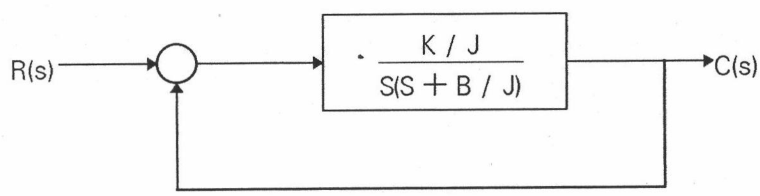
บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการออกแบบค่าเกนควบคุม

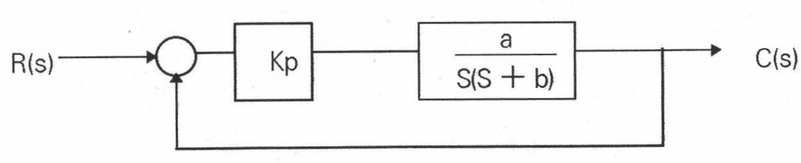
การวัดและทดสอบหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ของดีซีมอเตอร์

เนื่องจากค่าตัวแปรของระบบบางตัวมีวิธีการวัดที่ค่อนข้างยุ่งยากและลำบากในการวัด ดังนั้นแนวทางในการหาสมการทางคณิตศาสตร์ของระบบต้องอาศัยการทดลองระบบภายใต้สมมุติฐานของระบบควบคุมดีซีมอเตอร์โดยทั่วไปเป็นสมการกำลังสองซึ่งเขียนเป็นรูปแบบทั่วไปของระบบได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แผนภาพของระบบควบคุม

จากรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ของระบบ เราจะทำการหาตัวแปรของระบบโดยการประมาณจากผลการตอบสนองของระบบในช่วงทรานเชียนท์(Transient response) โดยการป้อนอินพุทแบบหนึ่งหน่วยขั้นภายใต้ระบบดังรูป4.1 เมื่อกำหนดให้ $a=K/J$ และ $b=B/J$ จากแผนภาพในรูปที่ 4.1 ภายใต้อินพุทแบบหนึ่งหน่วยขั้นที่เกน Kp ดัง รูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แผนภาพของระบบที่ทำการทดลอง

จากแผนภาพ รูปแบบสมการโดยทั่วไปทางคณิตศาสตร์ของระบบสามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ในรูปของฟังค์ชันถ่ายโอน(Transfer function) ได้เป็น

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Kp(K / J)}{S(S + B / J) + Kp(K / J)} \quad (4\text{-}1)$$

จากรูปที่4.1 และ 4.2 เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของฟังค์ชันถ่ายโอนได้เป็น

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} = \frac{aKp}{S^2 + bS + aKp} \quad (4\text{-}2)$$

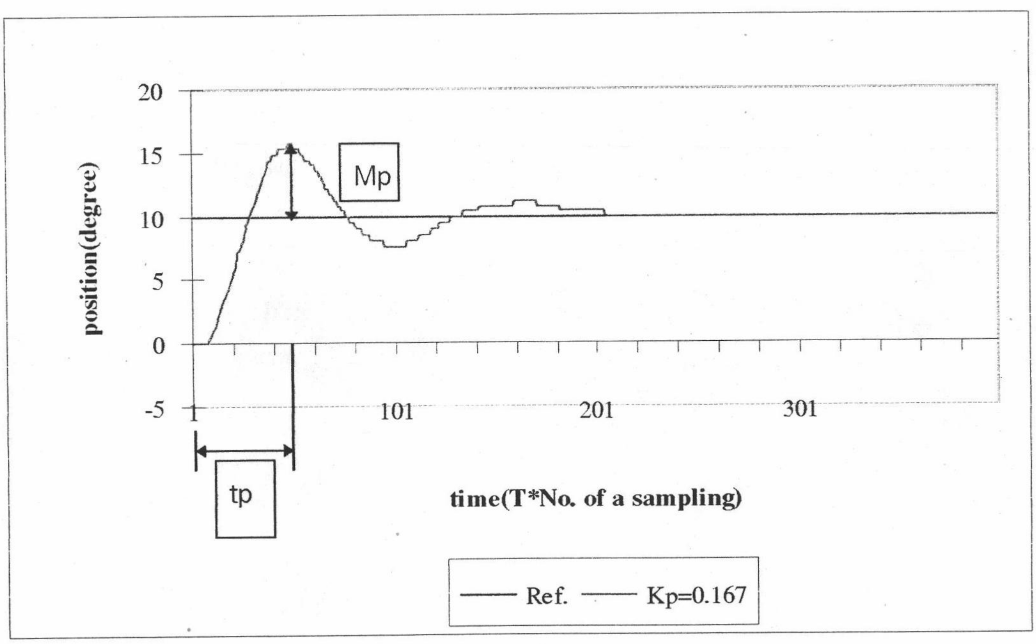
โดยมีรูปแบบสมการทั่วไปในการตอบสนองที่ภายใต้อินพุทหนึ่งหน่วยขั้นคือ

