต่อเมื่อ ($d_i = 0$ และ $d_{i+1} = \overline{1}, 0$) หรือ

ก็ต่อเมื่อ ($d_i = \overline{1}$ และ $d_{i+1} = 1$) หรือ

ก็ต่อเมื่อ ($d_i = 1$ และ $d_{i+1} = 1$)

$y_i = 1$ ก็ต่อเมื่อ ($d_i = 0$ และ $d_{i+1} = 1$)

$y_i = \overline{1}$ ก็ต่อเมื่อ ($d_i = \overline{1}$ และ $d_{i+1} = \overline{1}, 0$) หรือ

ก็ต่อเมื่อ ($d_i = 1$ และ $d_{i+1} = \overline{1}, 0$)

3) สำหรับบิตที่ 0 (MSB) ให้

$y_0 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $d_{i+1} = 1$ หรือ

$y_0 = \overline{1}$ ก็ต่อเมื่อ $d_{i+1} = 0, \overline{1}$

กฎการบวกจำนวนซ้ำซ้อนฐานสอง

วิธีการบวกของจำนวน X และ Y สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 กฎการบวกจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองโดยวิธีของโชและเดชมุค

ประเภท	ตัวตั้ง x_i	ตัวบวก y_i	ตัวทด c_i	ตัวทด c_{i+1}	ผลบวก s_i
<1>	0	0	-	0	0
<2>	0	1	1	1	-1
	1	0	-1,0	0	1
<3>	1	1	-	1	0
<4>	0	-1	-1	-1	1
	-1	1	1,0	0	-1
<5>	1	-1	-	0	0
	-1	1			
<6>	-1	-1	-	-1	0

หลังจากการแปลง *RBN* ออกเป็นสองจำนวน คือ จำนวน X และ Y แล้ว ต้องมีการนำกฎการบวกในตารางที่ 2.1 มาใช้ในการบวกระหว่างจำนวน X และ Y โดยคำตอบที่ได้ในตอนแรกก็คือ จำนวน C และ S โดยที่ C และ S เป็นตัวทดชั่วคราวและผลลัพธ์ชั่วคราวตามลำดับ ซึ่งยังไม่ใช่ผลลัพธ์ที่แท้จริง จึงจำเป็นต้องทำการคำนวณต่อโดยวิธีการบวกแบบเลขฐานสองปกติ แต่ไม่ต้องสนใจตัวทดที่เกิดขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบสุดท้าย (F) ที่อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง

ตัวอย่างการแปลง

RNS		1	0	1	$\bar{1}$	1	0	1	$\bar{1}$
					↓				
X		1	1	1	1	1	1	1	1
									+
Y	0	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0
S	0	0	0	0	1	0	0	0	1
									+
C	0	1	0	0	0	1	0	0	0
F	0	1	0	0	1	1	0	0	1

จากตัวอย่างดังกล่าว เห็นได้ว่าลักษณะการทำงานของขั้นตอนวิธีการแปลงของโชเป็นแบบลำดับเช่นเดียวกับวิธีของฮวง ทั้งในส่วนของการแบ่งจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองออกเป็นสองจำนวน และ ในขั้นตอนการบวกเลขสองจำนวนระหว่างจำนวน X และ จำนวน Y โดยใช้ตารางกฎการบวก ซึ่งค่าของตัวทดชั่วคราว c_i ในหลักที่มีนัยสำคัญมากสามารถทราบค่าได้ก็ต่อเมื่อต้องทราบค่าของตัวทดชั่วคราว c_{i-1} ในหลักที่มีนัยสำคัญน้อยเสียก่อน หลังจากนั้นจะเป็นการบวกระหว่างจำนวน S และจำนวน C ซึ่งสามารถกระทำได้ในลักษณะการทำงานแบบขนาน

วิธีการแปลงแบบของหว่องและทูล

กำหนดให้ $X_{sd2} = (x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_2x_1x_0)_{sd2}$ เป็นจำนวนในระบบจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองโดย $x_i \in \{\bar{1},0,1\}$ และ x_i สามารถแสดงได้ด้วยเลขฐานสองจำนวนสองบิต (S,D) ดังนี้ $(0,0) = (1,1) = 0$, $(1,0) = 1$, $(0,1) = \bar{1}$ และในการแปลงนี้จะมีการสร้างตัวแปร $C = (c_nc_{n-1}c_{n-2}\cdots c_2c_1c_0)_2$ โดย $c_i \in \{0,1\}$ เพื่อช่วยในการแปลง ซึ่ง c_i จะถูกสร้างขึ้นมาด้วยนิยามด้านล่างนี้

1) $c_i = 1$ ก็ต่อเมื่อ ต้องมีตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ -1 อยู่ทางขวามือของ x_i และต้องไม่มีตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 1 อยู่ระหว่างตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ -1 นั้นๆ กับ x_i
2) $c_i = 0$ ก็ต่อเมื่อ นอกเหนือจากเงื่อนไขจากข้อ 1
3) $c_0 = 0$

