

## บทที่ 4

### วิธีการและขั้นตอนดำเนินการงานวิจัย

การดำเนินการวิจัยนี้แบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอนหลักคือ (1) การกำหนดอุณหภูมิที่ผิวของทรงกลมและ (2) การคำนวณหาอุณหภูมิภายในทรงกลมและค่าฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นและเปลี่ยนแปลงกับเวลา

#### 4.1 การกำหนดอุณหภูมิที่ผิวของทรงกลม

การกำหนดค่าอุณหภูมิที่ผิวของทรงกลมในวิทยานิพนธ์นี้มี 2 แบบ คือ

##### 1. อุณหภูมิที่ผิวมีค่าคงที่

การกำหนดอุณหภูมิลักษณะนี้มีประโยชน์เพื่อทดสอบระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ทรงกลมมีอุณหภูมิที่ผิวมีค่าคงที่ทำให้สามารถตรวจสอบผลการคำนวณและทดสอบเทคนิคการคำนวณได้อย่างถูกต้อง

##### 2. อุณหภูมิที่ผิวที่ประมาณได้โดยอ้างอิงจากผลการทดลอง

การกำหนดอุณหภูมิลักษณะนี้จะให้ผลที่สอดคล้องกับสถานการณ์จริงมากขึ้น อย่างไรก็ตาม ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิจะเริ่มซับซ้อน ทำให้ต้องมีการดัดแปลงเงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

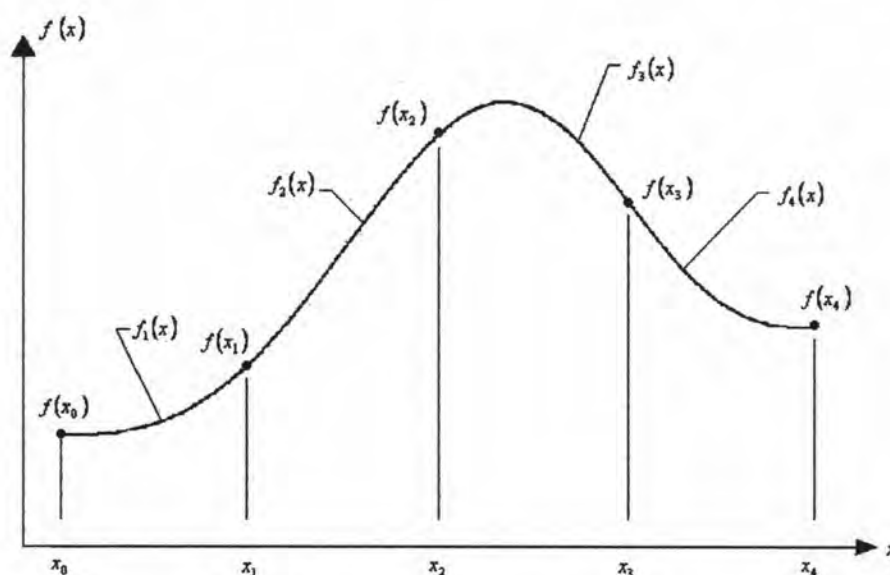
#### 4.2 การประมาณค่าในช่วง [11]

การทดลองส่วนใหญ่ในทางปฏิบัติทั้งทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มักจะให้ผลลัพธ์ในลักษณะของข้อมูลตามตำแหน่งต่างๆ ซึ่งเป็นข้อมูลเพียงบางจุดบางตำแหน่งเท่านั้น มีบ่อยครั้งที่เดียวที่วิศวกรหรือนักวิทยาศาสตร์ต้องการทราบข้อมูลเหล่านี้ที่ตำแหน่งอื่นๆซึ่งต่างไปจากตำแหน่งที่ได้วัดมานั้น ดังนั้นความเข้าใจในการประมาณค่าในช่วง จึงมีความสำคัญที่สามารถนำไปสู่การคำนวณเพื่อหาค่าที่เที่ยงตรงที่อยู่ตามตำแหน่งต่างๆนอกเหนือจากตำแหน่งที่วัดได้จากการทดลอง

#### การประมาณค่าในช่วงกำลังสาม

การสร้างฟังก์ชันเพื่อให้เชื่อมต่อข้อมูลด้วยการใช้เส้นโค้งกำลังสาม (cubic spline) การใช้เส้นโค้งกำลังสามนี้มีข้อดีเมื่อเปรียบเทียบกับเส้นโค้งกำลังสอง กล่าวคือ ในช่วงระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้ เส้นโค้งกำลังสองจะมีลักษณะการกระจายแบบเว้าเข้าหรือเว้าออกอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ในขณะที่เส้นโค้งกำลังสามสามารถมีลักษณะการกระจายแบบเว้าเข้าและเว้าออกที่

