

แบบจำลองนัมมู—โจนา-ลาซินีโอในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง



นาย ชานุกิจ คั่นฉ่อง

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

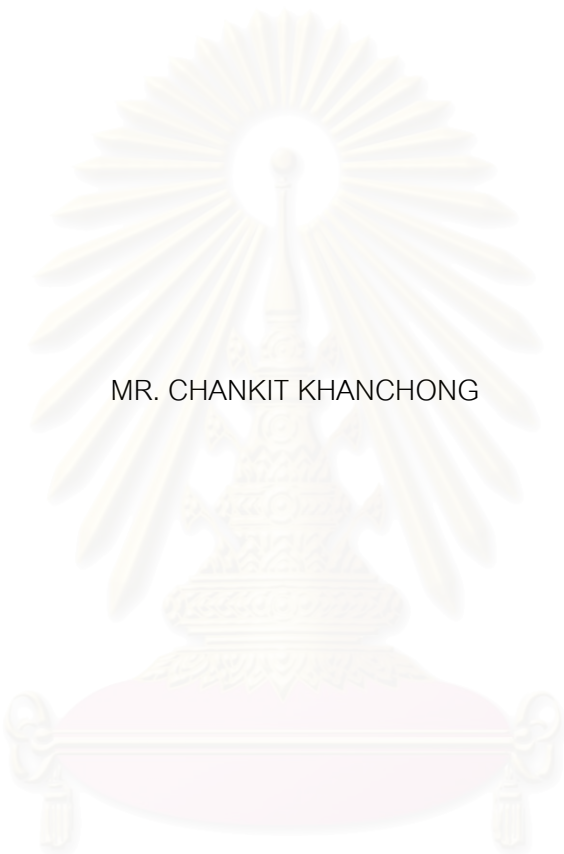
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2771-2

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

NAMBU—JONA-LASINIO MODEL IN LIGHT-CONE QUANTUM FIELD THEORY



MR. CHANKIT KHANCHONG

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974-17-2771-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซีนีโอในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง
โดย	นาย ชาญกิจ คั่นฉ่อง
สาขาวิชา	ฟิสิกส์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. อภิสิตธี อึ้งกิจจานุกิจ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร. วันชัย โพธิ์พิจิตร)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิเศษฐ์ รัตนวรารักษ์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร. อภิสิตธี อึ้งกิจจานุกิจ)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. รุจิกร ธนวิทยาพล)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. นูรินทร์ อัสวพิภพ)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นาย ชานุกิจ คั่นฉ่อง : แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินิโอในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง.
(NAMBU—JONA-LASINIO MODEL IN LIGHT-CONE QUANTUM FIELD THEORY) อ.
ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. อภิลิทธิ อังกิจจานุกิจ, จำนวนหน้า 89 หน้า. ISBN 974-17-2771-2.

ศึกษาทฤษฎีสนามในฟรอนท์ฟอร์ม (front form) ด้วยแนวเข้าสู่การศึกษาที่เลือกพิคตเวลากรวยแสง (light-cone time) ตั้งแต่สร้างหลักการแปรผันที่ทำในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (functional derivative) โดยในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันพิจารณาการวางเงื่อนไขว่าเป็นฟังก์ชันนัลของสนามเท่านั้นด้วยการพิจารณาอนุพันธ์เวลาของสนามว่าเป็นฟังก์ชันนัลของสนาม ทำให้สามารถเขียนสูตรนี้ตั้งแต่เริ่มต้นในรูปการแปรผันของสนามพื้นฐานเท่านั้น และสามารถเขียนสมการออยเลอร์-ลากรานจ์ (Euler-Lagrange equation) ที่ได้ในรูปการวางเงื่อนไขซึ่งคล้ายกับกลศาสตร์จุด (point mechanics)

ระบบดิแรกอิสระในฟรอนท์ฟอร์ม (front form free Dirac system) มีพีชคณิตดิแรกกรวยแสงไม่ไดอะโกนัล (diagonal) เนื่องจากลักษณะเมตริกกรวยแสง ทำให้มีเงื่อนไขบังคับที่ทำให้ได้สนามช่วย (auxiliary fields) ซึ่งเป็นสนามไม่อิสระออกมา สามารถใช้กระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิว (Faddeev-Jackiw procedure) สร้างแฮมิลโทเนียนฟอร์มูเลชัน (Hamiltonian formulation) บนสนามอิสระและทำการควอนไทซ์ได้ ในการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของการวางเงื่อนไขหรือแฮมิลโทเนียนเทียบกับสนามเพื่อหาสมการสนามในระบบนี้ สามารถจัดรูปด้วยการอินทิเกรตแยกส่วนให้ปริมาณทั้งสองอยู่ในรูปที่สามารถหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลได้โดยตรง

เมื่อประยุกต์การควอนไทซ์ระบบดิแรกอิสระในฟรอนท์ฟอร์มเข้ากับระบบประมาณสนามเฉลี่ยของแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินิโอ (Nambu—Jona-Lasinio model) ในฟรอนท์ฟอร์ม คำนวณได้ว่าออร์เดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) สามารถไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่มีแวกคิวอัม (vacuum) แบบทริวีเรียล (trivial) ซึ่งขัดกับมโนทัศน์ (concept) ของออร์เดอร์พารามิเตอร์ในอินสแตนท์ฟอร์ม (instant form) การไม่ทริวีเรียลของผลเฉลยสนามไม่อิสระในรูปสนามอิสระจากเงื่อนไขบังคับ ทำให้ออร์เดอร์พารามิเตอร์ในฟรอนท์ฟอร์มสามารถไม่เป็นศูนย์

ภาควิชา...ฟิสิกส์..... ลายมือชื่อนิสิต.....

สาขาวิชา...ฟิสิกส์..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา 2545

4272256523 : MAJOR PHYSICS

KEY WORD: FRONT FORM / LIGHT-CONE QUANTUM FIELD THEORY / NAMBU—JONA-LASINIO MODEL (NJL) / ORDER PARAMETER / VARIATIONAL PRINCIPLE

CHANKIT KHANCHONG : NAMBU—JONA-LASINIO MODEL IN LIGHT-CONE QUANTUM FIELD THEORY. THESIS ADVISOR : AHPISIT UNGKITCHANUKIT, Ph.D., 89 pp. ISBN 974-17-2771-2.

The study of front form field theory is approached by choosing light-cone time coordinates in the formulation of variational principle in terms of functional derivatives. In the formula that shows the variations of the action, the Lagrangian is considered to be a functional of the basic fields when the time derivative of the field is considered to be a functional of the field. Hence this formula can be written in the form of variations of basic fields at the outset. The Euler-Lagrange equations can be written in terms of the Lagrangian as in point mechanics.

Front form free Dirac system has non-diagonal light-cone Dirac algebra according to the form of light-cone metric. Therefore the system has constraints that make dependent auxiliary fields appear. The Faddeev-Jackiw procedure can be used to formulate Hamiltonian formulation on independent field and to quantize this system. In finding the field equation of this system, the form of the Lagrangian or Hamiltonian can be changed by integration by parts into the form that functional derivatives with respect to field can be found in the direct way.

Quantization of front form free Dirac system is applied to the mean-field approximate Nambu—Jona-Lasinio (NJL) model in the front form. The order parameter calculated in this approximate model can be non-zero, while the vacuum of the model is trivial in contrast with the order parameter in the instant form. Solution of the constraints for the auxiliary fields in terms of independent fields is non-trivial. Consequently, the front form order parameter of the model can be non-zero.

Department...Physics.....

Student's

Field of study...Physics.....

Advisor's

Academic year ..2002.....

กิตติกรรมประกาศ

แต่ป้า บัณฑิต และแม่ สุนันทา คั่นช่อง ซึ่งเป็นพรหมของบุตร

ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ ที่ผู้เขียนฝากตัวเป็นศิษย์ทางฟิสิกส์ตลอดมา

ขอขอบคุณ อาจารย์รุจิกร ธนวิทยาพล ที่เป็นอาจารย์ รุ่นพี่ และสหายทางฟิสิกส์ของผู้เขียน

ขอขอบคุณกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ซึ่งมี อาจารย์พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์ ที่เป็นอาจารย์ฟิสิกส์ของผู้เขียนท่านหนึ่งด้วย อาจารย์รุจิกร ธนวิทยาพล และอาจารย์บูรินทร์ อัครวิภาพ

ขอขอบคุณ คุณธิษฎา ทองกุล และคุณวรินทร์ ศรีทะวงศ์ สหายทางฟิสิกส์ของผู้เขียน โดยเฉพาะคุณธิษฎาสำหรับข้อเสนอและการถกเถียงต่อบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบคุณ คุณธิติตยา อูปมา สหายของผู้เขียน

ขอขอบคุณ อาจารย์สดชื่น วิบูลยเดช ในการถกเถียงเรื่องความหมายของ เวลา

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาไทย	ง
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
1 บทนำ	1
1.1 การควอนไทซ์กรวยแสง	1
1.2 ควอนตัมโครโมไดนามิกส์ และแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอ	2
1.3 เรียบเรียงเนื้อหาวิทยานิพนธ์	5
2 ทฤษฎีสนามในฟรอนท์ฟอร์ม	9
2.1 ทฤษฎีสนามสัมพัทธภาพ	9
2.2 หลักการแปรผันของสนามสัมพัทธภาพ	13
2.3 ฟรอนท์ฟอร์ม และนิยามพิกัดกรวยแสง	20
3 ระบบดิแรกอิสระในฟรอนท์ฟอร์ม	22
3.1 ลากรางเจียนฟอร์มูละชัน	22
3.2 แฮมิลโทเนียนฟอร์มูละชัน	27
3.3 ระบบดิแรกอิสระฟรอนท์ฟอร์มควอนตัมในปริภูมิโมเมนตัม	38
4 แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง	41
4.1 แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโออินสแทนท์ฟอร์ม	41
4.1.1 การแปลงไครล์และแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโออินสแทนท์ฟอร์ม ..	41
4.1.2 การประมาณสนามเฉลี่ยของแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโออินสแทนท์ ฟอร์ม	45

4.2 แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอฟรอนท์ฟอร์ม	49
4.2.1 การแปลงไครล์ฟรอนท์ฟอร์มและแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอฟรอนท์ ฟอร์ม	49
4.2.2 การประมาณสนามเฉลี่ยของแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอฟรอนท์ฟอร์ม	53
5 สรุปผลการศึกษา	59
รายการอ้างอิง	61
ภาคผนวก ก คณิตศาสตร์เกี่ยวกับอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล	63
ภาคผนวก ข เกี่ยวกับอนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน	72
ภาคผนวก ค ผลเฉลยสมการดิแรกกรวยแสงในปริภูมิโมเมนตัม	74
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	81

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

ในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้การอ้างอิงด้วยเอกสารปริทัศน์ (review) เป็นส่วนใหญ่ เพราะเอกสารต้นกำเนิด (original) มีเป็นจำนวนมากจึงไม่สะดวกในการรวบรวม ในการใช้ศัพท์บัญญัติภาษาไทยที่บัญญัติจากภาษาอังกฤษใช้ตามราชบัณฑิตยสถาน (ราชบัณฑิตยสถาน, 2544; ราชบัณฑิตยสถาน, 2545; ราชบัณฑิตยสถาน [Online]; มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, ภาควิชาฟิสิกส์, [Online]) บางศัพท์ที่มีศัพท์บัญญัติเพียงบางส่วนใช้วิธีแปลโดยใช้ส่วนที่มีการบัญญัติมาประกอบกัน บางศัพท์ที่ไม่มีศัพท์บัญญัติถ้าแปลโดยตรงแล้วสื่อความหมายไม่ตรงใช้วิธีเขียนทับศัพท์ลงไปแทน

1.1 การควอนไทซ์กรวยแสง

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ พิกัดเวลาและอวกาศของ อวกาศ-กาล (space-time) ไม่เป็นได้อย่างเดียว (unique) และรูปทฤษฎีฟิสิกส์ไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ในการแปลงปวงกาเร (P.T.: Poincaré transformation) ซึ่งมีตัวก่อกำเนิด (generators) อีสระอยู่ 10 ตัว การแปลงสถานะ (states) ของระบบฟิสิกส์ตามกฎฟิสิกส์โดยการแปลงอวกาศ-กาลอยู่ในรูปการแปลงปวงกาเรของสถานะเหล่านี้โดยมีสถานะเหล่านี้เป็นปริภูมิตัวแทน (representation space) ในการเลือกพิกัดเวลาที่แตกต่างกันสามารถมี ฟอर्मหรือรูปแบบพลวัต (form of dynamics) ของกฎฟิสิกส์แตกต่างกันไปได้ ซึ่ง Dirac (1949) เป็นผู้ซึ่งประเด็นนี้ครั้งแรก เมื่อควอนไทซ์กฎฟิสิกส์คลาสสิก (classical) ในแต่ละฟอर्म (form) ที่ต่างกันอันเนื่องมาจากการที่พิกัดเวลาต่างกันก็ได้ทฤษฎีควอนตัมที่แตกต่างกันออกไป แต่สมมูลกันทางฟิสิกส์ เพราะการเลือกพิกัดเวลาเป็นเหมือนกับการเลือกเกจ (gauge) ชนิดหนึ่ง (Heinzi, 2000: 7, 19)

สำหรับพิกัดเวลาที่ใช้กันตามปกติคือ x^0 รูปทฤษฎีฟิสิกส์ในพิกัดเวลานี้เรียกว่า อินสแตนท์ฟอर्म (IF: instant form) สำหรับในที่นี้ศึกษาพิกัดเวลาพิเศษชนิดหนึ่งเรียกว่า เวลากรวยแสง (light-cone time) $x^+ \equiv x^0 + x^3$ รูปทฤษฎีฟิสิกส์ที่เลือกใช้พิกัดเวลานี้เรียกว่า ฟรอนท์ฟอर्म (FF: front form) การควอนไทซ์กฎฟิสิกส์ในฟอर्मนี้เรียกว่า การควอนไทซ์กรวยแสง (light-cone quantization) สำหรับทฤษฎีสนามควอนตัมซึ่งเป็นกฎฟิสิกส์ชนิดหนึ่ง ถ้าพิจารณาในฟอर्मนี้เรียกว่า ทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง (light-cone quantum field theory) หรือ ทฤษฎีสนามควอนตัม FF (front form quantum field theory) มีลักษณะสำคัญดังนี้ (Heinzi, 2000: 82-83)

1. ในตัวก่อกำเนิดปวงกาเรทั้ง 10 พบว่า (Heinzi, 2000: 12-17) มี ตัวก่อกำเนิดไคเนติก (kinematical generators) อยู่ 7 ตัวที่เป็นตัวก่อกำเนิดการแปลงอยู่ภายในผิวเวลาเท่า (equal-time surface) ของเวลาชนิดนี้ที่เรียกว่า ไลท์-ฟรอนท์ (light-front) ซึ่งเป็นอวกาศของเวลาชนิดนี้ และมี ตัวก่อกำเนิดพลวัต (dynamical generators) อยู่ 3 ตัวที่เป็นตัวก่อกำเนิดที่เกี่ยวข้องกับการแปลงเวลากรวย

แสง นั่นคือที่มีการแปลงออกนอกผิวเวลาเท่าๆ ฟอรัมนี้มีตัวก่อกำเนิดโคเน็คตีฟมากที่สุด ในขณะที่ฟอรัมอื่นๆ ที่เป็นไปได้มีตัวก่อกำเนิดโคเน็คตีฟเพียง 6 ตัว ทำให้โครงสร้างพลวัต (dynamical structure) ของฟอรัมนี้ง่ายที่สุด

2. ในฟอรัมนี้มีพิกัดของโมเมนตัมที่เรียกว่า พิกัดสัมพัทธ์ไม่ขึ้นกับกรอบ (frame-independent relative coordinates) ซึ่งเป็นพิกัดของโมเมนตัมที่นิยามบนกรอบศูนย์กลางมวล (CM: centre of mass) โดยพบว่าไม่มีรูปไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิงใด โดยกฎฟิสิกส์ที่เขียนในรูปพิกัดนี้มีการแยกส่วนที่สัมพัทธ์ (relative) กับกรอบ CM ไว้ต่างหากซึ่งเป็นส่วนที่ ทริวีเรียล (trivial) การไม่ขึ้นกับกรอบทำให้การศึกษาปัญหาหลายอนุภาค (many-body problem) ในกลศาสตร์ควอนตัมสัมพัทธ์ภาพทำได้สะดวกขึ้น (Heinzl, 2000: 45-46, 82)

3. มีสถานะแวกคิวอัม (vacuum state) หรือเรียกสั้นๆ ว่า แวกคิวอัม (vacuum) แบบ ทริวีเรียล (Leutwyler, Klauder and Streit, 1970; Heinzl, 2000: 42-44, 82)

จากลักษณะทั้ง 3 ทำให้สามารถสร้างทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสงในรูปแบบใหม่ คือ สามารถรวมการควอนไทซ์กรวยแสง กับ ภาพปริภูมิโฟค (Fock space picture) สร้างสมการของสถานะยึดเหนี่ยวอนุภาคจำนวนน้อย (few-body bound states) ในทฤษฎีสนามควอนตัมได้ เรียกว่าสมการชโรดิงเงอร์กรวยแสง (light-cone Schrödinger equation) (Brodsky, Pauli and Pinsky, 1997: บทที่ 3; Heinzl, 2000: 2-4, 47-49, 82-83) ซึ่งสามารถให้ ภาพสถานะยึดเหนี่ยวของอนุภาคจำนวนน้อย ในทฤษฎีสนามควอนตัมที่เป็นทฤษฎีหลายอนุภาค (many-body theory) ได้ ซึ่งไม่ใช่สถานะยึดเหนี่ยวอนุภาคจำนวนน้อยที่เกิดในกลศาสตร์ควอนตัมจุด (point quantum mechanics) ซึ่งเป็นทฤษฎีอนุภาคจำนวนน้อย (few-body theory) อยู่แล้วตามปกติ และคาดหวังว่า ควอนตัมโครโมไดนามิกส์ (QCD: quantum chromodynamics) ในรูปทฤษฎีสนามควอนตัมแบบนี้จะให้ ภาพคอนสทิทูเอนท์ (constituent picture) ของฮาดรอน (hadrons) ที่มองว่าฮาดรอนเป็นสถานะยึดเหนี่ยวอนุภาคจำนวนน้อย (few-body bound states) ของควาร์ค (quarks) ใน QCD ในวิทยานิพนธ์นี้ไปไม่ถึงและไม่ได้ศึกษาทฤษฎีสนามในรูปแบบนี้ เพียงกล่าวถึงแวกคิวอัมในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสงที่ทริวีเรียลเท่านั้น

QCD ใน IF มีแวกคิวอัมแบบไม่ทริวีเรียล คือมีการหักสมมาตรเชิงพลวัต (dynamical symmetry breaking) ซึ่งก่อให้เกิดมีปรากฏการณ์สถานะยึดเหนี่ยว (bound states) ของควาร์คที่สำคัญหลายอย่าง เช่น มีซอน (mesons) ซึ่งเป็น ผลไม่เพอร์เทอร์เบทิฟ (non-perturbative effects) ของ QCD ดังนั้นอย่างน้อยทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสงที่มีแวกคิวอัมแบบทริวีเรียลก็เปิดแนวทางใหม่ในการศึกษาผลไม่เพอร์เทอร์เบทิฟ

1.2 ควอนตัมโครโมไดนามิกส์ และแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซิโนโอ

QCD เป็นทฤษฎีสนามควอนตัมที่อาศัยอันตรกิริยาอย่างเข้ม (strong interaction) ซึ่งเป็นอันตรกิริยาของควาร์คและกลูออน (gluons) ลากรางเจียน QCD (Christos 1984: 253-255; Hatsuda and

Kunihiro 1994: 227; Peskin and Schroeder 1995: 482-502; Scherer 2002: 18-30) สร้างขึ้นโดยความไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงเกจ (gauge transformation) ที่มีกรุปของการแปลง (group of transformation) เรียกว่า กรุปคัลเลอร์เฉพาะที่ (local colour group) ซึ่งเป็นกรุป (group) $SU_C(N_C)$ โดยมี $N_C = 3$ โดยเป็นการแปลงของสปินเนอร์ที่เป็น ปริภูมิตัวแทนที่ใช้นิยาม (defining representation space) ของกรุปนี้ เรียกว่า สปินเนอร์ควาร์ค (quark spinor) เขียนเป็น $q(x)$ ซึ่งมีฐานหลัก (basis) 3 คอมโพเนนต์ (components) เรียกว่า 3-คัลเลอร์ (3-colour) และได้รูปของความหนาแน่นลากรางเจียน QCD (QCD Lagrangian density) โดยเขียนละว่าดังนี้แสดงฐานหลักคัลเลอร์ว่า

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f \left(i\gamma_\mu D^\mu - m_f \right) q_f - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu}; \quad a = 1 \dots 8 \quad (1.2.1)$$

จะเห็นว่าลากรางเจียนในสมมาตรนี้สามารถมี N_f เป็นจำนวนนับใดก็ได้ ในปัจจุบันพบจากปรากฏการณ์เชิงประจักษ์ (empirical) ว่ามี $N_f = 6$ โดยเขียนปริภูมิตัวแทนที่ใช้นิยามในฐานหลักที่เมทริกซ์มวล (mass matrix) m_f เป็น ไดอะโกนัล (diagonal) ได้ว่า $q_f = (u, d, s, c, b, t)$ ซึ่งมี $m_f = (m_u, m_d, m_s, \dots)$ ตามลำดับ, A^a_μ เป็นสนามเกจ (gauge field) ของอันตรกิริยาอย่างเข้ม เรียกว่า กลูออน, $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \lambda_C^a A^a_\mu$ เรียกว่า อนุพันธ์เกจโคเวเรียนต์ (gauge covariant derivatives) และ $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^C_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ เรียกว่า ฟิวด์สเทรNGTH เทนเซอร์ (field-strength tensor) โดยที่ λ_C^a เป็นตัวก่อกำเนิดของกรุป (group) $SU(3)$ ซึ่งมี f^C_{abc} เป็น ค่าคงตัวโครงสร้าง (structure constants) ของกรุปนี้ ส่วนดัชนี C แสดงถึงการเป็นกรุปของการแปลงคัลเลอร์ m_f ใน (1.2.1) เป็น แมสส์ (bare mass) เรียกว่า เคอร์เรนท์ควาร์คแมสส์ (current quark mass) จากปรากฏการณ์เชิงประจักษ์ (empirical) พบมวลเชิงฟิสิกส์ (physical mass) ของอนุภาคเหล่านี้ในฮาดรอนในสเกลพลังงานถ่ายโอน (energy transfer) ขนาด 1 GeV (Heinzl, 2000: 61; Scherer, 2002: 26-27) ว่า

$$m_u, m_d \ll m_s \ll 1 \text{ GeV} \leq m_c, m_b, m_t \quad (1.2.2)$$

โดยที่มวลของ 3 ตัวแรกอยู่ในสเกล MeV ส่วน 3 ตัวหลังอยู่ในสเกล 1 GeV จึงสามารถแบ่งควาร์คเป็นควาร์คเบา (light quark) กับ ควาร์คหนัก (heavy quark) ถ้าศึกษาแต่ในปรากฏการณ์พลังงานต่ำของ QCD สามารถประมาณโดยพิจารณาแต่ เซกเตอร์ควาร์คเบา (light quark sector) ของ (1.2.1) คือ พิจารณาแต่เฉพาะ (u, d, s) ได้ เนื่องจากทั้ง 3 ยังมีมวลน้อยเมื่อเทียบกับนิวคลีออน (nucleons) ซึ่งอยู่ในระดับ 1 GeV จึงเป็นการเริ่มต้นที่ดีในการศึกษาด้วยการประมาณเซกเตอร์ควาร์คเบาของ (1.2.1) ด้วยการพิจารณาในลิมิตไครัล (chiral limit) คือ $(m_u, m_d, m_s) \rightarrow 0$ ซึ่งทำให้เซกเตอร์ (sector) นี้มีสมมาตรในการแปลงไครัลโดยกรุปเฟลเวอร์โกลบอล (global flavour group) $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ โดยที่ $N_f = 3$ ซึ่งต่อไปจะพิจารณาแต่เซกเตอร์นี้เท่านั้น โดยให้ $q = (u, d, s)$ เป็นฐานหลักของปริภูมิตัวแทนที่ใช้นิยามของกรุปนี้ซึ่งมี 3 คอมโพเนนต์เรียกว่า 3-เฟลเวอร์ (3-flavour) แสดงการนิยามกรุปเฟลเวอร์โกลบอลดังกล่าวดังนี้

$$q_L \Rightarrow e^{-i\theta_L} \left(e^{-\frac{i\lambda^a}{2} \theta_L^a} \right) q_L \quad \text{and} \quad q_R \Rightarrow e^{-i\theta_R} \left(e^{-\frac{i\lambda^a}{2} \theta_R^a} \right) q_R ; a = 1 \dots 8$$

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$$
(1.2.3)

โดยที่ λ^a เป็นตัวก่อกำเนิดและ f_{abc} เป็นค่าคงตัวโครงสร้างของกลุ่ม $SU(3)$ ของเฟลเวอร์ซึ่งเขียนโดยไม่มีดัชนีต่างจากกรุปคัลเลอรัที่ดัชนี C พบว่ากรุปนี้สมมูลกับกรุปการแปลง $U_V(3) \otimes U_A(3)$ ที่นิยามบน q สำหรับการแปลงแบบโกลบอลที่นิยามบนฐานหลักไครัล (chiral basis) ของสปินเนอร์คือ ψ_L, ψ_R เรียกโดยทั่วไปว่า การแปลงไครัล (chiral transformation) กรุปเฟลเวอร์ข้างต้นจึงเป็นการแปลงไครัลชนิดหนึ่งนั่นเอง

โดยการอนุมานจากการคำนวณและปรากฏการณ์เชิงประจักษ์ของ QCD (Heinzel, 2000: 62-63; Scherer, 2002: 76-77) พบว่า ค่าคาดหวังแวคคิวอัม (VEV: vacuum expectation value) $\langle \bar{q}q \rangle$ ที่เรียกว่า ควาร์คคอนเดนเสท (quark condensate) ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งปริมาณนี้เป็น ออร์เดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) ของการหักสมมาตรเชิงพลวัตของแวคคิวอัมใน QCD การไม่เป็นศูนย์แสดงว่า แวคคิวอัมมีการหักสมมาตรเชิงพลวัตต่อการแปลงไครัลในส่วนกรุปย่อย (subgroup) $SU_A(3)$ ของกรุปเฟลเวอร์ดังกล่าว ซึ่งมีประจุสเกลาร์เทียม (pseudoscalar charges) Q_5^a 8 ตัวเป็นตัวก่อกำเนิดการแปลงสมมาตรโดยกรุปย่อยนี้ จากทฤษฎีบทนั้นบู-โกลด์สโตน (Nambu-Goldstone theorem) ที่ว่า ตัวก่อกำเนิดการแปลงต่อเนื่องใดที่ทำให้แวคคิวอัมของระบบสมมาตรนี้แปรเปลี่ยน ระบบนี้จะมี 1 แมสส์เลสโบซอน (massless boson) ที่สมนัยกับตัวก่อกำเนิดนี้ จึงทำนายการมีอยู่ของมีซอนสเกลาร์เทียมแมสส์เลส (massless pseudoscalar mesons) 8 ตัวใน QCD ซึ่งพบจากปรากฏการณ์เชิงประจักษ์ว่ามีดังนี้

$$\pi^0, \pi^\pm, K^0, \bar{K}^0, K^\pm, \eta$$
(1.2.4)

โดยแต่ละตัวมีมวลเบาอยู่ในระดับ MeV เหตุที่มีซอนทั้ง 8 ยังมีมวลอยู่บ้างก็เพราะมวลของควาร์คเบาไม่เป็นศูนย์

เนื่องจาก QCD เป็นทฤษฎีไม่เชิงเส้น (non-linear) มีความซับซ้อนสูง คำนวณยาก จึงมีการศึกษาด้วยวิธีสร้าง ทฤษฎียังผล (effective theory) (Hatsuda and Kunihiro, 1994: 233) คือถ้าสนใจศึกษาเพียงบางองศาเสรีของระบบก็หาวิธีการสร้างทฤษฎียังผลเฉพาะองศาเสรีนี้ด้วยการ “รวมผลของ” หรือ “อินทิเกรตเอาต์ (integrate out)” องศาเสรีอื่นออกไป ในที่นี้ถ้าสนใจ

ก) ทฤษฎีควาร์คยังผล (effective quark theory) คือสนใจแต่ควาร์ค และ กลไกของควาร์คที่น้อยที่สุดที่สามารถเป็นรากฐานของสถานะยึดเหนี่ยวของควาร์คและแบบจำลองควาร์คคอนสทิทิวเอนท์ (constituent quark model) จึงพยายาม “อินทิเกรตเอาต์” กลูออนออกไป โดยได้ทฤษฎีที่ไม่ปรากฏกลูออนออกมาอย่างชัดแจ้ง (explicit)

ข) สมมาตรไครัลของควาร์คเบา คือทฤษฎีจะต้องมีสมมาตรไครัลโกลบอล (global chiral symmetry) เช่นเดียวกับ QCD และสามารถมีการหักสมมาตรเชิงพลวัตเพื่อศึกษามีซอน

ค) สนใจสมบัติที่พลังงานต่ำของ QCD นั่นคือสเกลพลังงานน้อยกว่าบางคัทออฟ (cutoff) $\Lambda \approx 1 \text{ GeV}$ เช่น สมบัติสถานะยึดเหนี่ยวของควาร์ค

มีแบบจำลองหนึ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น คือ แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินิโอ (NJL: Nambu—Jona-Lasinio model) (Hatsuda and Kunihiro, 1994: 233) ซึ่งใช้บรรยายควาร์คที่บริเวณพลังงานต่ำ นั่นคือในเซกเตอร์ควาร์คเบา โดยมีสมมาตรไครัล $U_L(3) \otimes U_R(3)$ (1.2.3) และการหักสมมาตรเชิงพลวัต นั่นคือมี $\langle \bar{q}q \rangle$ ไม่เท่ากับ 0 ทำนองเดียวกับ QCD เพื่อใช้ศึกษากลไกการเกิดมี มีซอน ความหนาแน่นลากรางเจียน (Lagrangian density) ของแบบจำลองนี้โดยเขียนระดับชั้นของ “3-คัลเลอร์” (หมายเหตุว่า แบบจำลองนี้ไม่มีสนามเกจ) เป็นดังนี้

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - \mathbf{M}_q)q + \frac{1}{2}g_0 \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{q} \lambda^a q)^2 - (\bar{q} \gamma^5 \lambda^a q)^2 \right] ; \quad a = 1 \dots 8 \quad (1.2.5)$$

โดยให้ ค่าคงตัวควบ (coupling constant) g_0 มีค่าเป็นบวกเพื่อให้เกิดอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างควาร์คกับปฏิควาร์ค (antiquarks) แบบจำลองรูป NJL นี้เกิดขึ้นก่อนที่จะมี QCD โดยเริ่มจากงานต้นกำเนิดโดย Nambu และ Jona-Lasinio (1961a, 1961b) ที่เสนอขึ้นเพื่อบรรยายไพออน (pions) ในอันตรกิริยานิวเคลียร์ว่าเป็นสถานะยึดเหนี่ยวของนิวคลีออนกับปฏินิวคลีออน (antinucleon) ภายหลังมีการนำมาประยุกต์ใช้อธิบายฮาดรอนด้วยการสามารถอธิบายกลไกของมีซอนได้ และมีผู้แสดงความสัมพันธ์กับ QCD ได้ด้วยการเป็นทฤษฎีง่ายผลของ QCD (Bijnens, Bruno and de Rafael, 1992; Bijnens, 1996: 373-379) คือการประมาณด้วยการ “อินทิเกรตเอาท์” องศาเสรีของกลูออนให้เป็นอันตรกิริยาพอยน์ทไลค์ (pointlike) ระหว่างควาร์คในบริเวณลิมิตความยาวคลื่นยาว (long-wavelength limit) และสเกลพลังงานถ่ายโอนต่ำกว่าราว 1 GeV

การควอนไทซ์กรวยแสงเปิดทางใหม่ให้การศึกษา QCD ตลอดจนแบบจำลองในทฤษฎีสนามควอนตัมอื่นๆ ด้วยการมีแนวคิดอัมของทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสงที่เป็นทริเวียล จึงน่าสนใจว่าจะนำไปสู่การศึกษาปรากฏการณ์อันเนื่องจากความไม่ทริเวียลของแนวคิดอัมที่พบในทฤษฎีสนามควอนตัม IF ตามปกติอย่างไร ก่อนที่จะไปถึง QCD ที่มีความซับซ้อนมากจึงมีการเริ่มต้นศึกษาโดยใช้แบบจำลองยังผลง่ายๆ ก่อน เช่น แบบจำลอง NJL ที่มีการหักสมมาตรเชิงพลวัตที่ก่อกำเนิดไพออนคล้ายกับ QCD มีงานศึกษาแบบจำลอง NJL ใน FF (FF-NJL) ที่น่าสนใจ อย่างเช่น Heinzl et al. (1989), Heinzl (1998: 134-148), Heinzl (2000: 59-82), Itakura and Maedan (2000), Itakura and Maedan (2001)

1.3 เรียบเรียงเนื้อหาวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นรายงานนำเสนอทฤษฎีสนามใน FF, การควอนไทซ์กรวยแสงของระบบดิแรกอิสระใน FF ซึ่งนำไปประยุกต์กับระบบ FF-NJL ในการประมาณสนามเฉลี่ย (mean-field approximation) และอธิบายการเกิดเฟสหัก (broken phase) ที่มีออร์เดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) ไม่เท่ากับ 0 ของ

แบบจำลอง FF-NJL ภายใต้การประมาณสนามเฉลี่ยว่าเกิดขึ้นภายใต้แวกควมที่เป็นทริเวียลได้อย่างไร ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นรายงานขยายความไม่ได้นำเสนอผลทางฟิสิกส์ใหม่ แต่มีการนำเสนอเทคนิคในการคำนวณบางขั้นตอนใหม่ ซึ่งจะกล่าวต่อไป

บทที่ 2

เริ่มจากการฟอร์มูเลท (formulate) หลักการแปรผัน (variational principle) ของทฤษฎีสนามในแนวเข้าสู่การศึกษา (approach) ที่มีการเลือกพิคตเวลาโดยแยกออกมาอย่างชัดเจนตั้งแต่ตั้งต้น โดยเริ่มจากการพิจารณาเลือกพิคตเวลาอย่างทั่วไปก่อนที่จะเน้นที่การเลือกพิคตเวลากว้าง และฟอร์มูเลทในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (functional derivative) ที่สามารถเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange equation) ในรูปลากรางเจียน ในตำราทฤษฎีสนามส่วนใหญ่เขียนในรูปความหนาแน่นลากรางเจียน เช่น Bjorken และ Drell (1965: 13-15), Goldstein (1980: บทที่ 12), Aitchison (1982: 10-11), Peskin และ Schroeder (1995: 15-19), Svetitsky (2002: 10-12)

ในแนวเข้าสู่การศึกษานี้ผู้เขียนได้เขียนสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันใหม่โดยในสูตรนี้มองอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐาน (basic fields) ว่าเป็นฟังก์ชันนัล (functional) ของสนามพื้นฐาน ทำให้พิจารณาลากรางเจียนในสูตรนี้เป็นฟังก์ชันนัลของสนามพื้นฐานเท่านั้น ตามปกติ คือที่พบในตำราที่ใช้แนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสนามเดียวกันนี้ เช่น Gitman และ Tyutin (1990: 10), Weinberg (1995: 299), Greiner (1996: 31-33) มองในสูตรนี้ว่า สนามพื้นฐานกับอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานเป็นคอนละคอมโพเนนท์ของสิ่งอันดับ (ordered tuple) โดยที่สิ่งอันดับนี้เป็นบุภาพ (pre-image) ของฟังก์ชันนัลลากรางเจียน หรือกล่าวได้ว่าลากรางเจียนเป็นฟังก์ชันนัลของสนามพื้นฐานและอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐาน นั่นคือทั้งสองเป็นอาร์กิวเมนต์ (arguments) อิสระของฟังก์ชันนัลลากรางเจียน แล้วจึงเขียนสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันในรูป การแปรผันของสนามพื้นฐาน และ การแปรผันของอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐาน ควบคู่กันตามรูปสูตรของ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (functional differential) แล้วใช้ พจน์ใหม่ไดเวอร์เจนท์ (time divergent term) หรือ อินทิเกรตแยกส่วน (integration by parts) เขียนการแปรผันอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานให้อยู่ในรูปการแปรผันของสนามพื้นฐานในขั้นตอนต่อไป

ในที่นี้เมื่อมองอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานเป็นฟังก์ชันนัลของสนามพื้นฐานในสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันแล้ว ทำให้สามารถเขียนรูปของสูตรใหม่ตามรูปผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลได้ว่า อยู่ในรูปการแปรผันของสนามพื้นฐานเท่านั้น เป็นการเขียนอย่างชัดเจน (explicit) ถึงมโนทัศน์ (concept) ของหลักการแปรผันในสูตรนี้ว่า โดยพื้นฐานมีแต่การแปรผันของสนามพื้นฐานในอวกาศ-กาลเท่านั้นที่ถูกพิจารณา

มโนทัศน์ของการแปรผันของเอกซันในรูปสูตรแสดงการแปรผันทั้งสองแบบ คือที่ใช้ปกติและที่ใช้ในที่นี้เหมือนกัน เพียงแต่ต่างกันที่รูปสูตรเล็กน้อยเท่านั้น เพราะในรูปสูตรปกติแม้สนามพื้นฐานกับอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานเป็นคอนละอาร์กิวเมนต์กันของฟังก์ชันนัลลากรางเจียนโดยสามารถเป็น

คนละฟังก์ชันกัน แต่ได้กำหนดโดยนัย (implicit) แล้วว่าฟังก์ชันทั้งสองสัมพันธ์กันโดยผ่านอนุพันธ์เวลา จึงสามารถใช้พจน์ใหม่ไวดอร์เจนท์หรืออินทิเกรตแยกส่วนในขั้นตอนต่อไปได้

และในตอนสุดท้ายของบทที่ 2 แสดงการเลือกพิกัดเวลากว้างและนิยามพิกัดกว้างแสง (light-cone coordinates)

บทที่ 3

ใช้แนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสนามและหลักการแปรผันที่ฟอร์มูลาในบทที่ 2 กับระบบดิแรก อีสระใน FF แสดง ลากรางเจียนฟอร์มูลาชัน (Lagrangian formulation) และ แฮมิลโทเนียนฟอร์มูลาชัน (Hamiltonian formulation) ของระบบนี้ แล้วควอนไทซ์ด้วยกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคีฟ (FJ: Faddeev-Jackiw)

ผู้เขียนเสนอเทคนิคเล็กน้อยในการคำนวณอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของลากรางเจียนหรือแฮมิลโทเนียนเทียบกับสนามของระบบนี้ คือ ด้วยการจัดรูปฟังก์ชันนัลลากรางเจียนหรือแฮมิลโทเนียนให้อยู่ในรูปที่สามารถหาผลลัพธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลนี้ได้โดยตรง ด้วยการอินทิเกรตแยกส่วนภายในอินทิกรัลของปริมาณทั้งสอง ในขณะที่ตำราที่ฟอร์มูลาหลักการแปรผันของทฤษฎีสนามที่ใช้แนวเข้าสู่การศึกษาที่แยกเวลาและเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางเจียนในรูปแบบลากรางเจียนเท่าที่เห็น (Weinberg, 1996: 300; Greiner, 1996: 33) ใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเขียนแยกกระจายอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่เทียบกับสนาม ของแต่ละอาร์กิวเมนต์ของลากรางเจียนหรือแฮมิลโทเนียนที่อยู่ในรูปอนุพันธ์เวลาหรืออวกาศ ออกมา เทคนิคที่น่าเสนอค่อนข้างยุ่งยากกว่าเพราะต้องดำเนินการต่างๆ ภายใต้เครื่องหมายอินทิกรัลในขณะที่เทคนิคปกติดำเนินการกับแฟกเตอร์ (factor) อนุพันธ์ แต่ก็เป็นวิธีตรงไปตรงมากกว่า คือเป็นการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของลากรางเจียนหรือแฮมิลโทเนียนโดยตรง ไม่ต้องเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลอื่น

