บทที่ 3

สมการการนำความร้อนและการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในวิทยานิพนธ์นี้จะทำคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมโดยใช้สมการการนำความร้อน ซึ่งสมการการนำความร้อนในวิทยานิพนธ์นี้ไม่สามารถคำนวณโดยวิธีแม่นตรง (exact solution) ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method)

3.1 สมการการนำความร้อน (Conduction Equation) [8]

สมการการนำความร้อนเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากการอนุรักษ์พลังงานภายในก้อนวัตถุ สมการดังกล่าวนี้ได้มาจากการสมดุลพลังงานของก้อนวัตถุชิ้นเล็กๆที่ความร้อนกำลังไหลผ่านโดยการนำความร้อน หากพิจารณาว่าการพาความร้อนและการแผ่รังสีความร้อนในก้อนวัตถุมีค่าน้อยมากจนสามารถที่จะตัดทิ้งได้ อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำความร้อนนี้มีความสัมพันธ์กับการกระจายอุณหภูมิภายในก้อนวัตถุตามกฎของฟูเรียร์

สมการการนำความร้อนรูปทั่วๆไปนั้นจะรวมเอาพลังงานที่เก็บไว้ภายในก้อนวัตถุเข้าไปด้วย จากวิชาเทอร์โมไดนามิกส์นั้นทราบกันแล้วว่า ถ้าอุณหภูมิของวัตถุใดเพิ่มขึ้น พลังงานภายในของวัตถุก้อนนั้นก็จะเพิ่มตามขึ้นไปด้วย ดังนั้นพลังงานสุทธิที่เก็บไว้ภายในก้อนวัตถุก็จะแปรตามอุณหภูมิซึ่งเปลี่ยนแปลงตามเวลา หากอุณหภูมิของวัตถุคงที่แล้ว ก็จะไม่มีการเก็บพลังงานเพิ่มเติมเข้าไปในวัตถุ และจะเรียกวัตถุที่อยู่ในสภาวะดังกล่าวว่าอยู่ในสภาวะที่ค่าต่างๆคงที่หรือไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแล้ว

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนนั้นสามารถจำแนกออกได้อย่างกว้างๆตามตัวแปรที่มีผลกระทบต่ออุณหภูมิดังนี้

- ถ้าอุณหภูมิของระบบไม่ขึ้นอยู่กับเวลาแล้ว ปัญหานั้นจะได้ชื่อว่าเป็นปัญหาที่สภาวะคงที่ (steady state problem)
- ถ้าอุณหภูมิของระบบยังเปลี่ยนแปลงหรือยังแปรตามเวลา ปัญหานั้นก็จะถูกจัดให้เป็นปัญหาที่สภาวะไม่คงที่ (unsteady หรือ transient state problem)

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนนี้สามารถจำแนกตามมิติของแกนที่มีผลกระทบต่ออุณหภูมิได้อีกดังนี้

- ถ้าหากระบบเป็นฟังก์ชันของแกนเพียงแกนเดียว ปัญหานั้นก็จะเป็นปัญหาของการถ่ายเทความร้อนแบบมิติเดียว (one dimension)
- ถ้าหากระบบเป็นฟังก์ชันของแกนถึงสองหรือสามแกน ปัญหานั้นก็จะเป็นปัญหาของการถ่ายเทความร้อนแบบ2 หรือ 3 มิติ (2 or 3-dimension)

สำหรับปัญหาที่อุณหภูมิเป็นปัญหาฟังก์ชันของเวลาและเป็นฟังก์ชันของแกน x ในระบบแกนพิกัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular coordinate) หรือ $T = T(x,t)$ แล้ว ปัญหาดังกล่าวก็จะเป็นปัญหาที่ความร้อนไหลในทิศทางเดียวที่สภาวะต่างๆยังไม่คงที่หรือยังแปรตามเวลา (one dimension transient) แต่ถ้าเป็นระบบแกนของวัตถุรูปทรงกระบอกที่ $T = T(r,\phi)$ กล่าวคืออุณหภูมิขึ้นกับพิกัดในสองมิติและไม่ได้เปลี่ยนแปลงกับเวลาแล้ว ปัญหานั้นก็จะเป็นปัญหาของการถ่ายเทความร้อนแบบ 2 มิติ หรือ 2 ทิศทางที่สภาวะคงที่ (2-dimension and steady)

ระบบแกนของวัตถุในพิกัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular Coordinate)

ให้พิจารณาวัตถุชิ้นเล็กๆที่ทำหน้าที่เป็นระบบควบคุมปริมาตรซึ่งอยู่ภายในก้อนวัตถุที่มีเนื้อสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันทั้งก้อน และมีค่า ρ, c_p และ k คงที่ ดังรูปที่ 3.1 วัตถุชิ้นเล็กๆนี้มีด้านยาวเท่ากับ dx, dy และ dz ตามลำดับ และเมื่อนำกฎการอนุรักษ์พลังงานมาใช้กับระบบควบคุมปริมาตรที่เป็นชิ้นเล็กๆนี้แล้ว จะได้ความสัมพันธ์ว่า

อัตราการนำความร้อนที่ไหลเข้าวัตถุ	+	อัตราความร้อนที่เกิดขึ้นในวัตถุ	=	อัตราการนำความร้อนที่ไหลออกจากวัตถุ	+	อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของวัตถุ

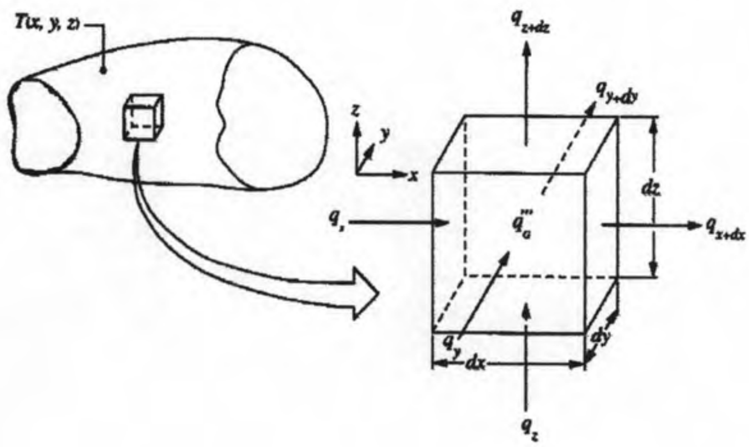
และเมื่อเขียนอยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์แล้ว จะได้

$$\left(q_x + q_y + q_z\right) + q_G''dxdydz = \left(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}\right) + c_p\rho\left(dxdydz\right)\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.1)$$

เมื่อ q_G'' คืออัตราความร้อนที่เกิดขึ้นต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัตถุ

T คืออุณหภูมิของวัตถุฟังก์ชันของแกน $x\ y\ z$

t คือเวลา



รูปที่ 3.1 ระบบแกนของวัตถุในพิกัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จากกฎของฟูเรียร์จะได้อัตราการนำความร้อนที่ไหลเข้าสู่วัตถุชิ้นเล็กๆ ในทิศทาง x เป็น

$$q_x = \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdy \tag{3.2}$$

ส่วนอัตราการนำความร้อนที่ไหลออกจากวัตถุชิ้นเล็กๆ ในทิศทาง x ก็มีค่าเป็น

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot dx = \left[\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dydz \tag{3.3}$$

ฉะนั้น เมื่อนำอัตราการนำความร้อนที่ไหลออกไปหักออกจากอัตราการนำความร้อนที่ไหลเข้าในทิศทาง x แล้ว จะได้

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\cdot dy\cdot dz = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\cdot dy\cdot dz \tag{3.4}$$

ในทำนองเดียวกัน ตามทิศทาง x และ z ก็จะได้

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dx\cdot dy\cdot dz = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dx\cdot dy\cdot dz \tag{3.5}$$

และ

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\cdot dy\cdot dz = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}dx\cdot dy\cdot dz \tag{3.6}$$

แทนค่าความแตกต่างของอัตราการนำความร้อนจากแต่ละแกนลงไปในสมการที่ 3.1 จากนั้นหารด้วย $dx \cdot dy \cdot dz$ ซึ่งเป็นปริมาตรของวัตถุชิ้นเล็กๆก้อนนั้น จะได้สมการการถ่ายเทความร้อนโดยการนำแบบ 3 มิติในรูปทั่วไปๆไปเป็น

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+q'''_G = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.7}$$

