การเป็นอินเจกทิฟในบางแคทิกอรีของเซมิมอดูลบนเซมิริง

นางสาว ศจี เพียรสกุล

โครงการนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2536

ISBN 974-582-647-2

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

019113

INJECTIVITY IN SOME CATEGORIES OF SEMIMODULES OVER SEMIRINGS

Miss Sajee Pianskool

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1993

ISBN 974-582-647-2

Thesis Title	INJECTIVITY IN SOME CATEGORIES OF SEMIMODULES OVER SEMIRINGS
By	Miss Sajee Pianskool
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Mark E. Hall Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University, in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

Thavorn Vajrabhaya ..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit ..... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Mark E. Hall ..... Thesis Advisor

(Dr. Mark E. Hall Ph.D.)

Patanee Udomkavanich ..... Member

(Assistant Professor Patanee Udomkavanich Ph.D.)

C425043 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: SEMIRING/INJECTIVE SEMIMODULE/INJECTIVE HULL
SAJEE PIANSKOOL : INJECTIVITY IN SOME CATEGORIES OF SEMIMODULES OVER SEMIRINGS. THESIS ADVISOR : DR. MARK E. HALL, Ph.D.
47 pp. ISBN 974-582-647-2

A semiring is a weakened version of a ring in which additive inverses are not assumed to exist. One can define semimodules over semirings by analogy with the way one defines modules over rings, and, by copying the definition of injective modules almost verbatim, injective semimodules. Unfortunately, many theorems about injective modules do not seem to be true for injective semimodules if this definition is used, which suggests a different definition might be better. In this research an alternative definition is proposed, one which allows several of the fundamental theorems from the module case to be proved for semimodules as well.

Let S be a fixed semiring, and let $\mathfrak{C}_S$ denote the category of all cancellative S-semimodules. An S-semimodule I is **$\mathfrak{C}_S$-injective** iff $I \in \mathfrak{C}_S$ and for each pair of elements A and B of $\mathfrak{C}_S$, each S-monomorphism $f: A \to B$, and each S-homomorphism $g: A \to I$, there exists an S-homomorphism $h: B \to I$ such that $g = h \circ f$. An S-semimodule B is an **essential extension** of a subsemimodule A iff for every S-semimodule C and every S-homomorphism $f: B \to C$, $f|_A$ is injective implies f is injective. Finally, an S-semimodule I is a **$\mathfrak{C}_S$-injective hull** of an S-semimodule A iff I is $\mathfrak{C}_S$-injective and I is an essential extension$A$.

The main results of this research are as follows:
(i) every cancellative S-semimodule is a subsemimodule of a $\mathfrak{C}_S$-injective semimodule, consequently if there exists a nonzero cancellative S-semimodule, then there exists a nonzero $\mathfrak{C}_S$-injective semimodule;
(ii) an S-semimodule is $\mathfrak{C}_S$-injective iff it has no proper cancellative essential extensions; and
(iii) every cancellative S-semimodule has a unique $\mathfrak{C}_S$-injective hull.

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต .....
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Mark E. Hall
ปีการศึกษา 2535 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

ศจี เพียรสกุล : การเป็นอินเจกทิฟในบางแคทิกอรีของเซมิมอดูลบนเซมิริง
(INJECTIVITY IN SOME CATEGORIES OF SEMIMODULES OVER SEMIRINGS)
อ.ที่ปรึกษา : Dr. Mark E.Hall, 47 หน้า. ISBN 974-582-647-2

เซมิริงเป็นโครงสร้างพีชคณิตที่อ่อนกว่าริงตรงที่อาจไม่มีสมบัติการมีตัวผกผันการบวก การให้นิยามเซมิมอดูลบนเซมิริงอาจกระทำโดยอุปมาเหมือนการให้นิยามมอดูลบนริง และการให้นิยามอินเจกทิฟเซมิมอดูล อาจกระทำโดยการลอกแบบการให้นิยามอินเจกทิฟมอดูลเกือบทุกคำต่อคำเป็นที่น่าเสียดายว่าหลายทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับอินเจกทิฟมอดูล อาจจะไม่เป็นจริงสำหรับอินเจกทิฟเซมิมอดูลถ้าใช้ในบทนิยามดังกล่าว ซึ่งแนะนำว่าน่าจะมีบทนิยามที่ดีกว่านี้ ในการวิจัยนี้เราให้บทนิยามอีกแบบหนึ่งของเซมิมอดูลที่ทำให้หลายทฤษฎีบทพื้นฐานจากกรณีของมอดูลยังคงเป็นจริงสำหรับเซมิมอดูลเช่นเดียวกัน

กำหนดให้ S เป็นเซมิริงและ C_S แทนแคทิกอรีของ S-เซมิมอดูลทั้งหมดที่มีสมบัติการตัดออก จะกล่าวว่า S-เซมิมอดูล I เป็น **C_S-อินเจกทิฟ** ก็ต่อเมื่อ $I \in C_S$ และสำหรับแต่ละคู่ของสมาชิก A,B ของC_S แต่ละ S-โมโนมอร์ฟีซึม $f:A\to B$ และแต่ละ S-โฮโมมอร์ฟีซึม $g:A\to I$ จะมี S-โฮโมมอร์ฟีซึม $h:B\to I$ ที่ทำให้ $g = h\circ f$ S-เซมิมอดูล B เป็น **ภาคยืดขยายสาร์ตถ์ (essential extension)** ของสับเซมิมอดูล A ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ S-เซมิมอดูล C และทุกๆ S-โฮโมมอร์ฟีซึม $f:B\to C$ ถ้า $f|_A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย สุดท้ายนี้ S-เซมิมอดูล I เป็น **C_S-อินเจกทิฟฮัลล์** ของ S-เซมิมอดูล A ก็ต่อเมื่อ I เป็น C_S-อินเจกทิฟและ I เป็นภาคยืดขยายสาร์ตถ์ของ A

ผลสำคัญของการวิจัยนี้มีดังนี้ :

1. ทุกๆ S-เซมิมอดูลที่มีสมบัติการตัดออกเป็นสับเซมิมอดูลของบาง C_S-อินเจกทิฟเซมิมอดูล ซึ่งผลที่ได้ตามมาคือ ถ้ามี S-เซมิมอดูลซึ่งมีสมบัติการตัดออกและไม่เป็นศูนย์ แล้วจะมี C_S-อินเจกทิฟเซมิมอดูลที่ไม่เป็นศูนย์
2. S-เซมิมอดูลหนึ่งเป็น C_S-อินเจกทิฟ ก็ต่อเมื่อ มันไม่มีภาคยืดขยายสาร์ตถ์แท้ที่มีสมบัติการตัดออก และ
3. ทุกๆ S-เซมิมอดูลที่มีสมบัติการตัดออกจะมี C_S-อินเจกทิฟฮัลล์และมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ศจี เพียรสกุล
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Mark E. Hall
ปีการศึกษา 2536 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ACKNOWLEDGEMENT

I am extremely indebted to *Dr. Mark E. Hall*, my thesis advisor, and *Assistant Professor Suwimon Hall* for their untired offering me thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Moreover, I am grateful to *Dr. Sidney S. Mitchell* for lending me the book, **The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science** by Jonathan S. Golan, which provided most of the background on semimodules over semirings. Also I would like to thank all of the lecturers for their valuable lectures while I was studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother, brothers, sisters, and friends for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH v

ACKNOWLEDGEMENT vi

INTRODUCTION 1

CHAPTER

I PRELIMINARIES 3

II SEMIMODULES OVER SEMIRINGS 7

III $\mathfrak{C}_S$-INJECTIVE SEMIMODULES 28

REFERENCES 46

VITA 47

INTRODUCTION

A very important algebraic structure is that of a module over a ring, as described, for example, in *Ribenboim*'s book *[2]*. Recently, a more general structure than a ring, called a semiring, has been introduced and studied (see the book *[1]* by *Golan*). An object analogous to a module over a ring, called a semimodule, can be defined over a semiring. Semimodules can be studied in much the same way as modules, by introducing such concepts as subsemimodules, homomorphisms, quotient semimodules, etc. As a brief look at *[1]* shows, considerable progress has been made in this vein. A notable exception is the study of injective semimodules, where almost no success has been achieved. In fact, among the few results which have been obtained, perhaps the most striking is actually a negative result, stating that for a certain class of semirings (which includes some semirings one would expect to be quite well-behaved), the only injective semimodule is $\{0\}$.

This suggests to me that the definition chosen for an injective semimodule, which is essentially the same as the definition of an injective module, is a poor one. For my research, I have modified this definition by requiring that all semimodules mentioned in it belong to the category $\mathfrak{C}_S$ of cancellative semimodules. I call a semimodule satisfying this definition a $\mathfrak{C}_S$-injective semimodule. I have also given a definition of an essential extension of semimodules, which is equivalent to the standard one in the case of modules over a ring (and appears

in *[1]* under a different name); this allows me to define a $\mathfrak{C}_S$-injective hull of a semimodule A in a natural way, i.e., it is a $\mathfrak{C}_S$-injective semimodule which is an essential extension of A.

The climax of my resesarch is the study of $\mathfrak{C}_S$-injective semimodules. The principal results are Theorem 3.2.7, which is analogous to Baer's Theorem (see *[2], Chapter I, Theorem 7*); Theorem 3.3.4, which states that a semimodule is $\mathfrak{C}_S$-injective iff it has no proper cancellative essential extensions; and Theorem 3.4.3, which proclaims that every cancellative semimodule has a $\mathfrak{C}_S$-injective hull.

The notational conventions and the background on semirings needed for this work are given in Chapter I. In Chapter II, I present a brief exposition of those topics from the theory of semimodules needed for my study of $\mathfrak{C}_S$-injective semimodules in the following chapter, including congruence relations, group semimodules (semimodules whose additive structure is a group), direct products and direct sums, and free semimodules. While much of this material appears in *[1]*, I have reorganized it considerably to suit the needs of this paper. In addition, a few definitions and some of the terminology have been changed to forms appearing more natural to me, and some new results have been proved, particularly ones regarding the important ideas of congruence relations and group semimodules. In the last chapter, I present the general idea of injectivity in a category of semimodules, the basics of $\mathfrak{C}_S$-injective semimodules, and some results on essential extensions and $\mathfrak{C}_S$-injective hulls.