บทที่ 4

เป็นรายงานการศึกษาแบบจำลอง NJL ที่ถูกทำให้ง่ายขึ้นด้วยการเปลี่ยนจากตัวที่ใช้งานจริงในฟิสิกส์ฮาดรอน (hadrons physics) ซึ่งมีสมมาตรโครโมไดนามิกส์ 3-เฟลเวอร์ $U_L(3) \otimes U_R(3)$ เป็นสมมาตรใน 1-เฟลเวอร์ $U_L(1) \otimes U_R(1)$ เพื่อให้ง่ายต่อการแสดงกลไกของการหักสมมาตรเชิงพลวัตของแบบจำลองนี้ โดยในบทนี้เป็นเพียงรายงานไม่ได้เสนอเทคนิคหรือผลใหม่

ในรายงานกล่าวเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลอง NJL ใน IF กับใน FF โดยจำกัดประเด็นแค่การมีออร์เดอร์พารามิเตอร์ไม่เท่ากับ 0 ภายใต้การประมาณสนามเฉลี่ยซึ่งใน IF หมายถึงการมีการหักสมมาตรพลวัตของแควคควอดัม และอธิบายว่าการที่ใน FF มีแควคควอดัมแบบทริเวียลโดยไม่มีการหักสมมาตรเชิงพลวัตแต่ยังคงมีออร์เดอร์พารามิเตอร์ไม่เท่ากับ 0 และเฟสหักทำนองเดียวกับใน IF ได้อย่างไรภายใต้การประมาณสนามเฉลี่ย ในที่นี้เน้นไปที่ใน FF โดยกล่าวถึงผลใน IF แบบคร่าวๆ เพื่อนำมาเปรียบเทียบ ในบทนี้ได้้นำผลการควอนไทซ์กว้างแสงจากในบทที่ 2 และ 3 มาใช้

บทที่ 5

เป็นสรุปผลที่ได้จากการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้

ภาคผนวก

เป็นการนำเสนอคณิตศาสตร์และเทคนิคการคำนวณบางส่วนที่นำไปใช้ในเนื้อหาวิทยานิพนธ์ ภาคผนวก ก เป็นสรุปเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลอย่างไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical rigorous) และฟอร์มูเลทหลักการแปรผันของกลศาสตร์จุดที่ใช้อนุพันธ์ฟังก์ชันนัล โดยในการนิยามการแปรผันของแอกชันผู้เขียนมองอนุพันธ์เวลาของตัวแปรพลวัตพื้นฐานว่าเป็นฟังก์ชันนัลของตัวแปรพลวัตพื้นฐานเช่นเดียวกับทฤษฎีสนามที่นำเสนอในบทที่ 2 ภาคผนวก ข เป็นการสรุปเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของอนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน (inverse longitudinal space derivative) อย่างไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ ภาคผนวก ค เป็นการแสดงผลเฉลยของสมการดิแร็กกรวยแสงในรูปปริภูมิโมเมนตัม ซึ่งผู้เขียนเสนอเทคนิคเล็กน้อยในการใบ้ (hint) อย่างไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ในการได้ผลเฉลยของสปินเนอร์ฐานหลักในปริภูมิโมเมนตัม (momentum space basis spinors) ออกมา ซึ่งในเอกสารที่เขียนเกี่ยวกับเรื่องนี้อย่างละเอียดเท่าที่หาได้ (Kogut and Soper, 1970; Lepage and Brodsky, 1980; Brodsky, Pauli and Pinsky, 1997: 170-175; Heinzl, 1998: 153-155; Srivastava, 1999) มักยกมาอ้างเฉยๆ โดยไม่ได้แสดงวิธีหาอย่างเป็นระบบ (systematic) ในขณะที่สปินเนอร์นี้ใน IF มีตำราที่กล่าวถึงวิธีหาผลเฉลยทั่วไปอย่างเป็นระบบอยู่ทั่วไป เช่น Peskin และ Schroeder (1995: 45-49)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทฤษฎีสนามในฟรอนท์ฟอร์ม

2.1 ทฤษฎีสนามสัมพัทธภาพ

เวลา กับ อวกาศ มีมโนทัศน์ต่างกัน กล่าวคือ

ก มโนทัศน์แบบกาลิเลียน (Hawking, 1996: 15-18)

หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละกรอบอ้างอิงเฉื่อยเป็นแบบการแปลงกาลิเลียน (Galilean transformation) การไม่มีกรอบอ้างอิงเฉื่อยที่สมบูรณ์ (absolute) โดยมีความสัมพันธ์กับแบบกาลิเลียนนี้ ทำให้**อวกาศ**เป็นปริมาณสัมพัทธ์ (relative) คือ ระยะห่างระหว่างตำแหน่งในอวกาศของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่างเวลากันไม่เป็นได้อย่างเดียว โดยสัมพันธ์กับกรอบอ้างอิงเฉื่อยของผู้สังเกต ในขณะที่**เวลา**เป็นปริมาณสมบูรณ์ คือ ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่างตำแหน่งกันในอวกาศมีความเป็นได้อย่างเดียว คือ เป็นค่าสมบูรณ์โดยไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยของผู้สังเกต ในมโนทัศน์แบบกาลิเลียน เวลาและอวกาศเป็นปริมาณที่มีสมบัติต่างกันและแยกกันอย่างชัดเจน

ข มโนทัศน์แบบสัมพัทธภาพพิเศษ

หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละกรอบอ้างอิงเฉื่อยเป็นแบบการแปลงโลเร็นซ์ (Lorentz transformation) ทำให้ปริมาณเวลาและอวกาศต่างเป็นสัมพัทธ์ทั้งคู่ คือ ระยะห่างระหว่างตำแหน่งในอวกาศและระยะเวลาของเหตุการณ์เป็นปริมาณสัมพัทธ์โดยขึ้นกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยของผู้สังเกต ปริมาณเวลาและอวกาศไม่แยกกันชัดเจน เป็นพิภพที่เลือกได้อย่างไม่เป็นได้อย่างเดียวของ วัตถุ (object) 4 มิติ ที่เรียกว่า อวกาศ-กาล การเปลี่ยนกรอบของผู้สังเกตเป็นส่วนหนึ่งของการแปลงพิภพของวัตถุนี้ที่เรียกว่าการแปลงโลเร็นซ์ ดังนั้นการเลือกแกนพิภพของเวลาในสัมพัทธภาพจึงไม่เป็นได้อย่างเดียวขึ้นกับว่าเป็นเวลาของผู้สังเกตในกรอบใด แต่มีข้อกำหนดจำกัด (restriction) ที่ต่างจากการเลือกแกนพิภพของอวกาศ คือ เลือกเป็นแกนที่มีเวกเตอร์สัมผัสเป็น สเปซ-ไลค์ (space-like) ไม่ได้ เนื่องจากต้องไม่ให้ขัดกับ เหตุภาพ (causality) ที่เป็นหลักการลำดับเหตุการณ์ก่อน-หลังที่ว่า ไม่ว่าผู้สังเกตอยู่ในกรอบที่เป็นไปได้ใดในสัมพัทธภาพ (หมายถึง กรอบใน เซตของกรอบที่ทุกกรอบสมาชิกไม่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กันเองเร็วกว่าแสง) เห็นลำดับความก่อนหลังของเหตุการณ์เหมือนกันไม่เปลี่ยนแปลง (Peskin and Schroeder, 1995: 28-29) แม้ว่าเห็นระยะเวลาได้ต่างกันก็ตาม

สังเกตว่าสามารถเลือกแกน ไลท์-ไลค์ (light-like) เป็นแกนเวลาได้ เพราะไม่ขัดเหตุภาพและอย่างน้อยมี วัตถุฟิสิกส์ (physical object) เช่น แสง ที่มี เวิร์ลด์-ไลน์ (world-line) อยู่บนแกนนี้จริง เวลา

ในแก่นนี้หมายความว่า เป็นเวลาของผู้สังเกตวัดเวลาที่เคลื่อนที่ไปกับแสง (Kogut and Soper, 1970: 2902)

เมื่อเลือกแกนเวลาในอวกาศ-กาลแล้ว ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงจะเห็นเวลานั้นมีสมบัติสำคัญอันหนึ่งคือ อสมมาตรเวลา (time-asymmetry) หรือ ลูกศรของเวลา (arrow of time) (Hawking, 1996: 147-157) กล่าวคือ มโนทัศน์ของลำดับเวลาเช่น “อดีต-อนาคต” ต่างจากมโนทัศน์ของลำดับในอวกาศ เช่น “ซ้าย-ขวา” เช่น ผู้สังเกตสามารถรับรู้ว่ามีอวกาศในตลอดทั้งลำดับดำรงอยู่ แต่ไม่สามารถรับรู้ว่ามีเวลาในตลอดทั้งลำดับ เช่น “อดีต-อนาคต” มีอยู่หรือไม่ และมีความจริงว่าผู้สังเกตจริงที่อยู่ในอวกาศ-กาลสามารถเปลี่ยนตำแหน่งให้มองเห็นลำดับในอวกาศกลับเป็นตรงข้ามได้ เช่น จาก “ซ้าย-ขวา” ไป “ขวา-ซ้าย” แต่ไม่สามารถเปลี่ยนตำแหน่งในอวกาศ-กาลให้มองเห็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกลับจาก “อดีต-อนาคต” ไป “อนาคต-อดีต” ได้ ในที่นี้ไม่ได้ศึกษาประเด็นเหล่านี้ สมบัติของแกนพิกัดเวลาอย่างเช่น เหตุภาพ, อสมมาตรเวลา ทำให้มโนทัศน์ของเวลาต่างจากอวกาศ แม้ว่าปริมาณทั้งสองในสัมพัทธภาพไม่แยกกันชัดเจนเพราะการเลือกพิกัดของอวกาศ-กาลไม่เป็นได้อย่างเดียวก็ตาม

ปริมาณ เวลา ปกติต้องสมนัยกับการเลือกผู้สังเกตในกรอบหนึ่งๆ แต่เนื่องจากความไม่แยกกันอย่างชัดเจนของเวลาและอวกาศในสัมพัทธภาพ ทำให้สามารถเลือกพิกัดอื่นในอวกาศ-กาลที่ไม่จำเป็นต้องเป็นเวลาของผู้สังเกตคนหนึ่งๆ มาใช้หรือเรียกลำดับ (label) เหตุการณ์ก่อน-หลังก็ได้ ในที่นี้ อนุโลมเรียกตัวแปรที่ทำหน้าที่ลำดับนี้ไปทั่วว่า “เวลา” ใช้คำเดียวกับปริมาณเวลาในความหมายปกติ โดยไม่จำเป็นต้องสมนัยกับผู้สังเกตจริงใด ส่วน ผิวเกินสเปซ-ไลค์ (space-like hypersurface) ในอวกาศ-กาลที่ นอร์มัล (normal) กับทิศทางการเพิ่มของตัวแปรนี้หรือมีตัวแปรนี้คงที่ก็จะอนุโลมเรียกว่า “อวกาศ” ในทำนองเดียวกัน

การเลือกพิกัดเวลาข้างต้นในรูปแบบหนึ่งๆ เรียกว่า ฟอรัม (form) ถ้าเขียนสมการบรรยายระบบพิกัดที่ไม่แปรเปลี่ยนในสัมพัทธภาพให้อยู่ในรูปตัวแปรพิกัดเวลาและอวกาศชนิดหนึ่งๆ ของอวกาศ-กาล (ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นตัวแปรเวลาและอวกาศในกรอบผู้สังเกตจริงคนหนึ่งๆ ตามที่กล่าวข้างต้น) พบว่าสมการดังกล่าวซึ่งแสดงวิวัฒนาการของระบบอาจมีรูปร่าง (ฟอรัม) ต่างๆ กันไปตามลักษณะพิกัดเวลาและอวกาศแต่ละชนิด เพราะเมื่อพิกัดเวลาและอวกาศแตกต่างกันออกไป วิธีที่ระบบขึ้นกับพิกัดเหล่านี้ก็สามารถแตกต่างกันออกไป ดังนั้นการที่ลักษณะพลวัตของระบบซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของแต่ละระบบสามารถแตกต่างกันออกไปในแต่ละการเลือกพิกัดเวลาได้ จึงเป็นสาเหตุให้เรียกการเลือกพิกัดเวลาในรูปแบบหนึ่งๆ ว่า “ฟอรัม”

เมื่อพิจารณาฟอรัมหรือรูปแบบของกฎพิกัดที่ไม่ได้แสดงการเลือกพิกัดใดในอวกาศ-กาลให้เป็นพิกัดเวลาออกมา หมายความว่าแค่เขียนพิกัด 4 ตัวบรรยายตำแหน่งในอวกาศ-กาล ซึ่งสามารถเลือกชุดที่ทั้ง 4 มีลักษณะอยู่ในรากฐานเดียวกัน (same-footing) ในกฎไม่แปรเปลี่ยนนี้ รูปแบบนี้สามารถใช้กับแกนเวลาใดได้อย่างไม่เจาะจงและไม่จำเป็นต้องเป็นแกนหนึ่งแกนใดในแกนพิกัดทั้ง 4 ที่ไม่ใช่สเปซ-ไลค์ และเขียนโดยเป็นที่เข้าใจว่าผิวเกินสเปซ-ไลค์ใดใดสามารถเป็นอวกาศของกฎพิกัดในรูปแบบนี้

คือเขียนในรูปแบบที่แสดงความไม่ขึ้นกับผิวเกินสเปซ-ไคส์ (Tomonaga, 1958: 162-164; Schwinger, 1948: 1445-1446) ฟอर्मและสัญลักษณ์รากฐานเดียวกันแบบนี้เรียกว่า โคแวเรียนต์ฟอर्म (CF: covariant form) ซึ่งแม้พิกัดทั้ง 4 จะมีสมมาตรกันก็ซ่อนประเด็นมโนทัศน์ที่ต่างกันระหว่างเวลากับอวกาศไว้โดยนัย (implicit)

ในที่นี้กำหนดวัตถุคณิตศาสตร์ (mathematical objects) ที่ใช้บรรยายสมบัติพื้นฐานของระบบฟิสิกส์ที่กำลังศึกษาว่าเป็น สนามพื้นฐาน $\psi_a(x)$ โดยอาจมีหลายคอมโพเนนท์ $a = 1 \dots n$ ซึ่งถูกกำหนดกำกับ (governed) ด้วยกฎธรรมชาติอันเป็นกฎเชิงปริมาณเรียกว่า สมการการเคลื่อนที่ หรือ สมการสนาม ตามหลักสัมพัทธภาพรูปของกฎนี้ต้องไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยของผู้สังเกต

จากการที่มโนทัศน์ของเวลาต่างจากอวกาศ จึงสามารถแบ่งความสัมพันธ์ภายในกฎฟิสิกส์กับอวกาศ-กาลออกเป็น 2 ด้าน คือ ด้านที่เกี่ยวกับเวลา เรียกว่า พลวัต (dynamics) และด้านที่เกี่ยวข้องกับอวกาศโดยไม่เกี่ยวกับเวลาเลย เรียกว่า ไคเนแมติก (kinematics) การที่ทั้งสองด้านต่างกันก็เนื่องจากมโนทัศน์ของเวลาและอวกาศต่างกัน

ในที่นี้จะลองเลือกแนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสถาน ในลักษณะดังนี้

(ก) เลือกพิกัดเวลาแยกออกมาเป็นพิเศษตั้งแต่จุดตั้งต้น (outset) เลย คือแสดงการเลือกพิกัดเวลาตั้งแต่การฟอรัมเลทหลักการแปรผันจนได้สมการสนาม โดยเขียนแสดงส่วนที่อยู่บนผิวเวลาเท่าออกมาให้ชัดแจ้ง (explicit)

(ข.1) ฟอรัมเลทหลักการแปรผันในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล โดยในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันมองลากรางเจียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลที่มีอาร์กิวเมนต์เป็นสนามพื้นฐานเท่านั้น

(ข.2) และเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ได้ในรูปลากรางเจียน ไม่ใช่ในรูปความหนาแน่นลากรางเจียน

มุมมองเฉพาะข้อ (ก) และ (ข.2) เป็นแนวการฟอรัมเลททฤษฎีสถานที่คล้ายกับ ในกลศาสตร์จุด (ภาคผนวก ก2) ซึ่งมีตัวแปรเวลากับตัวลำดับ (label) ชนิดของตัวแปรพลวัตพื้นฐานแยกกัน คล้ายในแง่ว่ามีการเลือกพิกัดของอวกาศ-กาลในทฤษฎีสถานซึ่งเป็นการแยกอวกาศ-กาลออกเป็นตัวแปรเวลากับตัวแปรอวกาศ (space-time foliation) โดยตัวแปรอวกาศคล้ายตัวลำดับในกลศาสตร์จุดข้างต้น และเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ในรูปลากรางเจียน แต่มีความแตกต่างกันในประเด็นสำคัญ 3 ประเด็น*

(1) ในกลศาสตร์จุด ดัชนีลำดับชนิดของ ตัวแปรพลวัตพื้นฐานที่ขึ้นกับเวลา เป็นวิฤต (discrete) ในขณะที่ทฤษฎีสถานมีตัวแปรอวกาศเป็นดัชนีต่อเนื่อง

(2) ในกลศาสตร์จุด ตัวแปรพลวัตพื้นฐานเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของเวลาจนถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง ไม่นิยามอนุพันธ์เทียบกับดัชนีลำดับชนิดของตัวแปรพลวัตพื้นฐานเพราะเป็นดัชนีไม่ต่อเนื่อง แต่ในทฤษฎีสถาน สนามพื้นฐานเป็นฟังก์ชันของทั้งตัวแปรเวลาและอวกาศที่ต่อเนื่องจนถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งทำให้สามารถนิยามอนุพันธ์ของสนามพื้นฐานทั้งเทียบกับเวลาหรือเทียบกับอวกาศได้ จึงเป็น

* จากการสนทนากับ ดร. อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ ภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทบาทหนึ่งของตัวแปรอวกาศในการเป็นโดเมนของสนามพื้นฐานในทฤษฎีสถานที่สามารถนิยามอนุพันธ์ย่อยของสนามพื้นฐานเทียบกับอวกาศในสมการสนามได้ ซึ่งแตกต่างจากดัชนีลำดับชนิดของตัวแปรพลวัตพื้นฐานในกลศาสตร์จุด

(3) ในหลักการแปรผันของกลศาสตร์จุดเป็นการแปรผันรูปฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาของแต่ละตัวแปรพลวัตพื้นฐาน โดยดัชนีลำดับชนิดของตัวแปรพลวัตพื้นฐานไม่ได้เป็นโดเมนของฟังก์ชันที่ทำการแปรผัน แต่หลักการแปรผันของทฤษฎีสถาน เป็นการแปรผันรูปฟังก์ชันของสนามพื้นฐานที่มีโดเมนเป็นอวกาศ-กาล หรือกล่าวถ้าได้เลือกพิกัดเวลาแล้วว่า เป็นการแปรผันรูปฟังก์ชันของสนามพื้นฐานที่ขึ้นกับทั้งตัวแปรเวลาและตัวแปรอวกาศ ซึ่งทุกฟังก์ชันที่ถูกแปรผันไปบนโดเมนนี้ต้องต่อเนื่องจนถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง (Byron and Fuller, 1992: 65-67)

มีข้อเน้นย้ำเพิ่มเติม ต่อแนวการเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสถานแบบนี้ คือ

1. เงื่อนไขน้อยที่สุดในการสามารถกำหนด (determine) ผลเฉลยของสมการสนามบนจุดใดใดในอวกาศ-กาล ก็คือ เงื่อนไขขอบเขต (BC: boundary conditions) และเงื่อนไขเริ่มต้น (IC: initial conditions) ต่างๆ ที่กำหนดอยู่บนผิวเวลาเท่า
2. ผิวเวลาเท่า ขึ้นกับการเลือกแกนเวลาซึ่งไม่เป็นได้อย่างเดียวในสัมพัทธภาพ และไม่สามารถเลือกได้ทุกวิธีในอวกาศ-กาล ต้องเลือกแกนที่มีเวกเตอร์สัมผัสไม่เป็นสเปซ-ไลค์เท่านั้น
3. หลังจากเลือกแกนเวลาแล้ว ผู้สังเกตที่สมนัยกับแกนเวลานี้จะเห็นสมบัติอสมมาตรเวลาของเวลาซึ่งไม่มีในเมตริกซ์ของอวกาศ

2.2 หลักการแปรผันของทฤษฎีสนามสัมพัทธภาพ

ในอวกาศ-กาล (x) เนื่องจากเวลาในสัมพัทธภาพไม่เป็นได้อย่างเดียว จึงสามารถพิจารณาเลือกพิกัดเวลาแบบทั่วไปที่ไม่จำเป็นต้องเป็นเวลาในความหมายปกติที่ต้องสมนัยกับผู้สังเกตใด เลือกโดยกำหนดพิกัดเวลา ξ^0 และผิวเวลาเท่าอันหนึ่งขึ้นมา (Heinzl, 2000: 6-7, 20) ดังนี้

$$\Sigma: \xi^0 = F(x) \quad (2.2.1)$$

ซึ่งมีข้อกำหนดว่าเป็น ผิวเกิน (hypersurface) ที่เวกเตอร์นอร์มัล (normal vector) เป็นสเปซ-ไลค์ไม่ได้ นั่นคือเวกเตอร์ตามทิศของ ξ^0 ไม่เป็นสเปซ-ไลค์ เรียก Σ ว่าเป็น อวกาศ ของเวลาชนิดนี้ มีชิ้นประกอบผิว (surface element) เป็น

$$d\sigma = d^4x \delta(\xi^0 - F(x)) \quad (2.2.2)$$

ให้พิกัดที่บรรยาย Σ เป็น ξ^{μ} เริ่มต้นแนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสนาม ที่ในการฟอร์มมูลหลักการแปรผันเลือกแยกพิกัดเวลาออกมาอย่างชัดเจน และในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันมองลากรางเจียนเป็นฟังก์ชันนัลของสนามพื้นฐานเท่านั้น (ดูรายละเอียดเกี่ยวกับ ฟังก์ชันนัล ในภาคผนวก ก) และเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจที่ได้ในรูปลากรางเจียน (ดูข้อ (ก)-(ข) ทำตอน 2.1) ซึ่งคล้ายกับกลศาสตร์จุด (ดูในภาคผนวก ก2) โดยเริ่มที่การพิจารณาตัวแปรพลวัตที่เป็นพิกัดทั่วไป (generalized coordinates) ของระบบสนามที่ศึกษา ซึ่งเรียกว่า สนามพื้นฐาน (basic fields) ที่เป็นฟังก์ชันของพิกัดของอวกาศ-กาลที่ถูกเลือกมาดังนี้

$$\phi(\xi^0, \xi^i) \Leftrightarrow q_i(t) \quad (2.2.3)$$

โดยลูกศรสองด้านที่เขียน แสดงการเทียบกับตัวแปรพลวัตพื้นฐาน (หรือพิกัดทั่วไป) ในกลศาสตร์จุด

ต่อไปพิจารณาระบบสนามที่เป็นแบบเฉพาะที่ (local) ซึ่งถูกกำหนดลักษณะเฉพาะโดยรูปของปริมาณแอกชัน (action) และลากรางเจียน (Lagrangian) ดังต่อไปนี้

$$S[\phi(\xi^0, \xi^i)] = \int d\xi'^0 L[\phi(\xi^0, \xi^i)] = \int d\xi'^0 \int d\sigma' L[\phi(\xi'^0, \xi'^i)] \quad (2.2.4)$$

พิจารณาการแปรผันรูปฟังก์ชันของสนามพื้นฐานที่ขึ้นกับเวลาและอวกาศเขียนเป็น $\Delta' \phi(\xi^0, \xi^i)$ (ทำนองเดียวกับ (ก2.4)) และพิจารณาหลักการแปรผันโดยเริ่มจากการแปรผันของแอกชันอันเนื่องมาจากการแปรผันดังกล่าวของสนามพื้นฐาน ซึ่งโดยแอกชันรูป (2.2.4) เขียนสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันได้ดังต่อไปนี้ (โดยใช้ (ก1.6) ทำนองเดียวกับ (ก2.5))

$$\begin{aligned}
\Delta S[\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})] &= \int d\xi'^0 \int d\sigma' \Delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}}) \frac{\delta S[L[\phi]]}{\delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}})} \\
&= \int d\xi'^0 \int d\sigma' \Delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}}) \int d\xi''^0 \frac{\delta(L[\phi](\xi''^0))}{\delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}})} \frac{\delta S[L]}{\delta(L(\xi''^0))} \\
&= \int d\xi'^0 \int d\sigma' \Delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}}) \int d\xi''^0 \frac{\delta(L[\phi](\xi''^0))}{\delta\phi(\xi'^0, \xi^{\mathbb{W}})}
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

โดยการแปรผัน $\Delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ เป็นการแปรผันฟังก์ชันนัล (functional variation) ของสนามพื้นฐานที่จุด $(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ กล่าวคือ $\Delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}}) = \Delta'\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})\delta(\xi^0 - \xi'^0)\delta(\xi^{\mathbb{W}} - \xi'^{\mathbb{W}})$ แต่เพื่อความสะดวกเรียกสั้นๆ ว่า การแปรผัน (ดู (ก2.6) ประกอบ) และนิยามอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลต่างๆ ที่กล่าวถึงในสมการนี้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S[L]}{\delta L(\xi^0)} &\equiv \lim_{\Delta'L \rightarrow 0} \frac{S[L + \Delta'L(\xi^0)\delta(\xi^0 - \xi'^0)] - S[L]}{\Delta'L(\xi^0)} \\
\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})} &\equiv \lim_{\Delta'\phi \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \Delta'\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})\delta(\xi^0 - \xi'^0)\delta(\xi^{\mathbb{W}} - \xi'^{\mathbb{W}})] - F[\phi]}{\Delta'\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})}
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

โดยสมการที่ 2 เป็นอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่ปรากฏในขั้นตอนที่ 2, และสมการที่ 3 เป็นอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่ปรากฏในขั้นตอนที่ 1 กับ 3 ของ (2.2.5) ตามลำดับ และนิยามว่า $\int d\sigma'\delta(\xi^{\mathbb{W}} - \xi'^{\mathbb{W}}) = 1$ ซึ่งหมายถึงการมี contribution ในอินทิกรัลเมื่อ $\xi^{\mathbb{W}}$ มีค่าตรงกับ $\xi'^{\mathbb{W}}$ บน Σ โดยฟังก์ชันเดลตา (delta function) และขึ้นประกอบผิวที่เขียน มีรูปที่แน่นอนแล้วแต่ลักษณะพิกัดอวกาศที่ใช้ ซึ่งอาจไม่ตรงกับรูปฟังก์ชันเดลตาปกติโดยตรง

โดยใช้ (ก1.12) พิจารณาเอกลักษณ์ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \int d\sigma' \phi^n(\xi''^0, \xi^{\mathbb{W}})}{\delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})} &= \int d\sigma' \left(\frac{\delta\phi^n(\xi''^0, \xi^{\mathbb{W}})}{\delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})} \right) \\
&= \int d\sigma' \left(\delta(\xi^0 - \xi''^0) \right) \delta(\xi^{\mathbb{W}} - \xi^{\mathbb{W}}) n\phi^{n-1}(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}}) \\
&= \delta(\xi^0 - \xi''^0) \frac{\delta \int d\sigma' \phi^n(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})}{\delta\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ด้าน LHS เป็นอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบกับสนามพื้นฐาน ณ ที่ $(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ จะเห็นว่าด้วยการแยกแพกเตอร์ $\delta(\xi^0 - \xi''^0)$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของผลลัพท์อนุพันธ์ฟังก์ชันนัลนี้ที่เกี่ยวข้องกับเวลาออกไป ก็สามารถเขียนในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลอีกตัวหนึ่ง โดยในการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลอันหลังนี้พิจารณาฟังก์ชันนัลเฉพาะส่วนที่ขึ้นกับ $\xi^{\mathbb{W}}$ ของฟังก์ชันเท่านั้น จึงใช้เครื่องหมาย “;” แยกอาร์กิวเมนต์ ξ^0 ออกไปต่างหาก นิยามดังนี้

$$\frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(\xi^{\mathbb{W}}; \xi^0)} \equiv \lim_{\Delta'\phi \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \Delta'\phi(\xi^{\mathbb{W}}; \xi^0)\delta(\xi^{\mathbb{W}} - \xi'^{\mathbb{W}})] - F[\phi]}{\Delta'\phi(\xi^{\mathbb{W}}; \xi^0)} \tag{2.2.8}$$

ซึ่งมีความหมายคล้ายกับอนุพันธ์ย่อยในสมการ (2.8)

ถ้ากำหนดให้การขึ้นกับฟังก์ชัน $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ ของฟังก์ชันนัล $L[\phi]$ อยู่ในรูปที่เป็นอินทิเกรตอวกาศของ \mathcal{L} ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial) ของ ϕ , $D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi](\xi^0)$ และ $\frac{\partial}{\partial \xi^0}[\phi]$ ดังนี้

$$L[\phi] \equiv \int d\sigma' \mathcal{L}\left(\phi, D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi], \frac{\partial}{\partial \xi^0}[\phi]\right) \quad (2.2.9)$$

โดยที่ $D_{\xi^{\mathbb{W}}}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อวกาศที่ดำเนินการกับ $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ ดังนี้

$$D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi](\xi^0) = D_{\xi^{\mathbb{W}}}\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$$

ซึ่งจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\delta D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi](\xi^0)}{\delta \phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})} &= \delta(\xi^0 - \xi'^0) D_{\xi^{\mathbb{W}}}\left(\frac{\delta \phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})}{\delta \phi(\xi'; \xi^0)}\right) \\ &= \delta(\xi^0 - \xi'^0) \frac{\delta D_{\xi^{\mathbb{W}}}\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})}{\delta \phi(\xi'; \xi^0)} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ในทำนองเดียวกับ (2.2.7) และใช้ (2.2.10) ได้ว่า

$$\frac{\delta \int d\sigma' (D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi])^n(\xi^0)}{\delta \phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})} = \delta(\xi^0 - \xi'^0) \frac{\delta \int d\sigma' (D_{\xi^{\mathbb{W}}}[\phi])^n(\xi^0)}{\delta \phi(\xi'; \xi^0)} \quad (2.2.11)$$

หมายเหตุ

1. ในตำราปกติที่ฟอร์มมูลหลักการแปรผันของทฤษฎีสนามในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลและเลือกพิคัดเวลาแต่แรกนั้น (Gitman and Tyutin 1990: 10; Weinberg 1995: 299; Greiner, 1996: 31-33) ในรูปสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันอันเนื่องมาจากการแปรผันของ $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ จะมองลากรางเจียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลของฟังก์ชัน ϕ กับ $\frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร $\xi^0, \xi^{\mathbb{W}}$ โดยในลากรางเจียนมีการอินทิเกรตตัวแปร $\xi^{\mathbb{W}}$ แต่ตรึง (fix) ตัวแปร ξ^0 ไว้ (ที่ใช้คำว่า “มอง” แม้ว่าเป็นเช่นนั้นอยู่แล้ว ก็เพราะสามารถมองในอีกแบบหนึ่งได้ นั่นคือข้อ 2. ถัดไป) ทำให้เขียนสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันในรูปการแปรผันของฟังก์ชัน ϕ และ $\frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}$ ดังนี้ (ซึ่งคนละรูปกับขั้นตอนสุดท้ายของ (2.2.5))

$$\Delta S = \int d\xi'^0 d\sigma' \left\{ \Delta \phi(\xi'^0, \xi'^{\mathbb{W}}) \frac{\delta L[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}]}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} + \Delta \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}(\xi'^0, \xi'^{\mathbb{W}}) \frac{\delta L[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}]}{\delta \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}(\xi'; \xi'^0)} \right\}$$

ส่วนอนุพันธ์อวกาศของสนามพื้นฐานนั้นถูกมองว่าอยู่ในส่วนที่ขึ้นกับฟังก์ชัน $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ ของฟังก์ชันนัลลากรางเจียนอยู่แล้ว กล่าวคืออยู่ในพจน์แรกของสมการข้างต้นนั่นเอง หลังจากนั้นค่อยใช้พจน์ใหม่ได้เวอร์เจนท์หรืออินทิเกรตแยกส่วน เขียนในรูปการแปรผันของฟังก์ชัน $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ อย่างเดียวในขั้นตอนต่อ

มา (ดูทำนองเดียวกันในกลศาสตร์จุดในข้อ 2.2 ต้นภาคผนวก ก2) จึงจะได้สูตรแสดงการแปรผันของแอกชันที่เขียนในรูปการแปรผันของสนามพื้นฐานอย่างเดียวกัน คือรูป (2.2.14) ต่อไป

2. ในที่นี้ นั่นคือขั้นตอนสุดท้ายของ (2.2.5) ผู้เขียนได้เสนอให้เขียนรูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันใหม่ ด้วยการกำหนดลากวางเจียนดัง LHS ของ (2.2.9) ข้างต้น ซึ่งเป็นการมองลากวางเจียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลของ $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{I}})$ อย่างเดียวเท่านั้น ทำได้ด้วยการมอง $\frac{\partial}{\partial \xi^0}[\phi]$ ในลากวางเจียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลของ $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{I}})$ (แทนที่จะมองเป็นฟังก์ชันของ $\xi^0, \xi^{\mathbb{I}}$ ตามที่ทำในตำราปกติ) ซึ่งเป็นมุมมองที่แตกต่างจากข้อ 1. กล่าวคือลากวางเจียนเป็นตามมุมมองในข้อ 1. และ 2. ที่เดียวกัน แต่เลือกมองมาใช้ต่างกัน ซึ่งทำให้สามารถเขียนรูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันในรูปการแปรผันของฟังก์ชัน ϕ เท่านั้นได้ โดยใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.6), (ก1.9) (ดูข้อ 2.3 ต้นภาคผนวก ก2 ในกรณีกลศาสตร์จุด) แม้ภายหลังยังคงต้องใช้พจน์ไมไ่ดเวอร์เจนท์หรืออินทิเกรตแยกส่วนจัดรูปให้ได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์เช่นเดียวกับที่ทำในตำราปกติ แต่ก็เป็นส่วนแพกเตอร์ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานที่ไม่ติดในรูปการแปรผันของอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานแล้ว นั่นคือได้พจน์ที่ 2 และ 3 ของ (2.2.12) ต่อไป

พิจารณาแพกเตอร์อนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของลากวางเจียนในขั้นตอนสุดท้ายของ (2.2.5) ต่อไป โดยใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.9) ทำในทำนองเดียวกับ (ก2.8) ซึ่งสำหรับลากวางเจียนตาม (2.2.9) ข้างต้นสามารถใช้ (2.2.7), (2.2.11) และสูตรอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลสำหรับผลบวกและผลคูณในพหุนาม เขียนในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (2.2.8) ที่นิยามใหม่ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial}{\partial \xi^0} [\phi] \right] (\xi^{n0})}{\delta \phi(\xi^{i0}, \xi^{\mathbb{I}})} &= \delta(\xi^{i'0} - \xi^{n0}) \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{i'0})}{\delta \phi(\xi^{i'0}, \xi^{\mathbb{I}})} - \delta(\xi^{i'0} - \xi^{n0}) \frac{\partial}{\partial \xi^{n0}} \left(\frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta (\partial \phi(\xi^{i'0}, \xi^{\mathbb{I}}) / \partial \xi^{n0})} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi^{n0}} \left(\int d\sigma^m \frac{\delta \phi(\xi^{n0}, \xi^{\mathbb{I}m})}{\delta \phi(\xi^{i'0}, \xi^{\mathbb{I}})} \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta (\partial \phi(\xi^{\mathbb{I}m}, \xi^{\mathbb{I}}) / \partial \xi^{n0})} \right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

โดยที่ 2 พจน์สุดท้ายได้จากการใช้พจน์ไมไ่ดเวอร์เจนท์ (ดังพจน์สุดท้าย) จัดรูป ซึ่งตรงกับการอินทิเกรตแยกส่วนว่า

$$\int d\xi^{n0} \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta \phi(\xi^{n0}, \xi^{\text{B}})} = \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta \phi(\xi^{\text{B}}; \xi^{n0})} - \frac{\partial}{\partial \xi^{n0}} \left(\frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta (\partial \phi(\xi^{\text{B}}; \xi^{n0}) / \partial \xi^{n0})} \right) + \left(\int d\sigma^m \frac{\delta \phi(\xi^{n0}, \xi^{\text{B}})}{\delta \phi(\xi^{n0}, \xi^{\text{B}})} \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right] (\xi^{n0})}{\delta (\partial \phi(\xi^{\text{B}}; \xi^{n0}) / \partial \xi^{n0})} \right)_{\xi^{n0} = \text{B.P.}} \quad (2.2.13)$$

ต่อไปพจน์สุดท้ายของ (2.2.13) หายไป เนื่องจากปกติทฤษฎีสนามมีการกำหนดเงื่อนไขของสนามพื้นฐานบนเวลาดังต่อไปนี้

(1) ใน (2.2.5) พิจารณาแต่การแปรผันในส่วนที่ขึ้นกับเวลาของ ϕ เฉพาะช่วงเวลาที่อยู่ระหว่างจุดขอบเขต (B.P.: boundary points) เท่านั้น นั่นคือมี $\Delta \phi(\xi^{n0} \in \text{B.P.}) = 0$ ดังนั้น (2.2.13) ที่มี ξ^{n0} ที่เท่ากับ B.P. นี้จึงไม่มี contribution ใน (2.2.5) เมื่อ B.P. ที่เห็นใน (2.2.13) ถูกกำหนดโดยขอบเขตอินทิกรัล (2.2.5) และไม่พิจารณา ξ^{n0} ที่เท่ากับ B.P. นี้ทำให้พจน์สุดท้ายเป็นศูนย์ **หรือ**

(2) ศึกษาแต่เฉพาะผลเฉลย $\phi(\xi^0)$ ที่อยู่ระหว่าง B.P. โดยไม่ได้อยู่ที่ B.P. **หรือ**

(3) กำหนด $\phi(\xi^0)$ ที่ B.P. ทั้งสองเป็นศูนย์

โดยข้อใดข้อหนึ่งในเงื่อนไขทั้ง 3 จริงก็เพียงพอให้พจน์นี้เป็นศูนย์ แต่เนื่องจากในด้านตัวแปรเวลามักศึกษาโดยเขียนผลเฉลย $\phi(\xi^0)$ ให้อยู่ในรูป IC ดังนั้นทฤษฎีสนามปกติจึงไม่นิยมกำหนดเงื่อนไขข้อ (3) ที่เป็นการกำหนดผลเฉลยที่ปลายทางไว้ก่อนแล้ว เมื่อแทนในขั้นตอนสุดท้ายของ (2.2.5) สรุปว่าได้รับการแปรผันของแอกชันอันเนื่องจากการแปรผันของสนามพื้นฐานในอวกาศ-กาลเป็น

$$\Delta S[\phi(\xi^0, \xi^{\text{B}})] = \int d\xi^{n0} \int d\sigma^m \Delta \phi(\xi^{n0}, \xi^{\text{B}}) \left\{ \frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right]}{\delta \phi(\xi^{\text{B}}; \xi^{n0})} - \frac{\partial}{\partial \xi^{n0}} \left(\frac{\delta L \left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0} \right]}{\delta (\partial \phi(\xi^{\text{B}}; \xi^{n0}) / \partial \xi^{n0})} \right) \right\} (\xi^{n0}) \quad (2.2.14)$$