เทอมต่างๆในสมการ มีความหมายดังนี้ สามเทอมแรกที่อยู่ทางด้านซ้ายมือหมายถึงอัตราการนำความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่ไหลเข้าสู่ระบบควบคุมปริมาตร เทอมสุดท้ายที่อยู่ทางด้านซ้ายมือเป็นอัตราความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่เกิดขึ้นในวัตถุ ส่วนเทอมสุดท้ายที่อยู่ทางด้านขวามือนั้นเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัตถุซึ่งทำหน้าที่เป็นระบบควบคุมปริมาตรเทอมต่างๆเหล่านี้ในระบบเอสไอจะมีหน่วยเป็น W/m^3 และรูปสมการที่นิยมใช้กันก็คือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q'''_G}{k} = \frac{c_p \rho}{k}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.8}$$

เมื่อ $$\alpha = \frac{k}{c_p \rho}$$

ค่า α นี้มีชื่อเรียกว่า ค่าการแพร่ความร้อน (thermal diffusivity) และมีหน่วยเป็น m^2/s

ถ้าหากนำลาปลาเซียนโอเปอเรเตอร์ (Laplacian operator) มาแทนเทอมที่เป็นค่าการนำความร้อนสุทธิแล้ว จะทำให้สามารถตัดปัญหาเรื่องการขึ้นอยู่กับระบบของแกนทิ้งจากการวิเคราะห์ได้ลาปลาเซียนโอเปอเรเตอร์ของแต่ระบบแกนนั้นจะมีรูปแตกต่างกันลาปลาเซียนโอเปอเรเตอร์ในระบบแกนของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปทรงกระบอก และรูปทรงกลมนั้นอยู่ สมการการนำความร้อนที่เขียนในรูปของลาปลาเซียนโอเปอเรเตอร์นั้นคือ

$$\nabla^2 T + \frac{q'''_G}{k} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.9}$$

ตารางที่ 3.1 รูปของลาปลาเซียนโอเปอเรเตอร์ในระบบแกนต่างๆ

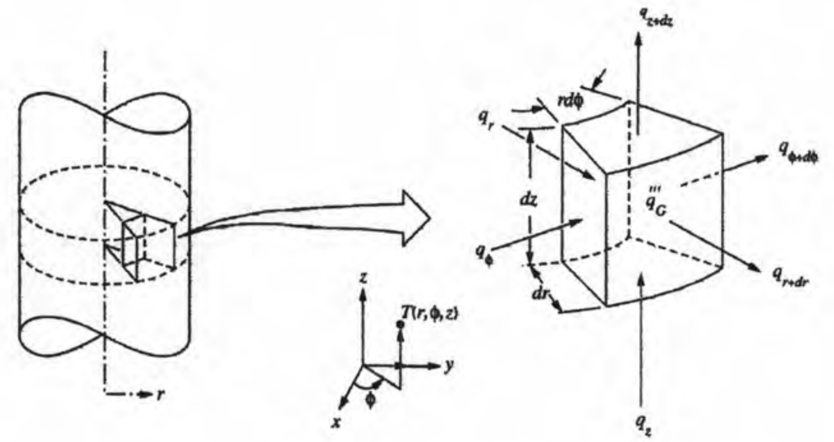
ระบบแกน (coordinate system)	ลาปลาเซียน (laplacian) $\nabla^2 T$
พิกัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular), $T = T(x,y,z)$	$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
พิกัดทรงกระบอกกลม (cylindrical), $T = T(r,\phi,z)$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
พิกัดทรงกลม (spherical), $T = T(r,\theta,\phi)$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$

ระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate)

ในกรณีของวัตถุรูปทรงกระบอกที่อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของแกน 3 แกน และเป็นฟังก์ชันของเวลาหรือ $T = T(r,\phi,z,t)$ และมีความร้อนเกิดขึ้นในวัตถุ จะมีสมการการนำความร้อนรูปทั่วๆไปเป็น

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_G'''}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.10)$$

การนำความร้อนในระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกระบอกนั้นมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.2