$$C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)$$

จากรูปที่ 4.2 เมื่อป้อนอินพุทแบบขั้นขนาด 10 องศา ที่ค่าเกน Kp=0.167 จะได้สมการการตอบสนองคือ

$$C(t) = 10(1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)) \quad (4\text{-}3)$$

และได้ผลของการตอบสนองเป็นไปตามรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงผลตอบสนองของระบบจริงภายใต้อินพุทแบบขั้น

จากผลการตอบสนองที่ได้อ่านค่าของโอเวอร์ชูทสูงสุดได้ $M_p = 5.5385$ องศา และช่วงเวลาพีค

$t_p = 0.93$ sec และพบว่าที่เวลา $t = 0.54$ sec ระบบให้การตอบสนองเท่ากับ 10 องศา เป็นครั้งแรก เมื่อเทียบค่าผลการทดลองกับสมการในการตอบสนองของระบบพบว่าที่ C(0.54)=10° องศา หาค่าตัวแปรต่างๆ ของระบบ จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

หาเวลาที่จุดพีคจากการหาอนุพันธ์ของ C(t) โดยเทียบกับเวลาได้และให้ผลลัพธ์ของอนุพันธ์นี้มีค่าเป็นศูนย์ ได้ความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = (\sin\omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

จากสมการจะได้ว่าสมการเป็นจริงเมื่อ $\sin\omega_d t_p = 0$

หรือ $\sin\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots$

โดยเวลาพีคคือที่ตำแหน่งโอเวอร์ชูทสูงสุดในครั้งแรกนั่นคือที่ $\sin\omega_d t_p = \pi$ ดังนั้น

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4-3}$$

จากผลการอ่านค่าเวลาที่จุดพีคพบว่า ความถี่แดมป์คือ

$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{\pi}{0.93} = 3.378 \text{ rad/s}$$

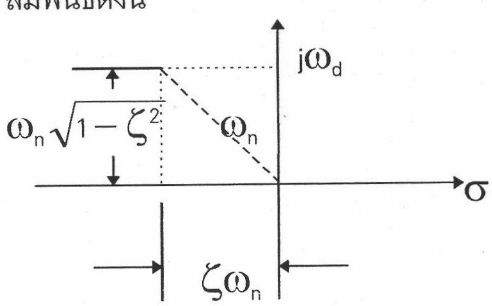
หาค่าอัตรส่วนแดมป์ปิงจาก ความสัมพันธ์ของโอเวอร์ชูทสูงสุด

$$\begin{aligned} M_p &= 10(C(t_p) - 1) \\ &= 10 * e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \end{aligned} \tag{4-4}$$

จากการอ่านค่าผลการตอบสนองพบว่าโอเวอร์ชูทสูงสุดของระบบคือ $M_p = 5.538$ แทนค่าดังกล่าวแล้วแก้สมการข้างต้นได้ค่าอัตราส่วนแดมป์ปิงของระบบคือ

$$\zeta = 0.185$$

จากนี้นำค่าอัตรส่วนแดมป์ปิงและค่าความถี่แดมป์ไปหาความถี่ธรรมชาติของระบบจากความสัมพันธ์ดังนี้



$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{4-5}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3.378}{\sqrt{1-0.185^2}} = 3.437 \text{ rad/s}$$

หาค่าตัวแปรของระบบควบคุมโดยการเทียบค่าสัมประสิทธิ์กับรูปแบบทั่วไปของสมการคุณลักษณะ