หลักการแปรผัน กล่าวว่ ผลเฉลยสนามฟิสิกส์ (physical field solution) $\phi(\xi^0, \xi^{\text{B}})$ คือ ผลเฉลยที่เมื่อทำการแปรผันใดใดรอบๆ ผลเฉลยดังกล่าวแล้ว จะได้ ΔS ในแต่ละการแปรผันนั้นเท่ากับศูนย์ จาก (2.2.14) จะเห็นว่าถ้าเลือกฟังก์ชัน $\phi(\xi^0, \xi^{\text{B}})$ ที่ทำให้แพกเตอร์ในวงเล็บปีกกาเท่ากับ 0 แล้วไม่ว่าจะแปรผันสนามพื้นฐานรอบๆ ฟังก์ชันน้อยอย่างไรก็ได้ ΔS เท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นฟังก์ชันนี้ก็คือผลเฉลยสนามฟิสิกส์นั่นเองโดยมีแพกเตอร์ในวงเล็บปีกกาที่เท่ากับ 0 เป็นสมการสนามซึ่งเรียกว่า สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

สามารถเปรียบเทียบรูป (2.2.14) กับในกลศาสตร์จุด (ก2.10) ได้ ซึ่งเป็นแนวเข้าสู่การศึกษา ทฤษฎีสนามตามที่กล่าวไว้ในข้อ (ก)-(ข) ทำขั้นตอนที่ 2.1 ที่คล้ายกับในกลศาสตร์จุด แม้คล้ายกันก็จริง แต่ก็ยังคงมีโน้ตที่แตกต่างอย่างมากตามที่ได้กล่าวไว้แล้วในข้อ (1)-(3) ทำขั้นตอนที่ 2.1

ถ้าฟังก์ชัน L ขึ้นกับฟังก์ชัน ϕ โดยที่มีการผ่านอนุพันธ์เทียบกับอวกาศของ ϕ ที่เป็น $\nabla[\phi]$ ใน (2.2.14) ได้พิจารณาส่วนนี้อยู่ในพจน์แรกแล้ว แต่เพื่อความสะดวกในการหาผลลัพธ์อนุพันธ์ ฟังก์ชันนี้ออกมาสามารถใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.9) และหลักเกณฑ์ลูกโซ่ (chain rule) (ก1.7) กับพจน์แรกต่อไปเป็น

$$\frac{\delta L\left[\phi, \nabla[\phi], \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right](\xi'^0)}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} = \frac{\delta L\left[\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right]}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} + \int d\sigma'' \frac{\delta \nabla''[\phi]}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} \frac{\delta L\left[\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right]}{\delta \nabla'' \phi} \quad (2.2.15)$$

เมื่อความหนาแน่นลากรางเจียน \mathcal{L} เป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร ϕ , $\nabla \phi$ และ $\frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}$ โดยใช้

(ก1.12) ได้พจน์แรกว่า

$$\frac{\delta L\left[\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right]}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} = \frac{\partial \mathcal{L}\left(\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right)}{\partial \phi} \quad (2.2.16)$$

และพจน์ที่ 2 เป็น

$$\begin{aligned} \int d\sigma'' \frac{\delta \nabla''[\phi]}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} \cdot \frac{\delta L\left[\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right]}{\delta \nabla'' \phi} &= -\nabla' \cdot \left(\frac{\delta L\left[\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right]}{\delta \nabla' \phi} \right) + \int d\sigma'' \cdot \left(\frac{\delta \phi(\xi'^0, \xi''^0)}{\delta \phi(\xi'; \xi'^0)} \mathbf{K} \right) \\ &= -\nabla' \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}\left(\phi, \nabla \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \xi^0}\right)}{\partial \nabla' \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

โดยพจน์อินทิกรัลหรือพจน์ผิว (surface term) หายไป เนื่องจากทฤษฎีสนามปกติมีการกำหนดเงื่อนไขของสนามพื้นฐานบนอวกาศดังต่อไปนี้

(1) ใน (2.2.14) พิจารณาแต่การแปรผันส่วนที่ขึ้นกับอวกาศของสนามพื้นฐานเฉพาะสนามพื้นฐานบน ξ'' ที่อยู่ภายใน ผิวขอบเขต (B.S.: boundary surface) เท่านั้น นั่นคือมี $\Delta \phi(\xi^0, \xi'' \in \text{B.S.}) = 0$ ทำให้ใน (2.2.14) ไม่มี contribution จากอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบกับสนามพื้นฐานบนจุด $\xi'' \in \text{B.S.}$ เลย ดังนั้น ξ'' ใน (2.2.17) ที่มี contribution ใน (2.2.14) จึงไม่เท่ากับตัวแปรอินทิเกรต ξ'' ที่อยู่บน B.S. นี้ **หรือ**

(2) ศึกษาเฉพาะ $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ ที่อยู่ภายใน B.S. แต่ไม่ได้อยู่ที่ B.S. **หรือ**

(3) กำหนดให้สนามพื้นฐานที่ $\xi^{\mathbb{W}} \in \text{B.S.}$ เป็นศูนย์ ในทฤษฎีสนามทั่วๆ ไป B.S. มักเป็นอวกาศที่อนันต์

โดยข้อใดข้อหนึ่งจริงก็เพียงพอให้พจน์นี้เป็นศูนย์ ในด้านตัวแปรอวกาศของทฤษฎีสนาม มักศึกษาโดยเขียนผลเฉลย $\phi(\xi^0, \xi^{\mathbb{W}})$ ในรูป BC ดังนั้นจึงสามารถมีเงื่อนไขข้อ (3) ได้ จาก (2.2.16)-

(2.2.17) สามารถเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้จาก (2.2.14) ในรูป

$$0 = \frac{\delta L[\phi, \partial^\beta \phi]}{\delta \phi(\xi^0; \xi^{\mathbb{W}})} - \partial_\alpha \left(\frac{\delta L[\phi, \partial^\beta \phi]}{\delta \partial^\alpha \phi(\xi^0; \xi^{\mathbb{W}})} \right) = \frac{\partial L(\phi, \partial^\beta \phi)}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L(\phi, \partial^\beta \phi)}{\partial (\partial^\alpha \phi)} \right) \quad (2.2.18)$$



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3 ฟรอนท์ฟอร์ม และนิยามพิกต์กรวยแสง

พิจารณาเลือกเวลาและผิวเวลาเท่า (2.2.1) ในลักษณะดังนี้

$$\Sigma: \xi^0 = x^+ \quad (2.3.1)$$

เรียกว่า ฟรอนท์ฟอร์ม (FF: front form) และเรียกเวลาชนิดนี้ว่าเวลากววยแสง (light-cone time) หมายถึงการเลือกแกนไลท์-ไลค์ให้เป็นแกนเวลา ซึ่งสะดวกที่จะบรรยายระบบในฟอร์มนี้ด้วยพิกต์กรวยแสง (light-cone coordinates) ซึ่งนิยามจากพิกต์คาร์ทีเซียน ($x^\mu; \mu = 0 \dots 3$) ดังนี้

$$x^+ \equiv x^0 + x^3, \quad x_\perp^i \equiv x^i, \quad x^- \equiv x^0 - x^3; \quad i=1,2 \quad (2.3.2)$$

เขียน $x^\alpha = (x^+, x_\perp^i, x^-) = (x^+, x_\perp^i, x^-)$ เมื่อ $\alpha = +, i, -$ ตามลำดับ เรียก x^- ว่าพิกต์อวกาศตามยาว (longitudinal space coordinate) เรียก x_\perp^i ว่าพิกต์อวกาศตามขวาง (transverse space coordinates) ซึ่งต่อไปถ้าไม่เขียนในรูปเวกเตอร์จะละดัชนี \perp โดยเป็นที่เข้าใจกัน ดูรายละเอียดและความหมายของพิกต์กรวยแสงได้ใน Heinzl (2000: 6-19) จะเห็นว่าพิกต์กรวยแสงที่บรรยายผิวเวลาเท่าก็คือ $\xi^\alpha = x^\alpha \equiv (x^-, x^i)$ โดยมีชิ้นประกอบผิวในรูป

$$d\sigma = d^4x \delta(\xi^0 - x^+) = \frac{1}{2} dx^- d^2x_\perp \quad (2.3.3)$$

เมตริกไม่แปรเปลี่ยน (invariant metric) ในรูปพิกต์นี้ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} x_\mu x^\mu &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3 \\ &= x_\alpha x^\alpha = x_+ x^+ + x_- x^- + x_i x^i \\ &= \frac{1}{2} x^- x^+ + \frac{1}{2} x^+ x^- - x^i x^i = h_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

เรียก x_α และ x^α ว่า พิกต์โคแวเรียนต์ (covariant coordinates) และ พิกต์คอนทราแวเรียนต์ (contravariant coordinates) ของพิกต์กรวยแสงตามลำดับ โดยที่ $h_{\alpha\beta}$ เรียกว่า เมตริกกรวยแสง (light-cone metric) มีคอมโพเนนต์ $h_{+-} = h_{-+} = \frac{1}{2}$, $h_{ii} = -1$ เท่านั้นที่ไม่เท่ากับศูนย์ ส่วน $h^{\alpha\beta}$ มีคอมโพเนนต์ $h^{+-} = h^{-+} = 2$, $h^{ii} = -1$ เท่านั้นที่ไม่เท่ากับศูนย์ จะเห็นว่าเมตริกในรูปพิกต์กรวยแสงมีรูปร่างต่างจากพิกต์คาร์ทีเซียน คือในพิกต์คาร์ทีเซียนแต่ละพจน์อยู่ในรูปกำลังสองของพิกต์เดียวกัน แต่ในพิกต์กรวยแสงมีพิกต์ (+) กับ (-) อยู่ในรูปผลคูณไขว้กัน กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $g_{\mu\nu}$ ในพิกต์คาร์ทีเซียนเป็นไดอะโกนัล แต่ $h_{\alpha\beta}$ ในพิกต์กรวยแสงไม่ไดอะโกนัล (non-diagonal) มีคอมโพเนนต์ที่มี (+) คู่กับ (-) ไม่เป็นศูนย์ ความแตกต่างของรูปเมตริกนี้ส่งผลมหาศาลต่อความแตกต่างระหว่างระบบพลวัตที่มองใน อินสแตนท์ฟอร์ม (IF: instant form) หมายถึงฟอร์มที่เลือกเวลาเป็น $\xi^0 = x^0 = t$ ซึ่งเป็นฟอร์ม

ที่ใช้กันตามปกติ กับ ที่มองในพจน์ฟอร์ม เช่น ในระบบดิแรกอิสระ FF ที่จะกล่าวถึงประเด็นนี้ในตอน
ตอนที่ 3.2 ต่อไป

สำหรับอนุพันธ์เทียบกับอวกาศ-กาลในรูปพิกัดกรวยแสงมีดังนี้

$$\begin{aligned} \partial_{\pm} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{\pm}}, & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \partial^{\pm} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_{\pm}} = 2 \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = 2\partial_{\mu}, & \partial^i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial_+\partial^+ + \partial_-\partial^- + \partial_i\partial^i = \frac{1}{2}\partial^-\partial^+ + \frac{1}{2}\partial^+\partial^- - \partial^i\partial^i$$

ในการเขียนตัวแปรอวกาศ-กาลในรูปพิกัดกรวยแสงนั้น นิยมเขียนทั้งหมดในรูปพิกัดคอนทราเวเรียนต์
มากกว่าแบบอื่น



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ระบบดิแรกอิสระในฟรอนท์ฟอร์ม

3.1 ลากรางเจียนฟอร์มูเลชัน

พิจารณารูปของแอกชันระบบดิแรกอิสระ (free Dirac system) ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนในสัมพัทธภาพดังนี้

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4 x \left\{ \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \right\} \quad (3.1.1)$$

โดยที่สนามพื้นฐาน ψ เป็นสนามสปินเนอร์คลาสสิกัล (classical spinor field) ซึ่งแต่ละคอมโพเนนต์เป็นจำนวน กราสส์มันน์ (Grassmann number) (ดูนิยามและสมบัติใน Rajaraman (1987: 264-275)) เพราะตามทฤษฎีบทสปิน-สถิติ (spin-statistics theorem) (Peskin and Schroeder, 1995: 52-58) ที่ต้องควอนไทซ์ระบบสปิน-1/2 นี้ด้วย ตัวทำปฏิสลับที่ (anticommutators) เพราะฉะนั้นจึงให้ตัวแปรสนามพื้นฐานคลาสสิกัลเป็น จำนวนซี (c-number) ที่เป็นจำนวนกราสส์มันน์*

* ก. ตัวแปรพลวัตในระบบคลาสสิกัล (classical) เป็นจำนวนธรรมดา ในขณะที่ตัวแปรพลวัตในระบบควอนตัมไม่ใช่ เพราะไม่มีสมบัติการสลับที่ของการคูณ (commutative property of multiplication) จากความต่างกันนี้ Dirac (1967) เรียกตัวแปรพลวัตในระบบคลาสสิกัลว่า จำนวนซี (c-number) และระบบควอนตัมว่า จำนวนคว (q-number) สำหรับตัวแปรพลวัตพื้นฐานระบบคลาสสิกัลที่เป็นจำนวนกราสส์มันน์ กล่าวคือ มีสมบัติการปฏิสลับที่ (anticommutative property) แทนที่จะเป็นสมบัติการสลับที่ เนื่องจากระบบยังไม่ได้ถูกควอนไทซ์จึงถือว่าตัวแปรพลวัตกราสส์มันน์เป็นจำนวนซีอีกชนิดหนึ่ง ดูข้อ ข. ต่อไป

ข. ในการควอนไทซ์แบบคาโนนิคัล (canonical quantization) คือการควอนไทซ์ปัวซองแบร็กเก็ตพื้นฐาน (basic P.B.: basic Poisson brackets) ของระบบคลาสสิกัลด้วยการแทนที่เป็นตัวทำสลับที่พื้นฐาน (basic commutators) ในระบบควอนตัม ทั้ง P.B. พื้นฐานและตัวทำสลับที่พื้นฐานต่างมีความหมายที่อะนาโลกัส (analogous) กันโดยแสดงการก่อกำเนิด (generating) การแปลงตามกฎกลศาสตร์ด้วยกันทั้งคู่ นอกจากนั้นตัวทำสลับที่พื้นฐานยังมีความหมายที่อะนาโลกัสกับ P.B. พื้นฐานอยู่ก็คือ เป็นการแสดงว่าปริมาณฟิสิกส์ในระบบควอนตัมเป็นจำนวนควไม่ใช่จำนวนซี ซึ่ง P.B. ไม่ใช่สิ่งที่แสดงความเป็นจำนวนซีของระบบคลาสสิกัลโดยตรง จะเห็นว่าเมื่อทำ ลิมิตคลาสสิกัล (classical limit) $\hbar \rightarrow 0$ ของตัวทำสลับที่จึงเป็นสิ่งที่แสดงความเป็นจำนวนซีตามระบบคลาสสิกัลออกมา สำหรับตัวทำปฏิสลับที่ก็เช่นกัน มีด้านที่อะนาโลกัสกับ P.B. ก็คือการแสดงความเป็นจำนวนคว แต่การที่เป็นความสัมพันธ์เชิงปฏิสลับที่ (anticommutation relation) คำถามก็คือในลิมิตคลาสสิกัลจะเป็นจำนวนซีอย่างไร? เพื่อตอบคำถามนี้จึงสร้างจำนวนกราสส์มันน์ที่มีสมบัติการปฏิสลับที่กันหมดขึ้นมา เพื่อให้เป็น “จำนวนซี” ในลิมิตคลาสสิกัลของตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐาน (basic anticommutators) (Rajaraman, 1987: 264-265)

อภิปรายสมบัติของแอกชันและลากรางเจียนนี้ ดังนี้

1. ลากรางเจียนนี้เป็นลากรางเจียนเอกฐาน (singular Lagrangian) (ดูความหมายใน Gitman และ Tyutin (1990: 6-7); Kiselev, Shnir และ Tregubovich (2000: 260-261)) เพราะว่ามีเพียงกำลังหนึ่งของแฟกเตอร์อนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลา (ลากรางเจียนปกติที่ใช้ในกลศาสตร์จุดมีพจน์กำลังสองของอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลา) จึงทำให้ในการสร้างแฮมิลโทเนียนฟอร์มูเลชันใน IF เกิดมีเงื่อนไขบังคับ (constraint) ระหว่างตัวแปรแปรคาโนนิคัล (canonical variables) ขึ้น ซึ่งจะเป็นปัญหาว่าตัวแปรคาโนนิคัลที่ได้ไม่อิสระต่อกัน (ดูตัวอย่างง่ายๆ สำหรับอนุภาคอิสระสัมพัทธภาพในกลศาสตร์จุดใน Heinzl (2000: 4-5) และกลศาสตร์จุดของตัวแปรพลวัตพื้นฐานกราสส์มันน์ใน Kiselev, Shnir และ Tregubovich (2000: 260-261)) ซึ่งต้องแก้ปัญหาคงไปด้วยการพยายามหาตัวแปรปริภูมิเฟส (phase space) ใหม่ที่อิสระแท้จริงและสามารถนิยามคู่สังยุคคาโนนิคัลโดยบิวซงแบรคเกต (P.B.: Poisson bracket) ขึ้นมาได้ แต่เงื่อนไขบังคับในกรณี (3.1.1) ไม่เป็นปัญหาที่ยาก โดยพบว่าตัวแปรคาโนนิคัลที่สร้างได้มีคู่สังยุค (conjugate) คือ $\psi \leftrightarrow \pi \propto \psi^t$ ส่วนตัวแปร ψ^t กลับไม่มีคู่สังยุค (แม้ว่าเป็นพิกัดทั่วไปซึ่งอิสระในลากรางเจียนฟอร์มูเลชันเหมือน ψ ก็ตาม) เพราะเกิดเงื่อนไขบังคับด้วยการที่คู่สังยุคของมันมีค่าเท่ากันหมดโดยเป็นศูนย์ สังเกตว่าเนื่องจากคู่สังยุคของ ψ มีลักษณะเป็น $\pi \propto \psi^t$ ทำให้ตัวแปร ψ และ ψ^t ต่างก็เป็นคู่สังยุคกันเองอยู่แล้ว จึงเลือกคู่สังยุคคาโนนิคัลที่อิสระใหม่ให้เป็น ψ กับ ψ^t ซึ่งต่างก็เป็นพิกัดทั่วไป (หรือ สนามพื้นฐาน) ในลากรางเจียนฟอร์มูเลชันกันเองได้เลย

2. แอกชันมีค่าเป็นค่าจริง ซึ่งสมนัยกับความเป็นเฮอร์มิเชียน (Hermitian) ของเมทริกซ์ $\alpha^\mu = \gamma^0 \gamma^\mu$ และ γ^0 การที่เมทริกซ์เหล่านี้เป็นเฮอร์มิเชียนทำให้สามารถเลือกฐานหลักหรือคอมโพเนนต์ของสปินเนอร์ ψ ที่เป็นค่าจริง (real Grassmann number) ได้ เรียกว่า ตัวแทนมาโจรานา (Majorana representation) ซึ่งถ้าควอนไทซ์ก็จะได้คู่สนามคาโนนิคัลที่ต่างเป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน ตรงกับลักษณะของตัวก่อกำเนิดตามปกติของการแปลงยูนิแทรี (unitary transformation) ตามโครงสร้างของกลศาสตร์ควอนตัม เมื่อสามารถมีฐานหลักคาโนนิคัลที่เป็นค่าจริงอยู่แล้วก็ทำให้การควอนไทซ์ไม่จำเป็นต้องเลือกใช้คู่ฐานหลักคาโนนิคัลที่เป็นค่าจริงก็ได้

พิจารณา (3.1.1) ในรูปพิกัดกรวยแสงดังต่อไปนี้

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int dx^+ \left\{ \frac{1}{2} \int dx^- d^2x_\perp \bar{\psi} \left(i \left[\frac{1}{2} \gamma^+ \partial^- + \frac{1}{2} \gamma^- \partial^+ - \gamma^i \partial^i \right] - m_0 \right) \psi \right\} \quad (3.1.2)$$

ค. ระบบดิแรกคลาสสิกัลในรูปจำนวนกราสส์มันน์นี้สร้างขึ้นเพื่อเป็น “ต้นฉบับ (prototype)” ในการควอนไทซ์ครั้งที่สอง (second quantization) ที่ต้องสอดคล้องต้องกันกับทำปฏิสลับที่เท่านั้น ไม่ใช่กลศาสตร์ควอนตัมสัมพัทธภาพ (relativistic quantum mechanics) ที่ฟังก์ชันคลื่นต้องเป็นจำนวนซีแต่อย่างใด (Rajaraman, 1987: 274-275)

โดยนิยาม γ^α ในรูปแบบเดียวกับพิกัดกรวยแสง (2.3.2) จากพีชคณิตดิแรกในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Dirac algebra) นิรนัยได้พีชคณิตดิแรกกรวยแสง (light-cone Dirac algebra) ดังนี้

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2h^{\alpha\beta}, \quad \{\gamma^\alpha, \gamma^5\} = 0 \quad (3.1.3)$$

นอกจากนั้นนิรนัยได้เอกลักษณ์ที่มักนำไปใช้

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^+ &= \gamma^- \gamma^0 \\ \gamma^3 \gamma^+ &= -\gamma^- \gamma^3 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

หมายเหตุ โดยใช้หลักการแปรผัน (2.2.14) ดูเผินๆ ว่า (3.1.2) ให้สมการสนามว่า

$$\left(\frac{i}{2} \gamma^+ \partial^- + \frac{i}{2} \gamma^- \partial^+ - i \gamma^i \nabla^i - m_0 \right) \psi = 0 \quad (3.1.5)$$

เรียกว่า สมการดิแรกกรวยแสง (light-cone Dirac equation) แต่สมการนี้ใน FF พบว่าแต่ละคอมโพเนนต์ของ ψ ไม่ใช่สนามอิสระที่แท้จริง จึงไม่สามารถเขียนในรูป IC และ BC ที่อยู่บนผิวเวลาเท่าของ FF (ดูทำตอนที 2.1 ประกอบ) เพื่อกำหนด (determine) ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวได้ เพราะ IC และ BC ถูกกำหนดอย่างอิสระได้บนสนามอิสระที่ไม่ขึ้นแก่กันและอนุพันธ์ของมันเท่านั้น (ดูการวิเคราะห์ในรายละเอียด แต่กับระบบ 2-สปินเนอร์ (2-spinor) ในอวกาศ-กาล 1+1 มิติ ใน Heinzl (1998: 52-55))

ในการหาสนามอิสระที่แท้จริงหรือพิกัดทั่วไปใน FF ของระบบนี้จำเป็นต้องตรวจสอบคุณสมบัติของคอมโพเนนต์ของ ψ ใน FF ก่อน ก่อนอื่นพิจารณา

$$\begin{aligned} \Lambda_\pm &\equiv \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\pm = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^\pm, \quad \Lambda_\pm^t = \Lambda_\pm \\ (\Lambda_\pm)^2 &= \Lambda_\pm, \quad \Lambda_\pm \Lambda_\mu = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

จากสมบัติเหล่านี้ ทำให้ Λ_\pm เป็น ตัวดำเนินการฉาย (projection operators) ของ ψ

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_+ + \psi_- \equiv \Lambda_+ \psi + \Lambda_- \psi \\ \Lambda_+ \psi &= \psi_+, \quad \Lambda_- \psi = \psi_- \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

เนื่องจาก $h^{\alpha\beta}$ ของพีชคณิตดิแรกกรวยแสง (3.1.3) ไม่ได้กะโปกั้นนั่นคือมีคอมโพเนนต์ที่มี (+) คู่กับ (-) ไม่เป็นศูนย์ ทำให้เมื่อกระจาย (3.1.7) ลงในพจน์ผลคูณสปินเนอร์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับอวกาศ-กาล คือ 2 พจน์แรกของลากรางเจียน (3.1.2) แล้วจะเหลือพจน์ที่ไม่เท่ากับ 0 ในรูปที่มี ∂^- คู่กับ ψ_+ และ ∂^+ คู่กับ ψ_- เท่านั้น ซึ่งตรงกับลักษณะคอมโพเนนต์ที่ไม่ได้กะโปกั้นของ $h^{\alpha\beta}$ ดังต่อไปนี้

$$L[\psi_\pm, \psi_\pm^t] = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \left\{ \begin{aligned} &\psi_+^t i \partial^- \psi_+ + \psi_-^t i \partial^+ \psi_- - \psi_+^t (i \alpha^i \partial^i + \gamma^0 m_0) \psi_- \\ &- \psi_-^t (i \alpha^i \partial^i + \gamma^0 m_0) \psi_+ \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

เนื่องจากสนามพื้นฐานเป็นจำนวนกราสส์มันน์ ลำดับในการเขียนสนามในแต่ละพจน์จึงมีความสำคัญ ซึ่งได้กำหนดสัญนิยม (convention) ว่าในการดำเนินการใดใดให้เริ่มจากรูปของลากรางเจียนที่แต่ละเอกนาม (monomial) ของฟังก์ชันนัลของสนามมีการเรียงสนามจากที่มีสังยุค (ψ^t) ให้อยู่ทางด้านซ้ายสุด ก่อนที่เป็นสนามไม่มีสังยุค (ψ) ทางขวาสุดเสมอ อย่างเช่นที่เรียงอยู่แล้วใน (3.1.8) ซึ่งเรียกว่า ลำดับปกติ (normal order) ดังนั้นในการทำอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบกับสนามนั้น เพื่อที่จะนิยามผลลัพธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลให้ชัดเจนว่ามาจากการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลบนเอกนามใดอย่างไร และเพื่อให้เครื่องหมายของผลลัพธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่ได้จะนาโลกัส (analogous) กับที่ได้จากการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเช่นเดียวกัน ในระบบที่สนามพื้นฐานเป็นจำนวนธรรมดา จึงนิยาม อนุพันธ์ฟังก์ชันนัลทางซ้าย (ขวา) (left (right)-functional derivative) เมื่อต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับ ψ^t (ψ) ตามลำดับ หมายถึง ในการหาอนุพันธ์บนเอกนามหนึ่งๆ ให้สลับสนามที่จะถูก differentiate หายไปจนอยู่ทางซ้าย (ขวา) สุดตามลำดับ ก่อนที่จะ differentiate โดยสนามนั้นๆ เช่น ในการเขียนผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.9) สำหรับกรณีสนามที่กำลังศึกษาต้องเขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลซ้าย (ขวา) ดังนี้

$$\delta F[\psi_{\pm}, \psi_{\pm}^t, \partial^{-}[\psi_{\pm}], \partial^{-}[\psi_{\pm}^t]] = \int dx'^+ d\sigma' \sum_{a=\pm} \left\{ \begin{aligned} & \delta \psi_a^t(x'^+, x^{\overline{\sigma}}) \int dx''^+ d\sigma'' \left(\frac{\delta_l \psi_a^t(x'')}{\delta \psi_a^t(x')} \frac{\delta_l F}{\delta \psi_a^t(x'')} + \frac{\delta_l \partial''^{-}[\psi_a^t]}{\delta \psi_a^t(x')} \frac{\delta_l F}{\delta \partial''^{-}[\psi_a^t]} \right) \\ & + \int dx''^+ d\sigma'' \left(\frac{\delta_r F}{\delta \psi_a(x'')} \frac{\delta_r \psi_a(x'')}{\delta \psi_a(x')} + \frac{\delta_r F}{\delta \partial''^{-}[\psi_a]} \frac{\delta_r \partial''^{-}[\psi_a^t]}{\delta \psi_a(x')} \right) \delta \psi_a(x'^+, x^{\overline{\sigma}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

โดยที่ให้ดัชนี 1 หมายถึง ซ้าย, ดัชนี r หมายถึง ขวา และใน RHS พิจารณา F ว่า

$F[\psi_{\pm}, \psi_{\pm}^t, \partial^{-}[\psi_{\pm}], \partial^{-}[\psi_{\pm}^t]]$ และสำหรับอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่เทียบกับ $\overline{\nabla} \psi_{\pm}^t$ ($\overline{\nabla} \psi_{\pm}$) ก็นิยามโดยใช้ ซ้าย (ขวา) ทำนองเดียวกัน

โดยใช้ (3.1.9) ข้างต้น เขียนผลของหลักการแปรผันตามสมการ (2.2.14) ของระบบนี้ในรูป

$$0 \equiv \Delta S[\psi_{\pm}, \psi_{\pm}^t] = \int dx'^+ \int d\sigma' \sum_{a=\pm} \left\{ \begin{aligned} & \Delta \psi_a^t(x'^+, x^{\overline{\sigma}}) \left\{ \frac{\delta_l L}{\delta \psi_a^t(x^{\overline{\sigma}}; x'^+)} - \partial^{-} \left(\frac{\delta_l L}{\delta (\partial^{-} \psi_a^t(x^{\overline{\sigma}}; x'^+))} \right) \right\} \\ & + \left\{ \frac{\delta_r L}{\delta \psi_a(x^{\overline{\sigma}}; x'^+)} - \partial^{-} \left(\frac{\delta_r L}{\delta (\partial^{-} \psi_a(x^{\overline{\sigma}}; x'^+))} \right) \right\} \Delta \psi_a(x'^+, x^{\overline{\sigma}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

โดยที่ RHS ใช้ $L = L[\psi_{\pm}, \psi_{\pm}^t, \partial^{-}[\psi_{\pm}], \partial^{-}[\psi_{\pm}^t]]$ ในการหาพจน์แรกของสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่อยู่ภายในวงเล็บปีกกาข้างต้น ทำได้ 2 วิธี

1. โดยใช้การอินทิเกรตแยกส่วน จัดรูป L ให้อยู่ในรูปที่หาผลลัพธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลได้โดยตรง นั่นคือใช้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
F_1[\chi, \chi^\dagger] &\equiv \frac{1}{2} \int dx' d^2x'_\perp \chi^\dagger (i\alpha^i \partial'^i + \gamma^0 m_0) \chi \\
&= \frac{1}{2} \int dx' d^2x'_\perp \left\{ \chi^\dagger (i\alpha^i \overset{\sigma}{\partial}'^i + \gamma^0 m_0) \chi + \partial'^i (\chi^\dagger i\alpha^i \chi) \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned}
F_2[\chi, \chi^\dagger] &\equiv \frac{1}{2} \int dx' d^2x'_\perp \chi^\dagger i\partial'^+ \chi \\
&= \frac{1}{2} \int dx' d^2x'_\perp \left\{ -\chi^\dagger i\overset{\sigma}{\partial}'^+ \chi + \partial'^+ (i\chi^\dagger \chi) \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

จะเห็นว่าในรูปที่สองของทั้งสองสมการสามารถหาผลลัพท์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลได้โดยตรงว่า

$$\frac{\delta_r F_1}{\delta \chi(x; x^+)} = \chi^\dagger (-i\overset{\sigma}{\partial}^i \alpha^i + \gamma^0 m_0) \tag{3.1.13}$$

$$\frac{\delta_r F_2}{\delta \chi(x; x^+)} = \chi^\dagger (-i\overset{\sigma}{\partial}^+) \tag{3.1.14}$$

2. โดยใช้ทางอ้อม คือใช้ (2.2.15)-(2.2.17) ที่ได้จากการใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.9) จัดการกระจายอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบกับสนาม ของแฟกเตอร์ที่มีอนุพันธ์อวกาศตามขวาง ออกมา

จาก 2 วิธีนี้ในที่สุดได้สมการสนามเดียวกัน คือ

$$i\partial^- \psi_+ = (i\alpha^i \partial^i + \gamma^0 m_0) \psi_- \quad \text{áÁÐ h.c.} \tag{3.1.15}$$

$$i\partial^+ \psi_- = (i\alpha^i \partial^i + \gamma^0 m_0) \psi_+ \quad \text{áÁÐ h.c.} \tag{3.1.16}$$

โดยที่ h.c. หมายถึง สังยุคเฮอร์มิเทียน (Hermitian conjugate) ซึ่งจะอภิปรายลักษณะของทั้งสองสมการในตอนต่อไป

หมายเหตุว่า วิธีที่ 1 เป็นเทคนิคเล็กน้อยที่ผู้เขียนเสนอในที่นี้ โดยเท่าที่เห็นตำราที่ฟอรัมulet ทฤษฎีสนามที่แยกพิภคเวลาและทำในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่เขียนสมการออยเลอร์-ลากรานจ์ในรูปลากรางเจียนหรือแฮมิลโทเนียนที่เป็นฟังก์ชันนัลของสนาม (ไม่ใช่รูปความหนาแน่นลากรางเจียนหรือความหนาแน่นแฮมิลโทเนียน) ใช้วิธีที่ 2 นั่นคือใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.9) ในการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลในรูปอย่าง (3.1.13), (3.1.14) เช่น Weinberg (1996: 300), Greiner (1996: 33) และเท่าที่เห็นมี Hatfield (1992: 181) เท่านั้นที่ใช้วิธีที่ 1. แต่ฟอรัมulet ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลใน CF (ดูตอนที่ 2.1) คือไม่ได้แยกตัวแปรเวลาออกมาเป็นพิเศษ และใช้กับระบบสนามสเกลาร์ ส่วนในที่นี้ผู้เขียนประยุกต์ใช้กับระบบสนามสปินเนอร์ใน FF

3.2 แฮมิลโทเนียนฟอร์มเลชัน

อภิปรายลักษณะสมการสนาม (3.1.16) ก่อนดังนี้

ก. ถ้าเปรียบเทียบลากรางเจียนระบบดิแรกอิสระ FF (3.1.8) กับลากรางเจียนในกลศาสตร์จุดที่มีลักษณะว่า มีบางพิกัดทั่วไปที่ไม่ได้อยู่ในพจน์จลน์ (kinetic term) หรือพจน์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับเวลาเลย* จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์จะได้สมการการเคลื่อนที่ที่สมนัยกับพิกัดทั่วไป อยู่ในรูปที่ไม่มีอนุพันธ์เทียบกับเวลาเลย ดังนี้

$$f(q_i) = 0 \quad (3.2.1)$$

ซึ่งเป็น เงื่อนไขบังคับโฮโลมอร์ฟิก (holomorphic constraint) ชนิดหนึ่ง **ที่ต่างจาก** เงื่อนไขบังคับโฮโลมอร์ฟิกที่ศึกษากันทั่วไป (Goldstein, 1980: 12-13, 49, โดยเฉพาะหน้า 49) ตรงที่มีอยู่ “ภายใน” ลากรางเจียนอยู่แล้วและได้ออกมาจากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่อิสระต่อกัน โดยไม่ได้ถูกกำหนดมาควบคู่กับลากรางเจียนแล้วค่อยใช้วิธีตัวคูณลากรางจ์ (method of Lagrange multipliers) เพิ่มตัวแปรแล้วจึงได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่อิสระออกมา จะเห็นว่าลากรางเจียนระบบดิแรกอิสระ FF ก็เช่นกัน มีสนามพื้นฐาน ψ_-, ψ_-^t ที่ไม่มีอยู่ในพจน์อนุพันธ์เวลากว้างเลย ทำให้ได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับสนามพื้นฐานนี้เป็นสมการสนาม (3.1.16) ที่กลายเป็นเงื่อนไขบังคับคล้ายกับ (3.2.1) (ในแง่ที่ว่าได้ใช้แนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสถานที่คล้ายกลศาสตร์จุดมาตลอด คือมอง $x^u \in \Sigma$ ว่า “คล้าย” ดัชนีเลเบล i ตาม (2.2.3) แต่ต้องระลึกไว้ว่ามีโมทัศน์ที่ต่างกัน ดูในข้อ (1)-(3) ท้ายตอนที่ 2.1) มีชื่อเรียกสนามพื้นฐานลักษณะนี้ที่ (1) ไม่ได้อยู่ในพจน์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับเวลา และ (2) สามารถแก้เงื่อนไขบังคับที่มาจากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับสนามพื้นฐานดังกล่าว ให้เขียนสนามพื้นฐานดังกล่าวอยู่ในรูปสนามพื้นฐานอื่นๆ ที่มีในพจน์อนุพันธ์เทียบกับเวลาอย่างเช่นได้อย่างเดียวว่า สนามช่วย (auxiliary field) (Buchbinder and Kuzenko, 1998: 217-218) สาเหตุที่ระบบดิแรกอิสระ FF มีสนามพื้นฐานที่ไม่ได้อยู่ในพจน์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับเวลาโดยก่อให้เกิดเงื่อนไขบังคับเช่นนี้ก็เนื่องมาจากความไม่ไดอะโกนัลของเมตริกกว้างใน FF ซึ่งทำให้พีชคณิตดิแรกกว้าง (3.1.3) ไม่ไดอะโกนัลเป็นผลให้มีแต่คอมโพเนนท์ ψ_+ ที่สามารถอยู่ในพจน์ที่มีอนุพันธ์เวลากว้าง ∂^- ได้ ดูคำอธิบายหลัง (2.3.4) และ (3.1.7) ด้วย

ข. จากข้อ ก. จะเห็นว่าพลวัตของสนามช่วย ψ_-, ψ_-^t ถูกกำหนดโดย ψ_+, ψ_+^t ซึ่งเป็นสนามพื้นฐานที่ใช้กำหนด IC และ BC ของ FF มีชื่อเรียกคอมโพเนนท์ทั้งสองชนิดนี้ของสนามดิแรก ψ ว่า คอมโพเนนท์เลว (bad component) (-) และ คอมโพเนนท์ดี (good component) (+) ตามลำดับ สำหรับกรณีระบบดิแรกอิสระ FF ที่กำลังศึกษานั้นมีสมการสนามเป็นสมการเชิงเส้น จึงสามารถแก้สมการเงื่อนไขบังคับ (3.1.16) โดยเขียน คอมโพเนนท์(-) ให้อยู่ในรูป คอมโพเนนท์(+) ได้ ดังนี้

* ข้อความว่า “ไม่ได้อยู่ในพจน์จลน์” ไม่ได้หมายความว่า ตัวแปรพลวัตพื้นฐานนี้ไม่มีอนุพันธ์เทียบกับเวลา

$$\begin{aligned} \psi_- &= \frac{1}{i\partial^+} (i\alpha^i \partial^i + \gamma^0 m_0) \psi_+ \quad \text{and} \quad \psi_-^t = \psi_+^t (i\alpha^i \partial^i - \gamma^0 m_0) \frac{1}{i\partial^+} \\ i\partial^- \psi_+ &= (-\partial^i \partial^i + m_0^2) \frac{1}{i\partial^+} \psi_+ \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

สำหรับความหมายของ อนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน (inverse longitudinal space derivative) ถูกกล่าวรายละเอียดใน ภาคผนวก ข

ในการควอนไทซ์โดยผ่านแฮมิลโทเนียนฟอร์มเลชันต้องควอนไทซ์แต่คู่ตัวแปรคาโนนิคัลที่อิสระเท่านั้น เพื่อให้การแทนที่เป็นตัวทำสลับที่ (หรือปฏิสลับที่) พื้นฐานในกลศาสตร์ควอนตัมไม่ขัดแย้งกันเอง อันเนื่องจากการสามารถเขียนอยู่ในรูปของสนามพื้นฐานตัวอื่นของสนามพื้นฐานไม่อิสระ ดังนั้นในการสร้างแฮมิลโทเนียนฟอร์มเลชันที่เป็น “ต้นฉบับ” ของการควอนไทซ์จึงต้องฟอร์มเลทในรูปของคู่ตัวแปรคาโนนิคัลอิสระที่จำเป็นต่อพลวัตเท่านั้น เนื่องจากกรณีระบบบดแรกอิสระ FF สามารถแก้ผลเฉลย $\psi_- = \psi_-[\psi_+]$ จากสมการเงื่อนไขบังคับได้ จึงสามารถนำกลับไปแทนในลากรางเจียนเพื่อเขียนให้อยู่แต่ในรูปสนามอิสระที่จำเป็นต่อพลวัต คือ

$$L[\psi_+, \psi_+^t] = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \left\{ \psi_+^t i\partial^- \psi_+ - \psi_+^t (-\partial^i \partial^i + m_0^2) \frac{1}{i\partial^+} \psi_+ \right\} \quad (3.2.3)$$

จะเห็นว่าลากรางเจียนรูปนี้มีอนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน (ข.1) ทำให้เป็นทฤษฎีไม่เฉพาะที่ (non-local) แต่เนื่องจากการอินทิเกรตครอบคลุมหมด (overall) ถึงตัวแปรอวกาศ-กาลที่เป็นตัวไม่เฉพาะที่ ทำให้แต่ละพจน์ของความหนาแน่นลากรางเจียนมีจุดเดียวของอวกาศ-กาลเท่านั้นที่เป็นตัวแปร จึงทำให้ดูเหมือนเป็นทฤษฎีเฉพาะที่