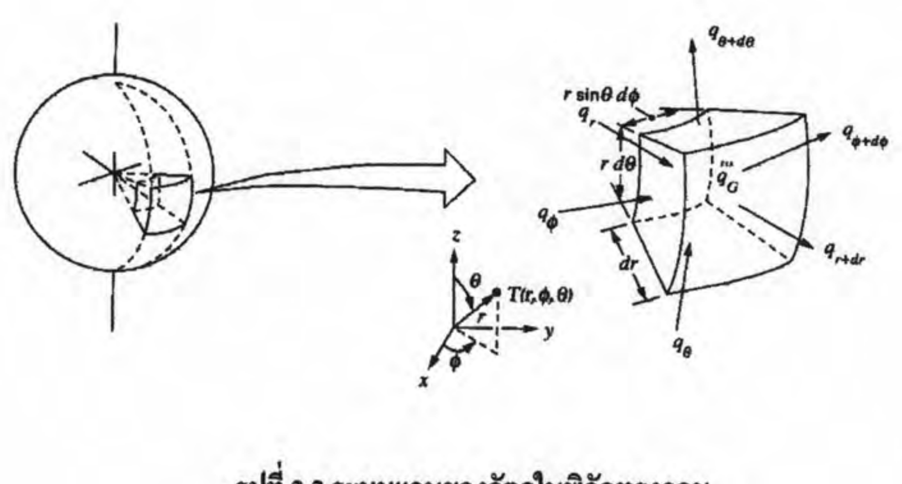
รูปที่ 3.2 ระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกระบอก

ระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate)

ในกรณีของวัตถุรูปทรงกลมที่อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของแกน 3 แกน และเป็นฟังก์ชันของเวลาหรือ $T = T(r,\theta,\phi,t)$ และมีความร้อนเกิดขึ้นในวัตถุ จะมีสมการการนำความร้อนรูปทั่วๆไปเป็น

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{q'''_G}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.11}$$

การนำความร้อนในระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกลมนั้นมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ระบบแกนของวัตถุในพิกัดทรงกลม

3.2 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข [11]

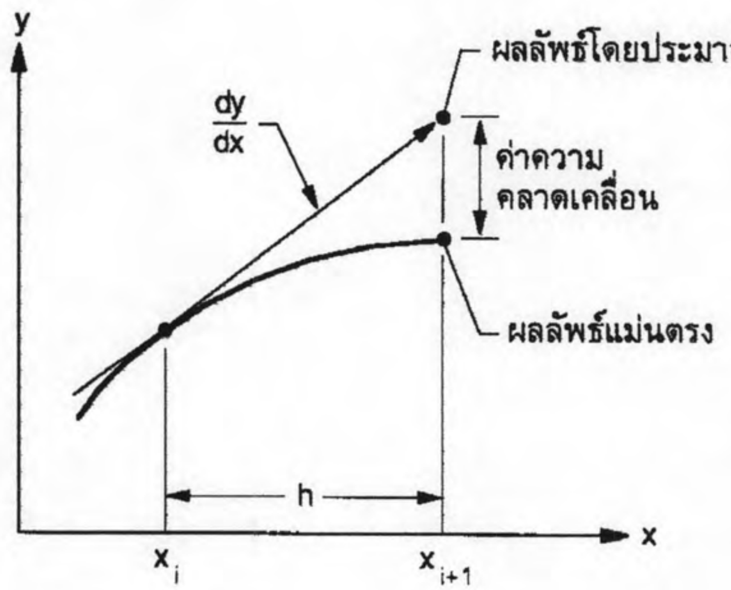
วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นมีหลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) ระเบียบวิธีของฮวน (Heun's method) ระเบียบวิธีการของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Modified Euler's method) ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta's method) เป็นต้น ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ระเบียบวิธีของฮวน แต่ก่อนที่จะศึกษาระเบียบวิธีการของฮวน จำเป็นจะต้องเข้าใจระเบียบวิธีการของออยเลอร์ก่อน

3.2.1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์

ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจมากที่สุดสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.12}$$

หลักการที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ สามารถอธิบายได้โดยใช้รูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ระเบียบวิธีของออยเลอร์

จากรูปที่ 3.4 นี้ เราจะหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จากผลลัพธ์ y_i ซึ่งรู้ค่าที่ x_i โดยใช้ค่าของความชันที่ x_i ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{3.13}$$

โดย $h = x_{i+1} - x_i$ คือความกว้างช่วง (step size) ที่ใช้ในการคำนวณ ทำการแทนค่าของความชันที่ x_i จากสมการ (3.12) นี้ ลงในสมการ (3.11) จะได้