ต่อเนื่องกันในช่วงระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้ นั่นคือเส้นโค้งกำลังสามจึงเป็นที่นิยมใช้กัน โดยทั่วไปในการคำนวณหาค่าประมาณในช่วงข้อมูลเนื่องจากมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงของการกระจายที่ดีกว่า



รูปที่ 4.1 การประมาณค่าโดยใช้เส้นโค้ง

หากเรามีข้อมูลทั้งหมด 4 ข้อมูล ฟังก์ชันกำลังสามที่จำเป็นต้องคำนวณหาซึ่งเชื่อมต่อข้อมูลเหล่านี้คือ

$$f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (4.1a)$$

$$f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (4.1b)$$

$$f_3(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 \quad x_2 \leq x \leq x_3 \quad (4.1c)$$

$$f_4(x) = a_4x^3 + b_4x^2 + c_4x + d_4 \quad x_3 \leq x \leq x_4 \quad (4.1d)$$

โดย  $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, 3, 4$  เป็นค่าคงตัวที่ไม่รู้ค่า ซึ่งในที่นี้มีทั้งหมด 16 ค่า ดังนั้นจะต้องใช้สมการเพื่อระบุค่าคงตัวดังกล่าวเป็นจำนวน 16 สมการเช่นกัน สมการเงื่อนไขเหล่านี้สามารถระบุได้ดังต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันแรกต้องผ่านข้อมูลแรกที่  $x_0$  คือ

$$f_1(x_0) = a_1x_0^3 + b_1x_0^2 + c_1x_0 + d_1 \quad (4.2a)$$

และฟังก์ชันท้ายต้องผ่านข้อมูลท้ายที่  $x_4$  คือ

$$f_4(x_4) = a_4x_4^3 + b_4x_4^2 + c_4x_4 + d_4 \quad (4.2b)$$

ในกรณีของเงื่อนไขเช่นนี้ เราจะได้สมการเงื่อนไข 2 สมการ

2. ที่จุดต่อภายในใดๆ ฟังก์ชันจาก 2 ด้านที่เชื่อมเข้าหากันที่จุดต่อจำเป็นต้องมีค่าเท่ากันที่ตำแหน่งของจุดนั้น เช่น ที่จุดต่อ  $x_1$  เงื่อนไขที่เกิดขึ้นคือ

$$f_1(x_1) = a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = f(x_1) \quad (4.3a)$$

$$f_2(x_1) = a_2x_1^3 + b_2x_1^2 + c_2x_1 + d_2 = f(x_1) \quad (4.3b)$$

ในกรณีของเงื่อนไขเช่นนี้ เราจะได้สมการเงื่อนไข 6 สมการ สำหรับ 3 จุด  $x_1, x_2$  และ  $x_3$

3. ที่จุดต่อภายในใดๆ ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ซึ่งมีความหมายถึงค่าของความชันของฟังก์ชันทั้ง 2 ด้านของจุดต่อต้องมีค่าเท่ากันที่ตำแหน่งของจุดต่อนั้น เช่น ที่จุดต่อ  $x_1$  เงื่อนไขที่เกิดขึ้นคือ

$$f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \quad (4.4a)$$

$$3a_1x_1^2 + 2b_1x_1 + c_1 = 3a_2x_1^2 + 2b_2x_1 + c_2 \quad (4.4b)$$

ในกรณีของเงื่อนไขเช่นนี้ เราจะได้สมการเงื่อนไข 3 สมการ สำหรับ 3 จุด  $x_1, x_2$  และ  $x_3$

4. ที่จุดต่อภายในใดๆ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของฟังก์ชันทั้ง 2 ด้านของจุดต่อต้องมีค่าเท่ากันที่ตำแหน่งของจุดต่อนั้น เช่น ที่จุดต่อ  $x_1$  เงื่อนไขที่เกิดขึ้นคือ

$$f_1''(x_1) = f_2''(x_1) \quad (4.5a)$$

$$6a_1x_1 + 2b_1 = 6a_2x_1 + 2b_2 \quad (4.5b)$$

ในกรณีของเงื่อนไขเช่นนี้ เราจะได้สมการเงื่อนไข 3 สมการ สำหรับ 3 จุด  $x_1, x_2$  และ  $x_3$

5. สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันที่ตำแหน่งปลายทั้งสอง นั่นคือที่  $x_0$  และ  $x_4$  นั้นหากกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้ว่า

$$f_1''(x_0) = f_4''(x_4) = 0 \quad (4.6a)$$

$$6a_1x_0 + 2b_1 = 0 \quad (4.6b)$$

$$6a_4x_4 + 2b_4 = 0 \quad (4.6c)$$

ในกรณีของเงื่อนไขเช่นนี้ เราจะได้สมการเงื่อนไข 2 สมการ สำหรับ 2 จุด  $x_0$  และ  $x_4$

ดังนั้นจึงก่อให้เกิดระบบสมการซึ่งประกอบด้วย 16 สมการย่อยที่สามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ของค่าคงตัวที่ไม่รู้ค่าเหล่านี้ได้ ในรูปแบบดังแสดงในรูปที่ 4.2

$$\left[ \begin{array}{c} \phantom{a_1} \\ \phantom{b_1} \\ \phantom{c_1} \\ \phantom{d_1} \\ \vdots \\ \phantom{a_4} \\ \phantom{b_4} \\ \phantom{c_4} \\ \phantom{d_4} \end{array} \right] (16 \times 16) = \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{array} \right] \\ \left[ \phantom{a_1} \\ \phantom{b_1} \\ \phantom{c_1} \\ \phantom{d_1} \\ \vdots \\ \phantom{a_4} \\ \phantom{b_4} \\ \phantom{c_4} \\ \phantom{d_4} \end{array} \right] \end{array} \right\} (16 \times 1)$$

รูปที่ 4.2 ลักษณะเมทริกซ์ของสมการเงื่อนไข 16 สมการ

#### 4.3 วิธีการแก้สมการในรูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น

สำหรับปัญหาส่วนใหญ่ที่ต้องการคำนวณจะในรูปแบบของสมการๆ สมการ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น และต้องการแก้สมการเหล่านี้พร้อมกันเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ หากมีระบบสมการเชิงเส้นชุดหนึ่งที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3 \\ &\dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mm}x_m &= b_m \end{aligned} \quad (4.7)$$

การแก้ระบบสมการเหล่านี้สามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) ระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan method) ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (matrix inversion method) ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition method) เป็นต้น ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ในการแก้ระบบสมการ

### ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ [11]

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีการแก้ระบบสมการที่ได้รับความนิยมมากที่สุดระเบียบวิธีหนึ่ง เป็นระเบียบวิธีที่โดยมากจะใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์โดยทั่วไปที่มีจำนวนตัวแปรไม่มากจนเกินไปและมีขนาดของตัวเลขอันเป็นคำตอบสำหรับสมาชิกแต่ละตัวที่ไม่ต่างกันจนเกินไป ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ในภาพรวม สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้:

(1) การกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination) หากเรามีสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

การกำจัดไปข้างหน้าจะเปลี่ยนระบบสมการ ไปให้อยู่ในแบบซึ่งเมตริกซ์จัตุรัสทางด้านซ้ายของสมการ จะเป็นเมตริกซ์นั้นที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ตลอดแถวล่างซ้ายของเมตริกซ์ ในรูปแบบดังนี้ โดยเครื่องหมายที่เป็นครรชนิบนของสัมประสิทธิ์แสดงถึงว่าสัมประสิทธิ์นั้นเป็นค่าใหม่ ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปจากสัมประสิทธิ์เดิมในสมการ ทั้งนี้จะได้ว่า

ขั้นตอนแรกจะกำจัด  $a_{21}$  และ  $a_{31}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ที่ได้จะมีค่าดังนี้

$$a'_{22} = \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{11}} - a_{12} \quad (4.10a)$$

$$a'_{23} = \frac{a_{11} \cdot a_{23}}{a_{11}} - a_{13} \quad (4.10b)$$

$$a'_{32} = \frac{a_{11} \cdot a_{32}}{a_{11}} - a_{12} \quad (4.10c)$$

$$a'_{33} = \frac{a_{11} \cdot a_{33}}{a_{11}} - a_{13} \quad (4.10d)$$

$$b'_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2}{a_{11}} - b_1 \quad (4.10e)$$



$$b'_3 = \frac{a_{11} \cdot b_3}{a_{31}} - b_1 \quad (4.10f)$$

ขั้นตอนต่อไปจะกำจัด  $a'_{32}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ที่ได้จะมีค่าดังนี้

$$a''_{33} = \frac{a'_{22} \cdot a'_{33}}{a'_{32}} - a'_{23} \quad (4.12a)$$

$$b''_3 = \frac{a'_{22} \cdot b'_3}{a'_{32}} - b'_2 \quad (4.12b)$$

(2) การแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) เมื่อจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบของสมการได้แล้ว ก็เป็นการง่ายที่จะคำนวณหาค่า  $x_1$  โดยเริ่มจากสมการท้ายสุดก่อน แล้วทำการไล่ย้อนกลับขึ้นไปเพื่อหาค่า  $x_1$  ทีละสมการ ดังนี้

$$x_3 = b''_3 / a''_{33} \quad (4.13)$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22} \quad (4.14)$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} \quad (4.15)$$

กระบวนการสำหรับระบบที่มีมากกว่า 3 สมการก็สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกัน

#### 4.4 การคำนวณอุณหภูมิของทรงกลม

การคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมในวิชานี้จะใช้การคำนวณ 3 รูปแบบ ดังนี้

##### 1. การคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (4.16)$$

โดยมีสมมติฐานโดยมีสมมติฐานว่าในแนวแกนกลางมีอุณหภูมิสูงสุดจะทำให้อัตราการลดลงอุณหภูมิเทียบกับระยะรัศมีที่ศูนย์กลางมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.17)$$

##### 2. การคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกลม 2 มิติ

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (4.18)$$

โดยมีสมมติฐานว่าอุณหภูมิสูงสุดอยู่ที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของทรงกลมจะทำให้อัตราการลดลงอุณหภูมิเทียบกับระยะรัศมีที่ศูนย์กลางมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.19)$$

##### 3. การคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกลม 2 มิติ

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (4.20)$$

โดยมีสมมติฐานว่าอัตราการลดลงอุณหภูมิเทียบกับระยะรัศมีที่มุมหนึ่ง มีค่าเท่ากับอัตราการลดลงอุณหภูมิเทียบกับระยะรัศมีที่ด้านตรงข้ามของจุดศูนย์กลาง

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\theta} = - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\pi-\theta} \quad (4.21)$$



#### 4.4.1 วิธีการคำนวณอุณหภูมิภายในวัตถุภายในทรงกลมระบบพิกัดกระบอก

การแสดงวิธีผลต่างสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับการคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (4.22)$$

จากสมการทำการคำนวณอุณหภูมิที่กระจายภายในทรงกลมตามแนวรัศมีและความสูง ซึ่งสามารถทำการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\rho C_p}{k} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta}{\Delta r} r \frac{\Delta T}{\Delta r} + \frac{\Delta}{\Delta z} \frac{\Delta T}{\Delta z} \quad (4.23)$$

$$\frac{\rho C_p}{k} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta}{\Delta r} \left[ r \frac{\Delta T}{\Delta r} \right]_{i,j} + \frac{\Delta}{\Delta z} \left[ \frac{\Delta T}{\Delta z} \right]_{i,j} \quad (4.24)$$

$$\frac{\rho C_p}{k} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\left( r \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left( r \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} \right\} + \left\{ \frac{\left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right\} \quad (4.25)$$

จากสมการ(4.25) ข้างบนสามารถนำมาคิดแยกได้ดังนี้

$$\left( r \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2},j} = r_{i+\frac{1}{2},j} \left( \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} \right) \quad (4.26a)$$

$$\left( r \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2},j} = r_{i-\frac{1}{2},j} \left( \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta r} \right) \quad (4.26b)$$

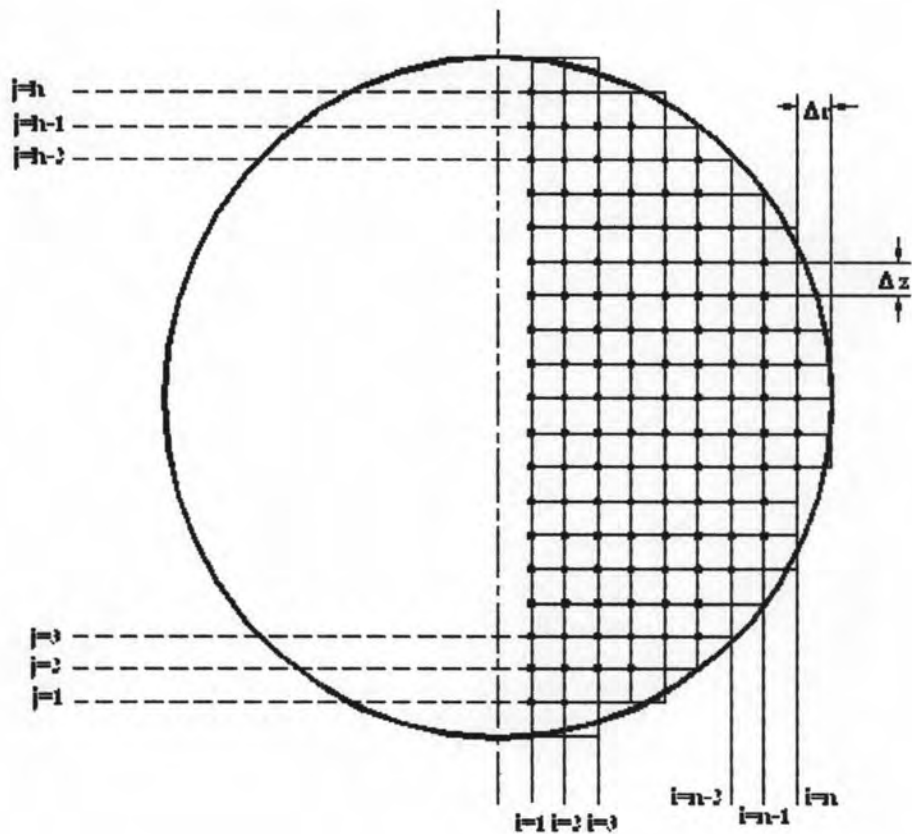
$$\left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \left( \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} \right) \quad (4.26c)$$



$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta z}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z}\right) \quad (4.26d)$$

เมื่อนำสมการ(4.26a), (4.26b), (4.26c) และ (4.26d) เข้าไปแทนในสมการ (4.25) จะได้สมการดังนี้

$$\Delta T_{i,j} = \frac{k}{\rho C_p r_{i,j}} \left[ \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j} (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta r^2} \right\} + \left\{ \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta z^2} \right\} \right] \quad (4.27)$$



รูปที่ 4.3 รูปแบบการกระจายของโหนดในทรงกลมในพิกัดทรงกระบอก

เมื่อ  $i=1$ ,  $\frac{\Delta T}{\Delta r}_{i-1,j} = 0$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{k}{\rho C_p r_{i,j}} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j} (T_{i+1,j} - T_{i,j})}{\Delta r^2} \right\} + \left\{ \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta z^2} \right\} \quad (4.28)$$

เมื่อได้  $\Delta T_{i,j}$  จะต้องหา  $T_{i,j}$  จาก

$$T_{i,j} = T_{i,j} + \Delta T_{i,j} \quad (4.29)$$

แล้วนำ  $T_{i,j}$  กลับไปหา  $\Delta T_{i,j}$  ใหม่

สามารถหาอุณหภูมิในเวลาถัดไปได้จาก

$$T_{i,j}^{[n+1]} = T_{i,j}^{[n]} + \frac{1}{2} (\Delta T_{i,j}^{[n]} + \Delta T_{i,j}^{[n]}) \quad (4.30)$$

#### 4.4.2 วิธีการคำนวณอุณหภูมิภายในวัตถุภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกลม

การแสดงวิธีผลต่างสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับการคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมระบบพิกัดทรงกลม

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (4.31)$$

จากสมการทำการคำนวณอุณหภูมิที่กระจายภายในทรงกลมตามแนวรัศมีและมุม ซึ่งสามารถทำการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\rho C_p}{k} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{r^2} \frac{\Delta}{\Delta r} r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\Delta}{\Delta \theta} \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \quad (4.32)$$

$$\frac{\rho C_p}{k} \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{r_{i,j}^2} \frac{\Delta}{\Delta r} \left[ r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} \right]_{i,j} + \frac{1}{r^2 \sin \theta_{i,j}} \frac{\Delta}{\Delta \theta} \left[ \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right]_{i,j} \quad (4.33)$$

$$\frac{\rho C_p \Delta T_{i,j}}{k \Delta t} = \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{\left( r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left( r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{\left( \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left( \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \right\} \quad (4.34)$$

จากสมการ(4.34) ข้างบนสามารถนำมาคิดแยกได้ดังนี้

$$\left( r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2},j} = r^2_{i+\frac{1}{2},j} \left[ \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} \right] \quad (4.35a)$$

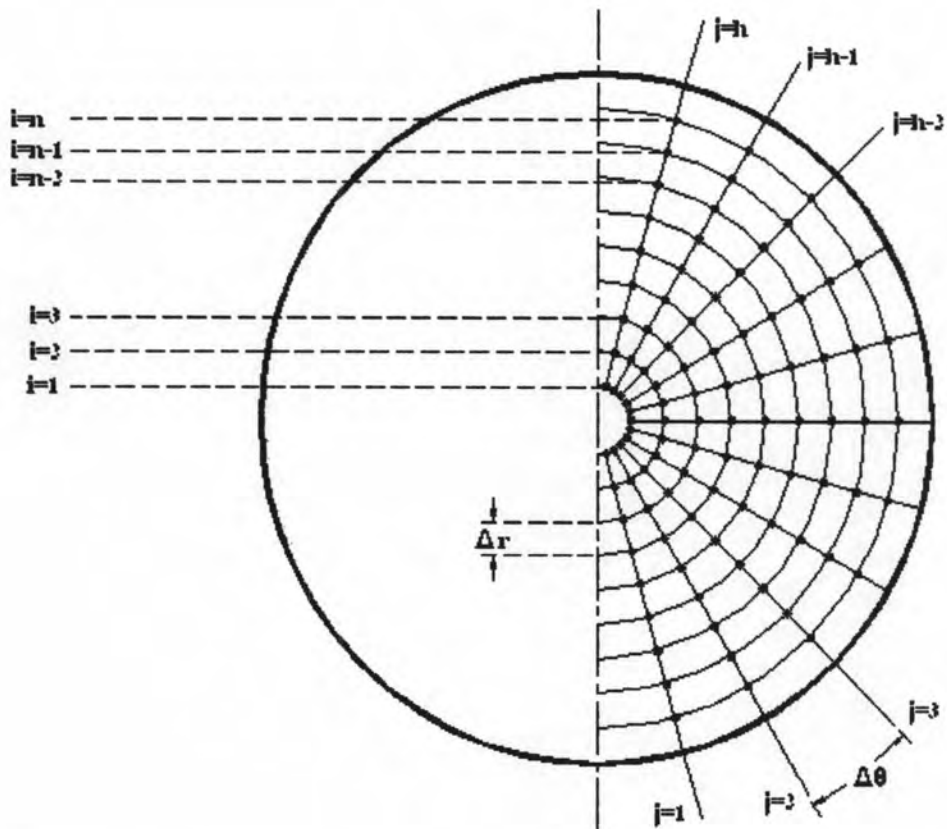
$$\left( r^2 \frac{\Delta T}{\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2},j} = r^2_{i-\frac{1}{2},j} \left[ \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta r} \right] \quad (4.35b)$$

$$\left( \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \sin \theta_{i,j+\frac{1}{2}} \left[ \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta \theta} \right] \quad (4.35c)$$

$$\left( \sin \theta \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} = \sin \theta_{i,j-\frac{1}{2}} \left[ \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta \theta} \right] \quad (4.35d)$$

เมื่อนำสมการ(4.35a), (4.35b), (4.35c) และ (4.35d) เข้าไปแทนในสมการ (4.34) จะได้สมการดังนี้

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r^2_{i+\frac{1}{2},j} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r^2_{i-\frac{1}{2},j} (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{\sin \theta_{i,j+\frac{1}{2}} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \sin \theta_{i,j-\frac{1}{2}} (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.36)$$



รูปที่ 4.4 รูปแบบการกระจายของโหนดในทรงกลมในพิกัดทรงกลม

$$\text{เมื่อ } j=1, \frac{\Delta T}{\Delta \theta_{i,j-1}} = 0$$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j}^2 (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{\sin \theta_{i,j+\frac{1}{2}} (T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.37)$$

$$\text{เมื่อ } j=h, \frac{\Delta T}{\Delta \theta_{i,j+1}} = 0$$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j}^2 (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{-\sin \theta_{i,j-\frac{1}{2}} (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.38)$$

$$\text{เมื่อ } i=1, \frac{\Delta T}{\Delta r_\theta} = -\frac{\Delta T}{\Delta r_{\pi-\theta}}$$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j}^2 (T_{i,j} - T_C)}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{\sin \theta_{i,j+\frac{1}{2}} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \sin \theta_{i,j-\frac{1}{2}} (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.39)$$

$$T_C = (T_{1,1} + T_{1,2} + T_{1,3} + \dots + T_{1,h})/h$$

$$\text{เมื่อ } i=1, \frac{\Delta T}{\Delta r_\theta} = -\frac{\Delta T}{\Delta r_{\pi-\theta}} \quad \text{และ } j=1, \frac{\Delta T}{\Delta \theta_{i,j-1}} = 0$$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j}^2 (T_{i,j} - T_C)}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{\sin \theta_{i,j+\frac{1}{2}} (T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.40)$$

$$\text{เมื่อ } i=1, \frac{\Delta T}{\Delta r_\theta} = -\frac{\Delta T}{\Delta r_{\pi-\theta}} \quad \text{และ } j=h, \frac{\Delta T}{\Delta \theta_{i,j+1}} = 0$$

$$\Delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \times k}{\rho C_p} \left[ \frac{1}{r_{i,j}^2} \left\{ \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^2 (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2},j}^2 (T_{i,j} - T_C)}{\Delta r^2} \right\} + \frac{1}{r_{i,j}^2 \sin \theta_{i,j}} \left\{ \frac{-\sin \theta_{i,j-\frac{1}{2}} (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta \theta^2} \right\} \right] \quad (4.41)$$

เมื่อได้  $\Delta T_{i,j}$  จะต้องหา  $T_{1,i,j}$  จาก

$$T_{1,i,j} = T_{i,j} + \Delta T_{i,j} \quad (4.42)$$

แล้วนำ  $T_{1,i,j}$  กลับไปหา  $\Delta T_{1,i,j}$  ใหม่

สามารถหาอุณหภูมิในเวลาถัดไปได้จาก

$$T_{i,j}^{[n+1]} = T_{i,j}^{[n]} + \frac{1}{2} (\Delta T_{i,j}^{[n]} + \Delta T_{1,i,j}^{[n]}) \quad (4.43)$$

#### 4.5 ขั้นตอนการคำนวณอุณหภูมิของทรงกลม

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะมีชุดข้อมูลหลักทั้งหมด 3 ชุด โดยแต่ละชุดนั้นจะแตกต่างกันที่การกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

ข้อมูลชุดที่ 1 เป็นชุดข้อมูลที่สมมติขึ้น โดยใช้อุณหภูมิที่ผิวมีค่าคงที่เท่ากันทั้งหมด

$$T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_s = 150 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha = 2.0516\text{E-}05$$

$$\Delta t = 0.00001 \quad t_{\text{end}} = 10 \text{ sec.}$$

ข้อมูลชุดที่ 2 เป็นชุดข้อมูลที่สมมติขึ้น โดยใช้อุณหภูมิที่ผิวเปลี่ยนแปลงตามมุมเป็นแบบเชิงเส้นแต่มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$T_{\max} = 500 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_s(\theta) = T_2 + \left( \frac{T_1 - T_2}{\pi} \right) \cdot \theta$$

โดยที่  $T_1$  เป็นอุณหภูมิที่ผิวที่ด้านหลังของทรงกลม (ณ ตำแหน่ง 0 เรเดียน)

$T_2$  เป็นอุณหภูมิที่ผิวที่ด้านหน้าของทรงกลม (ณ ตำแหน่ง 3.14 เรเดียน)

$$\alpha = 2.0516\text{E-}05$$

$$\Delta t = 0.00001 \quad t_{\text{end}} = 10 \text{ sec.}$$

ข้อมูลชุดที่ 3 เป็นชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลอง โดยใช้อุณหภูมิที่ผิวจากผลการทดลองของนายสมบูรณ์ รัชมี [1]

$$T_{\max} = 200, 300, 400 \text{ และ } 500 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad T_s(\theta) = \text{การประมาณค่าจากผลการทดลอง}$$

$$\alpha = 2.0516\text{E-}05$$

$$\Delta t = 0.00001 \quad t_{\text{end}} = 0.9 \text{ sec.}$$

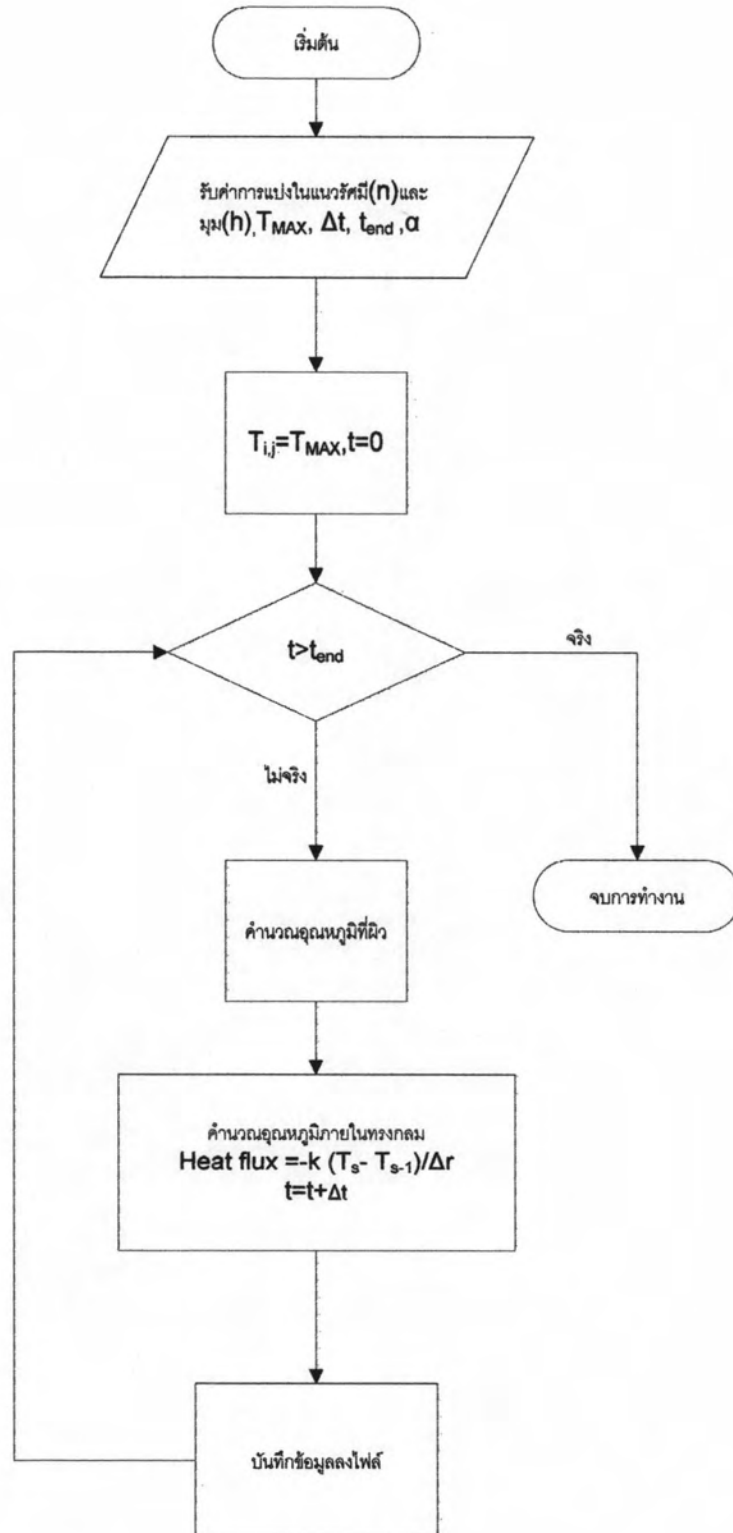
ตารางที่ 4.1 คุณสมบัติของวัตถุทรงกลม น้ำและไอน้ำ [5]

วัตถุทรงกลม	<p>ค่าการนำความร้อน ( thermal conductivity ) เท่ากับ 73.0 W/mK</p> <p>ค่าความจุความร้อน ( heat capacity ) เท่ากับ 460 J/kgK</p> <p>ความหนาแน่น ( density ) เท่ากับ 7735 kg/m<sup>3</sup></p> <p>หมายเหตุ</p> <p>อุณหภูมิสูงสุดภายในทรงกลม เท่ากับ 500 °C</p> <p>ขนาดรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 2.54 × 10<sup>-2</sup> m</p>
น้ำ	<p>อุณหภูมิของน้ำ เท่ากับ 27 °C</p> <p>ความหนาแน่น ( density ) เท่ากับ 997.01 kg/m<sup>3</sup></p> <p>ค่าความจุความร้อน ( heat capacity ) เท่ากับ 4.179 × 10<sup>3</sup> J/kgK</p> <p>ความหนืดสัมบูรณ์ของน้ำ เท่ากับ 8.55 × 10<sup>-4</sup> Ns/m<sup>2</sup></p> <p>จุดเดือดของน้ำ เท่ากับ 100 °C</p>
ไอน้ำ	<p>ความหนาแน่น ( density ) เท่ากับ 0.5956 kg/m<sup>3</sup></p> <p>ค่าความร้อนแฝงการกลายเป็นไอ ( latent heat of vaporization ) เท่ากับ 2257 × 10<sup>3</sup> J/kg</p> <p>อุณหภูมิของไอน้ำ เท่ากับ 100 °C</p>

สำหรับ โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณจะทำการคำนวณหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเทียบกับเวลา และอัตราการถ่ายเทความร้อนออกจากทรงกลม โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. รับค่าการแบ่งตามรัศมี (n) และตามมุม (h) ภายในทรงกลม รับค่าตัวแปร  $T_{max}$  ,  $\alpha$  ,  $\Delta t$  ,  $t_{end}$
2. ทุกๆ โหนดภายในทรงกลมมีค่าเท่ากับ  $T_{max}$  ยกเว้นที่ตำแหน่งโหนดที่ผิวทรงกลม และกำหนดให้เวลาเริ่มต้นเท่ากับศูนย์
3. คำนวณอุณหภูมิที่ผิวทรงกลม
4. คำนวณอุณหภูมิภายในของทรงกลม, อัตราการถ่ายเทความร้อนออกจากทรงกลม และทำการเพิ่มเวลา  $t_{ini} = t_{in} + \Delta t$
5. บันทึกผลของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเทียบกับเวลา อัตราการถ่ายเทความร้อนออกจากทรงกลม
6. ตรวจสอบว่าเวลา  $t_{ini} > t_{end}$  หากเป็นจริงให้จบการทำงาน และหากไม่จริงให้กลับไปทำข้อ 3





รูปที่ 4.5 แผนผังขั้นตอนการคำนวณอุณหภูมิภายในทรงกลมที่เปลี่ยนแปลงไปเทียบกับเวลา