จะเห็นว่าลากรางเจียนรูปนี้มีแต่กำลังหนึ่งของแฟกเตอร์อนุพันธ์เทียบกับเวลา จึงทำให้มีรูปอะนาโลจีสกับลากรางเจียนในรูป

$$L[q, p] = p \dot{q} - H[q, p] \Rightarrow p = \frac{\partial L(q, \dot{q}, p, t)}{\partial \dot{q}} \quad (3.2.4)$$

โดยในลากรางเจียนนี้จัดการให้ (treat) q, p เป็นพิกัดทั่วไป* จึงทำให้สำหรับ (3.2.3) สามารถสร้างแฮมิลโทเนียนฟอร์มเลชันโดยใช้กระบวนการของ Faddeev และ Jackiw (1988) ได้ นั่นคือแทนที่จะสร้างคู่ตัวแปรคาโนนิคัลโดยใช้นิยามจากทุกพิกัดทั่วไปของลากรางเจียนฟอร์มเลชันตามปกติ คือ

* ก. ลากรางเจียนรูปนี้เป็นลากรางเจียนเอกฐาน สังเกตว่าไม่มีโมเมนตัมทั่วไปที่สังยุคกับพิกัดทั่วไป p แต่ p กลับไปตรงกับโมเมนตัมทั่วไปที่สังยุคกับ q ซึ่งแสดงในด้าน RHS ของลูกศร ดังนั้น (ดูข้อ 1. ต้นตอนที่ 3.1 ด้วย) จึงสามารถจัดการให้ p และ q (ซึ่งเป็นพิกัดทั่วไปในลากรางเจียนฟอร์มเลชัน) เป็นคู่สังยุคคาโนนิคัลกันเองในแฮมิลโทเนียนฟอร์มเลชันได้เลย โดยมีพจน์ H เป็นแฮมิลโทเนียนเพราะ (3.2.4) มีรูปตรงกับนิยามแฮมิลโทเนียนอยู่แล้ว

$$\psi_+ \leftrightarrow \pi_+ \equiv \frac{\delta_r L \left[\psi_+, \psi_+^t, \frac{\partial \psi_+}{\partial x^+}, \frac{\partial \psi_+^t}{\partial x^+} \right]}{\delta \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} (x^{\bar{0}}; x^+) \right)}$$

$$\psi_+^t \leftrightarrow \pi_+^t \equiv \frac{\delta_l L \left[\psi_+, \psi_+^t, \frac{\partial \psi_+}{\partial x^+}, \frac{\partial \psi_+^t}{\partial x^+} \right]}{\delta \left(\frac{\partial \psi_+^t}{\partial x^+} (x^{\bar{0}}; x^+) \right)}$$

แล้วค่อยแก้ปัญหาเงื่อนไขบังคับที่เกิดขึ้นจากการนิยามโมเมนตัมทั่วไปอันเนื่องจากการเป็นลากรางเจียนเอกฐาน แต่กลับสามารถที่จะจัดการให้พิกัดทั่วไปของ (3.2.3) เป็นคู่ตัวแปรคาโนนิคัลกันเองได้เลย โดยการเปรียบเทียบให้ตรงคู่ตัวแปร (p, q) ใน (3.2.4) ซึ่งเป็นคู่สังยุคคาโนนิคัลซึ่งกันและกันอยู่แล้ว (ดูเชิงอรรถ ข้อ ก. หน้า 28) นั่นคือได้คู่สังยุคคาโนนิคัลเป็น

$$\psi_+ \leftrightarrow \pi_+ = i2 \psi_+^t \propto \psi_+^t \quad (3.2.5)$$

และสามารถเขียน (3.2.3) ในรูป (3.2.4) โดยให้ \mathcal{H} หมายถึงความหนาแน่นในอวกาศของ \mathbf{H} ว่า

$$L[\psi_+, \pi_+] = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \left\{ \pi_+ \frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} - \mathcal{H}[\psi_+, \pi_+] \right\}$$

$$H[\psi_+, \pi_+] = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \left\{ \frac{1}{i2} \left[\pi_+ \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \psi_+ \right] \right\} \quad (3.2.6)$$

หมายเหตุ นอกจากลากรางเจียนระบบดิแรกที่มีกำลังหนึ่งของอนุพันธ์เวลาอยู่แล้ว เนื่องจากเมตริกกรวยแสง (2.3.4) อยู่ในรูปกำลังหนึ่งของคอมโพเนนท์เวลากววยแสง ทำให้ลากรางเจียนของระบบพลวัตสัมพัทธภาพอื่นๆ ในฟรอนท์ฟอร์มมักมีเพียงกำลังหนึ่งของอนุพันธ์เวลากววยแสงด้วย ดังนั้นจึงมักสะดวกที่จะใช้กระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟในการควอนไทซ์ระบบ FF (Jackiw, 1993: 2; Heinzl, 2000: 31)

ปริมาณ \mathbf{H} ของทฤษฎีสนามที่นิยามโดยเปรียบเทียบกับรูป (3.2.4) ข้างต้นเรียกว่า แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) มีมโนทัศน์ที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. จะเห็นว่าสมการสนามหรือสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่จัดการให้ตัวแปร p, q ในลากรางเจียนรูป (3.2.4) เป็นพิกัดทั่วไปนั้นสามารถสร้างมโนทัศน์ของ P.B. และการแปลงแบบคาโนนิคัลขึ้นมาได้ (ดูเชิงอรรถ ข้อ ก. หน้า 28 และดูต่อไปที่ (3.2.12)) จึงทำให้สามารถสร้างพลวัตแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian dynamics) ขึ้นมาได้ โดยมี \mathbf{H} ดังกล่าวเป็นตัวก่อกำเนิดการเลื่อนขนานในเวลา (time

ข. ถ้าใช้ลากรางเจียนรูปนี้ คือ (3.2.4), (3.2.6) แทนในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชัน (2.5), (2.2.5) จะมองเป็น $L[q, p]$ ถ้าใช้แทนในสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (2.10), (2.2.14) จะมองเป็น $L(q, p, \dot{q}, \dot{p})$

translation) ซึ่งเป็นการแปลงแบบคาโนนิคัลนั่นเอง เมื่อถึงขั้นตอนนี้ก็ได้ทฤษฎีสนามในรูปแฮมิลโทเนียนฟอร์มูเลชันที่สมบูรณ์แล้ว ซึ่งจะแสดงต่อไปสำหรับระบบดิแรกอิสระ FF ที่ศึกษา

2. H ที่นิยามโดยรูปสมการ (3.2.6) นั้นเป็น ประจุเนื้อเทอร์ของการเลื่อนขนานในเวลา (time translation Noether charge) ของทฤษฎีสนามสัมพัทธภาพ แสดงดังนี้ พิจารณาขึ้นประกอบผิว (2.3.3) ในรูปที่มีเวกเตอร์นอร์มัลด้วยคือ $d\sigma_\mu = d\sigma N_\mu$ โดยที่ $N_\mu = (1, 0, 0, 1)$ สำหรับเวกเตอร์ A_μ ใดใดได้ว่า

$$d\sigma_\mu A^\mu(x^+, x^\ominus) = \frac{1}{2} dx^- d^2 x_\perp A^+(x^+, x^\ominus) \quad (3.2.7)$$

จากนิยาม กระแสเนื้อเทอร์ของการเลื่อนขนาน (translation Noether currents) (Heinzl, 1998: 41-43) ดังนี้

$$T^{\mu\nu}(x) = \pi_a^\mu \partial^\nu \psi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.2.8)$$

โดยที่ดัชนี a ใช้ลำดับคอมโพเนนต์ของสนามพื้นฐานทั้งหมด พิจารณาในรูปพิชิตกรวยแสงที่คอมโพเนนต์ T^{+-} โดยที่มี $g^{+-} \equiv h^{+-} = 2$ และมีนิยาม (3.2.8) ว่า

$$\pi_a^+ \equiv \frac{\delta_r \mathcal{L}[\psi_a, \partial_+ \psi_a]}{\delta(\partial_+ \psi_a(x^\ominus; x^+))} = \frac{\partial \mathcal{L}(\psi_a, \partial_+ \psi_a)}{\partial(\partial_+ \psi_a / \partial x^+)} \quad (3.2.9)$$

พบว่าเมื่อแทนนิยามคอมโพเนนต์ T^{+-} ลงในนิยาม ประจุเนื้อเทอร์ของการเลื่อนขนานในเวลากรวยแสง (light-cone time translation Noether charge) P^- ก็ได้ดังนี้

$$P^-(x^+) \equiv \int d\sigma_\mu T^{\mu-} = 2H[\pi_a, \psi_a] \quad (3.2.10)$$

ซึ่งตรงกับนิยามของ H ใน (3.2.6) โดยมีเพียงสัมประสิทธิ์ "2" เพิ่มเติมมา

ต่อไปจะแสดงการสร้างมโนทัศน์ของ แบริกเกต (bracket) (ซึ่งในระบบทั่วไปอาจไม่ใช่ P.B. ก็ได้) ด้วยกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟ พิจารณาหาสมการสนามของ ψ_+, π_+ ด้วยหลักการแปรผันของลากรางเจียน (3.2.3) เนื่องจาก ψ_+, π_+ เป็นจำนวนกราสส์มันน์และเพราะ (3.2.5) จึงนิยามอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลซ้าย (ขวา) เช่นเดียวกับใน (3.1.9) จึงได้ผลของหลักการแปรผัน (2.2.14) ในรูป

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \Delta S[\psi_+, \pi_+] \\ &= \int dx'^+ \frac{1}{2} \int dx'^- d^2 x'_\perp \left(\begin{aligned} &\Delta \pi_+(x'^+, x'^\ominus) \left\{ \frac{\delta_1 \mathcal{L}}{\delta \pi_+(x'^\ominus; x'^+)} - \partial^- \frac{\delta_1 \mathcal{L}}{\delta(\partial^- \pi_+(x'^\ominus; x'^+))} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{\delta_r \mathcal{L}}{\delta \psi_+(x'^\ominus; x'^+)} - \partial^- \frac{\delta_r \mathcal{L}}{\delta(\partial^- \psi_+(x'^\ominus; x'^+))} \right\} \Delta \psi_+(x'^+, x'^\ominus) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

ซึ่งแทน (3.2.6) ลงไปในสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ได้สมการสนามว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} &= \frac{\delta_1 \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \pi_+(x^+; x^+)} = \left\{ \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+](x^+) \right\}_{\text{P.B.}} \\ \frac{\partial \pi_+}{\partial x^+} &= -\frac{\delta_1 \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \psi_+(x^+; x^+)} = \left\{ \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+](x^+) \right\}_{\text{P.B.}}\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

โดยนิยาม P.B. ของทฤษฎีสนามดังนี้

$$\begin{aligned}& \{ \mathbf{A}[\psi_+, \pi_+], \mathbf{B}[\psi_+, \pi_+] \}_{\text{P.B.}} \\ & \equiv \frac{1}{2} \int dx^+ dx'^+ \left\{ \frac{\delta_1 \mathbf{A}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \psi_+(x^+; x^+)} \frac{\delta_1 \mathbf{B}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \pi_+(x'^+; x'^+)} - \frac{\delta_1 \mathbf{B}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \psi_+(x'^+; x'^+)} \frac{\delta_1 \mathbf{A}[\psi_+, \pi_+]}{\delta \pi_+(x^+; x^+)} \right\}\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

จะเห็นจาก (3.2.12) ว่าลากรางเจียนที่อยู่ในรูป (3.2.4) ให้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ของ ψ_+, π_+ เป็นรูป P.B. อยู่แล้ว ดังนั้นจึงเป็นสมการสนามแฮมิลโทเนียนด้วยตัวมันเองเลย แต่ต้องพิจารณาว่า

1. ระบบดิแรกอิสระ FF ที่ศึกษามีสนามพื้นฐานเป็นจำนวนกราส์มันน์ ซึ่งต้องควอนไทซ์แบรคเกตพื้นฐาน (basic brackets) ที่ได้ด้วยตัวทำปฏิสลับที่ เนื่องจากตัวทำปฏิสลับที่มีสมบัติสมมาตร แต่ P.B. (3.2.13) มีสมบัติปฏิสมมาตร จึงมองว่า P.B. ใน (3.2.13) ยังไม่ใช่นิยาม แบรคเกตพื้นฐานคลาสสิกัล (classical basic bracket) สำหรับตัวแปรกราส์มันน์นี้ จะกล่าวถึงแบรคเกตพื้นฐานคลาสสิกัลที่ถูกต้องสำหรับระบบนี้ต่อไป

2. เพื่อความสะดวกในการกล่าวสรุปถึงกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟ จะกล่าวอย่างครอบคลุมถึงลากรางเจียนทั่วไปที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่มีอนุพันธ์เวลาแต่ในอันดับหนึ่งและกำลังหนึ่งอย่างทั่วไปด้วย กล่าวคือตรงแฟกเตอร์ π_+ ในพจน์แรกของสมการแรกของ (3.2.6) สามารถเปลี่ยนเป็น $f(\psi_+, \pi_+)$ และยังสามารถมีพจน์กำลังหนึ่งของอนุพันธ์เวลาอันดับหนึ่งของ π_+ ด้วย ดู Jackiw (1993: 3) ซึ่งอาจทำให้หลักการแปรผัน (3.2.11) ไม่ให้สมการสนามของ ψ_+, π_+ ในรูปที่สามารถสร้างมโนทัศน์ของแบรคเกตและการแปลงคาโนนิคัลขึ้นมาได้เพราะสมการสนามที่ได้อาจไม่สามารถจัดรูปให้มี LHS เหมือน (3.2.12)

จากข้อ 2. ข้างต้นพิจารณานิยามแบรคเกตทั่วไปตามกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟ ซึ่งอาจไม่ใช่ P.B. ก็ได้ แต่ต้องมีมโนทัศน์ของการแปลงคาโนนิคัลขึ้นมาได้ จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้ใน (3.2.11) พยายามจัดรูปให้ RHS ไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์เวลา ในขณะที่ด้าน LHS ตรงกับด้านอนุพันธ์เวลากว้างขวางของรูปมาตรฐานของสมการสนามแฮมิลโทเนียน (คือสมการ (3.2.12)) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} &= \text{RHS} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} \right) = \mathbf{F}[\psi_+, \pi_+] \\ \frac{\partial \pi_+}{\partial x^+} &= \text{RHS} \left(\frac{\partial \pi_+}{\partial x^+} \right) = \mathbf{G}[\psi_+, \pi_+]\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

สำหรับลากรางเจียนที่มีกำลังหนึ่งของอนุพันธ์เวลาอันดับหนึ่งทั่วไปอาจทำไม่ได้ก็ได้ ถ้าทำไม่ได้จะมีบางสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้จาก (3.2.11) เป็นสมการเงื่อนไขบังคับ (แต่เป็นคนละแบบกับเงื่อนไขบังคับที่เกิดขึ้นจากการนิยามโมเมนตัมทั่วไปในแฮมิลโทเนียนฟอร์มูเลชันปกติที่กล่าวในข้อ 1. ต้นตอนที่

3.1) หมายถึงการมี (ψ_+, π_+) บางตัวที่สัมพันธ์กันเองอย่างไม่พลวัต ต้องการวิธีแก้เงื่อนไขบังคับหรือกำหนดเกจ (gauge fixing) เพื่อให้ได้ตัวแปรคานอนิคัลอิสระที่แท้จริงต่อไป

ถ้าสามารถจัดรูปตาม (3.2.14) ได้ ต่อไปนิยามแบรคเคทอย่างทั่วไปโดย identify ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_+(x^+, x^\ominus), H[\psi_+, \pi_+](x^+) \right\} &\equiv \text{RHS} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial x^+} \right) \\ \left\{ \pi_+(x^+, x^\ominus), H[\psi_+, \pi_+](x^+) \right\} &\equiv \text{RHS} \left(\frac{\partial \pi_+}{\partial x^+} \right) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

ซึ่งยังเป็น แบรคเคทนามธรรม (abstract brackets) ไม่ได้ realize รูปของมันออกมาให้ชัดเจน เพียงกำหนดให้มีพีชคณิตทำงานองเดียวกับ P.B. ดังนี้ สำหรับ u, u_1, u_2, v, v_1 และ v_2 ที่เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของสนามที่เป็นตัวแปรพลวัตพื้นฐาน ψ_+ หรือ π_+ และ c ที่เป็นค่าคงที่หรือไม่ใช่ตัวแปรพลวัตหรือไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปรพลวัต กำหนดให้แบรคเคทของมันมีพีชคณิต ดังนี้

$$\{u, v\} = -\{v, u\}, \quad \{u, c\} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\{u_1 + u_2, v\} = \{u_1, v\} + \{u_2, v\}, \quad \{u, v_1 + v_2\} = \{u, v_1\} + \{u, v_2\} \quad (3.2.17)$$

$$\{u_1 u_2, v\} = u_1 \{u_2, v\} + \{u_1, v\} u_2 = u_1 \{u_2, v\}_+ - \{u_1, v\}_+ u_2 \quad (3.2.18-1)$$

$$\{u, v_1 v_2\} = \{u, v_1\} v_2 + v_1 \{u, v_2\} = \{u, v_1\}_+ v_2 - v_1 \{u, v_2\}_+ \quad (3.2.18-2)$$

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0 \quad (3.2.19)$$

โดยที่ $\{, \}$ และ $\{, \}_+$ คือแบรคเคทนามธรรมที่มีลักษณะปฏิสมมาตร (3.2.16) และสมมาตรตามลำดับพีชคณิตข้างต้นสามารถขยายให้ทั่วไปสู่ฟังก์ชันนัลใดของสนาม ψ_+, π_+ ก็ได้ ซึ่งถ้าสนามพื้นฐานเป็นจำนวนกราส์มันน์ดังในที่นี้ต้องมีการเพิ่มเติมสัมประสิทธิ์ $(-1)^n$ หน้าแฟกเตอร์ต่างๆ อย่างซับซ้อนขึ้นโดยที่ค่าจำนวนเต็ม n ต่างๆ ขึ้นกับจำนวนสนาม ψ_+, π_+ ที่ทำผลคูณกันในแต่ละเอกนามของ u และ v ซึ่งไม่ได้ศึกษาในที่นี้ (ดูพีชคณิตทั่วไปของแบรคเคทของจำนวนกราส์มันน์ใน Martin (1959: 539-540), Gitman และ Tyutin (1990: 76-77))

ต่อไปหาแบรคเคทพื้นฐานโดยใช้พีชคณิตข้างต้นลดทอนแบรคเคทที่นิยามใน (3.2.15) ลงจนอยู่ในรูปแบรคเคทของตัวแปรพลวัตพื้นฐาน ψ_+, π_+ ของลากรางเจียนที่มีอนุพันธ์เวลาแต่ในอันดับหนึ่งและกำลังหนึ่งดังกล่าว ที่เรียกว่าแบรคเคทพื้นฐาน เรียกตัวแปรสนามอิสระแต่ละคู่ที่สังยุคกันโดยแบรคเคทพื้นฐานนี้ว่าสนามคานอนิคัล (canonical fields) จากแบรคเคทพื้นฐานก็อาจสามารถ realize ความหมายของแบรคเคทที่ถูกนิยามอย่างนามธรรมนี้ได้ นั่นคือ การเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ ในขั้นตอนสุดท้ายของการลดทอนนี้จะเลือกใช้ (3.2.18) ในรูป $\{, \}$ หรือ $\{, \}_+$ แล้วแต่ชนิดของสนามพื้นฐานตามทฤษฎีบทสปีน-สเถิตี ต่อจากนั้นควอนไทซ์ด้วยแทนที่แบรคเคทพื้นฐานรูป $\{, \}$ หรือว่า $\{, \}_+$ ด้วย ตัวทำสลับที่ หรือ ตัวทำปฏิสลับที่ ตามลำดับ

กลับมากรณีระบบดิแรก FF ที่ศึกษา โดย (3.2.12) ทำให้ได้ RHS ของ (3.2.14) ว่า

$$\text{RHS}\left(\frac{\partial\psi_+}{\partial x^+}\right) = \frac{\delta_l \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta\pi_+(x^+; x^+)}, \quad \text{RHS}\left(\frac{\partial\pi_+}{\partial x^+}\right) = -\frac{\delta_r \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta\psi_+(x^+; x^+)} \quad (3.2.20)$$

ต่อไปหาอนุพันธ์ฟังก์ชันใน RHS ข้างต้น ซึ่งมี 2 วิธี (ดูหมายเหตุท้ายตอนที่ 3.1 ด้วย)

1. จัดรูปแฮมิลโทเนียน (3.2.6) ให้สามารถหาอนุพันธ์ฟังก์ชันใน RHS ได้โดยตรง ซึ่งกรณีนี้ทำได้ด้วยการอินทิเกรตแยกส่วน 2 ครั้ง ดังเอกลักษณ์ต่อไปนี้ ซึ่งได้ละพจน์ผิวแล้ว

$$\begin{aligned} F_1[\chi, \chi^t] &\equiv \frac{1}{2} \int dx' d^2 x'_\perp \left\{ \chi^t \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \chi \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int dx' d^2 x'_\perp \left\{ \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \chi^t \right\} \chi \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\delta_r F_1}{\delta\chi(x^+; x^+)} = -\left(-\partial^i \partial^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial^+} \chi$$

โดยใช้เอกลักษณ์ข้างต้นและ (ข.10) ได้สมการสนามตาม (3.2.14) ว่า

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial x^+} = \frac{\delta_l \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta\pi_+(x^+; x^+)} = \frac{1}{i2} \left(-\partial^i \partial^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial^+} \psi_+ \quad (3.2.22)$$

$$\frac{\partial\pi_+}{\partial x^+} = -\frac{\delta_r \mathbf{H}[\psi_+, \pi_+]}{\delta\psi_+(x^+; x^+)} = \left(-\partial^i \partial^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial^+} \frac{1}{i2} \psi_+ \quad (3.2.23)$$

2. โดยใช้เทคนิคทางอ้อมเช่นเดียวกับ (2.2.15)-(2.2.17) แต่ต้องอินทิเกรตแยกส่วนแพกเตอร์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับอวกาศตามขวางถึง 2 ครั้ง และเมื่อละพจน์ผิวแล้วได้ว่า

$$\frac{\delta_r \mathbf{H}[\psi_+, \partial^i \partial^i [\psi_+], \pi_+]}{\delta\psi_+(x^+; x^+)} = \frac{\delta_r \mathbf{H}[\psi_+, \partial^i \partial^i \psi_+, \pi_+]}{\delta\psi_+(x^+; x^+)} + \partial^i \partial^i \frac{\delta_r \mathbf{H}[\psi_+, \partial^i \partial^i \psi_+, \pi_+]}{\delta(\partial^i \partial^i \psi_+(x^+; x^+))} \quad (3.2.24)$$

ต่อไป identify แปรกเคตาม (3.2.15) และใช้พีชคณิต (3.2.16)-(3.2.19) ลดทอนลงจนได้แปรกเคพื้นฐาน เริ่มจาก (3.2.22) ดังนี้

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i2} \left(-\partial^i \partial^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial^+} \psi \equiv \left\{ \psi_+(x^+, x^\perp), \mathbf{H} \right\} \\ &= \left\{ \psi_+(x^+, x^\perp), \frac{1}{2} \int dx' d^2 x'_\perp \frac{1}{i2} \pi_+(x^+, x^\perp) \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \psi_+(x^+, x^\perp) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int dx' d^2 x'_\perp \frac{1}{i2} \left(\left\{ \psi_+(x^+, x^\perp), \pi_+(x^+, x^\perp) \right\}_+ \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \psi_+(x^+, x^\perp) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \pi_+(x^+, x^\perp) \frac{1}{i\partial'^+} \left\{ \psi_+(x^+, x^\perp), \psi_+(x^+, x^\perp) \right\}_+ \right) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

โดยขั้นตอนสุดท้ายผ่านการอินทิเกรตแยกส่วนตามเอกลักษณ์ (3.2.21) และละพจน์ผิวแล้ว จะเห็นว่าถ้ากำหนดให้

$$\Sigma : x^+ = \text{const} , \quad \left\{ \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = 2 \delta(x^- - x'^-) \delta(x_{\perp}^{\overline{\omega}} - x'_{\perp}^{\overline{\omega}}) \\ \left\{ \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = 0 \quad (3.2.26)$$

ก็จะทำให้ RHS ตรงกับ LHS ที่ identify ไว้พอดี ส่วนอีกสมการคือ (3.2.23) ก็ทำนองเดียวกันโดยมีอินทิเกรตแยกส่วน (3.2.21) แล้วละพจน์ผิวเช่นกัน แล้วจากการ identify ตามสมการที่ 2 ของ (3.2.15) ได้ว่า

$$\Sigma : x^+ = \text{const} , \quad \left\{ \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = 0 \\ \left\{ \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = 2 \delta(x^- - x'^-) \delta(x_{\perp}^{\overline{\omega}} - x'_{\perp}^{\overline{\omega}}) \quad (3.2.27)$$

ซึ่งเหล่านี้คือแบรคเคทพื้นฐานที่ต้องการ แต่จะเห็นว่าก็ยังคงเป็นแบรคเคทสมมาตรคลาสสิกัลนามธรรม (abstract classical symmetric bracket) การที่มีลักษณะสมมาตรจึงไม่ใช่ P.B. คำถามคือจะเขียนในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลอย่างไร ในที่นี้จะแสดงเฉพาะกรณีการศึกษา ดูการนิยามแบรคเคทของตัวแปรกราส์มันน์ในรูปอนุพันธ์แบบทั่วไปใน Martin (1959), Kiselev, Shnir และ Tregubovich (2000: 249-252, 259-260) ที่มีตัวอย่างสำหรับตัวแกว่งกวัดเฟอร์มิออนิก (Fermionic oscillator) และใน Gitman และ Tyutin (1990: 11, 75-80, 265-267, 272-273) ที่มีตัวอย่างสำหรับระบบดิแรกอิสละใน IF สำหรับในกรณีการศึกษาจะเห็นว่าถ้าให้

$$\left\{ \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = \frac{\delta_1 \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}})}{\delta \pi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} \\ \left\{ \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = \frac{\delta_1 \psi_+(x^+, x^{\overline{\omega}})}{\delta \pi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} = \frac{\delta_r \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}})}{\delta \psi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} \quad (3.2.28) \\ \left\{ \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}), \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}}) \right\}_+ = \frac{\delta_r \pi_+(x^+, x^{\overline{\omega}})}{\delta \psi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)}$$

พบว่าสอดคล้องเป็นอย่างดีกับ (3.2.22)-(3.2.23), (3.2.25)-(3.2.26) และ (3.2.27) ต่อไปถ้าลองแทนที่เครื่องหมายลบใน P.B. (3.2.13) ของสนามคานอนิคัลเป็นเครื่องหมายบวก ซึ่งเขียนทั่วไปโดยใช้นิยาม u, v, v_1 และ v_2 เช่นเดียวกับใน (3.2.16)-(3.2.19) ดังนี้

$$\left\{ u, v \right\}_{\text{P.B.,+}} \\ \equiv \frac{1}{2} \int dx'^- dx'_{\perp} \left\{ \frac{\delta_r u}{\delta \psi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} \frac{\delta_1 v}{\delta \pi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} + \frac{\delta_r v}{\delta \psi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} \frac{\delta_1 u}{\delta \pi_+(x^{\overline{\omega}}; x^+)} \right\} \quad (3.2.29)$$

พบว่าได้แบรคเคทที่สมมาตรและตรงกับ (3.2.28) พิจารณาเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{\delta_r (v_1 v_2)}{\delta \psi_+} = -v_2 \frac{\delta_r v_1}{\delta \psi_+} + v_1 \frac{\delta_r v_2}{\delta \psi_+} = -\frac{\delta_r v_1}{\delta \psi_+} v_2 + v_1 \frac{\delta_r v_2}{\delta \psi_+} \quad (3.2.30)$$

$$\frac{\delta_1 (v_1 v_2)}{\delta \pi_+} = \frac{\delta_1 v_1}{\delta \pi_+} v_2 - \frac{\delta_1 v_2}{\delta \pi_+} v_1 = \frac{\delta_1 v_1}{\delta \pi_+} v_2 - v_1 \frac{\delta_1 v_2}{\delta \pi_+} \quad (3.2.31)$$

พจน์แรกของสมการ (3.2.30) มาจากการที่ ถ้ากรณี v_1 เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของ ψ_+ ต้องสลบให้อยู่ทางขวาสุดก่อนค่อยทำการหาอนุพันธ์ทางขวา จึงทำให้ปรากฏเครื่องหมายลบขึ้น ส่วนถ้ากรณี v_1 เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของ π_+ ก็ได้พจน์นี้เป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกัน พจน์ที่สองของสมการ (3.2.31) มาจากการที่ ถ้ากรณี v_2 เป็นฟังก์ชันนัลของ π_+ ต้องสลบให้อยู่ทางซ้ายสุดก่อน แล้วค่อยทำการหาอนุพันธ์ทางซ้ายจึงปรากฏเครื่องหมายลบติดอยู่ข้างหน้า ส่วนถ้ากรณี v_2 เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของ ψ_+ ก็ได้พจน์นี้เป็นศูนย์

โดยใช้แบรacketสมมาตร (3.2.29) และเอกลักษณ์ข้างต้นแสดงได้ว่า P.B. ตาม (3.2.13) ของระบบดิแรกอิสระ FF ที่สนามคานิคัลเป็นจำนวนกราสส์มันน์มีพีชคณิตสอดคล้องกับพีชคณิตที่ใช้นิยามแบรketในกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟสำหรับตัวแปรกราสส์มันน์ (3.2.16)-(3.2.19) เช่น ดังนี้

$$\{u(x^+, x^\ominus), v_1 v_2(x^+, x^\ominus)\}_{P.B.} = \{u, v_1\}_{P.B.,+} v_2 - v_1 \{u, v_2\}_{P.B.,+}$$

หรือ

$$\left\{ u(x^+, x^\ominus), \frac{1}{2} \int dx' -d^2 x'_\perp v_1 v_2(x^+, x^\ominus) \right\}_{P.B.} = \frac{1}{2} \int dx' -d^2 x'_\perp \left(\{u, v_1\}_{P.B.,+} v_2 - v_1 \{u, v_2\}_{P.B.,+} \right)$$

เพราะฉะนั้นจึงได้ realize แล้วว่าแบรketสมมาตรพื้นฐานคลาสสิกที่ได้ชื่อนามธรรมจากกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟอยู่ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลก็คือ (3.2.29) นั่นเอง

ตามปกติในการควอนไทซ์แบรketสมมาตรพื้นฐาน (basic symmetric brackets) ทำโดยแทนที่โดยตรงด้วยตัวทำปฏิสลับที่นั่นคือ $\{, \}_+ \Rightarrow [,]_+$ ทำให้ได้ดังนี้

$$\Sigma : x^+ = \text{const} , \quad \begin{aligned} [\psi_+(x^+, x^\ominus), \psi_+(x^+, x^\ominus)]_+ &= 0 = [\psi_+^t(x^+, x^\ominus), \psi_+^t(x^+, x^\ominus)]_+ \\ [\psi_+(x^+, x^\ominus), \psi_+^t(x^+, x^\ominus)]_+ &= 2\delta(x^- - x'^-) \delta(x^\ominus_\perp - x'^\ominus_\perp) \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

แต่จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งขึ้น เป็นไปไม่ได้ พิจารณาดังนี้ จาก ψ_+ ที่เป็นเมทริกซ์แนวตั้ง 4×1 และ ψ_+^t ที่เป็นเมทริกซ์แนวแถว 1×4 นิยามเมทริกซ์ดังนี้

$$[\psi_+^\#(x^+, x^\ominus) \psi_+^T(x^+, x^\ominus)]^t_{ab} \equiv [\psi_+^\#(x^+, x^\ominus) \psi_+^T(x^+, x^\ominus)]_{ba} = \psi_{+b}^\#(x^+, x^\ominus) \psi_{+a}^T(x^+, x^\ominus) \quad (3.2.33)$$

โดยที่ $\#$ หมายถึงการใส่สัญยุคเฮอริมิเซียนลงบนตัวดำเนินการสนามในแต่ละคอมโพเนนท์โดยไม่มีการทรานสโพส (transpose) ของเมทริกซ์ที่ใช้เขียนสนามหลายคอมโพเนนท์, T หมายถึง การทรานสโพสเมทริกซ์ที่ใช้เขียนสนามหลายคอมโพเนนท์โดยไม่มีการใส่สัญยุคเฮอริมิเซียนให้กับตัวดำเนินการในแต่ละคอมโพเนนท์ และ t หมายถึง การทรานสโพสผลคูณเมทริกซ์ของสนามหลายตัวโดยไม่มีการเปลี่ยน

ลำดับการคูณตัวดำเนินการในแต่ละคอมโพเนนท์ของสนามต่างๆ ที่มาคูณกัน (ซึ่งสูตร

$(AB)^T = B^T A^T$ ที่ใช้กันปกตินั้น ได้มีการสลับลำดับการคูณสนาม A กับ B ที่อยู่ภายในแล้ว)

เมื่อเขียน (3.2.26) โดยใช้นิยามข้างต้นและใช้สมบัติของ Λ_+ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
2\delta(x^- - x'^-)\delta(x_{\perp}^{\overline{\square}} - x'_{\perp}^{\overline{\square}})\mathbf{I}_{ab} &= \left[\psi_{+a}(x^+, x^{\overline{\square}}), \psi_{+b}^t(x^+, x^{\overline{\square}}) \right]_+ \\
&= \left[\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}}) + (\psi_+^\#(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^T(x^+, x^{\overline{\square}}))^t \right]_{ab} \\
&= \left[\Lambda_+\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}})\Lambda_+ + \Lambda_+(\psi_+^\#(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^T(x^+, x^{\overline{\square}}))^t\Lambda_+ \right]_{ab} \\
&= \left\{ \Lambda_+ \left[\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}}) + (\psi_+^\#(x^+, x^{\overline{\square}})\psi_+^T(x^+, x^{\overline{\square}}))^t \right] \Lambda_+ \right\}_{ab} \\
&= 2\delta(x^- - x'^-)\delta(x_{\perp}^{\overline{\square}} - x'_{\perp}^{\overline{\square}})(\Lambda_+)_{ab} \neq 2\delta(x^- - x'^-)\delta(x_{\perp}^{\overline{\square}} - x'_{\perp}^{\overline{\square}})\mathbf{I}_{ab}
\end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ 5 ได้จากการแทน (3.2.32) ลงไปในขั้นตอนที่ 4 ก็จะทำให้ข้อขัดแย้งกันเองขึ้นกับ (3.2.32) จึงต้องกลับไปดูการควอนไทซ์ว่าได้ทำผิดที่ใด จะเห็นว่าในระบบควอนตัมสมการสนามต่างๆ เช่น (3.2.25) เป็นสมการตัวดำเนินการแต่แรก ดังนั้นจึงต้องเป็นการถอดตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานออกจากสมการตัวดำเนินการ ไม่ใช่ถอดแบรaketคลาสสิกนามธรรมดังที่ได้ทำมา จะเห็นว่าสนามในสมการตัวดำเนินการที่กำลังพิจารณาและในตัวทำปฏิสลับที่ล้วนเป็น คอมโพเนนท์-(+) ซึ่งสามารถดูซ้ำตัวดำเนินการฉาย Λ_+ ที่คุณเข้ามาได้โดยไม่เสียเอกลักษณ์ ดังนั้นสามารถเขียน (3.2.25) ใหม่โดยเขียน Λ_+ เต็มลงไปข้างตัวทำปฏิสลับที่ด้วย และ identify ค่าตัวทำปฏิสลับที่ออกมาด้วยการถอดเช่นเดียวกับแบรketคลาสสิก (classical brackets) (3.2.26) แต่ต้องทำอยู่ภายใต้การมีสัมประสิทธิ์ Λ_+ ทั้งสองข้างด้วยดังนี้

$$\frac{1}{i} \left[\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}}), \pi_+(x^+, x^{\overline{\square}}) \right]_+ \Lambda_+ = 2\delta(x^- - x'^-)\delta(x_{\perp}^{\overline{\square}} - x'_{\perp}^{\overline{\square}})\Lambda_+$$

และเนื่องจากตัวทำปฏิสลับที่สามารถดูซ้ำตัวดำเนินการฉายนี้ได้จึงไม่จำเป็นต้องเขียนลงไป สรุปว่าได้ตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานทั้งหมดว่า

$$\begin{aligned}
\Sigma : x^+ = \text{const} , \quad \left[\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}}), \psi_+(x^+, x^{\overline{\square}}) \right]_+ &= 0 = \left[\psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}}), \psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}}) \right]_+ \\
\left[\psi_+(x^+, x^{\overline{\square}}), \psi_+^t(x^+, x^{\overline{\square}}) \right]_+ &= 2\delta(x^- - x'^-)\delta(x_{\perp}^{\overline{\square}} - x'_{\perp}^{\overline{\square}})\Lambda_+
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

หมายเหตุ ในที่นี้แสดงการควอนไทซ์ระบบดิแรกอิสระ FF ที่ได้ตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐาน (3.2.34) หลังจากการแก้สมการเงื่อนไขบังคับ คำถามคือสำหรับระบบดิแรก FF ทั่วไปที่เงื่อนไขบังคับขึ้นกับอันตรกิริยา จะได้ตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานอย่างไร (3.2.34) หรือไม่ และรูปลักษณะตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานที่ได้ขึ้นกับอันตรกิริยาหรือไม่ คำตอบคำถามแรกคือ ได้ และคำตอบคำถามที่สองคือ ไม่ ระบบดิแรก FF ทั่วไปก็ยังคงได้ตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานในรูป (3.2.24) เพราะพจน์จลน์ (พจน์จลน์ของระบบสนาม หมายถึง พจน์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับอวกาศ-กาล) ของระบบดิแรกทั่วไปก็ยังคงเป็นพจน์จลน์เดียวกับระบบดิแรกอิสระ (3.1.2) ซึ่งให้พจน์อนุพันธ์เวลากว้างแวงใน FF เป็นพจน์ $\psi_+^t i \partial^- \psi_+$ ตาม (3.1.8) เสมอ ดังนั้นยังคงได้ลากรางเจียนในรูป (3.2.4) ที่ให้สมการสนามในกระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟในรูปสมการแฮมิลโทเนียนมาตรฐาน (3.2.12) ซึ่ง RHS สามารถเขียนอยู่ในรูป P.B. ของ สนามอิสระ (คือ

คอมโพเนนท์-(+) กับ แฮมิลโทเนียนที่เป็นฟังก์ชันนัลของสนามอิสระ ได้ เพราะการที่ P.B. มีพีชคณิตที่
ไม่ว่าแฮมิลโทเนียนมีรูปร่างอย่างไรก็สามารถลดทอนโดยเขียนให้อยู่ในรูปแบรคเคตพื้นฐานของสนาม
อิสระ ψ_+, ψ_+^\dagger ซึ่งเป็นสนามคาโนนิคัลตาม (3.2.24) ได้เสมอ



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.3 ระบบดิแรกอิสระพรมอนท์ฟอร์มควอนตัมในปริภูมิโมเมนตัม

ในการแก้ระบบ QFT วิธีที่สะดวกคือแปลงแฮมิลโทเนียนให้อยู่ในรูปตัวแปรที่สามารถทำการไดอะโกนัลไลซ์ (diagonalize) ได้ง่าย ก็จะแก้สมการสนามไฮเซนเบิร์ก (ซึ่งเป็น ควอนตัมแอนะล็อก (quantum analogue) ของสมการสนามแฮมิลโทเนียน (3.2.12)) ได้ง่าย จากแฮมิลโทเนียนระบบดิแรก FF

$$H[\psi_+, \pi_+] = \frac{1}{2} \int dx' \int d^2 x'_{\perp} \frac{1}{i2} \left\{ \psi_+^{\dagger} \left(-\partial'^i \partial'^i + m_0^2 \right) \frac{1}{i\partial'^+} \psi_+ \right\} \quad (3.3.1)$$