นอกจากนี้ยังได้มีการสร้างตาราง ขึ้นมาเพื่อทำการจับคู่ระหว่างสมาชิกใน C และ X_{sd2} ให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ ที่อยู่ในรูป $B=(b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 b_0)_2$ โดย $b_i \in \{0,1\}$ ซึ่งแสดงโดยตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 กฎการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองของหว่องและทูล

ตัวเลขนำเข้า				ตัวเลขผลลัพธ์	
จำนวนซ้ำซ้อน			ตัวทดนำเข้า	ผลลัพธ์เลข	ตัวทดส่งออก
x_i	s_i	d_i	c_i	ฐานสอง b_i	c_{i+1}
0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0
-1	0	0	1	0	1
-1	0	0	0	1	1

จากตารางดังกล่าวสามารถเขียนเป็นสมการได้ คือ

$$b_i = \overline{c_i \oplus (s_i \oplus d_i)} \text{ และ}$$

$$c_{i+1} = \overline{s_i + d_i} + c_i \overline{s_i d_i}$$

โดยที่ $b_i \in B, c_i \in C, d_i \in D$ และ $s_i \in S$

ตัวอย่างการแปลงด้วยวิธีของหว่อง

$$X_{sd2} = (\bar{1} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{1} \quad 0 \quad 0 \quad \bar{1} \quad 0 \quad 1)_{sd2}$$

จากกฎการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองไปสู่ส่วนเติมเต็มของสอง สามารถหาค่าตัวทด C และ ผลลัพธ์ B ได้

$$C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)_2$$

$$B = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)_2$$

ซึ่งผลลัพธ์ B เป็นจำนวนที่อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง

จากตัวอย่างดังกล่าว เห็นได้ว่ามีขั้นตอนวิธีที่ไม่ซับซ้อนโดยใช้เพียงตารางเดียวในการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองไปสู่รูปของส่วนเติมเต็มของสอง โดยมีลักษณะการทำงานแบบลำดับ สังเกตได้จากตารางที่ 2.2 ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง b_i ณ หลักใดๆ สามารถทราบได้ก็ต่อเมื่อทราบค่า c_i จากหลักทางขวามือก่อน

โดยรวมจะเห็นได้ว่าขั้นตอนวิธีการแปลงของทั้งสามแบบต่างก็มีลักษณะการทำงานแบบลำดับ และ เวลาการทำงานเป็นเชิงเส้น และไม่ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการแปลงในรูปทั่วไปสำหรับจำนวนซ้ำซ้อนฐานอื่นๆ ไว้ ขั้นตอนวิธีที่ได้ยกตัวอย่างมาจึงใช้กับการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนฐานสองเพียงอย่างเดียว ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึง การแปลงชุดตัวเลขแบบออนเดอะฟลายซึ่งเป็นเทคนิคที่ถูกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้เพื่อทำการแปลงชุดตัวเลขได้ในลักษณะขนาน ทำให้การคำนวณมีประสิทธิภาพมากขึ้น

2.6 การแปลงแบบออนเดอะฟลาย (On-the-fly Conversion)

ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของคอมพิวเตอร์การแปลงชุดตัวเลขถือเป็นขั้นตอนที่มีส่วนสำคัญของประสิทธิภาพในการประมวลผล เนื่องจากในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวก ก็นับเป็นการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลขหนึ่งไปยังอีกชุดตัวเลขหนึ่งในระบบจำนวนเลขฐานเดียวกันด้วย ทำให้มีการพัฒนางานวิจัยที่เสนอขั้นตอนวิธีแบบต่างๆ ในการแปลงชุดตัวเลขด้วยกันหลายวิธี เช่น การแปลงโดยใช้ขั้นตอนวิธีแบบเชื่อมตรง (on-line algorithm) [4] หรือ การแปลงโดยใช้ออนเดอะฟลาย [3] ซึ่งวิธีการแปลงโดยใช้สถาปัตยกรรมออนเดอะฟลายนี้เองที่เป็นที่สนใจของงานวิจัยนี้ โดยให้ความสนใจในการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนไปสู่ระบบจำนวนแบบไม่ซ้ำซ้อน กล่าวคือ

ในการแปลง $P \in P[\beta, D]$ โดยที่ $P = \sum_{i=l}^{n} d_i \beta^i$, $d_i \in D$ ไปเป็น $Q \in P[\beta, E]$ โดย $\|P\| = \|Q\|$ และ $D \neq E$ จะมีนัยสำคัญดังนี้

กำหนดชุดตัวเลข E ให้มีคุณสมบัติสมบูรณ์ และไม่ซ้ำซ้อน กำหนดเซต C ให้เป็นเซตของตัวทด c เราสามารถเขียนตัวเลข d ใดๆที่อยู่ในชุดตัวเลข D ให้อยู่ในรูปสมการของการแปลงจาก $P[\beta, D]$ ไป $P[\beta, E]$ ได้เท่ากับ $d = c\beta + e$ โดย $e \in E$ และ $c \in C$ แต่ในปกติก่อนการแปลงจะต้องทำการรวมตัวทดที่ได้มา (incoming carry) เข้ากับ d ก่อน แล้วจึงคิดรวมกับตัวทดที่ส่งออกไป (outgoing carry) ในภายหลัง เพราะฉะนั้นจะได้ ความสัมพันธ์การแปลงระหว่างชุดตัวเลข (conversion mapping α)

$$\alpha : C \times D \rightarrow C \times E$$

ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$c' + d = c\beta + e$$

กำหนดให้ เลขฐาน $\beta = 3$ ชุดตัวเลข $D = \{0,1,2\}$ และ ชุดตัวเลข $E = \{\bar{1},0,1\}$ สามารถสร้างตารางจับคู่ได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ตารางจับคู่ระหว่างตัวทด c และตัวเลข d

		D		
	α	0	1	2
C	0	00	01	$1\bar{1}$
	1	01	$1\bar{1}$	10

โดยค่าต่างๆ ที่อยู่ในตารางจะถูกแสดงในรูปของ ce ซึ่งแสดงถึง $(c,e) \in C \times E$

จากสมการแนวคิดสมการความสัมพันธ์การแปลงระหว่างชุดตัวเลข สามารถเขียนเซตของฟังก์ชันตัวทด C ได้ $\{\gamma_d\}, \gamma_d : C \to C$ โดยที่ $d \in D$ เรียกว่า ฟังก์ชันการส่งผ่านตัวทด (carry transfer function) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\forall c \in C : \gamma_d(c) = c' \text{ โดย } \alpha(c,d) = (c',e)$$

โดยที่ γ_d เป็นฟังก์ชันที่อธิบายเกี่ยวกับการจับคู่ (mapping) ค่าของตัวทดที่เข้ามา (c) ไปยังค่าของตัวทดที่ส่งออกไป (c') โดยผ่านดิจิต d หนึ่งๆ เท่านั้น ซึ่งเราสามารถเขียนฟังก์ชันการจับคู่นี้ผ่าน d ทุกตัวที่อยู่ใน D ได้ดังนี้

$$\gamma_{d_k d_{k-1} \ldots d_i}(c) \quad = \quad \gamma_{d_k}(\gamma_{d_{k-1}}(\cdots \gamma_{d_i}(c)\cdots))$$

หรือ

$$\gamma_{d_k d_{k-1} \ldots d_i} \quad = \quad \gamma_{d_k} \circ \gamma_{d_{k-1}} \circ \cdots \circ \gamma_{d_i}$$

โดย $\circ$ เป็นการประกอบฟังก์ชัน (composite of functions) และจากฟังก์ชันนี้เองทำให้สามารถหา c ใดๆได้โดยกำหนดให้ c เริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 0

$$c_i \quad = \quad \gamma_{d_k d_{k-1} \ldots d_i}(0)$$

เมื่อเราสามารถหาฟังก์ชันที่ทำการสร้างตัวทดได้แล้ว ก็สามารถหาฟังก์ชันในการหาผลลัพธ์ e สามารถทำได้ด้วย ฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข (digit mapping function) $\{\varepsilon_d\}, \varepsilon_d : C \rightarrow \varepsilon$ โดยที่ $d \in D$ ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$e_i = \varepsilon_{d_i}(\gamma_{d_k d_{k-1} \ldots d_i}(0))$$

ยกตัวอย่างเช่น การทำการแปลงชุดตัวเลข $D = \{\bar{3}, \bar{2}, \cdots, 2, 3\}$ ไปเป็นชุดตัวเลข $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ โดยเลขฐาน $\beta = 3$ และชุดตัวทด $C = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ซึ่ง กำหนดให้จำนวน $d = 3\bar{2}112\bar{2}11$ จะได้ตัวทด C และผลลัพธ์ E ได้ดังนี้

คำนวณค่า c จากสมการฟังก์ชันประกอบ

$$
\begin{array}{lcccc}
c_0 & = & \gamma_0(0) & = & 0 \\
c_1 & = & \gamma_1\gamma_0(0) & = & 0 \\
c_2 & = & \gamma_2\gamma_1\gamma_0(0) & = & \bar{1} \\
\vdots & & & & \\
c_7 & = & \gamma_7\gamma_6\gamma_5\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0(0) & = & 1
\end{array}
$$

$$\therefore c_i = (1 \quad \bar{1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{1} \quad 0 \quad 0)$$

คำนวณค่า e จากสมการฟังก์ชันจับคู่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลข

$$
\begin{array}{lcccc}
e_0 & = & \varepsilon_{d_0}(0) & = & 1 \\
e_1 & = & \varepsilon_{d_1}(0) & = & 1 \\
e_2 & = & \varepsilon_{d_2}(0) & = & 1 \\
\vdots & & & & \\
e_8 & = & \varepsilon_{d_8}(0) & = & 1
\end{array}
$$

$$\therefore e_i = (1 \quad \bar{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

เพราะฉะนั้น $d = (3\bar{2}112\bar{2}11), d \in D$ จะถูกแปลงเป็น $e = (1\,\bar{1}1111111), e \in E$