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \tag{3.14}$$

นั่นคือ

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{3.15}$$

ซึ่งหมายความว่า เราสามารถทำการคำนวณโดยเริ่มจากเงื่อนไขเริ่มต้นของ y_i ที่ x_i และสามารถคำนวณค่า y_{i+1} ใหม่จากความกว้างช่วง h ที่กำหนดให้ และจากรูปที่3.4 เราจะเห็นได้ว่า ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์โดยประมาณนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าที่ใช้ในการคำนวณนี้ กล่าวคือ ยิ่งใช้ h ที่มีค่าน้อยเท่าใด ก็จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้นเท่านั้น

3.2.2ระเบียบวิธีของฮวน

ระเบียบวิธีของฮวน (Heun's method) เป็นระเบียบวิธีที่ดัดแปลงมาจากระเบียบวิธีของออยเลอร์เพื่อก่อเกิดผลลัพธ์จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ในระเบียบวิธีของออยเลอร์ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์โดยประมาณที่คำนวณได้จะมีความเที่ยงตรงมากขึ้นหากเราลดขนาดช่วงความกว้าง h ลง หรือหากเราสามารถคำนวณค่าความชัน $(y' = dy/dx)$ ให้มีความเที่ยงตรงได้มากยิ่งขึ้น ค่าความชันในระเบียบวิธีของออยเลอร์นั้นคำนวณที่จุดต้นของความกว้างช่วงที่ตำแหน่ง x_i นั้นคือ

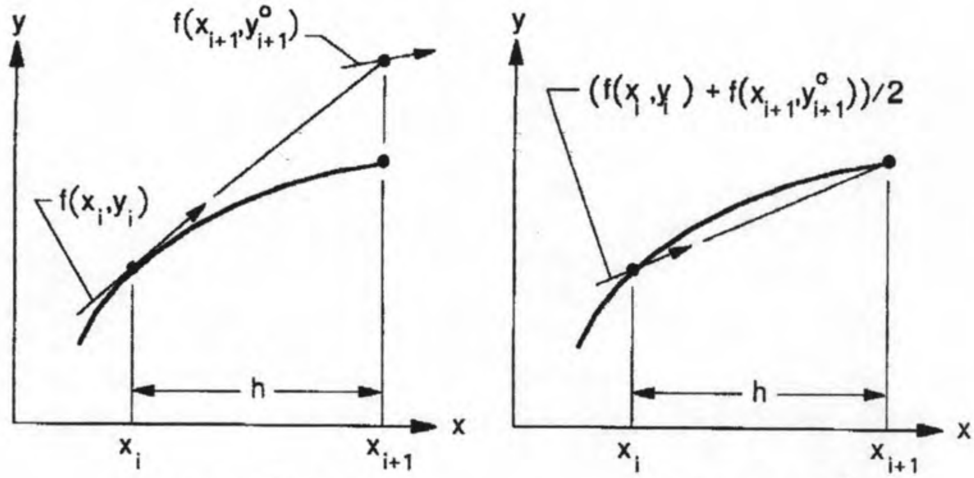
$$y_i' = f(x_i, y_i) \tag{3.16}$$

แล้วจึงนำไปใช้ในการคำนวณค่าผลลัพธ์โดยประมาณที่ x_{i+1} ดังนี้

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{3.17}$$

หากเรานำค่าที่ได้นี้ไปคำนวณหาค่าความชันที่จุดปลายของความกว้างช่วงที่ x_{i+1} ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ก) เราจะได้

$$y_{i+1}' = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) \tag{3.18}$$



(ก) ความชันที่ x_i และ x_{i+1} (ข) ความชันเฉลี่ย

รูปที่ 3.5 ระเบียบวิธีของฮวน

หลักการในระเบียบวิธีของฮวน ก็คือ เราจะนำค่าความชันที่จุดเริ่มต้นและจุดปลายของความกว้างช่วงนี้มาทำการเฉลี่ยกัน ซึ่งจะก่อให้เกิดค่าเฉลี่ยที่ใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ข) และหากเราใช้ค่าเฉลี่ยนี้ในการคำนวณ เราควรจะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้นตามไปด้วย

จากสมการที่ 3.15 และ 3.17 ค่าความชันเฉลี่ยคือ

$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} \tag{3.19}$$

ดังนั้น คำตอบของผลลัพธ์โดยประมาณที่ตำแหน่ง x_{i+1} คือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h \tag{3.20}$$