จะเห็นว่าอยู่ในรูปตัวแปรพลวัตพื้นฐานในพารามิเตอร์อวกาศซึ่งติดแฟกเตอร์อนุพันธ์ไม่สะดวกในการไดอะโกนัลไลซ์ จากการที่ได้แยกตัวแปรเวลาโดยพิจารณาตัวแปรพลวัตพื้นฐานบนผิวเวลาเท่ามาตลอด จึงทำการแปลงตัวแปรพลวัตพื้นฐานบนผิวเวลาเท่าจากที่ลำดับ (label) ด้วยอวกาศ มาเป็นตัวแปรพลวัตพื้นฐานที่ลำดับด้วยโมเมนตัม ที่สัมพันธ์กันโดยผลการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) (ค3.5) ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi(x^+, x^{\overline{\sigma}}) &= \int_0^{\infty} \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \left(e^{-ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} u_+(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) b(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) + e^{ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} v_+(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) d^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) \right) \\ \psi_+^{\dagger}(x^+, x^{\overline{\sigma}}) &= \int_0^{\infty} \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \left(e^{ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} u_+^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) b^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) + e^{-ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} v_+^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) d(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) \right) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

โดยเขียนละการขึ้นกับเวลารวแสงของตัวแปรพลวัตพื้นฐานในปริภูมิโมเมนตัมอย่างเป็นที่เข้าใจ จากตัวทำปฏิสลับที่เวลาเท่าพื้นฐาน (basic equal-time anticommutators) ของตัวแปรในอวกาศ (3.2.34) ได้ตัวทำปฏิสลับที่เวลาเท่าพื้นฐานของตัวแปรในปริภูมิโมเมนตัมที่สมนัยกันดังนี้

$$\Sigma : x^+ = \text{const} , \quad [b(p^{\overline{\sigma}}, \lambda), b^{\dagger}(k^{\overline{\sigma}}, \lambda')]_{\pm} = [d(p^{\overline{\sigma}}, \lambda), d^{\dagger}(k^{\overline{\sigma}}, \lambda')]_{\pm} = 2(2\pi)^3 \sqrt{p^+ k^+} \delta(p^{\overline{\sigma}} - k^{\overline{\sigma}}) \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.3.3)$$

ซึ่งนอกนั้นเป็นศูนย์ โดยใช้ (ข.9) สามารถแสดงเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\partial^+} \psi(x^+, x^{\overline{\sigma}}) &= \int_0^{\infty} \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{2(2\pi)^3} \left[\frac{1}{k^+} \right] \sum_{\lambda'} \left(e^{-ik^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} u_+(k^{\overline{\sigma}}, \lambda') b(k^{\overline{\sigma}}, \lambda') - e^{ik^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} v_+(k^{\overline{\sigma}}, \lambda') d^{\dagger}(k^{\overline{\sigma}}, \lambda') \right) \\ \frac{1}{i\partial^+} \psi_+^{\dagger}(x^+, x^{\overline{\sigma}}) &= \int_0^{\infty} \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{p^+} \right] \sum_{\lambda} \left(e^{ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} u_+^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) b^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) - e^{-ip^{\overline{\sigma}} x^{\overline{\sigma}}} v_+^{\dagger}(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) d(p^{\overline{\sigma}}, \lambda) \right) \end{aligned} \quad (3.3.4-1)$$

$$\begin{aligned}
& (-\partial^i \partial^i + m^2) \frac{1}{i\partial^+} \psi_+(x^+, x^\perp) \\
&= \int_0^\infty \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 k_\perp}{2(2\pi)^3} \left[\frac{k^i k^i + m^2}{k^+} \right] \sum_{\lambda'} \left(e^{-ik^\perp \cdot x^\perp} u_+(k^\perp, \lambda') b(k^\perp, \lambda') - e^{ik^\perp \cdot x^\perp} v_+(k^\perp, \lambda') d^\dagger(k^\perp, \lambda') \right)
\end{aligned} \tag{3.3.4-2}$$

เมื่อแทนทั้งหมดใน (3.3.1) โดยใช้ผลคูณ (ค2.11) และ

$$\frac{1}{2} \int dx'^- d^2 x'_\perp e^{i(p^\perp - k^\perp) \cdot x^\perp} = (2\pi)^3 \delta(p^+ - k^+) \delta^2(p^\perp - k^\perp) \tag{3.3.5}$$

ก็จะได้แฮมิลโทเนียนในรูปตัวแปรพลวัตพื้นฐานในปริภูมิโมเมนตัมว่า

$$\begin{aligned}
H(x^+) &= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \left[\frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \right] \sum_{\lambda} \left(b^\dagger(p^\perp, \lambda) b(p^\perp, \lambda) - d(p^\perp, \lambda) d^\dagger(p^\perp, \lambda) \right) \\
&= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \left[\frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \right] \sum_{\lambda} \left(b^\dagger(p^\perp, \lambda) b(p^\perp, \lambda) + d^\dagger(p^\perp, \lambda) d(p^\perp, \lambda) \right)
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

ซึ่งรูปสุดท้ายได้ละพจน์ค่าคงตัวอนันต์ (infinite constant) ที่ไม่มีผลต่อฟิสิกส์ออกแล้ว เรียกเป็น รูปไดอะโกนัลไลซ์ (diagonalized form) เพราะเป็นรูปที่ทำการไดอะโกนัลไลซ์ได้ง่ายโดยวิธีพีชคณิตตัวดำเนินการ (operator algebra) ที่เรียกว่า วิธีดำเนินการแลดเดอร์ (ladder operation) เนื่องจากว่าการที่ตัวทำสลับที่ของ b หรือ d กับ แฮมิลโทเนียน ได้เป็นตัว b หรือ d เอง ให้ $|0\rangle$ แทนสถานะลักษณะเฉพาะ (eigenstate) หนึ่งของแฮมิลโทเนียนนี้ ที่นิยามด้วย

$$\forall p^\perp, \forall \lambda, b(p^\perp, \lambda)|0\rangle = 0 = d(p^\perp, \lambda)|0\rangle \tag{3.3.7}$$

พบว่าเป็นสถานะพื้น (ground state) ของระบบนี้ เรียกอีกชื่อที่สถานะแวกคิวอัม หรือ แวกคิวอัม หมายถึงเพิ่มเติมในการได้ (3.3.6)

ก. ในการแทน (3.3.2) และทำผลคูณสปินเนอร์เพื่อให้ได้ (3.3.6) นั้นอันที่จริงยังเกิดพจน์ผลคูณไขว้ระหว่าง $b^\dagger(p^\perp)$ กับ $d^\dagger(-p^\perp)$ และ $d(p^\perp)$ กับ $b(-p^\perp)$ ออกมาด้วย แต่พจน์เหล่านี้เป็นศูนย์เพราะในการกระจาย (3.3.2) ไม่มีควอนตัมใดที่มี $p^+ \leq 0$ (ดูภาคผนวก ค3 ตั้งแต่สมการ (ค3.1) เป็นต้นไป) นั่นคือพบว่าพจน์ไขว้ดังกล่าวอยู่ในรูปอินทิกรัล

$$\int_0^\infty dp^+ f(p^+) \int_0^\infty dk^+ \delta(p^+ + k^+) \frac{g(|p^+ + k^+|)}{k^+} = 0 \tag{3.3.8}$$

ซึ่งตัวแปรอินทิเกรตมีแต่ $\forall p^+, \forall k^+, p^+ + k^+ > 0$ เท่านั้น ดังนั้นจึงไม่มีค่า $k^+ = -p^+ \leq 0$ ในอินทิกรัล ทำให้ฟังก์ชันเดลตาเป็น 0

ข. เนื่องจากแฮมิลโทเนียนดิแรกอิสระ FF (3.3.1) มีลักษณะเป็นผลคูณเชิงเส้นคู่ (bilinear product) ของสนามพื้นฐาน และมีตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ผกผัน (inverse differential operator) ดังนั้นการเลือก แฟกเตอร์นอร์มัลไลเซชัน (normalization factor) ตาม (ค2.9) ซึ่งทำให้เกิดแฟกเตอร์

$\sqrt{p^+ k^+}$ ในผลคูณสปีนเนอร์อย่างเช่น (ค2.11) จะช่วยรักษาเครื่องหมายอินทิเกรตในรูป

$$\int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int d^2 p_\perp \text{ ที่มีใน (3.3.2) ให้ยังคงมีในแฮมิลโทเนียนและปริมาณทางฟิสิกส์อื่นที่เป็นรูปผลคูณเชิง$$

เส้นคู่ในปริภูมิโมเมนตัม อย่างเช่น (3.3.6) นี้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4
แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซนีโอ
ในทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง

4.1 แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซนีโออินสแทนท์ฟอร์ม

จากแบบจำลอง NJL (1.2.5) ที่ใช้ใน ฟิสิกส์ฮาดรอน ที่มีสมมาตรเกจ 3-คัลเลอร์ $SU_C(3)$ และสมมาตรไครัล 3-เฟลเวอร์ $U_L(3) \otimes U_R(3)$ (1.2.3) ในบทนี้ทำให้ง่ายขึ้นด้วยการเปลี่ยนเป็นสมมาตรใน “1-คัลเลอร์” คือ $N_C = 1$ (แบบจำลอง NJL ไม่มีสนามเกจ) และ 1-เฟลเวอร์ $U_L(1) \otimes U_R(1)$ (Hatsuda and Kunihiro, 1994: 237-238) เพื่อให้ง่ายต่อการแสดงกลไกของ การหักสมมาตรเชิงพลวัต ของแบบจำลองนี้ โดยบทนี้เป็นเพียงรายงานไม่ได้เสนอเทคนิคหรือผลใหม่

4.1.1 การแปลงไครัลและแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซนีโอ อินสแทนท์ฟอร์ม

สำหรับกรณีทีระบบสนามสปินเนอร์มี 1-คัลเลอร์ และมี 1-เฟลเวอร์ นิยามการแปลงไครัล (1-เฟลเวอร์) แบบโกลบอลของสนามพื้นฐานสปินเนอร์ $\psi = \psi_L + \psi_R$ ซึ่งมีลักษณะเป็นกรุป $U_L(1) \otimes U_R(1)$ ดังนี้

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \Rightarrow e^{i\theta_L/2} \psi_L \quad \text{and} \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi \Rightarrow e^{i\theta_R/2} \psi_R \quad (4.1.1)$$

จะเห็นว่า การแปลงนี้ไม่เกี่ยวกับการแปลงอวกาศ-กาล ซึ่งเรียกว่า การแปลงภายใน (internal transformation) เพื่อความสะดวก เขียนการแปลงนี้ในรูปการแปลงของ ψ โดยเปลี่ยนตัวแปรเป็น $\alpha \equiv \theta_L + \theta_R$ และ $-\beta \equiv \theta_L - \theta_R$ ดังนี้

$$\psi \Rightarrow e^{i(\alpha I + \beta \gamma^5)} \psi \quad (4.1.2)$$

จะเห็นว่า I และ γ^5 เป็นตัวก่อกำเนิดของการแปลง $U_V(1)$ และ $U_A(1)$ ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับการแปลงไครัล

$$U_V(1) \otimes U_A(1) \equiv U_L(1) \otimes U_R(1) \quad (4.1.3)$$

พิจารณากการแปลงไครัลของผลคูณต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi &\Rightarrow \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ \bar{\psi} \psi &\Rightarrow \cos \beta \bar{\psi} \psi + \sin \beta \bar{\psi} i \gamma^5 \psi \\ \bar{\psi} i \gamma^5 \psi &\Rightarrow -\sin \beta \bar{\psi} \psi + \cos \beta \bar{\psi} i \gamma^5 \psi \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

จะเห็นว่า $(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}i\gamma^5\psi)$ ในการแปลงไครล์เป็นปริภูมิตัวแทนของกลุ่ม $O(2)$ ซึ่งมี ผลคูณไม่แปรเปลี่ยน (invariant product) เป็น

$$(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 = (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 \quad (4.1.5)$$

จากการแปลงของผลคูณต่างๆ ของสนามพื้นฐานที่กล่าวมา สามารถสร้างลากรางเจียนของระบบสนามเฟอร์มิออน (fermion) ใน IF ที่มี 1-เฟลเวอร์ ที่มีสมมาตรภายใต้การแปลงไครล์ดังต่อไปนี้ นั่นคือ แบบจำลอง NJL ซึ่งเมื่อพิจารณาใน IF จะเรียกสั้นๆ ว่า แบบจำลอง IF-NJL ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} L[\psi, \bar{\psi}] &= L_0 + L_{\text{int}} \\ &\equiv \int d^3x \left\{ \bar{\psi} \left(i\partial^\mu \gamma_\mu - m_0 \right) \psi + g_0 \left((\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

ซึ่งสมมาตรไครล์เกิดขึ้นเมื่อ $m_0 \rightarrow 0$ จึงเรียกว่าลิมิตไครล์ (ดูหลังสมการ (1.2.2) ด้วย) และสมมาตรนี้ไม่เกี่ยวกับการแปลงอวกาศ-กาลจึงเรียกว่าสมมาตรภายใน (internal symmetry) จากการที่ ψ มีหน่วย (dimension) เป็น $(\text{Å}\text{Å})^{3/2}$, เมื่อเทียบ พจน์อันตรกิริยาที่มีค่าคงตัวควบ (coupling constant) g_0 กับ พจน์มวล m_0 จะเห็นอย่างง่าย ๆ ว่า g_0 มีหน่วยเป็น $(\text{Å}\text{Å})^{-2}$ เนื่องจากทฤษฎีที่มีหน่วยของค่าคงตัวควบเป็น หน่วยมวลลบ (negative mass dimension) ไม่รีโนอร์มัลไลเซเบิล (renormalizable) (Peskin and Schroeder, 1995: 80) ดังนั้นแบบจำลอง NJL ไม่รีโนอร์มัลไลเซเบิล จึงจำเป็นต้องกำหนดคัทออฟในปริภูมิโมเมนตัม (momentum space cut-off) Λ ซึ่งแสดงการจำกัดขอบเขตที่ทฤษฎีประยุกต์ใช้ในบริเวณโมเมนตัมและพลังงานน้อยกว่า Λ

สำหรับระบบสนามที่มีพจน์จลน์ตามสมการแรกของ (4.1.4) และมีสมมาตรในการแปลงไครล์ซึ่งเป็นสมมาตรต่อเนื่อง เช่น ระบบ NJL จะได้ตามทฤษฎีบทนอเธอร์ (Noether theorem) (Sternan, 1993: 10-20) ว่าระบบนี้มีกระแสอนุรักษ์ (conserved currents) ที่สมนัยกับแต่ละตัวก่อกำเนิดไครล์ กล่าวคือ \mathbf{I} และ j^5 ตามลำดับ โดยมี สมการความต่อเนื่อง (continuity equations) ตามลำดับดังนี้ (Mustaki, 1994)

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \quad \text{à} \text{Å} \text{Å} \quad \partial_\mu j_5^\mu = 0 \\ j^\mu &\equiv -i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{à} \text{Å} \text{Å} \quad j_5^\mu = -i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

การที่ใน IF มีเวลาเป็น x^0 และมีสมการความต่อเนื่องดังกล่าว จึงได้ว่ามีปริมาณอนุรักษ์ในเวลาซึ่งสมนัยกับแต่ละตัวก่อกำเนิดที่เรียกว่า ประจุ (charge) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} Q_{\text{IF}}^0(x^0) &= \int d^3x j^0 = (-i) \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = (-i) \int d^3x \psi^\dagger\psi \\ Q_{5,\text{IF}}^0(x^0) &= \int d^3x j_5^0 = (-i) \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi = (-i) \int d^3x \psi^\dagger\gamma^5\psi \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

ดัชนี "IF" หมายถึง อินทิเกรตบนผิวเวลาเท่าของ IF เมื่อทำการควอนไทซ์ระบบสนามนี้บนผิวเวลาเท่า IF ก็ได้จากตัวทำปฏิสลับที่พื้นฐานว่า ประจุข้างต้นเป็นตัวก่อกำเนิดควอนตัม (quantum generators) ของการแปลงไครล์ (4.1.2) ของสนามควอนตัม ซึ่งสมนัยกับ \mathbf{I} และ γ^5 ตามลำดับ ดังตัวทำสลับที่นี้

$$\begin{aligned} [\psi(x), Q_{\text{IF}}(x^0)] &= \psi(x) \\ [\psi(x), Q_{5, \text{IF}}(x^0)] &= \gamma^5 \psi(x) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

โดยพบว่าสำหรับกรุปย่อย $U_A(1)$ มีเอกลักษณ์

$$\begin{aligned} [\bar{\psi} \gamma^5 \psi(x), Q_{5, \text{IF}}(x^0)] &= -2 \bar{\psi} \psi(x) \\ [\bar{\psi} \psi(x), Q_{5, \text{IF}}(x^0)] &= 2 \bar{\psi} \gamma^5 \psi(x) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

ก่อนที่จะศึกษาสมมาตรไครล์ของระบบ IF-NJL จะกล่าวถึงอย่างทั่วไปเกี่ยวกับระบบสนามควอนตัมสัมพัทธภาพที่มีสมมาตรภายในแบบต่อเนื่องก่อน (Higashigima, 1991: 2-4) ซึ่งจะกล่าวถึงคร่าวๆ โดยไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้ ให้ Q_{IF} เป็นประจุของสมมาตรภายในต่อเนื่องตัวหนึ่งซึ่งเป็นปริมาณอนุรักษ์ กล่าวคือสลับ (commute) กับแฮมิลโทเนียน

$$i \frac{dQ_{\text{IF}}}{dx^0} = [Q_{\text{IF}}, H] = 0 \quad (4.1.11)$$

พิจารณาสถานะพื้นหรือแวกคิวอัมของระบบดังกล่าว โดยสัญพจน์ของ QFT ตามปกติ (Streater and Wightman, 1980: 21-22; Sterman, 1993: 50) ที่ว่าแวกคิวอัม ($|\Omega\rangle$) เหมือนกันทุกกรอบอ้างอิงหรือไม่แปรเปลี่ยนในสัมพัทธภาพจึงมีว่า $H|\Omega\rangle = 0$ เนื่องจากตัวทำสลับที่ (4.1.11) เท่ากับศูนย์ หมายความว่า $H(Q_{\text{IF}}|\Omega\rangle) = 0$ แต่ไม่ใช่หมายความว่าไม่มีประจุ Q_{IF} ที่มี $Q_{\text{IF}}|\Omega\rangle \neq 0$ ไปด้วย แวกคิวอัมมีได้ 2 กรณี เรียกว่าดังนี้

(ก) เฟสสมมาตร (symmetric phase หรือ Wigner's phase):

$$Q_{\text{IF}}|\Omega\rangle = 0 \quad (4.1.12)$$

หมายความว่า แวกคิวอัมก็ไม่แปรเปลี่ยน คือมีสมมาตรภายในเช่นเดียวกับลากรางเจียน เรียกว่าแวกคิวอัมแบบทริวีเอล

(ข) เฟสหัก (broken phase หรือ Nambu-Goldstone phase):

$$Q_{\text{IF}}|\Omega\rangle \neq 0 \quad (4.1.13)$$

หมายความว่า แม้อลากรางเจียนมีสมมาตรภายในโดยตัวกำเนิด Q_{IF} แต่แวกคิวอัมของระบบกลับไม่มีสมมาตรนี้ เรียกว่ามี การหักสมมาตรเกิดขึ้นเอง (spontaneous symmetry breaking) และกล่าวว่าเป็นแวกคิวอัมแบบไม่ทริวีเอล (non-trivial)

หมายเหตุว่า ถ้าลากรางเจียนมีสมมาตรภายในชนิดหนึ่ง แล้วเพิ่มเติมบางพจน์ที่ทำให้ตัวลากรางเจียนใหม่ไม่มีสมมาตรภายในนี้ลงไป พจน์ดังกล่าวทำให้เกิดการหักสมมาตรของลากรางเจียนซึ่งเรียกว่า การหักสมมาตรชัดแจ้ง (explicit symmetry breaking)

พิจารณาทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (Aitchison, 1982: 72-75)

สำหรับระบบสนามควอนตัมหนึ่งๆ ที่มีสมมาตรภายในแบบต่อเนื่องซึ่งมี Q_{IF} เป็นตัวก่อกำเนิด และถ้าพบว่ามีสนามประกอบ (composite fields) ของสนามพื้นฐานของระบบดังกล่าวสองตัว ให้เป็น $\Theta(x)$ กับ $\Phi(x)$ ที่มีการแปลงกลับไปมาซึ่งกันและกันภายใต้การแปลงสมมาตรนี้แบบน้อยยิ่ง (infinitesimal) ดัง ความสัมพันธ์สลับที่ นี้ (ดังเช่น (4.1.10))

$$[Q(x^0), \Theta(x)] = \Phi(x) \quad (4.1.14)$$

เนื่องจากแควคิอัมของระบบสามารถมีได้ 2 กรณี คือ (ก) และ (ข) ข้างต้น เมื่อทำ VEV ทั้งสองข้างของ (4.1.14) จึงได้สำหรับ 2 กรณีดังกล่าวว่า

- (ก) $\langle \Phi(x) \rangle \equiv \langle \Omega | \Phi(x) | \Omega \rangle = 0$
- (ข) $\langle \Phi(x) \rangle$ ไม่เท่ากับศูนย์ ถ้า $\langle \Theta(x) | \Omega \rangle \neq 0$

จากทฤษฎีบทนี้จะเห็นว่า ถ้าระบบที่ศึกษามีแควคิอัมที่ทำให้ $\langle \Phi(x) \rangle \neq 0$ ต้องไม่ใช่กรณี (ก) อย่างแน่นอน เรียก $\langle \Phi(x) \rangle$ ว่า ออร์เดอร์พารามิเตอร์ (order parameter) ของการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของสมมาตรโดย Q_{IF} ซึ่งมักใช้ปริมาณนี้วัดลักษณะการมีการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของระบบ เพราะในกรณีส่วนใหญ่สามารถแสดงว่าระบบมีออร์เดอร์พารามิเตอร์ไม่เท่ากับศูนย์ได้ง่ายกว่าแสดงว่าแควคิอัมเป็นไปตามกรณี (ข) โดยตรง (Higashigima, 1991: 4)

ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบทนัมบู-โกลด์สโตน (Nambu-Goldstone theorem) (Higashigima, 1991: 2; Frampton, 2000: 20-21, 28-32)

สำหรับระบบสนามควอนตัมสมมาตรที่มีการหักสมมาตรเกิดขึ้นเอง (กล่าวคืออยู่ใน กรณี (ข)) ได้ว่าระบบนี้มี อนุภาคสปิน-0 แมสส์เลสส์ (massless spin-0 particles) ที่เรียกว่า นัมบู-โกลด์สโตนโบซอน (Nambu-Goldstone bosons) ตามจำนวนตัวก่อกำเนิดการแปลงสมมาตรที่มีการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของระบบนี้ นัมบู-โกลด์สโตนโบซอนมี 2 กรณี คือเป็น นัมบู-โกลด์สโตนโบซอนสปิน-0มูลฐาน (elementary spin-0 Nambu-Goldstone boson) กับเป็น นัมบู-โกลด์สโตนโบซอนสปิน-0ประกอบ (composite spin-0 Nambu-Goldstone boson) ถ้าเป็นกรณีหลังเรียกการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองนี้ว่าการหักสมมาตรเชิงพลวัต (dynamical symmetry breaking)

ในที่นี้ไม่ได้ศึกษา นัมบู-โกลด์สโตนโบซอนประกอบ ตามทฤษฎีบท 2 ของแบบจำลอง NJL โดยตรง จึงไม่ได้กล่าวรายละเอียด (ซึ่งเป็นประเด็นที่ค่อนข้างยุ่งยาก) จะศึกษาถึงแค่ประเด็นการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของแบบจำลอง NJL เท่านั้น ในตอนต่อไปจะพิจารณาแบบจำลอง NJL ที่ประมาณโดยวิธีสนามเฉลี่ยที่พอแสดงได้ว่า $\langle \bar{\psi}\psi(x) \rangle$ เป็นออร์เดอร์พารามิเตอร์ของระบบนี้

4.1.2 การประมาณสนามเฉลี่ยของแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโออินสแทนท์ฟอร์ม

จะเห็นว่าแบบจำลอง NJL มีสมการสนามที่ไม่เชิงเส้น (non-linear field equation) ซึ่งไม่ทราบว่าจะหาผลเฉลยที่แน่นอนตรง (exact) อย่างไร จึงต้องหาวิธีประมาณ ในที่นี้ใช้วิธีประมาณที่เรียกว่าวิธีประมาณสนามเฉลี่ย (mean-field approximation) (Heinzl, 2000: 64-65) (ดูวิธีประมาณนี้ที่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์มากขึ้นใน Kunihiro และ Hatsuda (1984) และ เพื่อให้เห็นภาพมากขึ้นดูเปรียบเทียบกับ การประมาณสนามเฉลี่ยที่ใช้กับระบบแม่เหล็กเฟอร์โร (ferromagnetism) ที่ประมาณด้วยการแทนที่เป็นตัวแทนสนาม (field representation) สำหรับอันตรกิริยาพิสัยสั้น (short-range) ใน Huang (1998: 296-300)) ที่มีวิธีการต่อไปนี้

1. ให้ $|\Omega\rangle$ เป็นแวกคิวอัมของระบบนี้ สำหรับพจน์อันตรกิริยาของลากรางเจียนที่มีลักษณะในรูป $S^2(x)$ โดยที่ $S(x)$ เป็นผลคูณของสนามพื้นฐานที่ x ให้ $\langle S \rangle \equiv \langle \Omega | S | \Omega \rangle$ พิจารณาการประมาณโดย

$$\begin{aligned} S^2 &= \{(S - \langle S \rangle) + \langle S \rangle\}^2 = (S - \langle S \rangle)^2 + \langle S \rangle S + S \langle S \rangle - \langle S \rangle^2 \\ &\approx 2\langle S \rangle S - \langle S \rangle^2 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ซึ่งประมาณให้ การกวัดไกว (fluctuation) $(S - \langle S \rangle)^2 \approx 0$ อาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า การทำเป็นเชิงเส้น (linearization) โดยที่ $\langle S(x) \rangle$ ที่ปรากฏในสมการข้างต้นเรียกว่า สนามเฉลี่ย (MF: mean-field) ถ้า S และพจน์อื่นๆ ของลากรางเจียนเป็นแต่ผลคูณเชิงเส้นคู่ของสนามพื้นฐานก็ทำให้ได้สมการสนามเป็นเชิงเส้นเช่นเดียวกับกรณีอนุภาคอิสระ นั่นคือเป็นการประมาณผลของอันตรกิริยาทั้งหมดว่า “รวมกัน” เป็นสนามเฉลี่ย ที่กระทำกับอนุภาคชนิดหนึ่งโดยกลายเป็น “มวล” ของอนุภาคชนิดนี้ เสมือนกับว่าอนุภาคดังกล่าวเป็นอนุภาคอิสระที่มีมวลซึ่งถูกก่อกำเนิดอย่างพลวัต (dynamically generated mass) โดยอันตรกิริยาที่ถูกประมาณ เรียกว่าเป็น อนุภาคเสมือน (quasi-particle) (Heinzl, 1998: 65-69) ประมาณกรณีที่ดีศึกษาคือระบบ IF-NJL (4.1.6) ได้ดังนี้

$$L \approx L_{MF} = \int d^3x \left\{ \begin{aligned} &\bar{\psi} (i \partial^\mu \gamma_\mu - m_0) \psi \\ &+ 2g_0 \left(\langle \bar{\psi} \psi \rangle \bar{\psi} \psi - \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \right) - g_0 \left(\langle \bar{\psi} \psi \rangle^2 - \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

2. จะเห็นว่าได้เขียนแต่ละพจน์ของลากรางเจียนของแบบจำลองประมาณ MF (4.1.14) โดยยังไม่ทราบค่า $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, $\langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle$ เพราะว่าจะยังไม่ได้แก้หาผลเฉลยของ $\psi(x)$ และ $|\Omega\rangle$ ที่แน่นอนจากแบบจำลอง IF-NJL ตัวจริง (4.1.6) จึงตัดค่าทั้งสองเป็นพารามิเตอร์ของแบบจำลองประมาณ MF ไปก่อนจนกว่าจะได้คำนวณผลเฉลย $\psi_{MF}(x)$ และ $|\Omega\rangle_{MF}$ ของแบบจำลองประมาณ MF ที่ติดอยู่ในรูปพารามิเตอร์เหล่านี้ออกมา แล้วนำไปแทนกลับในนิยาม $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, $\langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle$ เสียเอง ก็จะได้สมการที่นิยามค่าทั้งสอง

ในรูปตัวเอง (คือตัวแบบจำลองประมาณ MF เอง) ออกมา ที่เรียกว่า เงื่อนไขต้องกันในตัว (self-consistency condition) แล้วแก้สมการดังกล่าวหาค่าทั้งสองที่เป็นไปได้ออกมา ก็คือเป็นการเขียนค่าทั้งสองให้อยู่ในรูปโครงสร้างตัวเอง กล่าวคืออยู่ในรูปค่าคงตัวควบ g_0 โดยรูปการขึ้นกับ g_0 ขึ้นกับลักษณะของตัวแบบจำลองประมาณ MF เอง ค่าที่ประมาณได้ทั้งสองเป็นค่าที่มาจากตัวแบบจำลองประมาณ MF เองโดยเป็นอันตรกิริยาในตัวเอง (self-interaction) ชนิดหนึ่งที่เป็นสนามคลาสสิกัล (classical field) หรือ สนามจำนวนซี (c-number field) ไม่ใช่ สนามประกอบจำนวนคว (q-number composite field) ตามปกติ และไม่ใช่ค่า MF จากแบบจำลองแม่นยำที่แท้จริง

ข้อสังเกต มีคำถามคือแบบจำลองประมาณ IF-MF (4.1.14) ยังคงไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์หรือไม่ ?

ก. มุมมองมาตรฐานมองว่า MF: $\langle \bar{\psi} \psi \rangle, \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle$ ที่ปรากฏเป็นเพียงตัวเลขไม่ใช่สนามควอนตัม จึงไม่มีการแปลงโดยการแปลงสนามควอนตัม (4.1.9) ทำให้แบบจำลองประมาณ MF แปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์ต่างจากแบบจำลองตัวจริงของ IF-NJL แต่ใน Nambu และ Jona-Lasinio (1961a: 350) พบว่า แม้แปรเปลี่ยนก็จริงแต่ไม่มีผลต่อผลเชิงฟิสิกส์ (physical effect)

ข. การที่ MF นิยามในรูปผลคูณของสนามพื้นฐาน ถ้ามองว่าเมื่อสนามพื้นฐานในลากรางเจียน (4.1.14) ถูกแปลงโดยการแปลงไครล์ การที่ MF อยู่ในรูปผลคูณของสนามตัวเดียวกันนี้ ก็ต้องถูกแปลงไปทีเดียวด้วย ดังนั้นแม้ MF เป็นจำนวนซีก็ถูกแปลงด้วย จะเห็นว่าโดยใช้การแปลง (4.1.4) ต่อพจน์อันตรกิริยาของ (4.1.14) จะพบว่าไม่แปรเปลี่ยนยกเว้นยังไม่ทราบว่าแวกคิวอัมจะแปลงอย่างไร จะทราบแวกคิวอัมและการแปลงของแวกคิวอัมได้ต่อเมื่อได้แก่ผลเฉลยของแบบจำลองประมาณแล้ว ถ้าติดตามมุมมองข้อนี้ยังไม่ทราบว่าที่จริงแบบจำลองประมาณ MF มีการแปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์หรือไม่ ? เราทราบจาก Nambu และ Jona-Lasinio (1961: 350) แล้วว่า การดำเนินการบน แวกคิวอัม-MF โดยตัวก่อกำเนิด $Q_{5,IF}$ ไม่เป็นศูนย์ ส่วนจะใช้สูตรนี้แสดงว่าแวกคิวอัมมีการแปลงอย่างไรภายใต้การแปลงไครล์แบบอันตะ (finite) มีความซับซ้อน ยุ่งยาก จึงยังไม่ได้แสดงคำตอบของคำถามว่า “ถึงแม้แวกคิวอัมจะแปรเปลี่ยน แต่ยังคงทำให้ (4.1.14) ไม่แปรเปลี่ยนหรือไม่ ?” ถ้าใช่อาจเป็นการ realize โดยใช้แบบจำลองประมาณ MF ซึ่งเป็นแบบจำลองสนามควอนตัมง่าย ๆ ว่า การที่ระบบมีสมมาตรในการแปลงไครล์แต่สามารถมีแวกคิวอัมที่ไม่มีสมมาตรได้อย่างไร

ใน (4.1.14) พบว่า ไม่ว่า x ใดใด

$$\forall x, \quad \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle = 0 \quad (4.1.15)$$

แสดงดังนี้ จากการแปลงปวงกาเร (P.T.) ของสปินเนอร์

$$\psi'(x) = U(\Lambda, a) \psi(x) U^\dagger(\Lambda, a) = S(\Lambda, a) \psi(\Lambda^{-1}x - a) \quad (4.1.16)$$

โดยที่ $S \in SL(2, c)$ เป็นตัวแทนหนึ่งของ P.T. ที่มีเงื่อนไขว่า

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

เมื่อแทนการแปลงพาริตี (P: parity) : $(x^0, x^1, x^2, x^3) \Rightarrow (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$ ลงไปก็จะแก้ได้ว่า $S(P) = \gamma^0$

โดยใช้สัญกรณ์ของ QFT ที่แนวคิดอิมไม่แปรเปลี่ยนใน P.T. (Streater and Wightman, 1989: 97) ซึ่งรวมการเลื่อนขนานและพาริตีไปด้วย ทำการแปลงต่อไปนี้ สำหรับ x ใดใด แปลง VEV ต่อไปนี้โดยใช้ (4.1.16) ที่ให้การเลื่อนขนานไป a เท่ากับตัว x เอง แล้วตามด้วยพาริตีจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \bar{\psi}(0) \gamma^5 \psi(0) | \Omega \rangle && \text{(translation)} \\ &= -\langle \Omega | \bar{\psi}(0) \gamma^5 \psi(0) | \Omega \rangle && \text{(parity)} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

ซึ่งทางที่เป็นไปได้มีแค่ (4.1.15) เท่านั้น จึงสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} L_{MF}[\psi, \bar{\psi}] &= \int d^3 x \left\{ \bar{\psi} (i\partial^\mu \gamma_\mu - m) \psi + 2g_0 \langle \bar{\psi} \psi \rangle^2 \right\} \\ m &\equiv m_0 - 2g_0 \langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุภาคอิสระที่มีมวล m เรียกว่า อนุภาคเสมือน โดยมวลนี้เป็น MF นี้ของระบบประมาณ MF นี้

พิจารณาในลิมิตไครัล ($m_0 \rightarrow 0$) จากการที่มี (4.1.10) จะเห็นว่าถ้า MF นี้ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 0 ก็ได้โดยทฤษฎีบท 1 ว่า MF นี้เป็นออร์เดอร์พารามิเตอร์ของแบบจำลอง IF-NJL ด้วย โดยใช้ผลเฉลยของแบบจำลองประมาณ (4.1.18) ที่อยู่ในรูปผลเฉลยของระบบดิแรกอิสระแทนกลับลงใน MF ได้เงื่อนไขต้องกันในตัวว่า

$$\begin{aligned} m - m_0 &\equiv -2g_0 \langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle \\ &= g_0 \frac{m}{2\pi^3} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{p^2 + m^2}} f(p, \Lambda) \end{aligned} \quad (4.1.19-1)$$

ซึ่งจะพบว่าเป็นอินทิกรัลลู่ออก ไม่มีความหมาย อันเนื่องมาจากความไม่รีนอร์มัลไลเซชันของแบบจำลอง NJL (Nambu and Jona-Lasinio, 1961a: 348; Hatsuda and Kunihiro, 1994: 237) จึงจำเป็นต้องเลือกคัทออฟซึ่งเป็นการจำกัดเขตสูงสุดของโมเมนตัมที่ศึกษา มีอิสระที่จะเลือกได้หลายแบบเพื่อให้อินทิกรัลนี้มีค่าจำกัด ในที่นี้เลือกเป็น $f(p, \Lambda) = \Theta(\Lambda^2 - |p|^2)$ เรียกว่า 3-โมเมนตัมคัทออฟ (3-momentum cut-off) ทำให้ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} m - m_0 &= g_0 \frac{m}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= g_0 m \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right)^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2} - \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 \ln \left| \sqrt{1 + \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2} + \frac{\Lambda}{m} \right| \right\} \end{aligned} \quad (4.1.19-2)$$

พิจารณาเมื่อ $m_0 \rightarrow 0$ ก็จะพบกรณีผลเฉลยของ MF ที่ถูกกำหนดโดยค่า g_0 ดังต่อไปนี้ (Vogl and Weise, 1991: 201, 213; Hatsuda and Kunihiro, 1994: 243)

กรณี (ก) ผลเฉลยทรีเวียล

$$g_0 \leq g_{\text{crit}} \equiv \frac{\pi^2}{\Lambda^2} \quad \leftrightarrow \quad m = 0 \quad (4.1.20)$$

กรณี (ข) ผลเฉลยไม่ทรีเวียล

$$g_0 > g_{\text{crit}} \quad \leftrightarrow \quad m \neq 0 \quad (4.1.21)$$

ความจริงในลิมิตไคร้ระบบ NJL ไม่มีมวลนิ่ง การที่ m สามารถมีค่าไม่เท่ากับ 0 เรียกว่า มวลที่ถูกก่อกำเนิดอย่างพลวัต (dynamically generated mass) อันเนื่องมาจากพลวัตของระบบนั่นเอง จากขั้นตอนแรกของการสมการ (4.1.19) ที่ m แปรผันกับออร์เดอร์พารามิเตอร์จะเห็นว่าการมีหรือไม่มีมวลถูกก่อกำเนิด (generated mass) สอดคล้องสมนัยกับลักษณะเฟสของระบบอันเนื่องมาจากการมีหรือไม่มีสมบัติการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองโดย $Q_{5,IF}$ ของแควคควิอัมมันตนเอง กล่าวคือ

กรณี (ก) ที่มวลถูกก่อกำเนิดเป็น 0 ทำให้ออร์เดอร์พารามิเตอร์ใน (4.1.19) เป็น 0 ด้วย เรียกว่าระบบอยู่ในเฟสสมมาตรซึ่งมีแควคควิอัมแบบทรีเวียลจะไม่มีนัมู-โกลด์สโตนโบซอนเกิดขึ้น

กรณี (ข) ที่มวลถูกก่อกำเนิดไม่เป็น 0 ทำให้ออร์เดอร์พารามิเตอร์ใน (4.1.19) ไม่เป็น 0 ด้วย เรียกว่าระบบอยู่ในเฟสหักซึ่งมีแควคควิอัมแบบไม่ทรีเวียลเกิดการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองที่แควคควิอัมแปรเปลี่ยนในการแปลงไคร้ และตามทฤษฎีบท 2 มีนัมู-โกลด์สโตนโบซอนเกิดขึ้น

พารามิเตอร์พื้นฐานของแบบจำลอง NJL คือ ค่าคงตัวควบ g_0 และคัทออฟ Λ การที่แบบจำลอง NJL (“3-คัลเลอร์”, 3-เฟลเวอร์) เป็นทฤษฎีผลของ QCD ที่ได้จากการ “อินทิเกรตเอาต์” องศาเสรีของกลูออน ในทางหลักการค่าคงตัวควบที่เป็นการรวมผลของกลูออนที่บริเวณพลังงานต่ำย่อมคำนวณได้จาก QCD โดยเป็นฟังก์ชันของ คัทออฟพลังงานของระดับการหักสมมาตรไคร้เกิดขึ้นเอง (order of the spontaneous chiral symmetry breaking) และ ค่าคงตัวควบ ของ QCD (Bijnens et al., 1992: 1-3; Bijnens, 1996: 377) แต่มีความซับซ้อนมากเพราะต้องอาศัยผลไม่เพอร์เทอเบทิฟของ QCD

แบบจำลองนี้ไม่มีนอร์มัลไลเซชัน ดังนั้นค่าคงตัวควบนี้ร่นอร์มัลไลซ์ไม่ได้ และจำเป็นต้องมีคัทออฟจึงจะทำให้ทฤษฎีมีความหมาย ในทางปฏิบัติหาค่าพารามิเตอร์พื้นฐานทั้งสองได้โดยปรับค่า (fit) ให้เข้ากับข้อมูลด้านปรากฏการณ์วิทยา (phenomenology) ของมีซอน (Hatsuda and Kunihiro, 1994: 237, 262, 269-270)