$$S^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = S^2 + bS + aK_p$$

$$S^2 + 2(0.185) * 3.437S + 3.437^2 = S^2 + bS + aK_p$$

จากสมการเมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ก็จะได้ว่า

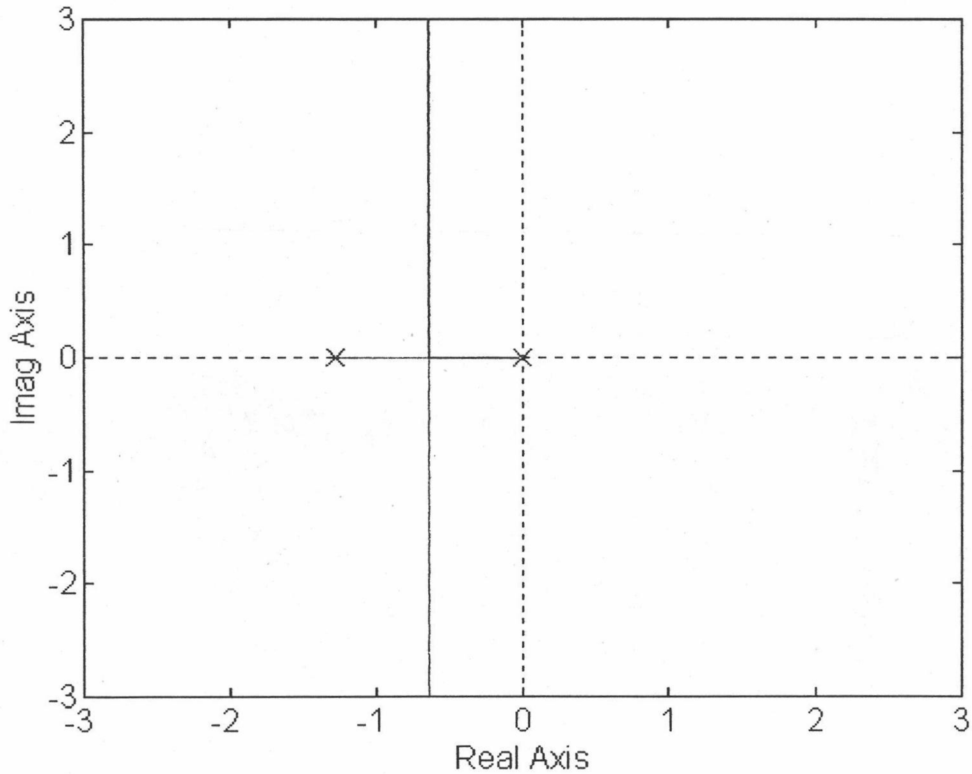
$$a=\frac{\omega_n^2}{K_p} = 70.736 \quad \text{และ } b=1.27$$

ดังนั้นระบบมีสมการทางคณิตศาสตร์ดังรูปที่ 4.4

$$\longrightarrow \boxed{\frac{70.736}{S(S+1.27)}} \longrightarrow$$

รูปที่ 4.4 แผนภาพของระบบจริง

จากรูปหาทางเดินของรากของระบบจริงแบบลูปเปิดได้ทางเดินรากเป็นไปตามรูปที่ 4.5



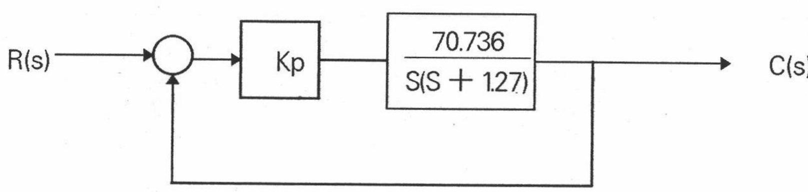
รูปที่ 4.5 แสดงทางเดินรากของระบบ

หาเสถียรภาพของระบบจากการพลอททางเดินของรากของระบบจริงมีโพลอยู่ที่ S=-1.27 และ S=0 ซึ่งจะได้ว่าโพลอยู่ทางด้านซ้ายและจากสมการคุณลักษณะของระบบพบว่ารากของระบบอยู่ที่ $S_{1,2} = -0.635 \pm 8.386j$

นั่นคือค่าเวลาคงที่ของระบบมีค่าเท่ากับ

$$\tau = \frac{1}{0.635} = 1.575 \text{ วินาที}$$

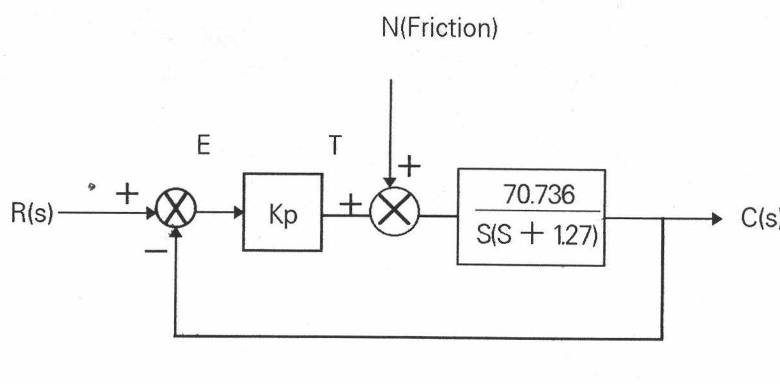
และจากทางเดินรากแสดงว่าระบบมีเสถียรภาพที่ทุกๆ ค่าของพี. ควบคุม และเมื่อพิจารณาระบบที่อินพุทต่างๆ ภายใต้ระบบพี. ควบคุม



รูปที่ 4.6 แผนภาพของระบบจริงที่พี. ควบคุม

ค่าความผิดพลาดที่ พี. ควบคุมภายใต้ภาระแบบขั้น

จากระบบการควบคุมดังกล่าวเมื่อพิจารณาภายใต้สิ่งรบกวนอันเนื่องมาจากแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างขากับพื้นจะเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้เกิดความผิดพลาดในการควบคุม ซึ่งสิ่งรบกวนดังกล่าวต่อลักษณะของระบบควบคุมในที่นี้มีค่าน้อยอันเนื่องจากการก้าวเท้าเดินอยู่บนพื้นฐานของการเปลี่ยนจุดศูนย์ถ่วงของระบบเพื่อให้แรงเสียดทานในขณะทำการก้าวเท้ามีค่าน้อยๆ ซึ่งถ้าเราพิจารณาหาการผิดพลาดที่สภาวะคงตัวของระบบภายใต้ภาระรบกวนตามแผนภาพดังรูปที่ 4.7 ภายใต้อินพุทแบบขั้นและแรมพ์อินพุท



รูปที่ 4.7 แผนภาพของระบบจริงภายใต้แรงเสียดทานขากับพื้น

พิจารณาค่าความผิดพลาดของระบบภายใต้อินพุทแบบขั้น ภายใต้ภาระรบกวนอันเนื่องจากแรงเสียดทานแบบขั้น

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{70.736}{S(S + 1.27) + 70.736Kp}$$

ดังนั้น

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{70.736}{S(S + 1.27) + 70.736Kp}$$

ค่าความผิดพลาดที่สภาวะคงตัวอันเนื่องมาจากแรงบิดของความเสียดทานที่เป็นขั้นขนาด T_n หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} SE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{-S}{S^2 + 1.27S + 70.736Kp}\frac{T_n}{S} \\ &= -\frac{T_n}{70.736Kp} \end{aligned}$$

นั่นคือผลการควบคุมที่พี. ควบคุมที่สภาวะคงตัว ค่าความผิดพลาดขึ้นอยู่กับแรงเสียดทานหรือมีออฟเซ็ทค่าความผิดพลาด ภายใต้สิ่งรบกวนที่เป็นขั้น โดยขนาดของค่าความผิดพลาดขึ้นอยู่กับขนาดของภาระรบกวนและค่าเกนพี. ควบคุม

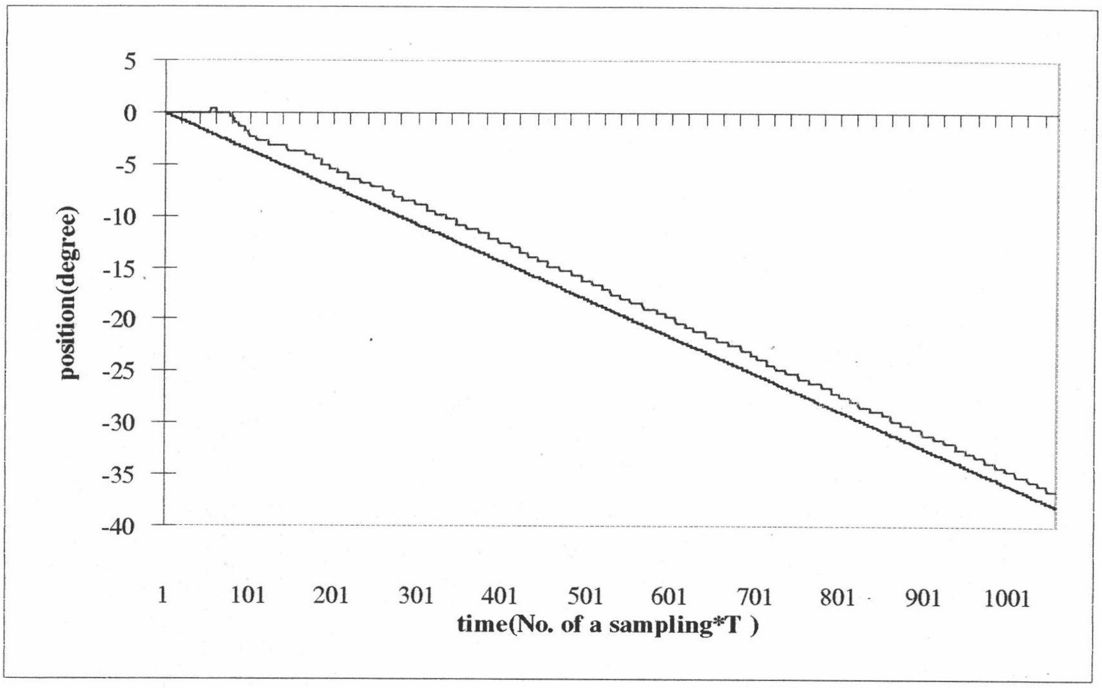
ค่าความมผิดพลาดที่ พี. ควบคุมภายใต้ความเร็วคงที่

พิจารณาค่าความผิดพลาดที่สภาวะคงตัวอันเนื่องมาจากอินพุทแบบแรมพ์ซึ่งในที่นี้คือที่ความเร็วคงที่ ซึ่งเขียนสมการอินพุทในรูปลาปลาซทรานฟอร์มได้เป็น $R(s) = \omega / S^2$ ซึ่งหาได้ดังนี้

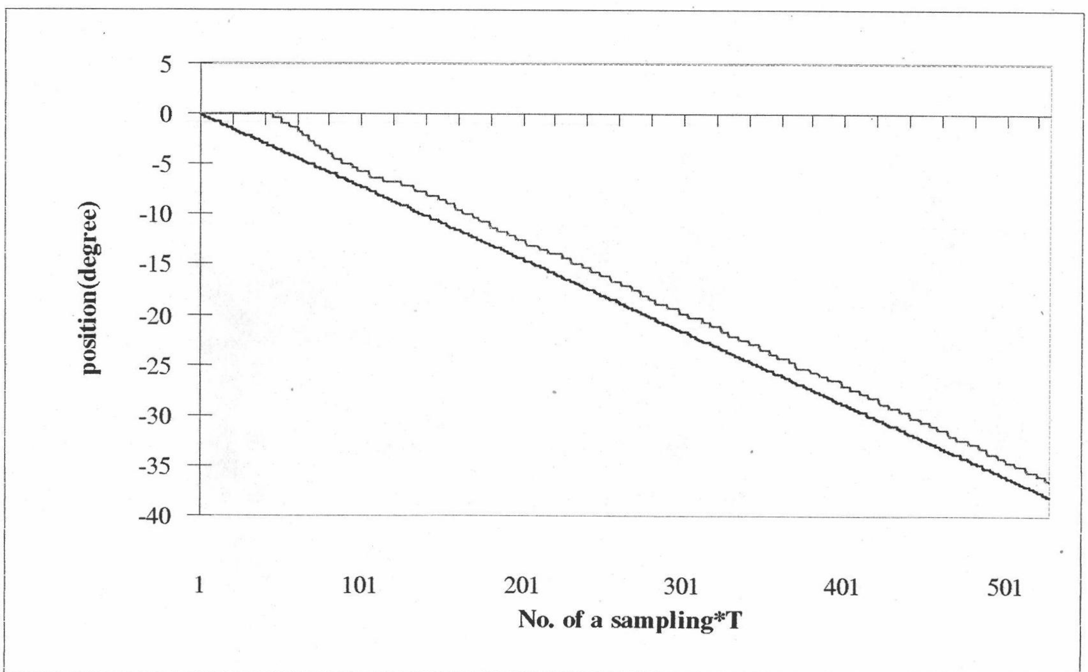
$$E(s) = \frac{\omega(S^2 + 1.27S)}{S^2 + 1.27S + 70.736Kp}\frac{1}{S^2}$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} SE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{S(S^2 + 1.27S)\omega}{S^2 + 1.27S + 70.736Kp}\frac{1}{S^2} \\ &= \frac{1.27\omega}{70.736Kp} \end{aligned}$$

จากสมการความสัมพันธ์จะพบว่าที่ภายใต้ความเร็วคงที่ ที่พี. ควบคุมจะพบว่าค่าความผิดพลาดของการควบคุมขึ้นอยู่กับความเร็วที่ต้องการและค่าเกนของระบบ โดยลองทำการควบคุมได้ผลการทดลองภายใต้อินพุทที่ความเร็วคงที่ ที่ $K_p = 0.167$ โดยที่ความเร็วต่างๆ กันเมื่อคาบของการสุ่ม T=18 ms โดยผลการควบคุมเป็นไปตามรูปที่ 4.8 และรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.8 แสดงผลการตอบสนองต่อแรมพ์อินพุท ที่ $K_p = 0.167$ และ ω=2 rad/s



รูปที่ 4.9 แสดงผลการตอบสนองต่อแรมพ์อินพุท ที่ $K_p = 0.167$ และ ω=4 rad/s

ซึ่งจากผลการทดลองเทียบกับทางทฤษฎีจะพบว่าที่ภายใต้พี. ควบคุมที่ความเร็วควบคุมต่างกัน พบว่าเป็นไปตามสมการคือที่ค่าความเร็วมากขึ้นจะให้ค่าความผิดพลาดที่สภาวะคงตัวเพิ่มขึ้นนั่นคือที่การควบคุมแบบพี. ความผิดพลาดของระบบที่สภาวะคงตัวขึ้นอยู่กับความเร็วและค่าเกนที่ควบคุมเมื่อพิจารณาที่ความเร็วควบคุม และจากผลการทดลองของเรานี้จะพบว่าช่วงแรกเป็นช่วงของการเอาชนะแรงเสียดทานและแบคแลชของระบบของเกียร์ทด ซึ่งการปรับการเคลื่อนที่ในส่วนของการเอาชนะแรงเสียดทานตอนต้นจะต้องอาศัยการควบคุมด้วยความเร่งคงที่และการแก้ไขความผิดพลาดของการเคลื่อนที่ทุกๆ คาบของการสุ่ม(Sampling time)และแก้ไขตำแหน่งตอนปลายคือการลดแรงเฉื่อยของระบบด้วยการควบคุมการเคลื่อนที่ด้วยความหน่วงคงที่ ดังนั้นเราจะพิจารณาระบบพี. ควบคุม ที่ภายใต้ความเร่งคงที่

ค่าความผิดพลาดที่พี. ควบคุมภายใต้ความเร่งคงที่

ที่ภายใต้การควบคุมแบบความเร่งคงที่ซึ่งอินพุทในที่นี้คือ $R(s) = 0.5 * \alpha * 2 / S^3$ พิจารณาค่าความผิดพลาดที่สภาวะคงตัวอันเนื่องมาจากอินพุทที่ความเร่งคงที่ หาได้ดังนี้

$$E(s) = \frac{(S^2 + 1.27S)}{S^2 + 1.27S + 70.736Kp}\frac{\alpha}{S^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} SE(s)$$

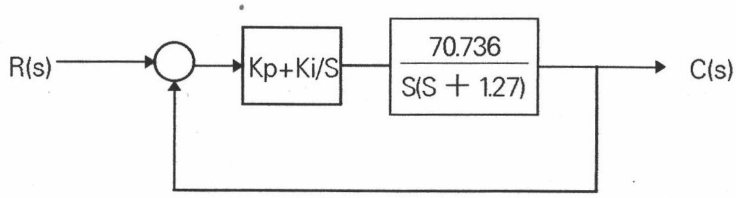
$$= \lim_{s \to 0} \frac{S(S^2 + 1.27S)}{S^2 + 1.27S + 70.736Kp}\frac{\alpha}{S^3}$$

$$= +\infty$$

ซึ่งจากผลการวิเคราะห์ขั้นต้นพบว่าการควบคุมแบบพี.ที่ภายใต้ความเร่งคงที่เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นเรื่อยทำให้ระบบมีการสั่นอย่างรุนแรงซึ่งเราจะต้องทำการชดเชยให้กับระบบ จากผลดังกล่าวจะเห็นว่ากำลังในเทอมของเศษจะสามารถควบคุมระบบภายใต้ความเร่งคงที่ได้ก็ต่อเมื่อเทอมของเศษในค่าความผิดพลาดในแต่ละเทอมจะต้องมีกำลังไม่น้อยกว่าสอง นั่นคือเราจะลดค่าความผิดพลาดที่ภายใต้ความเร่งคงที่ดังกล่าวได้ด้วยการควบคุมแบบ พี.ไอ. ดังนั้นเราจะต้องพิจารณาระบบที่ภายใต้พี.ไอ. ควบคุม

พิจารณาระบบที่ภายใต้พี.ไอ. ควบคุม

เนื่องจากการควบคุมแบบไอ.นี้จะช่วยให้ค่าความผิดพลาดในสถานะคงตัวเป็นศูนย์ ดังนั้นการควบคุมภายใต้พี.ไอ. จะช่วยทำให้ผลของการควบคุมดีขึ้น ซึ่งแผนภาพของระบบควบคุมดังกล่าวแสดงได้ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 แผนภาพของระบบที่ พี.ไอ. ควบคุม

การควบคุมตำแหน่งการหมุนของมอเตอร์ด้วยตัวควบคุมแบบสัดส่วนบวกกับแบบอินทิกรัลนั้นจะทำให้ระบบควบคุมของเรามีอันดับเป็นสาม ดังแสดงในสมการของฟังค์ชันถ่ายโอน

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{70.736(KpS + Ki)}{S(S^2 + 1.27S) + 70.736(KpS + Ki)}$$

พิจารณาเสถียรภาพของระบบจาก Routh's stability ที่สมการคุณลักษณะภายใต้ระบบแบบลูปปิด

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{70.736KpS + 70.736Ki}{S^3 + 1.27S^2 + 70.736KpS + 70.736Ki}$$

$$\begin{array}{lll} S^3 & 1 & 70.736Kp \\ S^2 & 1.27 & 70.736Ki \\ S^1 & \dfrac{70.736Kp * 1.27 - 70.736Ki}{1.27} & \\ S^0 & 70.736Ki & \end{array}$$

อาศัยเกณฑ์ของเราท์มาใช้ตรวจสอบความเสถียรภาพของระบบจะพบว่าค่าเกนที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพภายใต้พี.ไอ. ควบคุมเป็นไปตามอสมการคือ

$$1.27K_p - K_i > 0 \qquad (4\text{-}6)$$

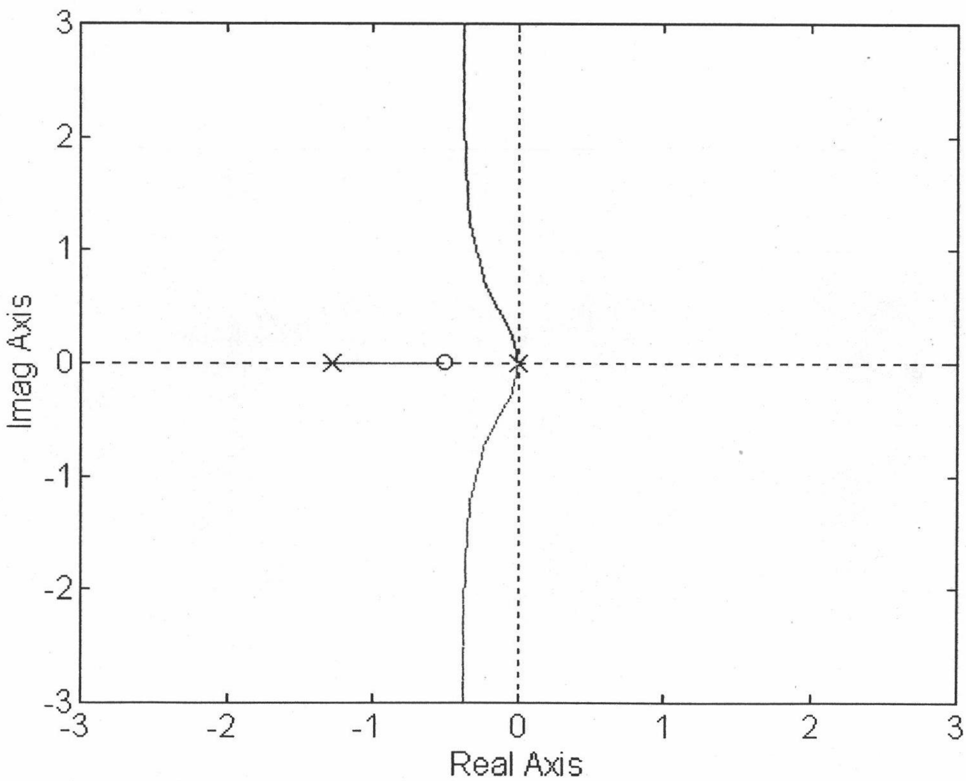
ดังนั้นในการพิจารณาเกณฑ์ เราเลือกพิจารณาค่าเกนตามความสัมพันธ์ และเป็นค่าเกนที่ทำให้ค่าเวลาคงที่ภายใต้พี.ไอ. ควบคุมมีค่ามากกว่าเวลาคงที่ของมอเตอร์คือ $\tau = 0.787$ วินาที และไม่มากจนเกินไปเพราะจะส่งผลให้ระบบขาดเสถียรภาพได้ ซึ่งเมื่อพิจารณาจากรากทางเดินของระบบ เราสามารถที่จะพิจารณาค่าเกนของพี. และ ไอ. ที่ทำให้ระบบเป็นไปตามข้อกำหนดจากรูปแบบของพี.ไอ. คอนโทรลเลอร์ เขียนได้ดังสมการ

$$G(c) = \frac{K_p(S + \frac{K_i}{K_p})}{S} \qquad (4\text{-}7)$$

จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบพบว่า $\frac{K_i}{K_p} < 1.27$ ระบบจึงจะเสถียรและจากรากทางเดินของระบบพบว่าค่าของเกนพี. และ ไอ. ซึ่งเป็นอัตราส่วนกัน เพื่อให้ได้ค่าเวลาคงที่ตามที่กำหนด อัตราส่วนดังกล่าวต้องอยู่ในช่วง

$$0 < \frac{K_i}{K_p} < 1.27$$

ซึ่งค่าเกนที่เราเลือกใช้ในการควบคุมคือที่ $K_p = 0.20$ และ $\frac{K_i}{K_p} = 0.50$ นั่นคือที่ $K_i = 0.10$ พิจารณารากทางเดินของระบบที่ภายใต้ค่าเกนดังกล่าวได้ดังรูป โดยมีจุดตัดของเส้นกำกับกับแกนจริงของระนาบS อยู่ที่ -0.385 นั่นคือระบบมีค่าเวลาคงที่ $\tau = 2.597$ วินาที



รูปที่ 4.11 รากทางเดินระบบที่พี.ไอ. ควบคุมที่ เกนพี. $K_p = 0.20$ และ เกน ไอ. $K_i = 0.1$

และเมื่อพิจารณาค่าความผิดพลาดที่อินพุทต่างๆ ของการควบคุมแบบพี.ไอ. ที่อินพุทแบบขั้น,ความเร็วคงที่และที่ความเร่งคงที่ตามลำดับดังนี้

ค่าความผิดพลาดที่พี.ไอ. ควบคุมภายใต้อินพุทแบบขั้น

เมื่อพิจารณาที่อินพุทเป็นแบบหนึ่งหน่วยขั้น

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right) = \frac{1}{S}\left(\frac{S^2(S + 1.27)}{S^3 + 1.27S^2 + 70.736K_pS + 70.736K_i}\right)$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} SE(s) = \lim_{s \to 0} S\frac{1}{S}\left(\frac{S^2(S + 1.27)}{S^3 + 1.27S^2 + 70.736K_pS + 70.736K_i}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ค่าความผิดพลาดที่พี.ไอ. ควบคุมภายใต้อินพุทที่ความเร็วคงที่

เมื่ออินพุทเป็นแบบความเร็วคงที่หรือแรมพ์อินพุทซึ่งมีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ในโดเมนของ Sคือ $\frac{\omega}{S^2}$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} SE(s) = \lim_{s \to 0} S\frac{\omega}{S^2}\left(\frac{S^2(S + 1.27)}{S^3 + 1.27S^2 + 70.736K_pS + 70.736K_i}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ค่าความผิดพลาดที่พี.ไอ. ควบคุมภายใต้อินพุทที่ความเร่งคงที่

เมื่ออินพุทเป็นแบบความเร่งคงที่มีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ในโดเมนของ Sคือ$\frac{\alpha}{S^3}$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} SE(s) = \lim_{s \to 0} S\frac{2\alpha}{S^3}\left(\frac{S^2(S + 1.27)}{S^3 + 1.27S^2 + 70.736K_pS + 70.736K_i}\right) \\ &= \frac{2.54\alpha}{70.736K_i} \end{aligned}$$

จากการพิจารณาค่าความผิดพลาดดังกล่าวเราสามารถใช้การควบคุมแบบพี.ไอ. ในการควบคุมสำหรับระบบนี้ซึ่งเวลาคงที่ทางกลมีค่ามากเนื่องจากมอเตอร์ที่ใช้เป็นเพียงดีซีมอเตอร์และความสามารถในการก้าวเดินยังขึ้นกับความเสียดทานระหว่างขากับพื้นดังนั้นในระบบจริงๆ เราไม่ต้องการความเร่งที่สูงมาก ซึ่งด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้เราจึงใช้การควบคุมแบบพี.ไอ. ควบคุมซึ่งให้ผลการควบคุมที่ดีพอ