4.2 แบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซิณีโอฟรอนท์ฟอร์ม

4.2.1 การแปลงไครัลฟรอนท์ฟอร์มและแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซิณีโอฟรอนท์ฟอร์ม

ถ้าพิจารณาระบบที่มีสมมาตรในการแปลงไครัล (4.1.2) ใน FF คือ เลื่อนเวลาเป็น x^+ จากกระแสอนุรักษ์ (4.1.7) จะเห็นว่าประจุไครัล (chiral charges) ใน FF ควรเปลี่ยนจาก (4.1.8) เป็นตัวที่นิยามด้วยกระแสใน คอมโพเนนท์- x^+

$$\begin{aligned} Q_{\text{FF}}^+(x^+) &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp j^+ = \frac{-i}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \bar{\psi} \gamma^+ \psi = -i \int dx^- d^2 x_\perp \psi_+^\dagger \psi_+ \\ Q_{5,\text{FF}}^+(x^+) &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x_\perp j_5^+ = \frac{-i}{2} \int dx^- d^2 x_\perp \bar{\psi} \gamma^+ \gamma^5 \psi = -i \int dx^- d^2 x_\perp \psi_+^\dagger \gamma^5 \psi_+ \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

โดยที่ดัชนี “FF” หมายถึง อินทิเกรตบนผิวเวลาเท่าของ FF จะเห็นว่าเนื่องจากความไม่ไดอะโกนัลของเมตริกกรวยแสงที่ส่งผลให้พีชคณิตดิแรกกรวยแสงไม่ไดอะโกนัล (3.1.3) ทำให้ประจุข้างต้นมีแต่ คอมโพเนนท์- (+) ของสนามเท่านั้น ดังนั้นการแปลงไครัลใน FF โดยใช้ประจุนี้เป็นตัวก่อกำเนิดจึงกลายเป็น

$$\psi_+ \Rightarrow e^{i(\alpha\mathbf{1} + \beta\gamma^5)} \psi_+ \quad (4.2.2)$$

โดยมีตัวทำสลับที่ของแต่ละประจุดังนี้

$$\begin{aligned} [\psi_+(x), Q_{\text{FF}}^+(x^+)] &= \psi_+(x) \\ [\psi_+(x), Q_{5,\text{FF}}^+(x^+)] &= \gamma^5 \psi_+(x) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

เรียกการแปลงของระบบใน FF ที่นิยามตาม (4.2.2) ว่า การแปลงไครัล FF (front form chiral transformation) ซึ่งเป็นการแปลงแบบไกลบอลบนคอมโพเนนท์อิสระของระบบ ในทำนองเดียวกับ ข้อ ก. และ ข. ในต้นตอนที่ 3.2 จะเห็นว่าในระบบดิแรก FF คอมโพเนนท์- (-) เป็นตัวแปรไม่อิสระขึ้นกับ คอมโพเนนท์- (+) โดยมีรูปแบบขึ้นกับอันตรกิริยาของระบบนี้ ดังนั้นการแปลงของ คอมโพเนนท์- (-) จึงขึ้นกับ คอมโพเนนท์- (+) โดยเงื่อนไขบังคับและไม่สามารถกำหนดอย่างอิสระได้ อย่างเช่น ไม่สามารถนิยามการแปลงไครัล (4.1.2) ที่กำหนดลงบนคอมโพเนนท์ทั้ง (+) ทั้ง (-) อย่างอิสระต่อกันได้ ไม่เช่นนั้นอาจขัดแย้งกันเอง จึงต้องนิยามการแปลงไครัลใน FF เฉพาะบนเซกเตอร์สนามอิสระเท่านั้น นั่นคือ (4.2.2)

นิยามการแปลงไครัล (4.1.2) ไม่ valid กับระบบใน FF และเป็นคนละการแปลงกับการแปลงไครัล FF (4.2.2) ดังนั้นระบบหนึ่งๆ ใน IF ที่มีสมมาตรไครัลก็ไม่จำเป็นต้องมีสมมาตรในการแปลงไครัล FF ด้วย แต่ที่น่าแปลกก็คือระบบที่มีสมมาตรไครัลต้องมีกระแสอนุรักษ์และสมการความต่อเนื่องตาม (4.1.7) เพียงเปลี่ยนพิคตสมการดังกล่าวให้เป็นพิคตกรวยแสงก็น่าจะได้ประจุนิยามจากกระแสคอมโพเนนท์ x^+ เป็นตัวก่อกำเนิดของการแปลงไครัล FF ดังที่ได้กล่าวแล้วในต้นตอนนี้ นั่นคือ (4.1.7) ย่อมจะ

valid ใน FF ด้วยเพราะไม่ขึ้นกับพิกัด โดยน่าจะสามารถเป็นกระแสนุรักษ์ของสมมาตรไครัล FF ด้วย เพราะมีปริมาณใน (4.2.1) ที่นิยามจากกระแสในคอมโพเนนท์- x^+ ของ (4.1.7) เป็นปริมาณอนุรักษ์และสามารถก่อกำเนิดการแปลงไครัล FF ดัง (4.2.3) จึงน่าจะเป็นประจุนุรักษ์ของสมมาตรไครัล FF ด้วย คล้ายหมายความว่าสมมาตรทั้งสองต้องสมมูลกันเพราะน่าจะมีสมการความต่อเนื่องเดียวกัน แต่ความจริงไม่ใช่ จะแสดงกลไกดังนี้

เนื่องจากการไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงโลเร็นซ์ ดังนั้นไม่ว่าระบบที่มีสมมาตรไครัลหรือมีสมมาตรไครัล FF (หรือสมมาตรภายในใด) ก็มีพจน์จลนรูปแบบเดียวกันคือสมการแรกของ (4.1.4) ซึ่งพจน์นี้เป็นส่วนสำคัญที่ใช้นิยามกระแสอนุรักษ์ที่สมนัยกับสมมาตรภายในต่างๆ ตามทฤษฎีบทเทอร์เทอร์ เพราะฉะนั้นกระแสอนุรักษ์ของระบบที่มีสมมาตรไครัลกับของระบบที่มีสมมาตรไครัล FF แม้คนละระบบกันก็นิยามจากพจน์ในลากรางเจียนที่มีรูปแบบร่วมกันได้

จากนิยามการแปลงไครัล (4.1.2) และการแปลงไครัล FF (4.2.2) จะเห็นว่าการแปลงในคอมโพเนนท์ ψ_+ ของการแปลงทั้งสองมีรูปแบบเดียวกัน ซึ่งตรงนี้เป็นจุดร่วมของการแปลงทั้งสอง พิจารณาระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงไครัลที่มีกระแสอนุรักษ์ j^μ, j_5^μ โดยที่มีประจุ $Q_{IF}^0, Q_{5,IF}^0$ ของกระแสนี้เป็นตัวก่อกำเนิด จากจุดร่วมนี้ได้ว่าต้องมีส่วนหนึ่งของประจุดังกล่าว ที่เป็นส่วนที่ก่อให้เกิดการแปลงไครัลในส่วนคอมโพเนนท์ ψ_+ ในรูปแบบเดียวกับการแปลงไครัล FF ของ ψ_+ พิจารณาดังนี้

$$\begin{aligned} -i\psi^t\psi &= j^0 = j^+ + j^- = -i\bar{\psi}\frac{1}{2}(\gamma^+ + \gamma^-)\psi = -i(\psi_+^t\psi_+ + \psi_-^t\psi_-) \\ -i\psi^t\gamma^5\psi &= j_5^0 = j_5^+ + j_5^- = -i\bar{\psi}\frac{1}{2}(\gamma^+ + \gamma^-)\gamma^5\psi = -i(\psi_+^t\gamma^5\psi_+ + \psi_-^t\gamma^5\psi_-) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นการเขียน $j^0 (j_5^0)$ ในรูปผลรวมของ คอมโพเนนท์ $\alpha = +, -$ ซึ่งอยู่ในรูป γ^+, γ^- ตามลำดับ จากการที่พีชคณิตดิแรกกรวยแสงไม่ได้อะโกนัลซึ่งได้ว่า $\gamma^\pm\Lambda_\pm \neq 0, \gamma^\pm\Lambda_\mp = 0$ ทำให้ $j^+ (j_5^+)$ และ $j^- (j_5^-)$ ที่ได้มีรูปแบบเดียวกับ $j^0 (j_5^0)$ เพียงแต่เปลี่ยนจาก ψ เป็น ψ_+ และ ψ_- ตามลำดับ ดังนั้น $Q_{IF}^+ (Q_{5,IF}^+)$ ที่นิยามจากคอมโพเนนท์ $j^+ (j_5^+)$ ในสมการข้างต้นจึงเป็นพจน์หนึ่งหรือเป็นส่วนหนึ่งของตัวก่อกำเนิด $Q_{IF}^0 (Q_{5,IF}^0)$ ที่ก่อกำเนิดการแปลงในส่วนคอมโพเนนท์ ψ_+ ของการแปลงไครัล (4.1.2) ในรูปแบบเดียวกับการแปลงไครัล FF ของ ψ_+ ตาม (4.2.2) ด้วย

พิจารณาระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงไครัล FF ที่มีกระแสอนุรักษ์ $\tilde{j}^\alpha, \tilde{j}_5^\alpha$ โดยมีประจุ $\tilde{Q}_{FF}^+, \tilde{Q}_{5,FF}^+$ ของกระแสนี้เป็นตัวก่อกำเนิด จากการที่นิยามการแปลงไครัล FF ตาม (4.2.2) ในรูปแบบเดียวกับการแปลงไครัล (4.1.2) ในส่วนคอมโพเนนท์ ψ_+ จึงทำให้ $\tilde{Q}_{FF}^+ (\tilde{Q}_{5,FF}^+)$ ต้องนิยามจาก $\tilde{j}^+ (\tilde{j}_5^+)$ ที่มีรูปแบบเดียวกับ $j^+ (j_5^+)$ ที่ใช้นิยาม $Q_{IF}^+ (Q_{5,IF}^+)$ ที่ก่อกำเนิดการแปลงไครัลของ ψ ในส่วนคอมโพเนนท์ ψ_+ ใน IF ดังนั้นคอมโพเนนท์ $j^+ (j_5^+)$ ของระบบที่มีสมมาตรไครัลกับคอมโพเนนท์ $\tilde{j}^+ (\tilde{j}_5^+)$ ของระบบที่มีสมมาตรไครัล FF มีรูปแบบเดียวกันอันเนื่องมาจากการมีจุดร่วมกันในการแปลง ψ_+ นั่นเอง แต่คอมโพเนนท์อื่นๆ ของ j^μ, j_5^μ กับ $\tilde{j}^\mu, \tilde{j}_5^\mu$ ย่อมไม่จำเป็นต้องมีรูปแบบเดียวกัน เพราะเป็นคนละสมมาตรและคนละระบบกัน

ถ้าระบบมีสมมาตรในการแปลงไครล์ใน IF ซึ่งมีกระแสนุรักษ์ j^μ, j_5^μ แต่ไม่มีสมมาตรในการแปลงไครล์ FF แม้ว่าความไม่แปรเปลี่ยนในสัมพัทธภาพของสมการความต่อเนื่องทำให้สามารถเขียนสมการนี้ในพิกัดกรวยแสงได้โดยมี $Q_{FF}^+, Q_{5,FF}^+$ เป็นปริมาณอนุรักษหามองใน FF (คล้ายกับว่าเป็นประจุของสมมาตรไครล์ FF ทั้งที่ไม่มี) แต่กระแสนี้ก็ยังคงเป็นกระแสนุรักษ์จากการที่มีสมมาตรไครล์ใน IF ไม่ใช่สมมาตรไครล์ FF ในทางกลับกันถ้าระบบไม่มีสมมาตรในการแปลงไครล์แต่มีสมมาตรในการแปลงไครล์ FF ที่มีกระแสนุรักษ์ $\tilde{j}^\alpha, \tilde{j}_5^\alpha$ แม้จะเขียนสมการความต่อเนื่องของกระแสนี้ในพิกัดคาร์ทีเซียนได้โดยแสดงว่า $\tilde{Q}_{IF}^0, \tilde{Q}_{5,IF}^0$ ของกระแสนี้เป็นปริมาณอนุรักษหามองใน IF (คล้ายกับว่าเป็นประจุของสมมาตรไครล์ IF ทั้งที่ไม่มี) แต่กระแสนี้ก็ยังคงเป็นกระแสนุรักษ์อันเนื่องมาจากการมีสมมาตรไครล์ FF ไม่ใช่สมมาตรไครล์

พิจารณาตัวอย่างง่ายที่สุด คือ ระบบดิแรกอิสระที่มีมวล ดูใน Mustaki (1994) (ซึ่งเป็นผู้สังเกตพบความแตกต่างของการแปลงไครล์ทั้งสอง) ซึ่งระบบนี้ไม่มีสมมาตรในการแปลงไครล์แต่มีสมมาตรในการแปลงไครล์ FF จะเห็นว่าระบบนี้มี

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2m \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (4.2.4)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการไม่มีสมมาตรไครล์ด้วยการมีพจน์มวล ในขณะที่มี

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \tilde{j}_5^\alpha &= 0 \\ \tilde{j}_5^\alpha &\equiv j_5^\alpha - m \bar{\psi} \gamma^\alpha \gamma^5 \frac{1}{i\partial^+} \gamma^+ \psi_+ \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

ซึ่งแสดงถึงกระแสนุรักษ์อันเนื่องมาจากการมีสมมาตรไครล์ FF จะเห็นว่าสามารถเขียนสมการนี้ในรูปพิกัดคาร์ทีเซียนที่แสดงว่า $\tilde{Q}_{5,IF}^0$ ก็เป็นปริมาณอนุรักษหามองใน IF คล้ายกับว่าระบบนี้มีสมมาตรไครล์ทั้งที่ไม่มี โดยแม้ $\tilde{Q}_{5,IF}^0$ ที่นิยามจาก (4.2.5) เป็นปริมาณอนุรักษใน IF ก็ไม่ใช่ตัวก่อกำเนิดการแปลงไครล์เพราะมีรูปแบบกับ $Q_{5,IF}^0$ ที่นิยามจาก j_5^μ ใน (4.1.7) หรือ (4.2.4) กระแสนุรักษ์นี้เป็นของสมมาตรไครล์ FF ไม่ใช่สมมาตรไครล์ด้วยการที่ \tilde{j}_5^μ เป็นคนรูปแบบกับ j_5^μ ที่นิยามในสมการ (4.1.7) หรือ (4.2.4) แต่การที่การแปลงของ ψ_+ ทั้งในการแปลงไครล์และการแปลงไครล์ FF มีรูปแบบเดียวกันทำให้คอมโพเนนท์ \tilde{j}_5^+ กับ j_5^+ ของทั้งสองสมการมีรูปแบบเดียวกันได้

พิจารณาแบบจำลอง NJL (4.1.6) ใน FF (FF-NJL) คือการเลือกเวลาของระบบเป็น x^+ เขียนสนามดิแรกในรูป คอมโพเนนท์- $(+)$, $(-)$ ได้ โดยมีพจน์จลน์เช่นเดียวกับ (3.1.8) และใช้แฟกเตอร์สำหรับพจน์อันตรกิริยาดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &= \bar{\psi}_+ \psi_- + \bar{\psi}_- \psi_+ \\ \bar{\psi} \gamma^5 \psi &= \bar{\psi}_+ \gamma^0 \gamma^5 \psi_- + \bar{\psi}_- \gamma^0 \gamma^5 \psi_+ \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

โดยใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ในทำนองเดียวกับ (3.1.10) ได้สมการสนามว่า

$$\begin{aligned}
i\partial^\pm \psi_\mu &= \left\{ i\alpha^i \partial^i \psi_\mu + \gamma^0 \left[(m_0 - g_0 (\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^5 \psi \gamma^5)) \psi_\pm - g_0 (\psi_\pm (\bar{\psi}\psi) - \gamma^5 \psi_\pm (\bar{\psi}\gamma^5 \psi \gamma^5)) \right] \right\} \\
-i\partial^\pm \psi_\mu^t &= \left\{ -\psi_\mu^t (i\alpha^i \partial^i) + [\bar{\psi}_\pm (m_0 - g_0 (\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^5 \psi \gamma^5)) - g_0 ((\bar{\psi}\psi)\bar{\psi}_\pm - (\bar{\psi}\gamma^5 \psi)\bar{\psi}_\pm \gamma^5)] \right\}
\end{aligned}
\tag{4.2.7}$$

ซึ่งเป็นสมการไม่เชิงเส้น ทำให้สำหรับระบบควอนตัมไม่สามารถแก้หารูปของ $\psi_- = \psi_-[\psi_+]$ จากสมการใน (4.2.7) ที่ไม่มีอนุพันธ์เวลาซึ่งเป็นสมการเงื่อนไขบังคับได้ (Itakura and Maedan, 2000) และจะเห็นว่าการแปลงไครล์ FF ของ คอมโพเนนท์(-) ของระบบนี้มีความซับซ้อนอย่างยิ่งโดยขึ้นกับอันตรกิริยาที่ซับซ้อนของระบบนี้ สามารถแสดงว่าแบบจำลอง FF-NJL แปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์ FF แม้ว่าแบบจำลอง IF-NJL ไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์ (4.1.2) ก็ตาม (Itakura and Maedan, 2001: 555)



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.2.2 การประมาณสนามเฉลี่ยของแบบจำลองนัมบู—โจนา-ลาซินีโอเฟอร์อนท์ฟอร์ม

พิจารณาวิธีประมาณสนามเฉลี่ย (4.1.13) กับแบบจำลอง FF-NJL ในทำนองเดียวกับ IF ตามขั้นตอนที่ 4.1.2 ได้แบบจำลองประมาณสนามเฉลี่ยใน FF (FF-MF) ในรูปแบบเดียวกับ (4.1.14) หรือ (4.1.18) เพียงแต่อยู่ใน FF และได้มวลถูกก่อกำเนิดเป็น FF-MF ซึ่งได้โดยการแก้สมการเงื่อนไขบังคับว่า

$$\begin{aligned} L_{\text{MF}}[\psi_+, \psi_+^\dagger] &= \frac{1}{2} \int dx' \int d^2 x'_\perp \left\{ \psi_+^\dagger i \partial^- \psi_+ - \mathcal{H}_{\text{MF}}[\psi_+, \psi_+^\dagger] \right\} \\ \mathcal{H}_{\text{MF}}[\psi_+, \psi_+^\dagger] &= \frac{1}{2} \int dx' \int d^2 x'_\perp \left\{ \psi_+^\dagger \left(-\partial'^i \partial'^i + m^2 \right) \frac{1}{i \partial'^+} \psi_+ \right\} \\ m &\equiv m_0 - 2g_0 \langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

จะเห็นว่าแบบจำลองประมาณนี้ให้อนุภาคเสมือน (quasi-particle) ที่มีลักษณะเป็นอนุภาคอิสระมวล m ซึ่งได้ผลเฉลยในทำนองเดียวกับกรณีระบบดิแรกอิสระ FF (3.3.2) ให้ $|\Omega\rangle$ เป็นแวกคิวอัมของระบบนี้ พิจารณาประจุที่นิยามจากกระแสอนุภาค (4.2.5) (ซึ่งมีรูปตรงกับ (4.2.1)) โดยใช้ (3.3.2) เขียนในรูปตัวแปรพลาวัตพื้นฐานในปริภูมิโมเมนตัมดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\text{IF}}^+(x^+) &= -i \int_0^{\infty} \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda \left(b^\dagger(\bar{p}, \lambda) b(\bar{p}, \lambda) - d(\bar{p}, \lambda) d^\dagger(\bar{p}, \lambda) + [d(\bar{p}, \lambda), d^\dagger(\bar{p}, \lambda)]_+ \right) \\ \tilde{Q}_{5, \text{IF}}^+(x^+) &= -i \int_0^{\infty} \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda \lambda \left(b^\dagger(\bar{p}, \lambda) b(\bar{p}, \lambda) + d^\dagger(\bar{p}, \lambda) d(\bar{p}, \lambda) - [d(\bar{p}, \lambda), d^\dagger(\bar{p}, \lambda)]_+ \right) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

จะเห็นว่า

1. มองง่าย ๆ ว่าประจุประกอบด้วยแฟกเตอร์ $b^\dagger b$ และ $d d^\dagger$ เช่นเดียวกับที่ประกอบในแฮมิลโทเนียน (รูป (3.3.6)) ทำให้สลับที่กับแฮมิลโทเนียนได้ ดังนั้นประจุทั้งสองจึงเป็นค่าคงตัวของเคลื่อนที่ (constants of motion) ของแบบจำลองประมาณ FF-MF นี้

2. จากสัญพจน์พื้นฐานของ QFT ที่ว่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการ 4-โมเมนตัม (4-momentum) $P^\mu[\psi, \bar{\psi}]$ ซึ่งนิยามจากกระแสอนุพันธ์ของการเลื่อนขนาน (3.2.8) ต้องอยู่บนหรือภายใน กรวยแสงข้างหน้า (forward light-cone) เท่านั้น (Streater and Wightman, 1980: 29; Heinzl, 2000: 42) ซึ่งเป็นหลักสัมพัทธภาพที่ว่าไม่มีความเร็วใดเร็วกว่าแสงและเป็นหลักเหตุภาพสัมพัทธภาพ (relativistic causality) (ดูข้อ ข ต้นตอนที่ 2.1) กรณีระบบอิสระนี้สเปกตรัมดังกล่าวก็คือค่า 4-โมเมนตัม p^μ ซึ่งเป็นดัชนีในการกระจายของควอนตาฟิสิกส์ (physical quanta) ตาม (3.3.2) นั่นเอง ซึ่งต้องมีค่าตามเงื่อนไข $p^2 = m^2 \geq 0$ และ $p^0 \geq 0$ เท่านั้น เป็นผลให้ใน FF-QFT พิจารณาแต่การกระจายของควอนตาใน

ปริภูมิโหมเมนดัมที่มี $p^+ > 0$ เท่านั้น เช่น สมการ (3.3.2), (3.3.6), (4.2.9) (ดูภาคผนวก ค3 ตั้งแต่สมการ (ค3.1) เป็นต้นไป)

ในการแทน (3.3.2) และทำผลคูณเพื่อให้ได้ (4.2.9) อันที่จริงยังได้พจน์ผลคูณไขว้ระหว่างพจน์ความถี่บวกกับลบของ (3.3.2) ซึ่งได้เป็นพจน์ผลคูณไขว้ของ $b^+(p^{\overline{w}})$ กับ $d^+(-p^{\overline{w}})$ และ $d^+(p^{\overline{w}})$ กับ $b^+(-p^{\overline{w}})$ ออกมาด้วย แต่พจน์เหล่านี้เป็นศูนย์เพราะในการกระจาย (3.3.2) ไม่มีควอนตัมที่ $p^+ < 0$ นั่นคือ พจน์ไขว้ดังกล่าวอยู่ในรูปอินทิกรัล

$$\int_0^\infty dp^+ f(p^+) \int_0^\infty dk^+ \delta(p^+ + k^+) \frac{g(|p^+ + k^+|)}{k^+} = 0$$

ซึ่งมีตัวแปรอินทิเกรต $\forall p^+, \forall k^+, p^+ + k^+ > 0$ เท่านั้น จึงไม่มีค่า $k^+ = -p^+ \leq 0$ ทำให้ฟังก์ชันเดลตาในอินทิกรัลเป็น 0 ดังนั้นการสร้างหรือทำลายควอนตัมที่มี $p^+ \leq 0$ เป็นไปไม่ได้เลย

เนื่องจากประจุ $\tilde{Q}_{FF}^+, \tilde{Q}_{5,FF}^+$ ของสมมาตรโคโรล FF เป็นประจุนุรักษ์ดังนั้นจึงสลับกับแฮมิลโทเนียนได้ และตาม (4.1.11) เมื่อ $|\Omega\rangle$ เป็นแควคิควัมก็ทำให้ $\tilde{Q}_{FF}^+|\Omega\rangle, \tilde{Q}_{5,FF}^+|\Omega\rangle$ เป็นแควคิควัมหรือทำลายแควคิควัมด้วย กล่าวรวมกับที่ได้ในย่อหน้าก่อนได้ว่า การสร้างหรือทำลายควอนตัมที่มี $p^+ \leq 0$ โดยประจุนุรักษ์บนแควคิควัมที่ยังคงให้แควคิควัมหรือทำลายแควคิควัม (คือยังคงได้สถานะที่มีค่าลักษณะเฉพาะของแฮมิลโทเนียนเป็นศูนย์) นั้นเป็นไปไม่ได้เลย จึงได้ว่า การดำเนินการของประจุนุรักษ์บนแควคิควัมเป็นลักษณะเดียวกับที่ดำเนินการด้วยแฮมิลโทเนียนบนแควคิควัม (ดูข้อ ก. บริเวณ (3.3.8)) ดังนี้

$$\tilde{Q}_{FF}^+(x^+)|\Omega\rangle = \lambda|\Omega\rangle, \quad \tilde{Q}_{5,FF}^+(x^+)|\Omega\rangle = \lambda_5|\Omega\rangle \quad (4.2.10)$$

ซึ่งเมื่อละพจน์ค่าคงตัวอนันต์ก็จะได้ λ, λ_5 ในทาง RHS เป็น 0 ทำให้แควคิควัมของแบบจำลองประมาณ FF-MF ไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงโคโรล FF ซึ่งต่างกับที่ได้ใน IF-MF ที่แควคิควัมแปรเปลี่ยนในการแปลงโคโรล (เพราะพจน์ไขว้ทำงานองเดียวกันนี้ของประจุ $Q_{5,IF}^0$ ไม่เป็นศูนย์) ผลสรุปนี้ได้ในกรณีทั่วไปด้วยว่า

ทฤษฎีบท 3 (Leutwyler, Klauder and Streit, 1970: 541-543; Heinzl, 1998: 58-60)

แควคิควัมของทฤษฎีสนาม FF ไม่ว่าจะตัวกลางวางเจียนมีสมมาตรภายในใดหรือไม่ เป็น ทริเวียลทุกกรณี

ข้อสังเกต มีคำถามคือแบบจำลองประมาณ FF-MF (4.2.8) แปรเปลี่ยนในการแปลงโคโรล FF หรือไม่?

ก. มุมมองมาตรฐานมองว่า MF เป็นเพียงตัวเลขไม่ใช่สนามควอนตัม จึงไม่มีการแปลงโดย (4.2.3) ดังนั้นจาก (4.2.2) เห็นได้ชัดว่าแบบจำลอง FF-MF (4.2.8) ไม่แปรเปลี่ยน

ข. ถ้ามองว่าเมื่อสนามอิสระในลากรางเจียน FF-MF ถูกแปลงโดยการแปลงไครล์ FF, MF ที่อยู่ในรูปผลคูณของสนามเดียวกันนี้ก็ย่อมถูกแปลงไปด้วยแม้ว่ามีค่าเป็นคลาสสิกก็ตาม ในการพิจารณาการแปลงไครล์ FF ของ MF ไม่เหมือนใน IF ตรงที่เราทราบการแปลงของแควคิวิอ้อย่างง่าย ๆ ว่าไม่แปรเปลี่ยนในการแปลงไครล์ FF ตามทฤษฎีบท 3 แต่การที่ MF ประกอบด้วย คอมโพเนนท์(-) ที่จะทราบการแปลงได้ต่อเมื่อได้แก๊เงื่อนไขบั้งคับในสมการสนามแล้ว ในแบบจำลองประมาณ FF-MF นี้แม้สามารถแก้ได้แต่ก็ติดอยู่ในรูป MF เช่นเดิม ซึ่งถ้าพิจารณาการแปลงของ MF ที่ติดอยู่ก็ต้องพิจารณาการแปลงของ คอมโพเนนท์(-) ที่ติดอยู่ภายใน MF นี้ลึกลงไปเรื่อยๆ อย่างไม่สิ้นสุด จึงไม่ทราบว่า FF-MF ในมุมมองนี้จะถูกแปลงโดยการแปลงไครล์อย่างไรกันแน่ ?

เมื่อแทนผลเฉลยในรูปปริภูมิโมเมนตัมตามรูป (3.3.2) ของแบบจำลองประมาณนี้ลงใน MF ก็จะได้ เงื่อนไขต้องกันในตัว ว่า (Heinzl et al., 1989)

$$\begin{aligned}
 m - m_0 &= -2g_0 \langle \Omega | (\psi_+^\dagger \gamma^0 \psi_- + \psi_-^\dagger \gamma^0 \psi_+) (x) | \Omega \rangle \\
 &= -2g_0 m \langle \Omega | \psi_+^\dagger \left(\frac{1}{i\partial^+} - \frac{1}{i\partial^-} \right) \psi_+ | \Omega \rangle \\
 &= \frac{g_0 m}{2\pi^3} \int \frac{dp^+}{p^+} \int d^2 p_\perp f(p^\perp, \Lambda; m) \\
 &= \frac{g_0 m}{2\pi^3} \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_\perp \int_0^\infty d(p_\perp)^2 f(p^\perp, \Lambda; m)
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

ในขั้นตอนที่ 2 เป็นการจัดรูปให้คำนวณเป็นขั้นตอนที่ 3 ได้ง่าย ซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 1 โดยแทน (3.2.2) และ (3.3.2) ลงไปยังไม่ทันคำนวณจนได้ขั้นตอนที่ 3 แล้วก็พิจารณาตัดพจน์ที่หายไปจากการทำ VEV แล้วจัดรูปใหม่ นั่นคือขั้นตอนที่ 2 ได้มาภายใต้การทำ VEV แล้ว และเมื่อแทนการกระจาย (3.3.2) ลงไปและคำนวณผลคูณสปินเนอร์ฐานหลักก็จะได้ขั้นตอนที่ 3 ซึ่งเป็นอินทิกรัลลู่ออก ไม่มีความหมาย เพราะเนื่องมาจากความไม่รีนอร์มัลไลเซชันของแบบจำลองนี้ จึงจำเป็นต้องเลือกฟังก์ชันคัทออฟจำกัดขอบเขตสูงสุดของโมเมนตัมเพื่อให้อินทิกรัลมีค่าจำกัด สังเกตว่าในกรณี IF (4.1.19) นั้น RHS มีอินทิแกรนด์ (integrand) ที่ขึ้นกับมวลอยู่แล้ว จึงเป็น สมการช่องว่าง (gap equation) ที่บรรยายลักษณะของสเปกตรัมมวล (mass spectrum) ที่ขึ้นกับค่าคงตัวควบ g_0 ได้เลย แต่เนื่องจากใน FF นี้ถ้าให้ $x^+ = 0$ ใน (3.3.2) ก็พบว่าไม่ขึ้นกับมวล (ดูตอนท้ายของภาคผนวก ค ด้วย) จึงทำให้ได้อินทิแกรนด์ที่ไม่ขึ้นกับมวล ถ้าเลือกคัทออฟที่ไม่ขึ้นกับมวลจะให้ $m = 0$ เสมอเหมือนกับว่าไม่มีอันตรกิริยาเลย ซึ่งผิด ดังนั้นในการเลือกคัทออฟของกรณี FF ต้องมีเงื่อนไขคือขึ้นกับมวล และนอกจากนั้นต้องมีสมมาตรเดียวกับบางสมมาตรที่มีในระบบด้วยจึงจะไม่เกิดผลที่ผิด (Itakura, 1997: 530; Itakura and Maedan 2001: 558) ถ้าเลือก 3-โมเมนตัมคัทออฟ

$$f(p^\perp, \Lambda; m) = \Theta \left(\Lambda - \left(p^3(p^\perp; m) \right)^2 - (p_\perp)^2 \right)$$

เช่นเดียวกับ IF (4.1.19-2) ซึ่งมีสมมาตรในการหมุนเช่นเดียวกับระบบ NJL คัพพอฟนี่ให้ขอบเขตการอินทิเกรตใน (4.2.11) ว่า

$$0 < (p_{\perp})^2 < -(p^+)^2 + m^2 + 2p^+ \sqrt{m^2 + \Lambda^2} \quad (4.2.12)$$

$$\sqrt{m^2 + \Lambda^2} - \Lambda^2 < p^+ < \sqrt{m^2 + \Lambda^2} + \Lambda^2$$

ก็ได้ผลว่า

$$m - m_0 = g_0 m \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right)^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2} - \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 \ln \left| \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{m} \right)^2} + \frac{\Lambda}{m} \right| \right\} \quad (4.2.13)$$

จะเห็นว่าได้ผลเหมือนกับกรณี IF (4.1.19-2) ซึ่งมีเงื่อนไขของ ค่าคงตัวควบ g_0 ที่ทำให้เกิดเฟสที่ไม่มีหรือมี มวลถูกก่อกำเนิด เช่นเดียวกับ IF (4.1.20), (4.1.21) ที่ศึกษาก่อนหน้านี้

จะเห็นว่าปริมาณ $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle$ ใน FF ก็ยังคงมีบทบาทเช่นเดียวกับออร์เดอร์พารามิเตอร์ใน IF ที่ใช้เป็นปริมาณตัดสินเฟสที่มีหรือไม่มีมวลถูกก่อกำเนิด แต่อาจมองเผินๆ ว่าเกิด ปฏิทรรศน์ (paradox) ขึ้นโดยขัดกับทฤษฎีบท 1 กล่าวคือ ในเมื่อ FF มีแวกคิวอัมที่ทริเวียลแล้ว ยังสามารถมี “ออร์เดอร์พารามิเตอร์” ไม่เป็นศูนย์ที่แสดงถึง “เฟสหัก” ของสมมาตรไครัล (4.1.2) ได้อย่างไร ?

ลองตรวจสอบสมการ (4.1.10) ที่นิยามความเป็นออร์เดอร์พารามิเตอร์นี้ตามทฤษฎีบท 1 (Itakura and Maedan, 2001: 546-547, 559) จะเห็นว่าการแปลงไครัล (4.1.2) ที่ใช้ใน (4.1.10) นิยามใน FF ไม่ได้ ดังนั้นการหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของแวกคิวอัม FF จะมีหรือไม่นั้น เกี่ยวกับการแปลงไครัล FF ไม่ใช่การแปลงไครัล ทำให้ต้องพิจารณา (4.1.10) ใหม่โดยใช้ประจุไครัล FF (ที่นิยามจาก (4.2.5) ไม่ใช่ประจุ (4.1.8)) ซึ่งจะเห็นว่า $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle$ อยู่ในรูปสนามไม่อิสระ (-) ด้วยจึงต้องแก้เงื่อนไขบังคับให้เขียนอยู่ในรูปสนามอิสระ (+) ทั้งหมดก่อนจึงจะคำนวณได้ และเมื่อแก้แล้วทำให้ใน FF เกิดบางพจน์เพิ่มเติมที่ไม่อะนาโลกส์กับ (4.1.10) ที่สามารถเหลือไว้ไม่เป็นศูนย์ในการทำ VEV ที่สามารถให้ $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle \neq 0$ ได้ภายใต้ความทริเวียลของแวกคิวอัม นั่นคือใน FF ไม่ได้ใช้ (4.1.10) วิเคราะห์หมโนทัศน์ของการเท่าหรือไม่เท่ากับศูนย์ของ $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle$ ดังที่ทำในทฤษฎีบท 1 ดังนั้น “ออร์เดอร์พารามิเตอร์” $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle$ ใน FF จึงไม่ใช่ออร์เดอร์พารามิเตอร์ที่ใช้นิยามเดียวกับ IF แต่ยังคงสามารถแสดงเฟสได้เหมือนกับออร์เดอร์พารามิเตอร์ใน IF ปกติ เนื่องจากที่จริงความสนใจสุดท้ายอยู่ที่การหักสมมาตรเกิดขึ้นเองของสมมาตรไครัลของระบบใน IF จึง identify “ออร์เดอร์พารามิเตอร์ของสมมาตรไครัล” ของระบบดังกล่าวใน FF ให้เป็นปริมาณที่มีรูปแบบเดียวกับออร์เดอร์พารามิเตอร์ของสมมาตรไครัลที่นิยามใน IF (แม้ว่าการแปลงสมมาตรไครัลไม่ valid ใน FF ก็ตาม) นั่นคือ $\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle$ และ identify เฟสสมมาตรและเฟสหักของระบบใน FF โดยใช้การเท่ากันหรือไม่เท่ากับศูนย์ของ “ออร์เดอร์พารามิเตอร์” นี้ในการทำงานเดียวกับและสมนัยกับระบบใน IF (Itakura and Maedan, 2001: 546-547)

ในกรณี FF-MF ที่กำลังศึกษา จากการแก้เงื่อนไขบังคับได้การแปลงของสนามไม่อิสระว่า

$$\begin{aligned} [\psi_-(x), \tilde{Q}_{FF}^+(x^+)] &= \psi_-(x) \\ [\psi_-(x), \tilde{Q}_{5,FF}^+(x^+)] &= \gamma^5 \left(\psi_-(x) - 2m \frac{1}{i\partial^+} \gamma^0 \psi_+(x) \right) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

ทำให้ได้สมการที่สมนัยกับ (4.1.10) ใน IF แต่แตกต่างกันว่า

$$[\bar{\psi} \gamma^5 \psi(x), \tilde{Q}_{5,FF}^+(x^+)] = -2 \bar{\psi} \psi(x) + 2m \psi_+^t \left(\frac{1}{i\partial^+} - \frac{1}{i\partial^+} \right) \psi_+(x) \quad (4.2.15)$$

การที่แวกคิวอัมเป็นทริเวียลเมื่อทำ VEV ก็จะได้ LHS เป็นศูนย์ แต่เหลือพจน์อื่นที่ทำให้ได้ว่า

$$\langle \bar{\psi} \psi(x) \rangle = m \langle \Omega | \psi_+^t \left(\frac{1}{i\partial^+} - \frac{1}{i\partial^+} \right) \psi_+(x) | \Omega \rangle \quad (4.2.16)$$

ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ตรงกับ (4.2.11) แม้แวกคิวอัมเป็นทริเวียลก็ตาม อธิบายว่าแม้ในระบบประมาณสนามเฉลี่ยของ FF-NJL มีแวกคิวอัมเป็นทริเวียลแต่ระบบนี้กลับมีสนามไม่อิสระที่ไม่ทริเวียลแทน อันเกิดจากเงื่อนไขบังคับที่ขึ้นกับพลวัตของระบบดิแรก FF ซึ่งตามมาจากการไม่ได้เอโกนัลของพีชคณิตดิแรกกรวยแสง แวกคิวอัมที่ใช้นิยาม VEV ของออร์เดอร์พารามิเตอร์นิยามจากระบบในเชกเตอร์ของสนามอิสระ แต่ออร์เดอร์พารามิเตอร์อยู่ในรูปสนามไม่อิสระด้วย ดังนั้นจึงต้องจัดให้อยู่ในรูปสนามอิสระจึงหาค่า VEV ได้ การไม่ทริเวียลของผลเฉลยของสนามไม่อิสระทำให้ VEV ของออร์เดอร์พารามิเตอร์ไม่เป็น 0

จะเห็นจาก (3.2.2) และ (4.2.14) ว่าลักษณะผลเฉลยของสมการเงื่อนไขบังคับและการแปลงของสนามไม่อิสระขึ้นกับ m ซึ่งมีค่าเป็น 0 (หรือ ไม่เป็น 0) ขึ้นกับเฟสสมมาตร (หรือ เฟสหัก) ที่แก้ได้จากสมการช่องว่าง (4.2.10) ตามลำดับ ดังนั้นใน FF เฟสไม่ขึ้นกับแวกคิวอัมเพราะเป็นทริเวียลแต่ขึ้นกับลักษณะผลเฉลยของสมการเงื่อนไขบังคับแทน

สำหรับเฟสสมมาตรใน FF ที่มี $m = 0$ (จากการแก้สมการช่องว่าง) จะเห็นจาก (4.2.15) และ (4.2.16) ว่าในเฟสนี้มีสมการการแปลง “ออร์เดอร์พารามิเตอร์” โดยการแปลงไครรัล FF (4.2.14) ในรูปแบบเดียวกับการแปลงออร์เดอร์พารามิเตอร์โดยการแปลงไครรัลใน IF (4.1.10) (ถ้าระบบทั่วไป คือ (4.1.14)) นี่ถือเป็นลักษณะมโนทัศน์ของความเป็นเฟสสมมาตรที่นิยามใน FF นี้ ส่วนรูปแบบที่แตกต่างออกไปจึงเป็นของเฟสหักที่มี $m \neq 0$

กล่าวโดยทั่วไป (Itakura and Maedan, 2001: 559-564) (ซึ่งกรณีทั่วไปเป็นประเด็นที่ซับซ้อนไม่ได้ศึกษาในที่นี้) ได้ดังนี้

1. สำหรับระบบที่มีสมมาตรชัดแจ้ง (explicit symmetry) ใน IF เฟสสมมาตรหรือเฟสหักตัดสินด้วยการเป็นศูนย์หรือไม่เป็นของออร์เดอร์พารามิเตอร์ซึ่งตรงกับการที่แวกคิวอัมมีการหักสมมาตรเกิดขึ้นเอง หรือไม่มี

2. แต่ระบบเดียวกันนี้เมื่อศึกษาใน FF ซึ่งแวกคิวอัมเป็นทริเวียลทุกกรณี เฟสสมมาตรหรือเฟสหักที่ตัดสินด้วย “ออร์เดอร์พารามิเตอร์” จากการแก้สมการช่องว่างว่าเป็นศูนย์หรือไม่เป็น ไม่เกี่ยวกับลักษณะของแวกคิวอัม แต่เกี่ยวกับลักษณะของเงื่อนไขบังคับที่ขึ้นกับอันตรกิริยาของระบบ โดยเฟส

สมมาตร (หรือ เฟสหัก) สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการเงื่อนไขบ่งคับชนิดที่เรียกว่า ผลเฉลยสมมาตร (symmetric solution) (หรือ ผลเฉลยหัก (broken solution)) ตามลำดับ

3. จะเห็นว่าแฮมิลโทเนียนก็ประกอบด้วยตัวแปรไม่อิสระด้วย ดังนั้นจึงต้องแก้สมการเงื่อนไขบ่งคับเขียนแฮมิลโทเนียนออกมาในรูปตัวแปรอิสระ ซึ่งลักษณะผลเฉลยของสมการเงื่อนไขบ่งคับมีได้หลายกรณีขึ้นกับเฟส จึงได้ว่าสำหรับระบบเดียวกันสามารถมีแฮมิลโทเนียนได้หลายกรณีโดยขึ้นกับเฟส เรียกว่า แฮมิลโทเนียนพหุคูณ (multiple Hamiltonians) ซึ่งแต่ละกรณีสมนัยกับ ผลเฉลยสมมาตร (หรือ ผลเฉลยหัก) ดังข้อ 2. ตามลำดับ แม้ว่าระบบอยู่ในเฟสใด แฮมิลโทเนียนก็มีแควคิควอัมที่ทริเวียลเช่นเดียวกัน ดังนั้นปรากฏการณ์พิเศษต่างๆ อันเนื่องมาจากแควคิควอัมไม่ทริเวียลใน IF จึง “เคลื่อนย้ายไปสู่” ลักษณะที่ต่างกันของแฮมิลโทเนียนใน FF แทน สำหรับนับมู-โกลด์สโตนโบซอนใน FF ได้จากการแก้หาสเปกตรัมมวลและสถานะถูกกระตุ้น (excited states) ต่างๆ ของสมการชโรดิงเงอร์กระจายแสงสำหรับแฮมิลโทเนียนในเฟสหัก ไม่ได้ศึกษาในที่นี้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5 สรุปผลการศึกษา

จากการที่พิกัดเวลาในทฤษฎีสัมพัทธภาพไม่เป็นได้อย่างเดียว ทำให้สามารถเลือกพิกัดเวลาได้หลายแบบซึ่งแต่ละแบบสามารถให้รูปแบบพลวัตของกฎฟิสิกส์ที่ไม่แปรเปลี่ยนในสัมพัทธภาพแตกต่างกันไป มีพิกัดเวลาพิเศษแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า เวลากรวยแสง ทฤษฎีสนามที่เลือกใช้พิกัดเวลานี้เรียกว่า ทฤษฎีสนามกรวยแสง หรือ ทฤษฎีสนาม FF สามารถพิจารณาทฤษฎีสนามนี้โดยเลือกแนวเข้าสู่การศึกษาดังนี้

(ก) เลือกพิกัดเวลาออกมาให้ชัดเจนตั้งแต่การฟอร์มูเลทหลักการแปรผัน

(ข.1) ฟอร์มูเลทหลักการแปรผันในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลโดยในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันมองลากวางเขียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลที่มีอาร์กิวเมนต์เป็นสนามพื้นฐานเท่านั้น

(ข.2) เขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ในรูปลากวางเขียน

มุมมองข้อ (ก) และ (ข.2) เป็นแนวเข้าสู่การศึกษาทฤษฎีสนามที่อะนาโลกัสกับกลศาสตร์จุด ส่วนข้อ (ข.1) เป็นการที่ผู้เขียนได้เขียนสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันใหม่ในรูปการแปรผันของสนามพื้นฐานเท่านั้น ด้วยการมองในสูตรนี้ว่าอนุพันธ์เวลาของสนามพื้นฐานซึ่งเป็นอาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันนัลลากวางเขียนว่าเป็นฟังก์ชันนัลของสนามพื้นฐาน เป็นการเขียนอย่างชัดเจนในสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันนี้ว่าหลักการแปรผันโดยพื้นฐานพิจารณาแต่การแปรผันของสนามพื้นฐานเท่านั้น

เมื่อพิจารณาในระบบดิแรกอิสระใน FF จากลักษณะพิเศษของเมตริกกรวยแสงที่เป็นผลให้พีชคณิตดิแรกกรวยแสงไม่ได้อะโกนัลทำให้ในลากวางเขียนมีบางคอมโพเนนต์ของสนามดิแรกที่ไม่มีพจน์อนุพันธ์เวลาเลย จึงเกิดมีเงื่อนไขบังคับขึ้น ทำให้มีคอมโพเนนต์ดังกล่าวเป็น สนามช่วย ซึ่งเป็นสนามไม่อิสระ เมื่อแก้สมการเงื่อนไขบังคับสำหรับระบบในเซกเตอร์สนามอิสระสามารถใช้กระบวนการเฟดเดอเยฟ-ยาคิฟในการสร้างแฮมิลโทเนียนฟอร์มูเลชันที่มีคู่คาโนนิคอิสระและทำการควอนไทซ์ได้

ในการหาสมการสนามของระบบดิแรกอิสระ FF ที่ต้องหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของลากวางเขียนหรือแฮมิลโทเนียนตามสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ ผู้เขียนเสนอเทคนิคเล็กน้อยที่สามารถจัดรูปลากวางเขียนหรือแฮมิลโทเนียนโดยใช้วิธีอินทิเกรตแยกส่วนภายในอินทิกรัลของปริมาณทั้งสองให้อยู่ในรูปที่สามารถหาผลลัพธ์ของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลโดยตรงได้ ซึ่งเป็นวิธีตรงไปตรงมากกว่าวิธีปกติที่ใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลกระจายการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลเทียบกับสนามของ อาร์กิวเมนต์ของปริมาณทั้งสองที่อยู่รูปอนุพันธ์กับเวลาและอวกาศต่างๆ ออกไป แต่วิธีที่เสนอมานี้จะซับซ้อนกว่าเพราะการจัดรูปต่างๆ ดำเนินการผ่านเครื่องหมายอินทิเกรตในขณะที่วิธีปกติดำเนินการผ่านแพกเคอร์อนุพันธ์ฟังก์ชันนัลที่ถูกกระจายออกมาโดยใช้สูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล

ภายใต้การประมาณสนามเฉลี่ยแสดงได้ว่าออร์เดอร์พารามิเตอร์ของระบบ FF-NJL ที่มี "1-คัลเลอร์" และ 1-เฟลเวอร์ สามารถไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่ระบบมีแควคิควมแบบทริเวียลอันเนื่องจากเป็นลักษณะทั่วไปของทฤษฎีสนามควอนตัมกรวยแสง ซึ่งดูเผินๆ เป็นปฏิทรรศน์กับมโนทัศน์ของออร์เดอร์

พารามิเตอร์ใน IF ที่ไม่เท่ากับ 0 เมื่อแวกคิวอัมมีการหักสมมาตรเกิดขึ้นเอง อธิบายได้ว่าแม้ในระบบประมาณสนามเฉลี่ยของ FF-NJL นี้มีแวกคิวอัมแบบทริเวียลแต่ระบบนี้ก็มีสนามไมอิสระที่ไม่ทริเวียลแทน อันเกิดจากเงื่อนไขบังคับที่ขึ้นกับลักษณะพลวัตของระบบ ซึ่งตามมาจากการไม่ได้ละโกนัลของพีชคณิตดีแรกกรวยแสงของระบบดีแรกใน FF แวกคิวอัมที่ใช้นิยาม VEV ของออร์เดอร์พารามิเตอร์นิยามจากระบบในเซกเตอร์ของสนามอิสระ แต่ออร์เดอร์พารามิเตอร์อยู่ในรูปสนามไมอิสระด้วย ดังนั้นต้องจัดให้อยู่ในรูปสนามอิสระจึงหาค่า VEV ได้ การไม่ทริเวียลของผลเฉลยของสนามไมอิสระทำให้ VEV ของออร์เดอร์พารามิเตอร์ไม่เป็นศูนย์ และ identify เฟสสมมาตรและเฟสหักใน FF ทำนองเดียวกับใน IF ด้วยการเป็นหรือไม่เป็นศูนย์ของออร์เดอร์พารามิเตอร์ใน FF

กล่าวส่งท้ายสำหรับแบบจำลองนัมู—โจนา-ลาซิโนไอในฟรอนท์ฟอร์ม

Itakura และ Maedan (2000) พบว่า สำหรับระบบ FF-NJL คลาสสิกัล (กราสส์มันน์)

(" N_C -คัลเลอร์" ไตโต และ 1-เฟลเวอร์) สามารถแก้สมการเงื่อนไขบังคับสำหรับสนามช่วยได้อย่างแม่นยำ (exact) ส่วนในระบบควอนตัมในการแก้เงื่อนไขบังคับนี้สามารถใช้วิธีการประมาณอย่างเป็นระบบด้วยการกระจาย- $1/N_C$ ($1/N_C$ -expansion หรือเรียกว่า large- N_C approximation ซึ่งเป็นการตั้ง (take) ลิมิตให้จำนวน "คัลเลอร์" N_C เข้าสู่อค่ามากๆ) โดยใช้วิธีการกระจายโบซอน (boson expansion method) เป็นเทคนิคการกระจาย (Itakura, 1996) ซึ่งเป็นการประมาณที่เหนือการประมาณสนามเฉลี่ย (beyond mean-field approximation) และให้ผลไม่เพอร์เทอเบทิฟ พบว่าในอันดับ (order) แรกสุดของการกระจายนี้สามารถแก้ได้สมการช่องว่างเช่นเดียวกับการประมาณสนามเฉลี่ย เมื่อแทนผลเฉลยของเงื่อนไขบังคับและสมการช่องว่างที่ได้จากการประมาณวิธีนี้ใน 3 อันดับแรก (Itakura และ Maedan ใช้ตัวลำดับเป็น $n = 0..2$ หรือ $N_C, N_C^{1/2}, N_C^0$) ลงในแฮมิลโทเนียน ก็ได้แฮมิลโทเนียนพหุคูณสำหรับเฟสหัก (หรือเฟสสมมาตร) ตามผลเฉลยไม่ทริเวียล (หรือทริเวียล) ของสมการช่องว่างตามลำดับ ซึ่งสมการโรดิงเงอร์กรวยแสงสำหรับแฮมิลโทเนียนเฟสหักที่ประมาณออกมาสามารถให้ ภาพคอนสทิทูเอนท์และคำนวณมวลของมิซอนที่เป็นสถานะยึดเหนี่ยวของเฟอร์มิออนกับปฏิเฟอร์มิออน (antifermion) ได้

สถาบันวิจัยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, ภาควิชาฟิสิกส์. ศัพท์บัญญัติฟิสิกส์ [Online]. แหล่งที่มา :

<http://physics.science.cmu.ac.th/Scripts/thaiwords.htm> [2546, มีนาคม]

ราชบัณฑิตยสถาน. 2544. ศัพท์รัฐศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ : ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. 2545. ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ : ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. ศัพท์บัญญัติราชบัณฑิตยสถาน [Online]. แหล่งที่มา :

<http://rirs3.royin.go.th/coinages/webcoinage.php> [2546, มีนาคม]

ภาษาอังกฤษ

Aitchison, I. J. R. 1982. An informal introduction to gauge field theories. Cambridge : Cambridge University Press.

Arnold, V. I. 1989. Mathematical methods of classical mechanics. Translated from Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. 2nd ed. New York : Springer-Verlag.

Bijnens, J. 1996. Chiral Lagrangians and Nambu-Jona-Lasinio like models. Phys. Rept. 265 : 369.

Bijnens, J., Bruno Ch., and de Rafael, E. 1992. Nambu Jona-Lasinio like models and the low energy effective action of QCD (hep-ph/9206236 v1) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/> Published in : Nucl. Phys. B390 (1993) : 501.

Bjorken, J., and Drell, S. 1965. Relativistic quantum fields. New York : McGraw-Hill.

Brodsky, S. J., Pauli, H-C., and Pinsky, S. S. 1997. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone (hep-th/9705477 v1) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/> Published in : Phys. Rept. 301 (1998) : 299.

Buchbinder, I. L. and Kuzenko, S. M. 1998. Ideas and method of supersymmetry and supergravity or a walk through superspace. Revised ed. Bristol : Institute of Physics Publishing.

Byron, F.W. and Fuller, F. W. 1992. Mathematics of classical and quantum physics. New York : Dover Publications.

- Christos, G. A. 1984. Chiral symmetry and the U(1) problem. Phys. Rept. 116, 5 : 251.
- Dirac, P. A. M. 1949. Form of relativistic dynamics. Rev. Mod. Lett. 21, 3 : 392.
- Dirac, P. A. M. 1968. Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. Proc. Roy. Soc. A 110 (1926) : 561. In B. L. van der Waerden (eds). Sources of quantum mechanics. New York : Dover Publications.
- Faddeev, L., and Jackiw, R. 1988. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained system. Phys. Rev. Lett. 60, 17 : 1692.
- Feynman, R. P., and Hibbs, A. R. 1965. Quantum mechanics and path integrals. New York : McGraw-Hill.
- Frampton, H. 2000. Gauge field theories. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons.
- Gitman, D.T., and Tyutin, I. V. 1990. Quantization of fields with constraints. Berlin : Springer-Verlag.
- Goldstein, H. 1980. Classical mechanics. 2nd ed. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley.
- Greiner, W., and Reinhardt, J. 1996. Field quantization. Berlin : Springer-Verlag.
- Hatfield, B. 1992. Quantum field theory of point particles and strings. Redwood City : Addison-Wesley.
- Hatsuda, T., and Kunihiro, T. 1994. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. Phys. Rept. 247 : 221.
- Hawking, S. 1996. A brief history of time. 10th ed. New York : Bantam.
- Heinzi, T. 1994. Light front quantisation as an initial-boundary value problem. Z. Phys. C62 : 521.
- Heinzi, T. 1998. Light-cone dynamics of particles and fields (hep-th/9812190) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/>
- Heinzi, T. 2000. Light-cone quantization: Foundations and applications (hep-th/0008096) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/> Published in : Lect. Notes Phys. 572 (2001) : 55.
- Heinzi, T., Dietmaier, C., Schaden, M., and Werner, E. 1989. The fermions condensate of the Nambu--Jona-Lasinio model in light cone quantisation. Z. Phys. A334 : 215.

- Higashijima, K. 1991. Theory of dynamical symmetry breaking. Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 104 : 1.
- Huang, K. 1998. Quantum field theory: From operators to path integrals. New York : John Wiley & Sons.
- Itakura, K. 1996. Boson expansion methods in (1+1)-dimensional light-front QCD. Phys. Rev. D 54, 4 : 2853.
- Itakura, K. 1997. Gap equation from Fermionic constraints on the light-front. Prog. Theor. Phys. 98, 2 : 527.
- Itakura, K., and Maedan, S. 2000. Dynamical chiral symmetry breaking on light-front. II. The Nambu--Jona-Lasinio model. Phys. Rev. D 62, 10 : 105016.
- Itakura, K., and Maedan, S. 2001. Light-front realization of chiral symmetry breaking. Prog. Theor. Phys. 105, 4 : 537.
- Jackiw, J. 1993. (Constrained) quantization without tears (hep-th/9306075) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/>
- Kiselev, V. G., Shnir, Ya. M., and Tregubovich, A. Ya. 2000. Introduction to quantum field theory. Amsterdam : Gordon and Breach Science.
- Kogut, J. B., and Soper, D. E. 1970. Quantum electrodynamics in the infinite-momentum frame. Phys. Rev. D 1, 10 : 2901.
- Kunihiro, T., and Hatsuda, T. 1984. A self-consistent mean-field approach to the dynamical symmetry breaking. Prog. Theor. Phys. 71, 6 : 1332.
- Lepage G. P., and Brodsky S. J. 1980. Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics. Phys. Rev. D 22, 9 : 2157.
- Leutwyler, H., Klauder, J. R., and Streit, L. 1970. Quantum field theory on lightlike slabs. Nuovo Cim. 66A, 3 : 536.
- Martin, J. L. 1959. Generalized classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermi oscillator. Proc. Roy. Soc. A 251 : 536.
- Mustaki, D. 1994. Chiral symmetry and the constituent quark model: A null-plane point of view (hep-th/9404206 v1) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/>
- Nambu, Y., and Jona-Lasinio, G. 1961a. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I. Phys. Rev. 122, 1 : 345.

- Nambu, Y., and Jona-Lasinio, G. 1961b. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. Phys. Rev. 124, 1 : 246.
- Perry, R. J. 1999. Light-front quantum chromodynamics (nucl-th/9901080 v1) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/>
- Peskin, M. E., and Schroeder, D. V. 1995. An introduction to quantum field theory. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley.
- Rajaraman, R. 1996. Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. 2nd ed. Amsterdam : Elsevier Science B.V.
- Scherer, S. 2002. Introduction to chiral perturbation theory (hep-ph/0210398 v1) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/> To appear in : Advances in nuclear physics : 27.
- Schwinger, J. 1948. Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation. Phys. Rev. 74, 10 : 1439.
- Srivastava, P. P. 1999. Perspectives of light-front quantized field theory: Some new results (hep-ph/9908492) [Online]. Available from : <http://xxx.lanl.gov/> Published in : A. N. Mitra (ed.), 2000. Quantum field theory: A 20th century profile, pp. 437-478. New Delhi : Indian National Science Academy (INSA), and Hindustan Book Agency.
- Sterman, G. 1993. An introduction to quantum field theory. Cambridge : Cambridge University.
- Svetitsky, B. 2002. Notes on functionals [Online]. Available from : <http://julian.tau.ac.ac.il/~bqs/functionals/functionals.html> [2003, April]
- Tomonaga, S. 1958. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. Prog. Theor. Phys. 1, 2 (1946) : 1. In J. Schwinger (ed.), Selected papers on quantum electrodynamics. New York : Dover Publications.
- Vogl, U., and Weise, W. 1991. The Nambu and Jona-Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. Prog. Part. Nucl. Phys. 27 : 195.
- Weinberg, S. 1996. The quantum theory of fields. Foundations, vol. 1. Cambridge : Cambridge University Press.
- Wightman, A. S., and Streater, R. F. 1980. PCT, spin and statistics, and all that. 2nd ed. Redwood City : Addison-Wesley.

ภาคผนวก ก
คณิตศาสตร์เกี่ยวกับอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล

ก1 คณิตศาสตร์เกี่ยวกับอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล

ในที่นี้กล่าวสรุปหัวข้อเรื่องนี้อย่างคร่าวๆ โดยไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical rigorous) ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Greiner (1996: 36-39)

ฟังก์ชันนัล (functional) คือ การส่ง (mapping) ที่มีโดเมนเป็นเซตของฟังก์ชัน ไปสู่ พิสัยที่เป็นเซตของจำนวน สังเกตว่าฟังก์ชันนัลมีโดเมนเป็นฟังก์ชัน ต่างกับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวน ให้ ϕ เป็นฟังก์ชันของจำนวน x พิจารณาฟังก์ชันนัล F ของฟังก์ชัน ϕ ให้สัญลักษณ์แทน ภาพ (image) ของฟังก์ชันนัลนี้เป็น $F[\phi]$ ซึ่งมีค่าขึ้นกับรูปของฟังก์ชัน ϕ พิจารณาตัวอย่างฟังก์ชันนัลดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1

$$F_x [\phi] = \int_0^x dx' \mathcal{V}(\phi) \quad (ก1.1)$$

โดยที่สำหรับแต่ละ x' ให้ \mathcal{V} เป็นฟังก์ชันของตัวแปร ϕ จะเห็นว่าฟังก์ชันนัลสามารถมีตัวแปรเสริม (parameter) ได้ซึ่งในตัวอย่างนี้คือ x แสดงด้วยดัชนีล่าง

ตัวอย่าง 2

$$F_x [\phi] = \phi(x) = \int dx' \delta(x - x') \phi(x') \quad (ก1.2)$$

เป็นฟังก์ชันนัลที่ง่ายที่สุด โดยพิจารณาให้ $F_x [\phi]$ มีค่าขึ้นกับรูปของฟังก์ชัน ϕ ไม่ใช่ขึ้นกับค่าของ $\phi(x)$ ที่ x และพิจารณา x ใน LHS ว่าเป็นตัวแปรเสริมของฟังก์ชันนัลไม่ใช่รูปภาพของฟังก์ชัน ϕ ส่วนทาง RHS เป็นการเขียนให้มีรูปคล้ายกับตัวอย่าง 1

ตัวอย่าง 3

$$\frac{d}{dx} [\phi] = \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (ก1.3)$$

ก็เป็นฟังก์ชันนัลชนิดหนึ่งเช่นเดียวกับตัวอย่าง 2 โดยพิจารณาอนุพันธ์ใน LHS ว่าหมายถึง ฟังก์ชันนัลที่มีค่าขึ้นกับรูปของฟังก์ชัน ϕ ไม่ใช่ขึ้นกับค่า $\phi(x)$ โดยมี x เป็นตัวแปรเสริมของฟังก์ชันนัล ส่วน RHS หมายถึง สำหรับฟังก์ชัน $\phi(x)$ รูปหนึ่งๆ พิจารณาอนุพันธ์ที่ x

ต่อไปจะละการเขียนดัชนีล่างที่แสดงตัวแปรเสริมของฟังก์ชันนัลโดยเป็นที่เข้าใจกัน โดยเฉพาะเมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันนัลตามตัวอย่าง 2 และ 3

นิยามอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (functional derivative) เทียบกับฟังก์ชัน $\phi(x)$ ที่จุด x ดังนี้

$$\frac{\delta F[\phi(x')]}{\delta \phi(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x') + \varepsilon \delta(x - x')] - F[\phi(x')]}{\varepsilon} \quad (ก1.4)$$

โดยที่ x' เป็นบุพภาพ (pre-image) ของฟังก์ชัน $\phi(x')$ ที่เป็นบุพภาพของฟังก์ชันนัล F ความหมายของอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล คือ การเปลี่ยนแปลงของ F เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ϕ ไป ε เฉพาะที่จุด x จากนิยามนี้จะเห็นว่า ผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (functional differential) ของฟังก์ชันนัลในตัวอย่าง 2 อยู่ในรูป

$$\delta \phi(x') \equiv [\phi(x') + \varepsilon \delta(x - x')] - [\phi(x')] = \varepsilon \delta(x - x') \quad (ก1.5)$$

ซึ่งนำไปใช้เขียนผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลทั่วไปได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &\equiv F[\phi + \delta \phi(x')] - F[\phi] \\ &= \int dx' \delta \phi(x') \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x')} \end{aligned} \quad (ก1.6)$$

อนุพันธ์ฟังก์ชันนัลมีสมบัติคล้ายอนุพันธ์ธรรมดา (ordinary derivative) เช่น มีหลักเกณฑ์ลูกโซ่ (chain rule)

$$\frac{\delta F[G[\phi]]}{\delta \phi(x)} = \int dx' \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x')} \frac{\delta F[G]}{\delta G(x')} \quad (ก1.7)$$

และผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของฟังก์ชันนัลที่ขึ้นกับหลายฟังก์ชันคือ $\phi(x')$ และ $G(x')$ เขียนได้ในรูป

$$\delta F[\phi, G] = \int dx' \left\{ \delta \phi(x') \frac{\delta F[\phi, G]}{\delta \phi(x')} + \delta G(x') \frac{\delta F[\phi, G]}{\delta G(x')} \right\} \quad (ก1.8)$$

ถ้า G เป็นฟังก์ชันนัลของ ϕ อีกริ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta F[\phi, G[\phi]] &= \int dx' \delta \phi(x') \left\{ \frac{\delta F[\phi, G[\phi]]}{\delta \phi} \right\} \\ &= \int dx' \delta \phi(x') \int dx'' \left\{ \frac{\delta \phi(x'')}{\delta \phi(x')} \frac{\delta F[\phi, G]}{\delta \phi} + \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x')} \frac{\delta F[\phi, G]}{\delta G} \right\} \end{aligned} \quad (ก1.9)$$

โดยที่

- 1) เขียน $F[\phi, G]$ หมายถึง พิจารณา F เป็นฟังก์ชันนัลของฟังก์ชัน $\phi(x)$ และ $G(x)$ อย่างอิสระแก่กัน
- 2) เขียน $F[\phi, G[\phi]]$ หมายถึง พิจารณา F เป็นฟังก์ชันนัลของฟังก์ชัน ϕ และ ฟังก์ชันนัล $G[\phi]$, กล่าวได้ว่า $F[\phi, G[\phi]]$ เป็นฟังก์ชันนัลของฟังก์ชัน ϕ ทำนองเดียวกับที่กล่าวได้ว่า $f(x, g(x))$ เป็นฟังก์ชันของ x

ใน (ก1.9) ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $\phi = \phi(x; t)$ โดยพิจารณาความเป็นฟังก์ชันนัล F ของฟังก์ชัน $\phi(x; t)$ เฉพาะส่วนที่ขึ้นกับ x ของ ϕ เท่านั้น โดยใช้เครื่องหมาย “;” แยก t ออกไปต่างหาก

และกำหนดให้ $G[\phi] = \frac{\partial}{\partial x}[\phi]$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันนำชนิดหนึ่งของ ϕ นั่นคือได้ F ใน (ก1.9) เป็น $F\left[\phi, \frac{\partial}{\partial x}[\phi]\right]$ สำหรับการเขียน $F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]$ โดยที่เขียน $G = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ กำหนดให้มีความหมายดังข้อ 2) เมื่อใช้การอินทิเกรตแยกส่วน (integration by parts) กับพจน์ที่ 2 ได้ว่า

$$\int dx'' \frac{\delta(\partial\phi/\partial x'')}{\delta\phi(x';t)} \frac{\delta F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]}{\delta(\partial\phi/\partial x'')} = -\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\delta F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]}{\delta(\partial\phi/\partial x')} \right) + \left(\frac{\delta\phi(x'';t)}{\delta\phi(x';t)} \frac{\delta F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]}{\delta(\partial\phi/\partial x'')} \right)_{x''=B.P.} \quad (ก1.10)$$

โดยที่ B.P. หมายถึง จุดขอบเขต (boundary points) ของตัวแปร x'' ที่กำหนดโดยขอบเขตของการอินทิเกรตใน LHS ถ้าสมมติว่าพจน์หลังหายไปอันเนื่องมาจากได้มีการกำหนดเงื่อนไขบางอย่างแก่ $\phi(x;t)$ (เช่นดูข้อ (1)-(3) หลังสมการ (ก2.7)) ก็จะได้ (ก1.9) ในกรณีนี้ว่า

$$\delta F\left[\phi, \frac{\partial}{\partial x}[\phi]\right] = \int dx' \delta\phi(x';t) \left\{ \frac{\delta F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]}{\delta\phi(x')} - \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\delta F\left[\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]}{\delta(\partial\phi/\partial x')} \right) \right\} \quad (ก1.11)$$

พิจารณา F ที่อยู่ในรูป

$$F[\phi](t) = \int dx' \mathfrak{V}(\phi) = \int dx' \phi^n(x';t)$$

จะเห็นว่ามีเอกลักษณ์

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x;t)} &= \int dx' \frac{\delta \mathfrak{V}[\phi(x';t)]}{\delta\phi} \frac{\delta F[\mathfrak{V}]}{\delta \mathfrak{V}(x';t)} = \int dx' \delta(x-x') \frac{\partial \mathfrak{V}(\phi(x';t))}{\partial\phi(x;t)} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{V}(\phi(x;t))}{\partial\phi(x;t)} = n \phi^{n-1}(x;t) \end{aligned} \quad (ก1.12)$$

ซึ่งยังคงใช้ได้กับ $\mathfrak{V}(\phi(x;t))$ ที่เป็นพหุนาม (polynomial) ทั่วไปของ $\phi(x;t)$ ด้วย

ก2 หลักการแปรผันของกลศาสตร์จุด

สำหรับระบบกลศาสตร์จุด (point mechanics) ที่มี ตัวแปรพลวัตพื้นฐาน หรือเรียกว่า พิกัดทั่วไป (generalized coordinates) $q_i(t)$; $i = 1..n$ ให้ S เป็นแอคชัน (action) และ L เป็นลากรางเจียน (Lagrangian) ที่เป็นตัวกำหนดลักษณะของระบบนี้ เขียนทั้งสองในรูปฟังก์ชันนำดังนี้

$$S[q(t)] = \int dt' L[q(t')] = \int dt' L\left[q, \frac{d}{dt}[q]\right] \quad (ก2.1)$$

โดยที่มอง L อย่างทั่วไปว่าเป็นฟังก์ชันนำของ $q(t)$ ที่มีตัวแปรเสริม t โดยมีรูปร่างที่จะศึกษาดัง RHS

สาเหตุที่มองลากรางเจียนในรูปฟังก์ชันนัลเช่นนี้เพราะ

1. ต้องการให้คล้ายกับทฤษฎีสนาม เพราะในทฤษฎีสนามมีตัวแปรอวกาศที่ต่อเนื่อง ลากรางเจียนจึงเป็นฟังก์ชันนัลของตัวแปรพลวัตที่เป็นสนามของตัวแปรอวกาศด้วย

2. ในหลักการแปรผัน (variational principle) โดยพื้นฐานเป็นการแปรผันอันเนื่องมาจากการแปรผันรูปฟังก์ชัน $q_i(t)$ ที่ขึ้นกับเวลา ซึ่งเป็น แนววิถี (trajectory) ของระบบเท่านั้น จึงต้องการเขียนรูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันให้อยู่ในรูปการแปรผันของตัวแปรพลวัตพื้นฐานเท่านั้น

2.1 ในตำราเรียนปกติที่ไม่ได้ฟอร์มูเลท (formulate) หลักการแปรผันในรูปฟังก์ชันนัล เช่น Goldstein (1980: 37-38), Arnold (1989: 56-57) ใช้รูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันอันเนื่องมาจากการแปรผันของ $q(t)$ ที่มองลากรางเจียนในรูปสูตรนี้ว่าเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ q กับ $q \dot{\equiv} \frac{dq}{dt}$ (แม้ลากรางเจียนเป็นฟังก์ชันของ q กับ $q \dot{\equiv}$ อยู่แล้ว โดยขึ้นกับค่าของ q กับ $q \dot{\equiv}$ แต่เหตุที่ใช้คำว่า “มอง” ก็เพราะสามารถมองได้อีกแบบคือเป็นฟังก์ชันนัลโดยพิจารณาว่าขึ้นกับรูปฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาของ $q(t)$ และ $q \dot{\equiv}(t)$ ไม่ใช่การมองว่าขึ้นกับค่าของ q กับ $q \dot{\equiv}$ โดยตรงแบบเดียวกับกรณีที่มีมองเป็นฟังก์ชัน ดู (ก1.2)) แล้วใช้รูปสูตรผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) ของอนุพันธ์ธรรมดาเขียนในรูปการแปรผันของ q และ $q \dot{\equiv}$ แล้วค่อยใช้พจน์ใหม่ไคเวอร์เจนท์ (time divergent term) หรืออินทิเกรตแยกส่วนเขียนในรูปการแปรผันของ $q(t)$ อย่างเดียวในขั้นตอนต่อมา

2.2 ในตำราที่ฟอร์มูเลทหลักการแปรผันในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของแอกชันเทียบกับแนววิถี $q(t)$ เช่น Feynman และ Hibbs (1965: 26-27); Holdstein (1992: 10); Greiner (1996: 31-32); Kiselev, Shniv และ Tregubovich (2000: 5-6, 9-10), Svetitsky (2002: 6) ก็ใช้รูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันอันเนื่องมาจากการแปรผันของ $q(t)$ (หมายถึง การแปรผันฟังก์ชันนัล (functional variation) ดู (ก2.4) แต่เพื่อความสะดวกเรียกสั้นๆ ว่า การแปรผัน (variation)) ที่มองลากรางเจียนว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ $q(t)$ กับ $q \dot{\equiv}(t)$ กล่าวคือเป็นคอนละคอมโพเนนท์ (component) ของสิ่งอันดับ (ordered tuple) โดยถือสิ่งอันดับนี้เป็นบุพภาพของฟังก์ชันลากรางเจียน แล้วใช้สูตรอนุกรมเทเลอร์เขียนในรูปการแปรผันของ $q(t)$ กับ $q \dot{\equiv}(t)$ เฉพาะในอันดับที่ 1 แล้วค่อยใช้พจน์ใหม่ไคเวอร์เจนท์หรืออินทิเกรตแยกส่วน เขียนในรูปการแปรผันของ $q(t)$ อย่างเดียวในขั้นตอนต่อมา นั่นคือทำดังตัวอย่างนี้

$$\begin{aligned} \Delta S[q] &= S[q + \Delta q] - S[q] \\ &= \int dt \left[L(q + \Delta q, q \dot{\equiv} + \Delta q \dot{\equiv}) - S[q] \right] \\ &= \int dt \left\{ L(q, q \dot{\equiv}) + \Delta q \frac{\partial L(q, q \dot{\equiv})}{\partial q} + \Delta q \dot{\equiv} \frac{\partial L(q, q \dot{\equiv})}{\partial q \dot{\equiv}} \right\} - S[q] \\ &= \int dt \left\{ \Delta q \frac{\partial L(q, q \dot{\equiv})}{\partial q} + \Delta q \dot{\equiv} \frac{\partial L(q, q \dot{\equiv})}{\partial q \dot{\equiv}} \right\} \\ &= \int dt \left\{ \Delta q \frac{\partial L}{\partial q} - \Delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q \dot{\equiv}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\Delta q \frac{\partial L}{\partial q \dot{\equiv}} \right) \right\} \end{aligned}$$

ซึ่งแม้ $q(t)$ กับ $q(\dot{t})$ มีความสัมพันธ์กันโดยผ่านอนุพันธ์เวลาแต่เป็นตัวแปรอิสระของฟังก์ชันลากรางเจียนได้ก็เพราะทั้งสองสามารถเป็นคนละฟังก์ชันกัน

2.3 ในที่นี้ผู้เขียนต้องการเขียนรูปสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันใหม่ให้อยู่ในรูปการแปรผันของฟังก์ชัน $q(t)$ เท่านั้น ซึ่งทำได้ด้วยการมองอนุพันธ์เวลาของตัวแปรพลวัตพื้นฐานในรูปฟังก์ชันนัลของฟังก์ชัน $q(t)$ เขียนเป็น $\frac{d}{dt}[q]$

แม้ว่าอนุพันธ์เวลาของตัวแปรพลวัตพื้นฐานเป็นฟังก์ชันนัลของตัวแปรพลวัตพื้นฐานอยู่แล้วตาม (ก1.3) แต่เหตุที่ใช้คำว่า “มอง” ก็เพราะว่าแฟกเตอร์ (factor) รูป “ $q(\dot{t})$ ” สามารถมองได้เป็น 2 แบบ คือ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา กับ เป็นฟังก์ชันนัลที่ขึ้นกับฟังก์ชัน $q(t)$ กล่าวคือเป็นทั้ง 2 แบบที่เดียวกัน แต่เลือกมองมาใช้ต่างกัน ในข้อ 2.2 มองอย่างแรก ข้อ 2.3 มองอย่างหลัง แม้ทั้งสองให้ผลลัพธ์เหมือนกัน แต่ทำจากมุมมองที่ต่างกัน นั่นคือ

$$\text{ข้อ 2.2 : } \int dt' \{ \Delta q(\dot{t}') f(t') \} = \int dt' \left\{ -\Delta q(t') \dot{f}(t') + \frac{d}{dt'} (\Delta q(t') f(t')) \right\} \quad (\text{ก2.2})$$

$$\begin{aligned} \text{ข้อ 2.3 : } \int dt' \Delta \left(\frac{d}{dt'} [q] \right) f(t') &= \int dt' \int dt'' \Delta q(t'') \left\{ \frac{\delta}{\delta q(t'')} \left(\frac{d}{dt'} [q(t')] \right) f(t') \right\} \\ &= \int dt'' \Delta q(t'') \int dt' \left\{ \frac{\delta}{\delta q(t'')} \left(\frac{d}{dt'} [q(t')] \right) f(t') \right\} \\ &= \int dt'' \Delta q(t'') \int dt' \left\{ -\frac{\delta q(t')}{\delta q(t'')} \dot{f}(t') + \frac{d}{dt'} \left(\frac{\delta q(t')}{\delta q(t'')} f(t') \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{ก2.3})$$

จะเห็นว่าทั้งสองคล้ายคลึงกันมาก คือมี มโนทัศน์ (concept) เดียวกันตรงที่เป็นการแปรผันอันเนื่องมาจาก $q(t)$ เหมือนกันและให้ผลลัพธ์เดียวกัน สมการ (ก2.2) ได้อธิบายในข้อ 2.2 แล้ว พิจารณาสมการ (ก2.3) จะเห็นว่าในขั้นตอนแรกเมื่อมองอนุพันธ์เวลาว่าเป็นฟังก์ชันนัลก็สามารถเขียนการแปรผันของฟังก์ชันนัล $\frac{d}{dt}[q]$ ในรูปการแปรผันของ $q(t)$ โดยใช้ (ก1.6) (ซึ่งไม่ได้ทำเช่นนี้ใน (ก2.2) เพราะมองแค่เป็นฟังก์ชันของ t ไม่ได้มองเป็นฟังก์ชันนัลของ $q(t)$) เมื่อทำการเขียนดังนี้ทำให้สามารถเขียนสูตรแสดงการแปรผันของแอกชันใหม่ให้อยู่ในรูปการแปรผันของแนววิถีเท่านั้นตามต้องการ ด้วยการใช้อนุพันธ์ต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.6), (ก1.9) และเป็นจุดเริ่มที่ทำให้การคำนวณของ (ก2.3) ต่างออกไปจาก (ก2.2) เล็กน้อย ในขั้นตอนที่ 2 เป็นการจัดรูปให้ตรงกับพจน์ที่ 2 ของ (ก1.9) ขั้นตอนที่ 3 ต่อมายังคงต้องใช้พจน์ใหม่ไโดเวอร์เจนท์จัดรูปให้ได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange equation) เช่นเดียวกับ (ก2.2) แต่ก็เป็นการจัดรูปในส่วนที่เป็นอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของ $q(\dot{t})$ เทียบกับ $q(t)$ ซึ่งไม่ได้ติดอยู่ในรูปการแปรผันของ $q(\dot{t})$ อีกแล้ว เพราะได้เขียนการแปรผันของ $\frac{d}{dt}[q]$ อยู่ในรูปการแปรผันของ $q(t)$ ในขั้นตอนที่ 1 แล้ว นั่นคือแฟกเตอร์วงเล็บปีกกาที่แสดงถึงส่วนที่ใช้พจน์ใหม่ไโดเวอร์เจนท์จัดรูปของทั้งสองสมการมีความแตกต่างกันเล็กน้อยคือ (ก2.2) อยู่ในรูปการแปรผันของ $q(\dot{t})$

ส่วน (ก2.3) อยู่ในรูปอนุพันธ์ฟังก์ชันนัลของ $\frac{d}{dt}[q]$ เทียบกับ q คู่ต่อไปที่พจน์ที่ 2 และ 3 ของ (ก2.8)-(ก2.9)

พิจารณาการแปรผันของฟังก์ชัน $q_i(t)$ ดังนี้

$$q_i(t) \Rightarrow q_i(t) + \Delta'q_i(t) \quad (ก2.4)$$

ซึ่งเป็นการแปรผัน แนววิถี โดยฟังก์ชันแนววิถีที่ถูกแปรผันไปต้องต่อเนื่อง (ในเวลา) จนถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง (Byron and Fuller, 1992: 45-47) จากลากรางเจียนรูป (ก2.1) และแนวเข้าสู่การศึกษา (approach) ในข้อ 2.3 ข้างต้น เขียนสูตรแสดงการแปรผันของเอกซันอันเนื่องมาจากการแปรผันข้างต้นตามรูปผลต่างเชิงอนุพันธ์ฟังก์ชันนัล (ก1.6) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta S[q(t)] &= \int dt' \sum_i \Delta q_i(t') \frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t')} \\ &= \int dt' \sum_i \Delta q_i(t') \int dt'' \frac{\delta L\left[q, \frac{d}{dt}[q]\right]}{\delta q_i(t')} (t'') \frac{\delta S[L]}{\delta L(t'')} \\ &= \int dt' \sum_i \Delta q_i(t') \int dt'' \frac{\delta L\left[q, \frac{d}{dt}[q]\right]}{\delta q_i(t')} (t'') \end{aligned} \quad (ก2.5)$$

โดยที่ $\Delta q_i(t)$ หมายถึง การแปรผันฟังก์ชันนัล ของ $q_i(t)$

$$\Delta q_i(t') = \Delta'q_i(t) \delta(t - t') \quad (ก2.6)$$

ซึ่งต่างจาก (ก1.5) ตรงที่ให้ $\varepsilon_i(t) = \Delta'q_i(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t ด้วย, จึงไม่ใช่ผลต่างเชิงอนุพันธ์ธรรมดาเนื่องเพราะมีมีโนทัศน์ของการแปรผันฟังก์ชัน (ก2.4) เข้าไปด้วย และ

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[q + \Delta'q_i(t) \delta(t - t')] - S[q]}{\Delta'q_i(t)} \quad (ก2.7)$$

สำหรับขั้นตอนที่ 3 ใน (ก2.5) ได้มาโดยใช้ขั้นตอนแรกของ (ก1.12)

พิจารณาขั้นตอนที่ 3 นี้ต่อไปโดยใช้ (ก1.9) และเมื่อกำหนดลากรางเจียนให้มีรูปขึ้นกับ q และ $\frac{d}{dt}[q]$ แบบพหุนาม ซึ่งเขียนในรูปฟังก์ชันได้เป็น $L\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$ ก็สามารถใช้ (ก1.12) ต่อไปอีกดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\delta L\left[q, \frac{d}{dt}[q]\right]}{\delta q_i(t')} (t'') &= \frac{\delta L\left[q, \frac{dq}{dt}\right]}{\delta q_i(t')} (t'') + \int dt''' \frac{d}{dt''} \left(\frac{\delta q_j(t''')}{\delta q_i(t')} \right) \frac{\delta L\left[q, \frac{dq}{dt}\right]}{\delta (dq_j/dt''')} (t'') \\ &= \delta(t' - t'') \frac{\partial L\left(q, \frac{dq}{dt}\right)}{\partial q_i(t')} (t') + \frac{d}{dt''} \left(\frac{\delta q_j(t''')}{\delta q_i(t')} \right) \frac{\partial L\left(q, \frac{dq}{dt}\right)}{\partial (dq_j/dt''')} (t'') \end{aligned} \quad (ก2.8)$$

ซึ่งอินทิเกรตโดยแยกส่วนแล้วได้ว่า

$$\int dt'' \frac{\delta L \left[q, \frac{d}{dt} [q] \right]}{\delta q_i(t'')} (t'') = \frac{\partial L \left(q, \frac{dq}{dt} \right)}{\partial q_i} (t') - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L \left(q, \frac{dq}{dt} \right)}{\partial (dq_i/dt')} \right) + \left(\frac{\delta q_j(t'')}{\delta q_i(t')} \frac{\partial L \left(q, \frac{dq}{dt} \right)}{\partial (dq_j/dt'')} \right)_{t''=B.P.} \quad (ก2.9)$$

โดยที่จุดขอบเขตของตัวแปร t'' ถูกกำหนดโดยค่าขอบเขตของอินทิกรัลแยกชั้น (ก2.5) พจน์ที่ 3 หายไปถ้ามีการกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้นำให้แก่วิธีการแปรผัน กล่าวคือ

- (1) พิจารณาแต่การแปรผันฟังก์ชัน $q_i(t')$ บน t' ที่อยู่ระหว่าง B.P. เท่านั้น กล่าวคือ $\Delta q_i(t' = B.P.) = 0$ (ทำให้ใน (ก2.5) ไม่มี contribution จากอนุพันธ์ฟังก์ชันที่เทียบกับ $q_i(t' = B.P.)$ เลย เพราะฉะนั้นจึงไม่พิจารณา $t' = B.P.$ ใน (ก2.9) ตั้งแต่แรก) **หรือ**
- (2) ศึกษาแต่ผลเฉลย $q_i(t)$ ที่อยู่ระหว่าง B.P. (คือไม่ได้อยู่ที่ B.P.) **หรือ**
- (3) $q_i(t)$ ที่ B.P. ถูกกำหนดให้เป็นศูนย์

ถ้าเงื่อนไขทั้งสามอย่างใดอย่างหนึ่งจริงก็เพียงพอให้พจน์ที่ 3 เป็นศูนย์ แต่เนื่องจากระบบนี้มีพารามิเตอร์เป็นเวลาจึงมักเขียนผลเฉลยในรูปของเงื่อนไขเริ่มต้น (IC: initial conditions) ดังนั้นจึงมักไม่ศึกษากรณีนี้ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขข้อ (3) ซึ่งเป็นการกำหนดค่าจุดปลายไว้ก่อนแล้ว

สรุปว่าสามารถเขียนการแปรผันของแยกชั้นในรูป

$$\Delta S[q(t)] = \int dt' \sum_i \Delta q_i(t') \left\{ \frac{\partial L \left(q, \frac{dq}{dt} \right)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L \left(q, \frac{dq}{dt} \right)}{\partial (dq_i/dt')} \right) \right\} \quad (ก2.10)$$

หลักการแปรผัน กล่าวว่า แนววิถีฟิสิกส์ (physical trajectory) $q(t)$ คือ แนววิถี ที่เมื่อทำการแปรผันใด ๆ ใดรอบๆ แนววิถีนี้แล้ว แต่การแปรผันของแยกชั้นที่สมนัย (correspond) กันมีค่าเท่ากับ 0 จากสมการข้างต้นจะเห็นว่าถ้าเลือกรูปฟังก์ชันของผลเฉลยที่ทำให้แฟกเตอร์ในวงเล็บปีกกาเท่ากับ 0 แล้ว ไม่ว่าจะแปรผัน $\Delta q_i(t)$ ไปรอบๆ ใดๆ ก็จะได้การแปรผันของแยกชั้นเป็น 0 เสมอ ดังนั้นแนววิถีนี้ก็คือ แนววิถีฟิสิกส์ โดยมีแฟกเตอร์ในวงเล็บปีกกาที่เท่ากับ 0 เป็นสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งในรูปทั่วไปนี้เรียกว่า สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

ภาคผนวก ข เกี่ยวกับอนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน

จะพิจารณาหัวข้อนี้โดยสังเขปและไม่เคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ (ถ้าเคร่งครัดเชิงคณิตศาสตร์ต้องใช้คณิตศาสตร์เกี่ยวกับ ดิสทริบิวชัน (distribution) ดู Heinzl (2000: 29-30)) ในพิกัดกรวยแสง นิยามอนุพันธ์อวกาศตามยาวผกผัน (inverse longitudinal space derivative) ดังนี้

$$\frac{1}{i\partial^+} \chi(x^+, x_\perp^\mp, x^-) \equiv \frac{1}{i} \int dy^- G(x^-, y^-) \chi(x^+, x_\perp^\mp, y^-) \quad (ข.1)$$

$$\partial^+ G(x^-, y^-) = \delta(x^- - y^-)$$

จะเห็นว่าการกำหนดรูปที่แน่นอนของ G ขึ้นกับการบวกผลเฉลยเอกพันธ์ (homogeneous solution) ของสมการ

$$\partial^+ h(x^-, y^-) = 0 \quad (ข.2)$$

ซึ่งมีผลเฉลยที่แน่นอนอย่างไรขึ้นกับ BC ของ G บนตัวแปรอวกาศตามยาว (longitudinal space) x^- ซึ่งถูกกำหนดโดย ผิวขอบเขต (B.S.: boundary surface) ของสนาม χ บน x^- ในนิยาม (ข.1) และความสัมพันธ์ในตัว (consistency) อื่นๆ กับสมิทธิเงื่อนไขโพรมูเลชันและการควอนไทซ์ของระบบสนามที่กำหนด $\chi(x)$ (Heinzl, 1994: 526-527; Heinzl, 1998: 49-50; Heinzl, 2000: 29) พิจารณาบางสมบัติของ G ดังต่อไปนี้

1. จาก (ข.1) เห็นว่า

$$\begin{aligned} \delta(x^- - y^-) &= 2 \frac{\partial}{\partial x^-} (x^- - y^-) \frac{\partial G(x^-, y^-)}{\partial (x^- - y^-)} = 2 \frac{\partial G(x^- - y^-)}{\partial (x^- - y^-)} \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial y^-} (x^- - y^-) \frac{\partial G(x^-, y^-)}{\partial (x^- - y^-)} = -2 \frac{\partial G(x^-, y^-)}{\partial y^-} \end{aligned} \quad (ข.3)$$

ซึ่งในขั้นตอนสุดท้ายถ้าสลับ $x^- \leftrightarrow y^-$ จะได้

$$2 \frac{\partial (-G(y^-, x^-))}{\partial x^-} = \delta(x^- - y^-)$$

นั่นคือสามารถกำหนด BC แก่ G โดยไม่เกิดความขัดแย้งอันหนึ่งว่า เป็นปฏิสมมาตรที่ B.S.:

$x^-, y^- \rightarrow \pm\infty$ (Heinzl, 2000: 29) ก็จะได้ผลเฉลยในรูป

$$G(x^-, y^-) = \frac{1}{4} \text{sgn}(x^- - y^-) = -G(y^-, x^-) \quad (ข.4)$$

ซึ่งเป็นรูปมาตรฐานของ G

2. จะเห็นจาก (ข.3) ว่า

$$G(x^-, y^-) = G(x^- - y^-) \quad (1.5)$$

ดังนั้นจึงพิจารณาผลการแปลงฟูรีเยร์ (Fourier transform) ของ G เป็น

$$G(x^-, y^-) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp^+ e^{\mu \frac{1}{2} p^+ (x^- - y^-)} G(p^+) \quad (1.6)$$

แทนลงในสมการที่ 2 ของ (1.1) ก็จะได้สมการดังกล่าวในปริภูมิฟูรีเยร์ว่า

$$\mu i p^+ G_{\pm}(p^+) = 1 \quad \hat{\Delta} \hat{\Delta} \hat{\Delta} G_{\pm}(p^+) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d(x^- - y^-) e^{\pm \frac{1}{2} p^+ (x^- - y^-)} G(x^-, y^-) \quad (1.7)$$

ซึ่งมีผลเฉลยว่า

$$G_{\pm}(p^+) = \mu i P\left(\frac{1}{p^+}\right) + h(p^-) \delta(p^+) \quad (1.8)$$

ถ้ากำหนด BC มาตรฐานตามที่กำหนดใน (1.4) พจน์ที่ 2 จะหายไป ภายใต้ BC มาตรฐานดังกล่าวโดยใช้นิยาม (1.1) และผลเฉลย (1.8) ก็จะได้เอกลักษณ์ว่า

$$\frac{1}{i\partial^+} e^{\mu \frac{i}{2} p^+ x^-} = P\left(\pm \frac{1}{p^+}\right) e^{\mu \frac{i}{2} p^+ x^-} \quad (1.9)$$

3. เมื่อใช้เฉพาะ G ที่มีสมบัติปฏิสมมาตร โดยใช้นิยาม (1.1) ก็จะได้เอกลักษณ์ว่า

$$\begin{aligned} F[\xi^t, \chi] &= \frac{1}{2} \int dx'^- d^2 x'_{\perp} \xi^t(x^+, x^{\bar{\omega}}) \frac{1}{i\partial'^+} \chi(x^+, x^{\bar{\omega}}) \\ &= -\frac{1}{2} \int dx'^- d^2 x'_{\perp} \left(\frac{1}{i\partial'^+} \xi^t(x^+, x^{\bar{\omega}}_{\perp}, x'^-) \right) \chi(x^+, x'^-, x^{\bar{\omega}}_{\perp}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

ผลเฉลยสมการดิแรกกรวยแสงในปริภูมิโมเมนตัม

ค1 วิเคราะห์ปัญหา

จากความเป็นสมการเชิงเส้นของสมการดิแรกกรวยแสง (3.1.5) จึงสามารถหาผลเฉลยในแต่ละฐานนิยมฟูเรียร์ (Fourier mode) หรือปริภูมิโมเมนตัม p ได้ โดยที่ผลเฉลย $\psi(x)$ ก็คือผลการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) ของผลเฉลยในแต่ละฐานนิยมดังกล่าว ในต้นตอนที่ 3.2 จะเห็นว่าคอมโพเนนต์ (components) ของ ψ ในสมการนี้ไม่ใช่ตัวแปรพลวัตอิสระที่แท้จริงใน FF ดังนั้นผลเฉลยในรูปแบบตัวแทนโมเมนตัม (momentum representation) ข้างต้นเป็นเพียงเอกลักษณ์คณิตศาสตร์ที่ไม่สามารถเขียนสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ให้อยู่ในรูป IC กับ BC ของ FF ดังที่ผลเฉลยอิสระปกติทำได้ แต่ไม่เป็นปัญหาเพราะสำหรับกรณีอนุภาคอิสระ สามารถได้ตัวแปรพลวัตอิสระ ψ_+ โดยง่ายจากการฉาย (projection) ลงบนคอมโพเนนต์- (+) ((+)-component)

พิจารณาโครงสร้างของสมการดิแรกกรวยแสง แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยในแต่ละฐานนิยมฟูเรียร์ p มีลักษณะสำคัญดังนี้

1. เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้นจึงสามารถแยกพิจารณาในแต่ละฐานนิยม โดยเขียนเป็น $e^{-ip \cdot x} u'(p) b(p)$
2. เนื่องจากเป็นสมการเมทริกซ์ 4×1 เพราะฉะนั้น $u'(p)$ เป็นเมทริกซ์แนวตั้ง (column matrix) 4×1

จากข้อ 1. ได้สมการดิแรกกรวยแสงสำหรับแต่ละฐานนิยม คือ

$$0 = (\gamma \cdot \hat{p} - m) e^{-ip \cdot x} u'(p) = e^{-ip \cdot x} (\gamma \cdot p - m) u'(p) \quad (\text{ค1.1})$$

ซึ่งเป็นสมการเมทริกซ์ตามลักษณะข้อ 2. จะหาผลเฉลย $u'(p)$ ที่สอดคล้องกับสมการนี้ เมื่อคูณด้วย $(\gamma \cdot p + m)$ จะเห็นว่าการเท่ากับ 0 ของสมการนี้ต้องมี p ที่สัมพันธ์ตามเอกลักษณ์แมสเชลล์ (mass-shell identity)

$$p^2 - m^2 = 0 \quad (\text{ค1.2})$$

ใน FF เมื่อเราเลือกเวลาเป็น x^+ ทำให้พิคตของอวกาศเป็น $x^\mu = (x^-, x^i)$ ซึ่งโดยเมตริกกรวยแสง (light-cone metric) (2.3.4) ทำให้ 3-โมเมนตัม (3-momentum) ที่สังยุคกับอวกาศนี้เป็น $p^+ \leftrightarrow x^-, p^i \leftrightarrow x^i$ (สังยุคกันโดย P.B. (Poisson brackets) ของ กลศาสตร์จุด FF ดู Heinzl (1998: 27, 35)) นั่นคือใน FF มี 3-โมเมนตัม $p^\mu = (p^+, p^i)$ และพลังงาน p^- ซึ่งจาก (ค1.2) อยู่ในรูป

$$p^-(\vec{p}, m) = \frac{p_\perp^2 + m^2}{p^+} \quad (\text{ค1.3})$$

ต่อไปเขียน 4-โมเมนตัมแมสเชลล์ (mass-shell 4-momentum) ว่า $p_m \equiv (p^-(\vec{p}; m), p^+, p^i)$ จาก การที่ $u'(p)$ ใน (ค1.1) มี p ที่สอดคล้องกับ (ค1.2) และ (ค1.3) ทำให้สิ่งที่ต้องการหาออกมาคือรูป ฟังก์ชันของ u ที่ขึ้นกับ p^μ ไม่ใช่ p

$$u(p^\mu) \equiv u'(p_m) \quad (\text{ค1.4})$$

ค2 หาผลเฉลย $u(p^\mu)$

โดยใช้ตัวแทนมาตรฐาน (standard representation) ของเมทริกซ์ดิแรกคาร์ทีเซียน (Cartesian Dirac matrices) (Bjorken and Drell, 1965: 378)

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, & \gamma^i &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^5 &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, & \Lambda_\pm &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \pm \sigma^3 \\ \pm \sigma^3 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ค2.1})$$

สามารถแสดงได้ว่าสถานะลักษณะเฉพาะ (eigenstates) ของ Λ_+ ซึ่งสลับที่ได้อีกกับ γ^5 เป็น

$$\begin{aligned} \Lambda_+ X_\lambda &= X_\lambda, & \gamma^5 X_\lambda &= \lambda X_\lambda \quad \lambda, \lambda' = 1, -1 \\ X_\lambda^\dagger X_{\lambda'} &= \delta_{\lambda, \lambda'} & \sum_\lambda X_\lambda X_\lambda^\dagger &= \Lambda_+ \end{aligned} \quad (\text{ค2.2})$$

โดยที่

$$X_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \chi_\lambda \\ \lambda \chi_\lambda \end{bmatrix} \quad \chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \chi_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และได้ว่า

$$p^i \gamma^i \chi_\lambda = \lambda p_\perp X_{-\lambda} \quad p_\perp \equiv p^1 + i p^2 \quad (\text{ค2.3})$$

พิจารณาหา $U_\pm(p^\mu)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (ค1.1) โดยเพิ่มการพิจารณากรณีที สัมประสิทธิ์หน้ามวลเป็นบวกด้วย

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2} \gamma^+ p^- + \frac{1}{2} \gamma^- p^+ - \gamma^i p^i \mu m \right) U_\pm(p^\mu) \\ &= \gamma^0 (\Lambda_+ p^- + \Lambda_- p^+ + (\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0) U_\pm(p^\mu) \end{aligned} \quad (\text{ค2.4})$$

ผู้เขียนขอเสนอเทคนิคในการใช้ Λ_\pm (3.1.6) บอก “ใบ้ (hint)” ผลเฉลยออกมา โดยไม่ใช่วิธีเคร่งแข็ง คณิตศาสตร์ ในเอกสารที่เขียนเกี่ยวกับการแสดงผลเฉลย $u(p^\mu)$ อย่างละเอียดเท่าที่ทำได้ (Kogut and

Soper, 1970; Lepage and Brodsky, 1980; Brodsky, Pauli and Pinsky, 1997: 170-175; Heinzl, 1998: 153-155; Srivastava, 1999) มักยกมาอ้างเฉยๆ โดยไม่ได้แสดงวิธีหาอย่างเป็นระบบ (systematic) ในขณะที่สปินเนอร์นี้ใน IF มีตำราที่กล่าวถึงวิธีหาผลเฉลยทั่วไปอย่างเป็นระบบอยู่ทั่วไป เช่น Peskin และ Schroeder (1995: 45-49)

ก่อนอื่นเขียนเมทริกซ์แกมมาใน (ค2.4) ในรูป Λ_{\pm} (ได้แสดงแล้วในขั้นตอนที่สองข้างต้น) แล้วหาว่าแฟกเตอร์ $U_{\pm}(p^{\omega})$ ใดในรูปของ Λ_{\pm} ที่ทำให้ผลคูณตัวดำเนินการใน (ค2.4) เป็น 0 ในการสร้าง $U_{\pm}(p^{\omega})$ ในรูป Λ_{\pm} ให้แนวคิดจากการสังเกต (ค2.2) ว่า มีสปินเนอร์ชนิดหนึ่งคือ X_{λ} ที่คูณกับ Λ_{+} แล้วได้ตัวเดิม จะเห็นว่าสปินเนอร์ 2 ตัวนี้เป็นสถานะลักษณะเฉพาะ (eigenstates) ของ γ^5 ซึ่งเรียกว่า สถานะลักษณะเฉพาะไครัล (chiral eigenstates) ซึ่งรวมเป็นฐานหลักอิสระ (independent basis) ชนิดหนึ่งของ ปริภูมิสถานะสปิน (spin-state space) ดู Peskin และ Schroeder (1995: หน้า 41, 43, 45-47, 50 ประกอบกัน) จึงสามารถเลือกฐานหลักไครัลนี้ให้แสดงส่วนสปินของสปินเนอร์ $U_{\pm}(p^{\omega})$ ได้ โดยเขียนดังนี้

$$U_{\pm}(p^{\omega}, \lambda) = F_{\pm}(p^{\omega})X_{\lambda} = F_{\pm}(p^{\omega})\Lambda_{+}X_{\lambda} \quad (ค2.5)$$

จะเห็นว่าในรูป RHS นั้นก็เริ่มมีแฟกเตอร์ Λ_{+} ปรากฏใน $U_{\pm}(p^{\omega})$ ตามต้องการ ต้องการหาส่วน $F_{\pm}(p^{\omega})$ ต่อไป ในรูป Λ_{\pm} เมื่อแทน (ค2.5) ใน (ค2.4) ก็ได้เงื่อนไขดังนี้

$$\{\Lambda_{+}p^{-} + \Lambda_{-}p^{+} + (\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\} F_{\pm}(p^{\omega}) \Lambda_{\pm} = 0 = (p^{-} p^{+} - p_{\perp}^2 - m^2) \Lambda_{+} \quad (ค2.6)$$

จากที่ส่วน p ใน (ค2.6) สัมพันธ์ตามเอกลักษณ์แมสส์เชลล์ กล่าวคือ การเท่ากับ 0 ของ (ค2.6) เกี่ยวข้องกับเอกลักษณ์แมสส์เชลล์จึงนำวิธีการหาผลเฉลย F ด้วยการพยายามสร้าง LHS ของ (ค2.6) ขึ้นมาจากเอกลักษณ์แมสส์เชลล์ทาง RHS แล้วพยายามใช้เทคนิค Λ_{\pm} แยกแฟกเตอร์

$\{\Lambda_{+}p^{-} + \Lambda_{-}p^{+} + (\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\}$ ออกมา จะได้ที่เหลือเป็น F ตามต้องการ

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (p^{-} p^{+} - p_{\perp}^2 - m^2) \Lambda_{+} \\ &= \{\Lambda_{+}p^{-}\} \bullet p^{+} \Lambda_{+} + \{(\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\} \bullet \gamma^0 (\gamma^j p^j \pm m) \Lambda_{+} \\ &= \{\Lambda_{+}p^{-}\} \bullet p^{+} \Lambda_{+} + \{\Lambda_{-}p^{+}\} \bullet \gamma^0 (\gamma^j p^j \pm m) \Lambda_{+} + \{(\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\} \bullet p^{+} \Lambda_{+} \\ &\quad + \{(\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\} \bullet \gamma^0 (\gamma^j p^j \pm m) \Lambda_{+} \\ &= \{\Lambda_{+}p^{-} + \Lambda_{-}p^{+} + (\gamma^i p^i \mu m) \gamma^0\} \bullet (p^{+} + \gamma^0 (\gamma^j p^j \mu m)) \Lambda_{+} \end{aligned} \quad (ค2.7)$$

โดยที่แฟกเตอร์ในวงเล็บปีกกาทั้งหมดข้างต้นเป็นส่วนของแฟกเตอร์ที่ต้องการแยกออกมา ในขั้นตอนที่ 3 สองพจน์กลางได้จากแทรก (insert) บางเอกลักษณ์เข้าไป และได้ F ที่ต้องการในขั้นตอนนี้สุดท้าย

ให้ $u(p^{\omega}, \lambda)$ และ $v(p^{\omega}, \lambda)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$0 = \pm (\gamma \cdot p \pm m) \begin{Bmatrix} u(p^{\omega}, \lambda) \\ v(p^{\omega}, \lambda) \end{Bmatrix} \quad (ค2.8)$$

เลือกนอร์มัลไลซ์ (normalize) ผลเฉลยนี้ที่ได้แก่จาก (ค2.7) แล้วด้วย $1/\sqrt{p^+}$ โดยเขียนเป็นที่เข้าใจว่า $p^+ = |p^+|$ ดูเหตุผลในข้อ ข. ทำยตอนทที่ 3.3 และทำยตอนทที่ ค3 ดังนั้นเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{p^+}} U_{\pm} (p^{\overline{\square}}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^+}} (\Lambda_+ p^+ + \Lambda_- \gamma^0 (\gamma^i p^i \pm m)) X_{\pm \lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^+}} (p^+ + \alpha^i p^i \pm \gamma^0 m) X_{\pm \lambda} \end{aligned} \quad (\text{ค2.9})$$

ผลเฉลยในรูปนี้เขียนขึ้นครั้งแรกโดย Lepage และ Brodsky (1980) เนื่องจากตัวแปรพลวัตอิสระมีเพียง คอมโพเนนท์-(+) เท่านั้น (ดูที่ข้อ ก. และ ข. ต้นตอนทที่ 3.2) ดังนั้นจึงพิจารณาแต่สมบัติของ u_+, v_+ เป็นหลัก

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) &= \sqrt{p^+} X_{\pm \lambda} = \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (p^+, \lambda) \\ \begin{Bmatrix} u_- \\ v_- \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{p^+}} (\alpha^i p^i \pm \gamma^0 m) X_{\pm \lambda} \end{aligned} \quad (\text{ค2.10})$$

พิจารณาผลคูณต่างๆ ของ คอมโพเนนท์-(+) ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณปริมาณทางฟิสิกส์ในตัวแทนปริภูมิโมเมนตัมของทฤษฎีสนาม ดังต่อไปนี้ โดยใช้ (ค2.2) และ (ค2.3) ได้เอกลักษณ์ต่อไปนี้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} \delta_{\lambda, \lambda'} \\ \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) \begin{Bmatrix} v_+ \\ u_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} \delta_{\lambda, -\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{ค2.11})$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) \gamma^5 \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} (\pm \lambda \tilde{\epsilon} \times \hat{\mu} \lambda') \delta_{\pm \lambda, \pm \lambda'} \\ \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) \gamma^5 \begin{Bmatrix} v_+ \\ u_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} (\pm \lambda \tilde{\epsilon} \times \hat{\mu} \lambda') \delta_{\pm \lambda, \mu \lambda'} \end{aligned} \quad (\text{ค2.12})$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) k^i \gamma^i \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} (\mu \lambda k_{\mu \lambda} \tilde{\epsilon} \times \hat{\mu} \lambda' k_{\pm \lambda'}) \delta_{\pm \lambda, \mu \lambda'} \\ \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) k^i \gamma^i \begin{Bmatrix} v_+ \\ u_+ \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda') &= \sqrt{p^+ k^+} (\mu \lambda k_{\mu \lambda} \tilde{\epsilon} \times \hat{\mu} \lambda' k_{\mu \lambda'}) \delta_{\pm \lambda, \pm \lambda'} \end{aligned} \quad (\text{ค2.13})$$

และ ความสัมพันธ์บริบูรณ์ (completeness relation)

$$\sum_{\lambda} \begin{Bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{Bmatrix} (p^{\overline{\square}}, \lambda) \begin{Bmatrix} u_+^t \\ v_+^t \end{Bmatrix} (k^{\overline{\square}}, \lambda) = \sqrt{p^+ k^+} \Lambda_+ \quad (\text{ค2.14})$$

ค3 ตัวแทนปริภูมิโมเมนตัมของผลเฉลยสมการดิแรกกรวยแสง

จากข้อ 1. และ 2. ในขั้นตอนที่ ค1 กลับมาพิจารณา $\psi(x)$ ในสมการดิแรกกรวยแสงที่เป็นการรวมทุกฐานนิยมฟูเรียร์เข้าด้วยกัน โดยโมเมนตัมต้องสอดคล้องกับเอกลักษณ์แมสส์เชลล์ และ $u(p, \lambda)$ ต้องสอดคล้องกับ (ค2.8) ซึ่งก็คือ (ค2.9) และรวมทุก λ ที่เป็นไปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \psi(x) = (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \sum_{\lambda} e^{-ip \cdot x} u'(p, \lambda) b(p, \lambda) \\ &= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int \frac{d^2 p_{\perp} d p^+}{2(2\pi)^3} \int d p^- \delta(p^+ p^- - p_{\perp}^2 - m^2) \sum_{\lambda} e^{-ip \cdot x} u'(p, \lambda) b(p, \lambda) \end{aligned} \quad (\text{ค3.1})$$

ในขั้นตอนที่ 2 เลือกอินทิเกรตตัวแปร p^- ที่ซึ่งเพราะต้องการเขียนสมการในรูปสัมประสิทธิ์ $b(p, \lambda)$ ที่อยู่บนผิวเวลาเท่า (equal-time surface) เพราะ IC และ BC อยู่บนผิวเกิน (hypersurface) นี้

จากสัญพจน์พื้นฐานของ QFT ที่ว่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการ 4-โมเมนตัม (4-momentum) $P^{\mu} [\psi, \bar{\psi}]$ ซึ่งนิยามจากกระแสโนเอเธอร์ของการเลื่อนขนาน (translation Noether currents) (3.2.8) ต้องอยู่บนหรือภายใน กรวยแสงข้างหน้า (forward light-cone) เท่านั้น (Streater and Wightman, 1980: 29; Heinzl, 2000: 42) ซึ่งเป็นหลักสัมพัทธภาพที่ว่าไม่มีความเร็วใดมากกว่าแสงและเป็นหลักเหตุภาพสัมพัทธภาพ (relativistic causality) (ดูข้อ ข ขั้นตอนที่ 2.1) จึงเป็นลักษณะสเปกตรัมของปริมาณโมเมนตัมของ อนุภาคฟิสิกส์ (physical particles) หรือ ควอนตาฟิสิกส์ (physical quanta) กรณีระบบบิอิสระนี้สเปกตรัมดังกล่าวก็คือค่า 4-โมเมนตัม p^{μ} ของการกระจายใน (ค3.1) ซึ่งควอนตาฟิสิกส์ต้องมีค่าเป็น $p^2 = m^2 \geq 0$ และ $p^0 \geq 0$ เท่านั้น เป็นผลให้แสดงได้ว่ามี $p^+ \geq 0$ ด้วย ทำให้สำหรับระบบ FF-QFT พิจารณาแต่ควอนตาที่มีการกระจายอยู่ในปริภูมิโมเมนตัมเช่นนี้เท่านั้น ทำให้ต้องพิจารณาตัวแปรพลวัตพื้นฐาน b ใน (ค3.1) (ที่จะเป็น ตัวดำเนินการแลดเดอร์ (ladder operators) ใน QFT ในการสร้างหรือทำลายควอนตา) ให้มีพารามิเตอร์เป็น $0 \leq p^+ < \infty$ ได้เท่านั้น จึงต้องแยกพิจารณาการกระจายตัวแปร p^+ ใน (ค3.1) เป็น 2 พจน์โดยใช้

$$\int_{-\infty}^{\infty} d p^+ = \int_0^{\infty} d p^+ + \int_{-\infty}^0 d p^+ = \mathbf{I} + \mathbf{II} \quad \text{สำหรับพจน์ } \mathbf{I} \text{ มี } p^+ \text{ สอดคล้องอยู่แล้วพิจารณาดังนี้}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d p^+ \frac{1}{|p^+|} \sum_{\lambda} e^{-ip_m \cdot x} u'(p_m, \vec{p}, \lambda) b(p_m, \lambda) \\ &= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int_0^{\infty} d p^+ \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda} e^{-ip_m \cdot x} u(p, \lambda) b(p, \lambda) \end{aligned}$$

(ค3.2)

ในขั้นตอนสุดท้ายเปลี่ยนตัวลำดับ (label) จาก p_m เป็น p^w สำหรับพจน์ Π ยังมี p^+ ไม่สอดคล้องพิจารณาโดยเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

$$\begin{aligned}
\Pi &= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 dp^+ \frac{1}{|p^+|} \sum_\lambda e^{-ip_m \cdot x} u'(p_m^-, \bar{p}^w, \lambda) b(p_m, \lambda) \\
&= \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 dp^+ \frac{1}{|p^+|} \sum_\lambda e^{-ip_m \cdot x} (\gamma \cdot p_m - m) u'(p_m^-, \bar{p}^w, \lambda) b(p_m, \lambda) \\
&= \int \frac{d^2(-p_\perp)}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d(-p^+)}{(-p^+)} \sum_\lambda e^{i(-p_m) \cdot x} (-\gamma \cdot (-p_m) - m) u'(-(-p_m^-), -(-\bar{p}^w), \lambda) b(-(-p_m), \lambda) \\
&= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda e^{ip_m \cdot x} \{(-\gamma \cdot p_m - m) u'(-p_m^-, -\bar{p}^w, \lambda)\} b(-p_m, \lambda) \\
&= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda e^{ip_m \cdot x} \{-(\gamma \cdot p_m + m) v(\bar{p}^w, \lambda)\} b(-\bar{p}^w, -\lambda) \\
&= (\gamma \cdot \hat{p} - m) \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda e^{ip_m \cdot x} v(\bar{p}^w, \lambda) d^\dagger(\bar{p}^w, \lambda)
\end{aligned} \tag{ค3.3}$$

ในขั้นตอนที่ 4-5 จะเห็นว่าผลเฉลยทั่วไปที่สุดที่ทำให้แฟกเตอร์ (factor) ในวงเล็บปีกกาเท่ากับ 0 อาจไม่ได้มีแค่ $u'(-p_m^-, -\bar{p}^w, \lambda)$ เท่านั้น จึงแทนที่ด้วยผลเฉลยทั่วไปที่สุดของ (ค2.8) เลยคือ $v(\bar{p}^w, \lambda)$ ซึ่งยังคงสอดคล้องกับ LHS สุดของสมการ (ค3.1) ที่ต้องเท่ากับ 0 ในขั้นตอนสุดท้ายได้เปลี่ยนตัวลำดับจาก p_m เป็น p^w และได้นิยามว่า

$$d^\dagger(\bar{p}^w, \lambda) \equiv b(-\bar{p}^w, -\lambda) \quad \text{à } p^+ > 0 \tag{ค3.4}$$

นั่นคือ เมื่อ $b(-\bar{p}^w, -\lambda)$ ที่มีความหมายเป็นตัวทำลายอนุภาคที่มีโมเมนตัมตามยาว (longitudinal momentum) น้อยกว่าศูนย์เป็นไปไม่ได้ จึงต้องมองใหม่ให้เป็นตัวสร้างปฏิอนุภาค $d^\dagger(\bar{p}^w, \lambda)$ ที่มี $p^+ > 0$ แทน โดยที่ d, d^\dagger เป็นตัวดำเนินการแลตเตอร์ของปฏิอนุภาค ซึ่งเป็นควอนตัมที่มีความถี่ลบ (negative frequency) ใน QFT ตามแฟกเตอร์เอกโพเนนเชียลใน (ค3.3)

สำหรับ (ค3.1) กรณี $p^+ = 0$ นั้น ตัวแปรพลวัตพื้นฐานในปริภูมิโมเมนตัมที่มีค่าโมเมนตัมตามยาวเป็นศูนย์นี้เรียกว่า ฐานนิยมศูนย์ (zero mode) พบว่าใน FF ตัวแปรพลวัตพื้นฐานนี้เป็นเงื่อนไขบังคับที่ไม่มีพลวัต (ในลักษณะ สนามช่วย (auxiliary field) ดูข้อ ก. ต้นตอนที่ 3.2) ซึ่งในกรณีระบบอิสระ การที่มี $p^+ = 0$ ทำให้ตัวแปรพลวัตพื้นฐานนี้ไม่ขึ้นกับเวลากว้าง และพบว่ามีค่าเท่ากับ 0 หรือกล่าวได้ว่าไม่มี ตัวแปรพลวัตพื้นฐานในปริภูมิโมเมนตัม ชนิดนี้ ซึ่งถ้าสมมุติว่ามี โดย (ค1.3) ทำให้มีความถี่นิยามค่าพลังงาน p^- ไม่ได้โดยมีค่าเป็นอนันต์ไม่ว่าจะมีมวลหรือโมเมนตัมตามขวางเป็นศูนย์

ก็ตาม (Perry, 1999: 5) ดังนั้นจึงถือว่าการกระจายใน (ค3.2) และ (ค3.3) ไม่ได้นับรวมกรณี $p^+ = 0$ นี้ด้วย ดูกรณีสนามสเกลาร์อิสระใน Heinzl (1998: 56, 59) รายละเอียดของเรื่องฐานนิยามศูนย์ของ FF ค่อนข้างซับซ้อนไม่ได้ศึกษาในที่นี้

สรุปรวมทั้งสองพจน์โดยไม่นับกรณี $p^+ = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\psi(x^+, x) &= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda \left(e^{-ip_m \cdot x} u(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}, \lambda) + e^{ip_m \cdot x} v(\vec{p}, \lambda) d^\dagger(\vec{p}, \lambda) \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda \left(e^{-ip \cdot x} u(\vec{p}, \lambda) b(\vec{p}, \lambda; x^+) + e^{ip \cdot x} v(\vec{p}, \lambda) d^\dagger(\vec{p}, \lambda; x^+) \right)\end{aligned}\tag{ค3.5}$$

ซึ่งขั้นตอนสุดท้ายเขียนแสดงสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ในการเป็นตัวแปรพลวัตพื้นฐานบนผิวเวลาเท่า p^+ ในการกระจายข้างต้นที่มีความมากกว่า 0 ก็คือ p^+ ในตัวนอร์มัลไลเซชัน (ค2.9) นั่นเอง

และเมื่อทำการฉาย (ค3.5) ด้วย Λ_+ ก็จะได้ คอมโพเนนท์-(+) ซึ่งเป็นคอมโพเนนท์อิสระได้ง่าย สังเกตว่า u_+ และ v_+ ใน (ค2.10) นั้นไม่ขึ้นกับมวลเลย เนื่องจากความไม่ไดอะโกนัลของพีชคณิตกรวยแสงนั่นเอง ดังนั้น ψ_+ ในรูป (ค3.5) ถ้าไม่พิจารณาแพกเตอร์เวลาเช่นให้ $x^+ = 0$ ก็จะไม่มีการแปรมวลอยู่เลย แต่แพกเตอร์มวลจะปรากฏในระบบนี้โดยไม่เกี่ยวกับเวลาก็โดยผ่านคอมโพเนนท์ไม่อิสระ คือ คอมโพเนนท์(-) u_- และ v_- ใน (ค2.10) นั่นเอง สำหรับการปรากฏแพกเตอร์มวลโดยเกี่ยวกับเวลาในการกระจาย ψ_+ (ค3.5) ที่ได้ตั้งค่า (set) $x^+ = 0$ ไว้ นั้นมองได้ว่าเกิดขึ้นโดยการวิวัฒนาการในเวลาด้วยแฮมิลโทเนียน (3.3.6) นั่นเอง

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ผู้เขียนชื่อ นายชาญกิจ คั่นฉ่อง สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2542 ผู้เขียนสนใจศึกษาฟิสิกส์ทฤษฎีโดยเฉพาะด้านทฤษฎีสนามควอนตัมและฟิสิกส์อนุภาค



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย