# บทที่ 2

## สถิติทดสอบและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของการทดสอบแต่ละวิธีและรายละเอียดของการแจกแจงที่สำคัญที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ รวมทั้งนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ให้ $\underset{\sim}{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$ เป็นตัวอย่างขนาด $n_i$ จากประชากร $i$ ซึ่งมีความแปรปรวนเป็น $\sigma_i^2$ $(i = 1,2,\ldots, p)$ ให้ $\bar{x}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง และ $s_i^2$ เป็นค่าความแปรปรวนตัวอย่างจากตัวอย่าง $\underset{\sim}{x}_i$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

สมมติฐานของการทดสอบความแปรปรวนคือ

$H_o$ : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_p^2$

$H_1$ : ความแปรปรวนอย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

ในการวิจัยนี้ กำหนดจำนวนประชากร $p$ เท่ากับ 2 ตัวสถิติต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดสอบมีรายละเอียดดังนี้

### 2.1 สถิติทดสอบเอฟ (F test Statistic : F)

2.1.1 ให้ $s_1^2$ และ $s_2^2$ แทนค่าความแปรปรวนของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรที่ 1 และประชากรที่ 2 ตามลำดับ

$\dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ หรือ $\dfrac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_1^2}$ จะมีการแจกแจงแบบเอฟ ที่องศาความเป็นอิสระ

$(n_1-1)$ และ $(n_2-1)$ หรือ $(n_2-1)$ และ $(n_1-1)$ เมื่อ $n_1$ และ $n_2$ แทนขนาดตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่ 1 และประชากรที่ 2 ตามลำดับ

เมื่อ $H_o$ เป็นจริงกล่าวคือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ แล้ว $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ หรือ $\dfrac{s_2^2}{s_1^2}$ จะมีการแจกแจงแบบเอฟที่องศาความเป็นอิสระ $(n_1-1)$ และ $(n_2-1)$ หรือที่องศาความเป็นอิสระ $(n_2-1)$ และ $(n_1-1)$ สถิติทดสอบเอฟมีรูปแบบดังนี้

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j}-\bar{x}_1)^2 \Big/ (n_1-1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j}-\bar{x}_2)^2 \Big/ (n_2-1)}$$

$$\text{หรือ} \quad F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j}-\bar{x}_2)^2 \Big/ (n_2-1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (x_{1j}-\bar{x}_1)^2 \Big/ (n_1-1)}$$

2.1.2 เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธ $H_o$ เมื่อ $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geqslant F_{\frac{\alpha}{2},(n_1-1,n_2-1)}$ หรือ $F = \dfrac{s_2^2}{s_1^2} \geqslant F_{\frac{\alpha}{2},(n_2-1,n_1-1)}$ เมื่อ $F_{\frac{\alpha}{2},(df_1,df_2)}$ คือค่าวิกฤตที่เปิดได้จากตาราง F ที่ระดับนัยสำคัญ $\frac{\alpha}{2}$ และองศาความเป็นอิสระเท่ากับ $df_1$ และ $df_2$ ตามลำดับ

2.2 สถิติทดสอบแจคไนฟ์ (Jackknife test Statistic:J)

2.2.1 โดยอาศัยวิธีการของมิลเลอร์ (Miller:1964,1968)

นิยาม

$$U_{ij} = n_i \log s_i^2 - (n_i - 1) \log s_{im}^2 \quad ; \quad i = 1,2, \ldots p \; ; j=1,\ldots,n_i$$
$$m = 1,\ldots, n_i$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i-1} \quad ; \; i = 1,2,\ldots,p$$

$$s_{im}^2 = \frac{\sum_{\ell \neq m}^{n_i} (x_{i\ell} - \bar{x}_{im})^2}{n_i-2} \quad ; \; i = 1,\ldots, p ; \; m = 1,\ldots,n_i$$

$$\bar{x}_{im} = \frac{\sum_{\ell \neq m}^{n_i} x_{i\ell}}{n_i-1} \quad ; \; i = 1,\ldots,p \; ; \; m = 1,\ldots,n_i$$

$n_i$ = ขนาดตัวอย่างชุดที่ i ; $i = 1,2,\ldots,p$

จากแนวความคิดเรื่องการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA:Analysis of variance) โดยกำหนดให้

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (\bar{u}_i - \bar{u})^2}{p-1}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (u_{ij} - \bar{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^{p} (n_i-1)}$$

จะได้ตัวสถิติ $\frac{A}{B}$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอฟภายใต้สมมติฐาน $H_o$ โดยที่องค่าของความเป็น

อิสระเท่ากับ (p-1) และ $\sum_{i=1}^{p} (n_i-1)$ และให้ชื่อสถิติทดสอบที่ได้นี้ว่า สถิติทดสอบแจคไนฟ์ :J (Jackknife Test Statistic) โดยที่

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{u}_i - \bar{u})^2 \Big/ (p-1)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (u_{ij}-\bar{u}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} (n_i-1)} \quad ; i=1,\ldots,p \;;\; j=1,\ldots,n_i$$

$$\bar{u}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}}{n_i} \quad ; i=1,2,\ldots,p$$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \bar{u}_i}{p}$$

2.2.2 เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธ $H_o$ เมื่อ $J \geqslant F_{\alpha,(p-1,\ \sum_{i=1}^{p}(n_i-1))}$ โดยที่

$F_{\alpha,df_1,df_2}$ เป็นค่าวิกฤตที่เปิดได้จากตาราง F ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ และองศาความเป็นอิสระเท่ากับ $df_1,df_2$ ตามลำดับ

2.3 <u>สถิติทดสอบไคสแควร์ที่เสนอโดยเลยาร์ด</u> (Layard Chi Square Test:CS)

2.3.1 เลยาร์ด (1973:195-198) ได้เสนอสถิติทดสอบ $\chi^2$ (ไคสแควร์) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความโด่ง (kurtosis) โดยที่ความโด่งนี้ถูกประมาณขึ้นมาจากความโด่งที่ประมาณได้จากแต่ละชุดตัวอย่าง [(ดูการพิสูจน์ได้จากเครมเมอร์ (Cramer:1946) และเลยาร์ด(Layard:1973) ]ตัวสถิติที่ใช้ในการหาค่าสถิติมีสัญลักษณ์ดังนี้

$$CS = \frac{\tau^2 S'}{\hat{\tau}^2}$$

เมื่อ $$S' = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left[(n_i-1)\left(\ell n\, s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)\,\ell n s_i^2}{\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)}\right)^2\right]}{\tau^2}$$

∴ จะได้ตัวสถิติ

$$CS = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left[(n_i-1)\left(\ell n s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)\,\ell n s_i^2}{\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)}\right)^2\right]}{\hat{\tau}^2}$$

โดยที่ $$\hat{\tau}^2 = 2 + \{1 -(\frac{1}{\bar{n}})\}\,\hat{\gamma}$$

และ $$\hat{\gamma} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^4}{\left\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right\}^2} - 3$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i}{p}$$

ซึ่งตัวสถิติ CS นี้จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ภายใต้ $H_o$ ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ (p-1)

2.3.2 เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธ $H_o$ เมื่อ CS $\chi^2_{\alpha,(p-1)}$ โดยที่ $\chi^2_{\alpha,(p-1)}$ เป็นค่าวิกฤตที่เปิดจากจากตารางไคสแควร์ ณ องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (p-1)และระดับนัยสำคัญ $\alpha$

2.4 <u>สถิติทดสอบเลเวนเน</u> (Levene test Statistic : $W_o$)

2.4.1 เลเวนเน (1960) ได้สร้างสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน โดยวิธีการเปรียบเทียบความแปรปรวนของประชากรแต่ละชุดแบบเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way ANOVA) โดยวิธีการนิยามค่าดังนี้

$$u_{ij} = |x_{ij} - \bar{x}_i| \quad ; \quad i = 1,\ldots,p \; ; \; j = 1,\ldots,n_i$$

ซึ่งจะทำให้ได้ค่าต่าง ๆ ที่จะนำไปคำนวณหาค่าสถิติเป็น

ตัวอย่างชุดที่ 1 : $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n_1}$ ผลรวมเท่ากับ $U_1$

ตัวอย่างชุดที่ 2 : $u_{21}, u_{12}, \ldots, u_{2n_2}$ ผลรวมเท่ากับ $U_2$

$\vdots$ $\vdots$

ตัวอย่างชุดที่ p : $u_{p1}, u_{p2}, \ldots, u_{pn_p}$ ผลรวมเท่ากับ $U_p$

และ สามารถนำมาสร้างตาราง ANOVA ตามการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบมาตรฐาน* โดยใช้ข้อมูลเป็นค่า $u_{ij}$ ดังนี้

---

*Draper and Hurter, "Transformations : Some Examples Revisited", Technometrics, 1969

ตารางที่ 2.1 แสดงตาราง ANOVA

| สาเหตุของความแปรปรวน | ผลบวกกำลังสอง | ระดับความเป็นอิสระ | ผลบวกกำลังสองเฉลี่ย | สถิติทดสอบ |
|---|---|---|---|---|
| ระหว่างกลุ่ม (Betwan Groups) | $\sum_{i=1}^{p} (n_i(\bar{U}_i-\bar{U})^2$ | p-1 | $s_1^2$ | $F_1 = \frac{s_1^2}{s^2}$ |
| ภายในกลุ่ม (Within Groups) | $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij}-\bar{U}_i)^2$ | $\sum_{i=1}^{p} (n_i-1)$ | $s^2$ | |
| รวม (Total) | $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^2$ | $\sum_{i=1}^{p} (n_i)$ | | |

จากตารางที่ 2.1 จะได้ตัวสถิติ $W_o$ มีรูปแบบดังนี้

$$W_o = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (\bar{U}_i - \bar{U})^2 \Big/ (p-1)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij}-\bar{U}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} (n_i-1)}$$

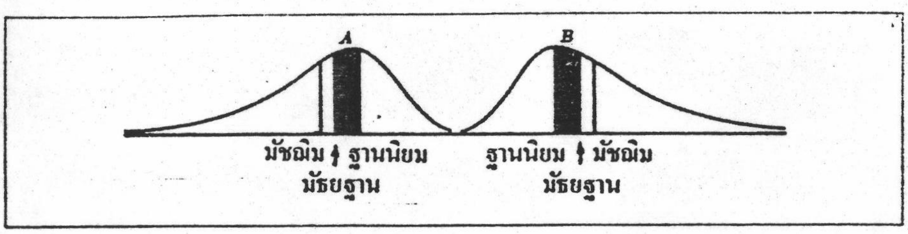
ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F และมีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ (p-1) และ $\sum_{i=1}^{p} (n_i-1)$

2.4.2 เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง ($H_o$) เมื่อค่าสถิติ $W_o$ ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่า F ที่เปิดได้จากตาราง เมื่อองศาความเป็นอิสระเท่ากับ (p-1), $\sum_{i=1}^{p} (n_i-1)$ ณ. ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α $\left[ W_o \geq F_{\alpha,(p-1), \sum_{i=1}^{p}(n_i-1)} \right]$

2.4.3 จากตัวสถิติเลเวนเน (Levene Statistic) ที่ กล่าวมาแล้วข้างต้น จะเห็นได้ว่าการสร้างตัวแปรขึ้นมาใหม่โดยใช้ชื่อว่า $u_{ij}$ นั้นได้ใช้ค่าเฉลี่ยซึ่งเป็นค่าวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง (Central location) เพื่อดูความแตกต่างของค่าสังเกตแต่ละตัวในกลุ่มกับค่าเฉลี่ย (mean) ซึ่งเป็นตัวแทนของกลุ่มดังกล่าว ทั้งนี้หากว่าการกระจายหรือการแจกแจงของข้อมูลเป็นแบบสมมาตร (Symmetry) แล้ว จะถือว่าค่าเฉลี่ยเป็นค่าที่เหมาะสมสำหรับนำมาใช้เป็นตัวแทนของกลุ่ม แต่ถ้าข้อมูลดังกล่าวมีการกระจายเป็นแบบเบ้ (Skew) หรือสมมาตรแต่หางยาว ค่าวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง (Central location) ที่เหมาะสมมากกว่าค่าเฉลี่ยจะถูกนำมาใช้แทนที่ เพื่อให้ตัวสถิติใหม่ที่จะได้มานั้นมีความเหมาะสมกับการที่จะนำไปทดสอบข้อมูลดังกล่าวได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นตัวสถิติใหม่ที่ กล่าวถึงนี้ให้ใช้ชื่อว่า สถิติทดสอบที่ปรับปรุงจากสถิติทดสอบเลเวนเน (Modified Levene Test Statistic) ซึ่งเป็นตัวสถิติที่ดัดแปลงมาจากตัวสถิติเลเวนเน ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

2.4.3.1 ใช้ค่ามัธยฐาน (Median) เป็นค่าวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง




รูปที่ 2.1 แสดงการกระจายของข้อมูลที่มีลักษณะเบ้ โดยที่รูป A เป็นลักษณะเบ้ซ้ายและรูป B เป็นลักษณะเบ้ขวา

จากรูปจะเห็นว่าศูนย์กลางของความโน้มถ่วงของการกระจายของข้อมูลนั้น ค่ามัชฌิม (mean) ถูกดึงไปทางด้านปลายของชุดข้อมูล แต่ค่า มัธยฐาน (median) จะยังคงอยู่บริเวณกึ่งกลางของข้อมูลโดยประมาณ ดังนั้นเมื่อข้อมูลที่จะนำมาทดสอบมีการแจกแจงแบบเบ้ ก็น่าจะใช้ค่าดังกล่าวแทนค่าเฉลี่ย (ในสูตรการหาค่าสถิติในข้อ 2.4.1) ดังนี้

$$U_{ij} = \left| x_{ij} - x_i' \right| \quad ; \; j = 1,\ldots, n_i \; ; \; i = 1,2,\ldots,p$$

เมื่อ $x_i'$ = ค่ามัธยฐานของตัวอย่างชุดที่ i

ดังนั้นตัวสถิติที่ได้คือ

$$W_{50} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \, (\bar{U}_i - \bar{U})^2 \Big/ (p-1)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij} - \bar{U}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1)}$$

2.4.3.2 ใช้ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลซึ่งตัดปลายทั้งสองด้านออกไปแล้ว (trimmed mean) เป็นค่าวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลางแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่ามัธยฐานสำหรับข้อมูลที่นำมาทดสอบมีการแจกแจงเป็นแบบหางยาว โดยที่ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลซึ่งตัดปลายทั้งสองด้านออกไปแล้วนั้น คือค่าเฉลี่ยของข้อมูล (ค่าสังเกต) แต่ละชุดที่หาได้หลังจากทำการตัดข้อมูลด้านที่มากที่สุดและน้อยที่สุดออกไปตามเปอร์เซ็นต์ที่กำหนดแล้ว สำหรับการวิจัยครั้งนี้ได้เลือกเปอร์เซ็นต์ที่ตัดออกเป็น 10% และ 20% เนื่องจากขนาดตัวอย่างที่ศึกษามีทั้งขนาดเล็กและใหญ่ดังนั้น เปอร์เซ็นต์การตัดข้อมูลตรงปลายสุดทั้งสองด้านจึงเลือกศึกษาสองระดับดังกล่าว

ตัวแปรใหม่ที่สร้างขึ้นในกรณีนี้คือ

$$U_{ij} = \left| x_{ij} = \tilde{x}_i \right| \quad ; \; j = 1,\ldots, n_i \; ; \; i = 1,2,\ldots,p$$

เมื่อ $\tilde{x}_i$ = ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลซึ่งตัดปลายทั้ง 2 ด้านออกไปแล้วด้านละ 10% และ 20% ของตัวอย่างชุดที่ i

จะได้ตัวสถิติ $W_{10}$ และ $W_{20}$ โดยที่ $W_{10}$ แทนตัวสถิติที่ใช้ $\tilde{x}_i$ ที่มีเปอร์เซ็นต์การตัดเท่ากับ 10% และ $W_{20}$ แทนตัวสถิติที่ใช้ $\tilde{x}_i$ ที่มีเปอร์เซ็นต์การตัดเท่ากับ 20% ตามลำดับ และมีรูปแบบของสูตรการคำนวณค่าสถิติเช่นเดียวกับตัวสถิติเลเวนเนในหัวข้อ 2.4.1 และเกณฑ์การตัดสินใจ สำหรับตัวสถิติทั้ง 3 คือ $W_{50}$, $W_{10}$, $W_{20}$ นั้น ให้ใช้เกณฑ์เดียวกันกับตัวสถิติ $W_o$ ดังในหัวข้อ 2.4.2

## 2.5 วิธีการคำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนระหว่างประชากรสองชุดทั้ง 7 วิธี

ในการแสดงวิธีการคำนวณจะอาศัยข้อมูลของตัวอย่างสุ่ม 2 ชุด (i =1,2) และตัวอย่างสุ่มแต่ละชุดมีขนาดเท่ากันคือเท่ากับ 10 (j=1,...,10) ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงข้อมูลของตัวอย่างสุ่ม 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน

| $x_{ij}$ | $x_{i1}$ | $x_{i2}$ | $x_{i3}$ | $x_{i4}$ | $x_{i5}$ | $x_{i6}$ | $x_{i7}$ | $x_{i8}$ | $x_{i9}$ | $x_{i10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 95.78 | 102.77 | 100.32 | 103.50 | 98.45 | 100.38 | 97.72 | 98.79 | 98.23 | 100.86 |
| $X_2$ | 101.78 | 101.55 | 95.94 | 98.53 | 97.84 | 100.23 | 96.79 | 98.43 | 99.17 | 104.68 |

จากตารางที่ 2.1

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างชุดที่ 1 $\quad \bar{x}_1 = 99.68$

และค่าเฉลี่ยของตัวอย่างชุดที่ 2 $\quad \bar{x}_2 = 99.494$

จากข้อมูลในตารางที่ 2.1 สามารถแสดงวิธีการคำนวณค่าสถิติทั้ง 7 วิธีได้ดังนี้

2.5.1 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบเอฟ (F)

สถิติทดสอบ

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1} \quad ; \quad i = 1,2$$

การคำนวณ

จากตารางที่ 2.1 ค่า $\bar{x}_1 = 99.68$ และ $\bar{x}_2 = 99.494$

$$s_1^2 = \frac{(95.78 - 99.68)^2 + (102.77 - 99.68)^2 + \ldots + (100.86 - 99.68)^2}{(10-1)}$$

$$= 5.5435$$

$$s_2^2 = \frac{(101.78 - 99.494)^2 + (101.55 - 99.494)^2 + \ldots + (104.68 - 99.494)^2}{(10-1)}$$

$$= 6.859$$

$$F = \frac{5.5435}{6.859} = 0.80821$$

ดังนั้นค่าของสถิติทดสอบเอฟเท่ากับ 0.80821

2.5.2 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบแจคไนฟ์ (J)

สถิติทดสอบ

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i(\bar{U}_i - \bar{U})^2 / (2-1)}{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij} - \bar{U}_i)^2 / \sum_{i=1}^{2} (n_i - 1)}$$

โดยที่ $U_{ij} = n_i \log s_i^2 - (n_i - 1) \log s_{im}^2$ ; $i=1,2,$ ; $j=1\ldots,n_i$

$m=1,\ldots,n_i$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}$$

และ $$s_{im}^2 = \frac{\sum_{\ell \neq m}^{n_i} (x_{i\ell} - \bar{x}_{im})^2}{(n_i - 2)}$$

$, \ell = 1, \ldots, n_i ; i=1,2$

$$\bar{x}_{im} = \frac{\sum_{\ell \neq m}^{n_i} x_{i\ell}}{(n_i - 1)}$$

การคำนวณ

จากข้อ 2.5.1 ได้ค่า $s_1^2 = 5.5435$ และ $s_2^2 = 6.859$ ส่วนค่า $s_{1m}^2$ , $s_{2m}^2$ นั้น มีวิธีการคำนวณดังนี้

เมื่อ i=1 และ m=1

$$s_{11}^2 = \frac{\sum\limits_{\ell \neq 1}^{10} (x_{1\ell} - \bar{x}_{11})^2}{(10-2)}$$

โดยที่ $$\bar{x}_{11} = \frac{\sum\limits_{\ell \neq 1}^{10} x_{1\ell}}{(10-1)} = \frac{102.77 + 100.32 + \ldots + 100.86}{9} = 100.113$$

ดังนั้น $$s_{11}^2 = \frac{(102.77-100.113)^2 + (100.32-100.113)^2 + \ldots (100.86-100.113)^2}{8}$$

$$= 4.124$$

ในทำนองเดียวกันถ้า $i = 1$, $m=5$ ในการคำนวณจะตัดตัวอย่างย่อยที่ 5 ($X_{15} = 98.45$) ออกไปดังนี้

$$\bar{x}_{15} = \frac{\sum\limits_{\ell \neq 5}^{10} x_{1\ell}}{9} = \frac{95.78 + \ldots + 103.50 + 100.38 + \ldots + 100.86}{9} = 99.82$$

$$s_{15}^2 = \frac{(95.78-99.82)^2 + \ldots + (103.50-99.82)^2 + (100.38-99.82)^2 + \ldots + (100.86-99.82)^2}{8}$$

$$= 6.026$$

ส่วนค่า $s_{1m}^2$ สำหรับ $m = 2,3,4,6,7,8,9,10$ และ $s_{2m}^2$; $m=1,\ldots,10$ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันกับ $s_{11}^2$ และ $s_{15}^2$ ดังกล่าวข้างต้น

และค่า $U_{1j}$ , $U_{2j}$ ซึ่งเป็นตัวแปรที่นิยามใหม่เพื่อนำมาคำนวณหาค่าสถิติทดสอบแจคไนฟ์นั้นจะแสดงในรูปของตารางโดยที่ตารางที่ 2.3 เป็นค่าของข้อมูลของตัวอย่างสุ่มชุดที่ 1 และตารางที่ 2.4 เป็นค่าของข้อมูลของตัวอย่างสุ่มชุดที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2.3 แสดงผลการคำนวณตามวิธีการของการทดสอบแจคไนฟ์ในตัวอย่างสุ่มชุดที่ 1

| j | $x_{1j}$ | $\bar{x}_{im}$ | $s^2_{1m}$ | $\log s^2_{1m}$ | $U_{1j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 95.78 | 100.113 | 4.124 | 0.6153 | 1.9003 |
| 2 | 102.77 | 99.34 | 4.910 | 0.6911 | 1.2181 |
| 3 | 100.32 | 99.61 | 6.179 | 0.7909 | 0.3199 |
| 4 | 103.50 | 99.26 | 4.209 | 0.6242 | 1.8202 |
| 5 | 98.45 | 99.82 | 6.026 | 0.7800 | 0.418 |
| 6 | 100.38 | 99.60 | 6.168 | 0.7901 | 0.3271 |
| 7 | 97.72 | 99.89 | 5.703 | 0.7561 | 0.6331 |
| 8 | 98.79 | 99.78 | 6.126 | 0.7872 | 0.3532 |
| 9 | 98.23 | 99.84 | 5.944 | 0.7741 | 0.4711 |
| 10 | 100.86 | 99.55 | 6.043 | 0.7813 | 0.4063 |

ตารางที่ 2.4 แสดงผลการคำนวณตามวิธีการของการทดสอบแจคไนฟ์ในตัวอย่างสุ่มชุดที่ 2

| $j$ | $x_{2j}$ | $\bar{x}_{2m}$ | $s^2_{2m}$ | $\log s^2_{2m}$ | $U_{2j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 101.78 | 99.24 | 6.214 | .7934 | 1.2214 |
| 2 | 101.55 | 99.26 | 6.840 | .8351 | 0.8461 |
| 3 | 95.94 | 99.89 | 5.299 | .7243 | 1.8433 |
| 4 | 98.53 | 99.60 | 6.745 | .8289 | 0.9019 |
| 5 | 97.84 | 99.68 | 6.522 | .8144 | 1.0324 |
| 6 | 100.23 | 99.41 | 6.792 | .8320 | 0.874 |
| 7 | 96.79 | 99.79 | 5.999 | .6665 | 2.3635 |
| 8 | 98.43 | 99.61 | 6.719 | .8273 | 0.9163 |
| 9 | 99.17 | 99.53 | 6.846 | .8355 | 0.8425 |
| 10 | 104.68 | 99.92 | 3.545 | .5497 | 3.4147 |

$$\bar{U}_1 = \frac{1.9003 + . . . + 0.4063}{10} = 0.78673$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1.2214 + . . . + 3.4147}{10} = 1.42561$$

$$\bar{U} = \frac{0.78673 + 1.42561}{2} = 1.10617$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10}(U_{ij}-\bar{U}_i)^2}{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)} = \frac{(1.9003-0.7863)^2+...+(0.4063-0.78673)^2+(1.2214-1.42561)^2+...+}{(10-1)+(10-1)}$$

$$= \frac{10.236}{18} = 0.569$$

$$J = \frac{\{10(0.78673 - 1.10617)^2 + 10\,(1.42561 - 1.10617)^2\} / (2-1)}{0.569}$$

$$= \frac{2.0408}{0.569} = 3.587$$

ดังนั้นค่าสถิติทดสอบแจคไนฟ์เท่ากับ 3.587

2.5.3 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบไคสแควร์ที่เสนอโดยเลยาร์ด (CS)

สถิติทดสอบ

$$CS = \frac{\sum_{i=1}^{2}\left[(n_i-1)\left(\ell n\, s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)\,\ell n\, s_i^2}{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)}\right)^2\right]}{\hat{\tau}^2}$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i-1}$$

$$\hat{\tau}^2 = 2 + \left[1 - (\frac{1}{\bar{n}})\right]\hat{\gamma}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2} n_i\right) \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^4}{\left\{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right\}^2} - 3$$

การคำนวณ

จากข้อ 2.5.1 : $s_1^2 = 5.5435$ , $s_2^2 = 6.859$ ดังนั้น

$\ln s_1^2 = 1.7126$, $\ln s_2^2 = 1.9256$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{10} (x_{ij} - \bar{x}_i)^4 = (95.78-99.68)^4+\ldots+(100.86-99.68)^4 +$$

$$(101.78-99.494)^4+\ldots+(104.68-99.494)^4$$

$$= 1551.3203$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{10} (x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = (95.68-99.68)^2+\ldots+(100.86-99.68)^2 +$$

$$= (101.78-99.494)^2 +\ldots+(104.68-99.494)^2$$

$$= 111.63$$

$$\therefore \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{10} (x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right]^2 = (11.63)^2 = 12387.69$$

$$\sum_{i=1}^{2} n_i = 20 \quad ; \bar{n} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\hat{\gamma} = \frac{20(1551.3203)}{12387.69} - 3 = -0.4954$$

$$\therefore \quad \hat{\tau}^2 = 2 + \left[1 - \frac{1}{10}\right] (-0.4954) = 1.554$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2} (n_i-1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{2} (n_i-1)} = \frac{(10-1)(1.7126)+(10-1)(1.9256)}{(10-1)+(10-1)} = \frac{32.7438}{18} = 1.8191$$

$$\therefore \quad CS = \{(10-1)[1.7126-(1.8191)]^2 + (10-1)[1.9256-(1.8191)]^2\}/1.554 = 0.1314$$

ดังนั้นค่าของสถิติทดสอบไคสแควร์ที่เสนอโดยเลยาร์ดเท่ากับ 0.1314

2.5.4 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบเลเวเน ($W_o$)

สถิติทดสอบ

$$W_o = \frac{\sum_{i=1}^{2} (n_i(\bar{U}_i - \bar{U})^2)/(2-1)}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij}-\bar{U}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{2} (n_i-1)}$$

นิยามตัวแปร $U_{ij}$ ดังนี้

$$U_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i| \quad ; \quad i=1,2; \quad j=1,\ldots,n_i$$

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i}$$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต

การคำนวณ

สำหรับตัวอย่างสุ่มชุดที่ 1,2: $\bar{x}_1 = 99.68$, $\bar{x}_2 = 99.494$ จากนิยามข้างต้นจะได้ $U_{1j}$ และ $U_{2j}$ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.5 แสดงข้อมูลเดิมของตัวอย่างสุ่มและตัวแปรใหม่ที่คำนวณได้ของตัวอย่างทั้งสองชุดสำหรับการคำนวณค่าสถิติ $W_o$

| $j$ | $x_{1j}$ | $U_{1j} = \|x_{1j}-\bar{x}_2\|$ | $x_{2j}$ | $U_{2j} = \|x_{2j}-\bar{x}_2\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 95.78 | 3.9 | 101.78 | 2.286 |
| 2 | 102.77 | 3.09 | 101.55 | 2.056 |
| 3 | 100.32 | 0.64 | 95.94 | 3.554 |
| 4 | 103.50 | 3.82 | 98.53 | 0.964 |
| 5 | 98.45 | 1.23 | 97.84 | 1.654 |
| 6 | 100.38 | 0.7 | 100.23 | 0.736 |
| 7 | 97.72 | 1.96 | 96.79 | 2.704 |
| 8 | 98.79 | 0.89 | 98.43 | 1.064 |
| 9 | 98.23 | 1.45 | 99.17 | 0.324 |
| 10 | 100.86 | 1.18 | 104.68 | 5.186 |
| ค่าเฉลี่ย | 99.68 | 1.886 | 99.494 | 2.053 |

$$\bar{U}_1 = \frac{3.9 + 3.09 + \ldots + 1.18}{10} = 1.886$$

$$\bar{U}_2 = \frac{2.286 + 2.056 + \ldots + 5.186}{10} = 2.053$$

$$\bar{U} = \frac{1.886 + 2.053}{2} = 1.9694$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10}(U_{ij}-\bar{U}_i)^2}{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)} = \frac{(3.9-1.886)^2+(3.09-1.886)^2+\ldots+(1.18-1.886)^2+\ldots+}{(10-1)+(10-1)}$$

$$= \frac{33.916}{18} = 1.884$$

$$\therefore \quad W_o = \frac{\left[10(1.886-1.9694)^2+10(2.053-1.9694)^2\right]/1}{1.884}$$

$$= \frac{0.139}{1.884}$$

$$= 0.0738$$

ดังนั้นค่าของสถิติทดสอบเลเวนเน ($W_o$) เท่ากับ 0.0738

2.5.5 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบที่ปรับปรุงจากสถิติทดสอบเลเวนเนโดยใช้ค่ามัธยฐานเป็นค่าวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลางแทนค่าเฉลี่ย ($W_{50}$)

สถิติทดสอบ

$$W_{50} = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i(\bar{U}_i-\bar{U})^2 \big/ (2-1)}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(U_{1j}-U_i)^2 \big/ \sum_{i=1}^{2}(n_i-1)}$$

นิยามตัวแปร $U_{ij}$ ดังนี้

$$U_{ij} = |x_{ij} - x_i'| \quad i\ 1,2, \quad ; j = 1,2,\ldots,n_i$$

$x_i'$ = ค่ามัธยฐานของตัวอย่างสุ่มชุดที่ i

การคำนวณ

ค่ามัธยฐาน ของตัวอย่างสุ่มหาได้โดยการเรียงลำดับข้อมูลชุดนั้น ๆ ก่อนแล้วเลือกข้อมูลหน่วยที่อยู่กึ่งกลางของชุดข้อมูลให้เป็นค่ามัธยฐาน กล่าวคือ ค่าดังกล่าวจะต้องมีจำนวนข้อมูลที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าตัวมันอยู่เป็นจำนวนเท่า ๆ กัน ดังนั้นในกรณีที่ข้อมูลมีจำนวนคู่จะต้องเฉลี่ยค่าที่อยู่ลำดับที่กึ่งกลางทั้ง 2 ตัวแล้วใช้ค่าเฉลี่ยนี้เป็นค่ามัธยฐาน

ตารางที่ 2.6 แสดงข้อมูลเดิมของตัวอย่างสุ่มและตัวแปรใหม่ที่คำนวณได้ของตัวอย่างทั้งสองชุด สำหรับการคำนวณค่าสถิติ $W_{50}$

| j | $x_{1j}$ | การเรียงลำดับของ $x_{1j}$ | $U_{1j}$ | $x_{2j}$ | การเรียงลำดับของ $x_{2j}$ | $U_{2j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 95.78 | . 95.78 | 3.78 | 101.78 | 95.94 | 1.91 |
| 2 | 102.77 | 97.72 | 1.84 | 101.55 | 96.79 | 2.06 |
| 3 | 100.32 | 98.32 | 1.33 | 95.94 | 97.84 | 1.01 |
| 4 | 103.50 | 98.45 | 1.11 | 98.53 | 98.43 | 0.42 |
| 5 | 98.45 | 98.79 | 0.77 | 97.84 | 98.53 | 0.32 |
| 6 | 100.38 | 100.32 | 0.76 | 100.23 | 99.17 | 0.32 |
| 7 | 97.72 | 100.38 | 0.82 | 96.79 | 100.23 | 1.38 |
| 8 | 98.79 | 100.86 | 1.3 | 98.43 | 101.55 | 2.7 |
| 9 | 98.23 | 102.77 | 3.21 | 99.17 | 101.78 | 2.93 |
| 10 | 100.86 | 103.50 | 3.94 | 104.68 | 104.68 | 5.83 |

จากตาราง $x_1' = \dfrac{98.79 + 100.32}{2} = 99.56$

$$x_2' = \frac{98.53 + 99.17}{2} = 98.85$$

$$\bar{U}_1 = \frac{3.78 + 1.84 + \ldots + 3.94}{10} = 1.886$$

$$\bar{U}_2 = \frac{2.91 + 2.06 + \ldots + 5.83}{10} = 1.988$$

$$\bar{U} = \frac{1.886 + 1.988}{2} = 1.937$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10}(U_{ij}-\bar{U})^2}{\sum_{i=1}^{2}(n_1-1)} = \frac{(3.78-1.886)^2 + (1.84-1.886)^2 + \ldots + (3.94-1.886)^2 + \ldots +}{(10-1)+(10-1)}$$

$$= \frac{40.825}{18} = 2.268$$

$$W_{50} = \frac{\left[10(1.886 - 1.937)^2 + 10\,(1.988 - 1.937)^2\right] / 1}{2.268}$$

$$= \frac{0.052}{2.268}$$

$$= 0.0229$$

ค่าของสถิติทดสอบที่ปรับปรุงจากสถิติเลเวนเน ($W_{50}$) เท่ากับ 0.0229

2.5.6 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบที่ปรับปรุงจากสถิติทดสอบเลเวนเนโดยใช้ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูล ซึ่งตัดปลายทั้งสองด้านออกไปแล้วด้านละ 10% และ 20% ($W_{10}$, $W_{20}$)

สถิติทดสอบ

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^{2} n_i\,(\bar{U}_i-\bar{U})^2 \Big/ (2-1)}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(U_{ij}-\bar{U}_i)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{2}(n_i-1)} \quad ; k = 10,20$$

นิยามตัวแปร $U_{ij}$ ดังนี้

$$U_{ij} = |x_{ij} - \tilde{x}_i| \quad ; i=1,2 \quad ; j=1,\ldots,n_i$$

$\tilde{x}_i$ = ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลซึ่งตัดปลายทั้งสองด้านออกไปแล้วด้านละ k% โดยที่ k = 10,20

การคำนวณ

ค่าเฉลี่ยที่ได้จากข้อมูลซึ่งตัดปลายทั้งสองด้านออกไปแล้วด้านละ k% โดยที่ k = 10 และ 20 นั้น หาได้โดยการจัดเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามากก่อนแล้วคำนวณหาเปอร์เซ็นต์ที่ต้องการตัดข้อมูลออก จากนั้นให้ตัดข้อมูลทางด้านปลายที่น้อยที่สุดและปลายทางด้านมากที่สุดออกไปด้านละ k% ดังกล่าว แล้วนำข้อมูลส่วนที่เหลือมาคำนวณหาค่าเฉลี่ย ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นค่าเฉลี่ยที่จะนำไปคำนวณหาค่าสถิติ $W_k$ เมื่อ k = 10,20 ต่อไป ในที่นี้จะแสดงวิธีการคำนวณเฉพาะกรณีที่ k = 10 เท่านั้น ซึ่งในกรณีที่ k = 20 ก็จะมีวิธีการเดียวกัน

เนื่องจากขนาดของตัวอย่างสุ่มเท่ากับ 10 ทั้ง 2 ชุด ดังนั้นปลายทั้ง 2 ด้านที่ต้องการตัดออกด้านละ 10% นั้นจะต้องตัดข้อมูลออกไปเป็นจำนวน 10 x 0.1 = 1 หน่วย สำหรับปลายแต่ละด้าน ดังจะแสดงในตารางที่ 2.7 ซึ่งจะอาศัยค่า $x_{ij}$ ที่เรียงลำดับแล้วจากตารางที่ 2.6 ดังนี้

ตารางที่ 2.7 แสดงข้อมูลที่เรียงลำดับแล้วและตัวแปรใหม่ที่คำนวณได้ของตัวอย่างทั้งสองชุด สำหรับการคำนวณค่าสถิติ $W_{10}$

| $j$ | $x_{ij}$ | $x_{1j}$ ที่เหลือ | $U_{1j}$ | $x_{2j}$ | $x_{2j}$ ที่เหลือ | $U_{2j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 95.78 | | 3.91 | 95.94 | | 3.35 |
| 2 | 97.72 | 97,72 | 1.97 | 96.79 | 96.79 | 2.5 |
| 3 | 98.23 | 98.23 | 1.46 | 97.84 | 97.84 | 1.45 |
| 4 | 98.45 | 98.45 | 1.24 | 98.43 | 98.43 | 0.86 |
| 5 | 98.79 | 98.79 | 0.9 | 98.53 | 98.53 | 0.76 |
| 6 | 100.32 | 100.32 | 0.63 | 99.19 | 99.17 | 0.12 |
| 7 | 100.38 | 100.38 | 0.69 | 100.23 | 100.23 | 0.94 |
| 8 | 100.86 | 100.86 | 1.17 | 101.55 | 101.55 | 2.26 |
| 9 | 102.77 | 102.77 | 3.08 | 101.78 | 101.78 | 2.49 |
| 10 | 103.50 | | 3.81 | 104.68 | | 5.39 |
| ค่าเฉลี่ย | | 99.69 | | | 99.29 | |

$$\bar{U}_1 = \frac{3.91 + 1.97 + \ldots + 3.81}{10} = 1.886$$

$$\bar{U}_2 = \frac{3.35 + 2.5 + \ldots + 5.39}{10} = 2.012$$

$$\bar{U} = \frac{1.886 + 2.012}{2} = 1.949$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{10}(U_{ij}-\bar{U}_i)^2}{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)} = \frac{(3.91-1.886)^2+\ldots+(3.81-1.886)^2+(3.35-2.012)^2+\ldots+}{(10-1)+(10-1)}$$

$$= \frac{35.99}{18}$$

$$= 1.999$$

ดังนั้นค่าของสถิติทดสอบที่ปรับปรุงจากสถิติทดสอบเลเวนเน ($W_{10}$) เท่ากับ 1.999

เนื่องจากในการวิจัยครั้งนี้สนใจที่จะศึกษาถึงความแกร่งของตัวสถิติดังกล่าวทั้ง 7 เมื่อข้อมูลที่มีอยู่นั้นมีการแจกแจงแบบสมมาตรชนิดหางยาวและแบบเบ้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกศึกษากับข้อมูลที่สร้างจากการแจกแจงแบบที(t distribution) แบบไคสแควร์ (Chi-Square distribution) แบบไวบูลล์ (Weibull distribution)นอกจากนี้ยังได้ศึกษาตัวสถิติเหล่านี้กับข้อมูลที่สร้างจากการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) ด้วยเพื่อใช้ทำการเปรียบเทียบผล ซึ่งรายละเอียดและคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการแจกแจงทั้งหมด จะนำเสนอดังต่อไปนี้

2.6 <u>การแจกแจงแบบปกติ</u> (Normal Distribution)

2.6.1 การแจกแจงแบบปกติ อาจกล่าวได้ว่า เป็นการแจกแจงที่สำคัญที่สุดในวิชาสถิติ และเป็นการแจกแจงซึ่งใช้อธิบายข้อมูลที่เกิดขึ้นโดยทั่วไปทางธรรมชาติ เช่น น้ำหนัก ความสูง เป็นต้น ค้นพบโดย เดอมูวร์ (De Movire:1667-1754) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ต่อมาลาปลาซ (Lapace:1749-1827) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้นำมาประยุกต์ใช้ในทางด้านสังคมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ อย่างแพร่หลาย หลังจากนั้นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันคือ เกาส์ (Gauss:1777-1855) ได้ขยายข่ายงานออกไปอีก โดยนำทฤษฎีนี้ไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (Error) โดยการวัดซ้ำ ๆ ในกลุ่มที่มีขนาดคงเดิม และพบว่าการแจกแจงที่ได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ดังนั้น การแจกแจงแบบปกติจึงอาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Gaussian Distribution

ฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf.) ของการแจกแจงแบบปกติคือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} .\exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right] \quad ; -\infty < x < \infty$$

โดยที่ $f(x)$ = แทนความสูงของโค้งที่วัดจากแกนนอน ณ จุดใด ๆ ทุกจุด (x)

$\sigma$ = ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

$\sigma^2$ = ความแปรปรวนของประชากร

$\mu$ = ค่าเฉลี่ยของประชากร

$\pi$ = 3.14159

e = 2.71828

x = ค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง

และค่า $\mu$ , $\sigma$ เป็นพารามิเตอร์ที่บอกถึงลักษณะของประชากรว่าประชากรนั้นมีตำแหน่งอยู่ที่ใด และมีการกระจายมากน้อยเพียงใด

2.6.2 การแจกแจงแบบปกติมีลักษณะและคุณสมบัติดังนี้

2.6.2.1 ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell Shaped)

2.6.2.2 เส้นแบ่งครึ่งโค้งอยู่ที่จุดที่เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล และเส้นนี้ทำให้เส้นโค้งที่อยู่สองข้าง มีลักษณะสมมาตร (Symmetry)

2.6.2.3 จุดที่เป็นค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมเป็นจุดเดียวกันหรือมีค่าเท่ากัน

2.6.2.4 มีความโด่ง (kurtosis) ของเส้นโค้ง เท่ากับ 3 ซึ่งเรียกว่า เมโซเคอร์ติค (Mesokurtic) และจุดเปลี่ยนโค้งทั้งสองข้างจะอยู่ ณ.ตรง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

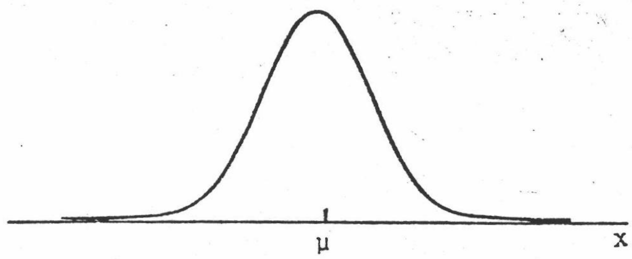
2.6.2.5 ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับศูนย์

2.6.2.6 ปลายทั้งสองข้างของเส้นโค้งจะค่อย ๆ ลดต่ำลง แต่ไม่จรดกับฐานของโค้งหรือแกนนอน

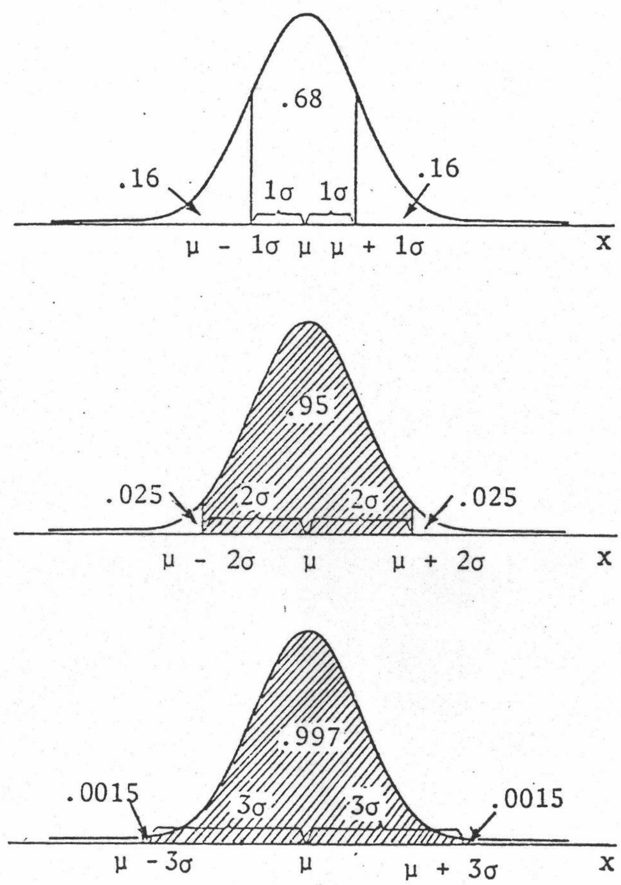
2.6.2.7 ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากแกน x (ซึ่งเป็นแกนนอน) ไปยังเส้นโค้ง โดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากจุดเฉลี่ย ($\mu$) ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาด้วยระยะหนึ่งเท่า, สองเท่า และสามเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($\sigma$) พื้นที่ที่ปิดกั้นเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68% 95% และ 99.7% ของพื้นที่ทั้งหมดตามลำดับ

2.6.2.8 พารามิเตอร์ $\mu$ และ $\sigma$ จะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งที่ตั้งของเส้นโค้งและความโค้งหรือแบบของโค้งตามลำดับ

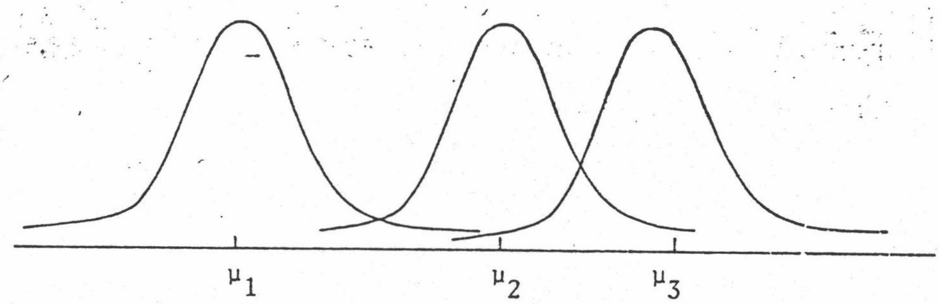
(ดูรูปที่ 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 ประกอบ)



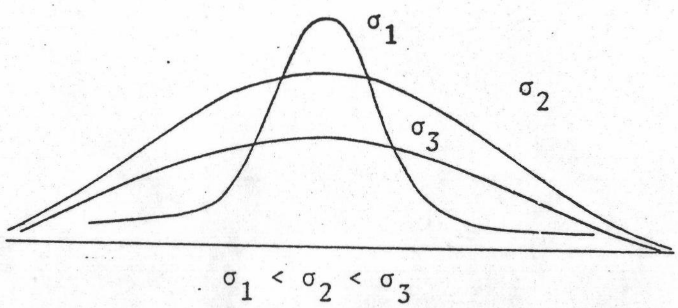

รูปที่ 2.2 แสดงเส้นโค้งการแจกแจงแบบปกติ




รูปที่ 2.3 แสดงพื้นที่ 68% 95% และ 99.7% ของเส้นโค้งปกติ




รูปที่ 2.4 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าเฉลี่ยต่าง ๆ กัน แต่มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน




รูปที่ 2.5 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน แต่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน

## 2.7 การแลกแจงแบบไคส์แควร์ (Chi-Square Distribution)

2.7.1 การแลกแจงแบบไคส์แควร์ ( $\chi^2$ Distribution) นั้น เอฟ.อาร์ฮิลเมอร์ท (F.R. Helmert : 1843-1917) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันเป็นผู้ค้นพบเป็นคนแรก เมื่อปี ค.ศ. 1876 ต่อมา คาลเพียสัน (Karl Pearson : 1857-1936) นักสถิติชาวอังกฤษ ได้ทำการพัฒนาและนำมาใช้ประโยชน์ได้อย่างแพร่หลายในปี ค.ศ. 1900

ไคส์แควร์เป็นคำเรียกสัญลักษณ์ $\chi^2$ ซึ่งเป็นอักษรกรีก $\chi$ อ่านว่า ไค ถ้าหากข้อมูล X เป็นตัวแปรอิสระ มีการแลกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sigma$ การนำเอาข้อมูล X แต่ละตัวมาแปลงเป็นค่า ซี โดยมีสูตรดังนี้

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

แล้วนำค่า ซีที่ได้แต่ละค่ามายกกำลังสองแล้วทำการแจกแจงความถี่ของ $Z^2$ ปรับพื้นที่ทั้งหมดให้เป็น 1 จะได้ลักษณะการกระจายแบบไคส์แควร์

สมมติแปลงข้อมูล X จำนวน n ค่า ซึ่งเป็นอิสระกัน เป็นค่า Z ยกกำลังสองแล้วนำมารวมกันจะได้

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{(X_2 - \mu)}{\sigma}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

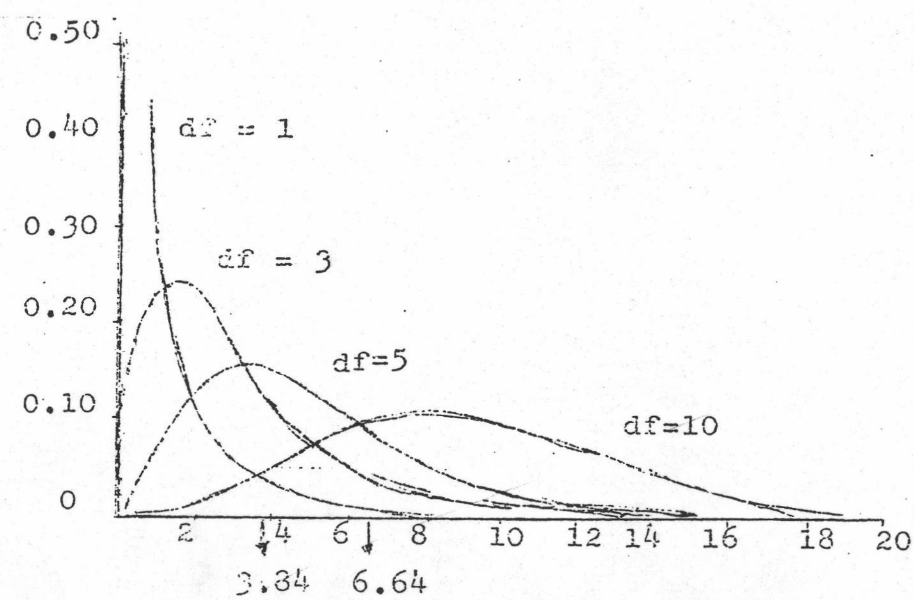
$$= \chi^2_{(n)}$$

โดยที่ $\chi^2_{(n)}$ อ่านว่า ไคส์แควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n ในกรณีที่ศึกษาด้วยกลุ่มตัวอย่างขนาด n และประมาณค่า $\mu$ ด้วย $\bar{X}$ จะได้ว่า

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(n-1)}$$ หรือเขียนในรูปความแปรปรวน $(s^2)$ จะได้สูตร

ดังนี้ $$\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \text{ โดยที่ } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

ลักษณะของการแจกแจงหรือการกระจายของค่าไคส์แควร์ จะเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (n) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การกระจายของไคส์แควร์จะแปรตามองศาของความเป็นอิสระ สำหรับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว ในที่นี้องศาความเป็นอิสระเท่ากับ n-1 ดังรูป




รูปที่ 2.6 แสดงการแจกแจงแบบไคส์แควร์ เมื่อองศาความเป็นอิสระระดับต่าง ๆ

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบไคส์แควร์คือ

$$f(x) = \frac{\exp\{-\frac{x}{2}\} \cdot x^{\frac{(n-2)}{2}}}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad ; x > 0 \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

โดยที่ n คือองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์นี้ จะมีลักษณะเบ้ทางขวา กล่าวคือ ข้อมูลค่ากลาง ๆ จะมีจำนวนมากกว่าข้อมูลที่มีค่าสูง เช่น ข้อมูลของอายุเจ้าบ่าว เมื่อพิจารณาจากจำนวนคู่สมรสในทะเบียนที่รวบรวมเกี่ยวกับการจดทะเบียนสมรส ณ ที่ทำการฯ แห่งหนึ่ง เป็นต้น

2.7.2 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบไคสแควร์ มีดังนี้

2.7.2.1 ค่าเฉลี่ยของการแจกแจง $\chi^2$ จะเท่ากับองศาความเป็นอิสระ (Degree of freedom:df) ของมัน ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ $\chi_n^2 = n$

2.7.2.2 ค่ามัธยฐานของ $\chi_n^2 = n-2$ $n \geqslant 2$

2.7.2.3 ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\chi_n^2 = \sqrt{2n}$ หรือมีความแปรปรวน $= 2n$

2.7.2.4 ค่าความเบ้ (Skewness) ของ $\chi_n^2$ เป็น $\sqrt{8/n}$ จึงทำให้ลักษณะการกระจายของ $\chi^2$ โดยทั่ว ๆ ไปมักจะมีลักษณะเบ้ทางบวกหรือเบ้ทางขวา (Positivety Skewed)

2.7.2.5 ค่า $\chi^2$ จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $+\infty$ คือมีค่าเป็นบวกทั้งหมด ทั้งนี้เนื่องจาก $\chi^2$ คือค่า $Z^2$ นั่นเอง

2.7.2.6 ถ้า n มีขนาดใหญ่แล้ว การแจกแจงของ $\chi^2$ จะมีลักษณะเข้าสู่การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น n และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\sqrt{2n}$

2.7.2.7 $\chi^2_{(n_1)} + \chi^2_{(n_2)}$ โดยที่ $\chi^2_{(n_1)}$ และ $\chi^2_{(n_2)}$ เมื่ออิสระกันจะมีการแจกแจงเช่นเดียวกับ $\chi^2_{(n_1+n_2)}$ เมื่อ $n_1, n_2$ เป็นขั้นของความเป็นอิสระของไคสแควร์ชุดที่ 1 และที่ 2 ตามลำดับ เช่น $\chi^2_{(5)} + \chi^2_{(12)} = \chi^2_{(17)}$

## 2.8 การแจกแจงแบบ ที (t Distribution)

2.8.1 การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ แต่มีลักษณะหางยาวอย่างเห็นได้ชัดเจนมากกว่าแบบปกติ โดยที่ข้อมูลที่มีลักษณะดังกล่าวมักจะมีค่าที่น้อยและมากซึ่งมีความแตกต่างจากข้อมูลส่วนใหญ่ตรงปลายทั้ง 2 ด้านของการแจกแจงรวมอยู่ด้วยเป็นจำนวนเท่า ๆ กัน (Symmetric) ซึ่ง กอสเซทท์ (W.S. Gossette) และ อาร์.เอ. ฟิชเชอร์ (R.A. Fisher) เป็นผู้ที่สร้างและปรับปรุงการแจกแจงชนิดนี้ขึ้นเมื่อปี 1908

t-Distribution หรือ Student's t-Distribution เป็นชื่อเรียกเพื่อเป็นเกียรติแก่ กอสเซทท์ ซึ่งได้พิมพ์ผลงานเรื่อง "Small Sample" โดยใช้นามปากกาว่า "Student"

การแจกแจงแบบที เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติและไคสแควร์ ซึ่งสามารถเขียนในสูตรรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$t_{(n)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}$$

เมื่อ n = องศาความเป็นอิสระ (Degree of freedom:df)

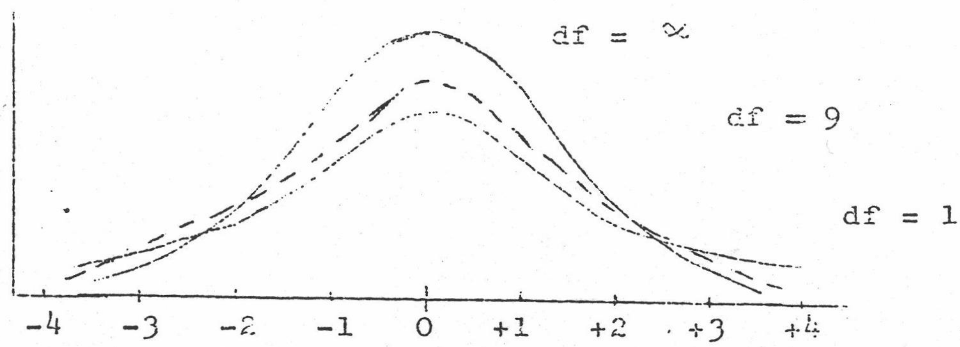
ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบทีคือ

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \quad ; -\infty < x < \infty \ ; n=1,2,...$$

โดยที่ B(a,b) เป็นเบต้าฟังก์ชัน ซึ่ง $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

และ n คือ องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom)

ลักษณะการกระจายของที จะแปรเปลี่ยนไปตามองศาความเป็นอิสระ ซึ่งในที่นี้คือ n หรือกล่าวได้ว่าการกระจายหรือการแจกแจงของที นั้นขึ้นอยู่กับขนาดกลุ่มตัวอย่างดังรูป




รูปที่ 2.7 แสดงการแจกแจงแบบที เมื่อ องศาความเป็นอิสระมีระดับต่าง ๆ

2.8.2. คุณสมบัติของการแจกแจงแบบที มีดังนี้

2.8.2.1 โค้งมีลักษณะเป็นสมมาตรและหางยาว

2.8.2.2 ค่าเฉลี่ย, มัธยฐานและฐานนิยมของ ที อยู่ที่จุดเดียวกัน ที่มีค่าเท่ากับ 0

2.8.2.3 ความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{n}{n-2}$ (เมื่อ n เป็นองศาความเป็นอิสระ > 2) ซึ่งจะมีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามากขึ้น

2.8.2.4 ถ้า n มีค่ามาก ๆ การกระจายจะมีลักษณะใกล้เคียงหรือเป็นโค้งปกติ

## 2.9 การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

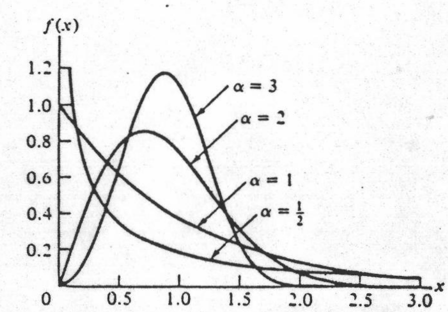
2.9.1 เป็นการแจกแจงที่เกิดขึ้น เนื่องจากรูปแบบความเป็นจริงโดยทั่วไป สำหรับอายุการใช้งานของเครื่องจักรกลต่าง ๆ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นและลักษณะของการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x > 0 \; ; \; \alpha > 0 \, , \beta > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์

$\alpha$ เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงรูปร่างของการแจกแจง (Shape parameter)

$\beta$ เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงขนาดของการแจกแจง (Scale parameter)




รูปที่ 2.8 แสดงการแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อ $\alpha$ มีขนาด $\frac{1}{2}$ , 1 , 2 , 3 และ $\beta$ มีขนาดเท่ากับ 1

2.9.2 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบ ไวบูลล์ มีดังนี้

2.9.2.1 โค้งมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์ $\alpha$ เมื่อ $\alpha = 2$ โค้งจะมีลักษณะเบ้ขวา ซึ่งจะเป็นลักษณะการแจกแจงที่คล้ายการแจกแจงแบบไคสแควร์

2.9.2.2 ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนขึ้นกับค่าพารามิเตอร์ $\alpha$ และ $\beta$ เช่นกันโดยที่ ค่าเฉลี่ย $= \frac{\beta}{\alpha} \Gamma \left( \frac{1}{\alpha} \right)$

$$\text{ความแปรปรวน} = \frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ 2\,\Gamma \left( \frac{2}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^2 \right\}$$

2.9.2.3 การแจกแจงไวบูลล์ที่มี $\alpha = 1$ และ $\beta$ เป็นค่าใด ๆ ที่มากกว่า 0 นั้นจะเหมือนกับการแจกแจงแบบเอ็กโปเนนเชียลที่มีพารามิเตอร์เป็น $\beta$ นั้นคือ

$$\text{Weibull } (1, \beta) \simeq \text{expo } (\beta)$$

## 2.10 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาเกี่ยวกับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนนั้น มีนักสถิติรุ่นใหม่หลายท่านได้ทำการศึกษาไว้ทั้งทางด้าน Nonparametric และ Parametric โดยศึกษาถึงค่าแอซซิมโทติค รีเรทีฟ เอฟฟิซเซียนซี (Asymptotic Relative Efficiency) และค่าอำนาจของการทดสอบของสถิติทดสอบทั้งสองประเภทตามลำดับ ซึ่งแต่ละงานวิจัยนั้นล้วนแล้วแต่ใช้วิธีการมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) ทั้งสิ้น ส่วนผลงานวิจัยที่จะนำเสนอต่อไปนี้ เป็นการศึกษาเปรียบเทียบตัวสถิติต่าง ๆ โดยอาศัยค่าอำนาจของการทดสอบเป็นเกณฑ์แทบทั้งสิ้นดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

มิลเลอร์ (Miller : 1968 : 567-582) ได้ศึกษาถึงความแกร่ง (Robustness) และอำนาจของการทดสอบ (Power of Test) ระหว่างการทดสอบเอฟ (F) การทดสอบบ๊อกซ์และแอนเดอร์สัน (Boxa and Anderson-test) การทดสอบแจคไนฟ์ (Jackknife-test) การทดสอบเลเวนเน (Levene's test) การทดสอบบ๊อกซ์ (Box-test) และการทดสอบโมเสส (Moses-test) เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน 2 รูปแบบคือ 10 และ 25 ภายใต้ลักษณะการแจกแจงแบบปกติ ยูนิฟอร์ม ดับเบิ้ลเอ็กโพเนนเชียล (Double Exponential)

สคิวเนสเอ็กโพเนนเชียล (Skewness Exponential) และการแจกแจงแบบ Sixth Power ได้ข้อสรุปดังนี้

1. การทดสอบเอฟไม่แกร่ง (Nonrobust) เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรไม่เป็นแบบปกติ

2. เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น 25 การทดสอบบ๊อกซ์และแอนเดอร์สันกับการทดสอบแจคไนฟ์ (k = 1) มีอำนาจการทดสอบพอ ๆ กันที่ $\alpha = 0.05$ และการทดสอบแจคไนฟ์จะมีอำนาจสูงกว่าเล็กน้อยที่ $\alpha = 0.01$

3. การทดสอบแจคไนฟ์ เมื่อ k = 5 นั้นมีอำนาจการทดสอบน้อยกว่าเมื่อ k = 1แต่ความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อ k = 5 ดีกว่า

4. เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 10 การทดสอบบ๊อกซ์และแอน-เดอร์สัน และการทดสอบแจคไนฟ์ เมื่อ k = 1 มีค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ต่างจากค่า $\alpha$ มาก

5. การทดสอบเลเวนเน เป็นการทดสอบที่แกร่ง (Robust) แต่จะมีอำนาจการทดสอบน้อยเมื่อเทียบกับการทดสอบแจคไนฟ์ และการทดสอบบ๊อกซ์ และแอนเดอร์สัน

จากการศึกษาของมิลเลอร์เกี่ยวกับความแกร่งและอำนาจของการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 6 ตัวดังกล่าวแล้วนี้ ไอ.เจ. ฮอลล์ (J.J. Hall) จาก นิวแมคซิโก สหรัฐอเมริกา (New Mexico, U.S.A.) ได้ทำการศึกษาเพื่อต้องการที่จะเปรียบเทียบการทดสอบแจคไนฟ์ที่แนะนำโดยมิลเลอร์(Ann. Math, Statist, 39, 567-587) กับการทดสอบวิธีอื่น ๆ โดยขยายจำนวนประชากรที่จะนำมาทดสอบจากสองประชากรให้มีจำนวนมากกว่าสองประชากรในปี 1972 ภายใต้ลักษณะการแจกแจงแบบเดียวกันทั้ง 5 การแจกแจง และการทดสอบ บาร์ตเลตจะถูกนำมาศึกษาเปรียบเทียบแทนการทดสอบเอฟ เนื่องจากจำนวนประชากรมีมากกว่า 2 ประชากร ซึ่งผลการทดลองศึกษาดังกล่าวสามารถสรุปได้สอดคล้องกับผลการศึกษาของมิลเลอร์ทุกประการ โดยที่การทดลองของฮอลล์ได้ปรับสัดส่วนของความแปรปรวนจาก $\Delta^2 = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ ของมิลเลอร์ให้เป็น $\delta = |\,p(p-1)/p^2| \cdot (\Delta - 1)^2$ ซึ่งได้มาจากสมการต่อไปนี้

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} (\sigma_i - \bar{\sigma})^2 \quad ; \quad p \quad \text{คือจำนวนประชากร}$$

$$\text{และ} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_i}{p}$$

และกำหนดให้ $\sigma_{i+1} - \sigma_i = d$ = ค่าคงที่ เพื่อที่จะสามารถมองเห็นอำนาจของการทดสอบได้ชัดเจนยิ่งขึ้นสำหรับสมมติฐานแย้งที่กำหนดให้ $\delta$ มีค่าใดค่าหนึ่งที่ไม่เท่ากับ 0 นั่นเอง ดังนั้นสัดส่วนของความแปรปรวนที่นำมาใช้ในการศึกษาของฮอลล์ จึงได้กำหนดให้เป็น $\sigma_i = \ldots = \sigma_{p-1}$ และ $\sigma_p = \Delta$ เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหา $\bar{\sigma}$

ในปี 1972 ซึ่งเป็นปีเดียวกันนี้เองเกมส์ (Games :887-909) ได้ทำการศึกษาในทำนองเดียวกันกับฮอลล์ หากแต่ตัวสถิติและลักษณะการแจกแจงของประชากรที่นำมาศึกษาส่วนใหญ่ได้เปลี่ยนแปลงไปดังนี้ สถิติทดสอบที่ศึกษาคือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบฮาร์ดเลย์ (หรือ $F_{max}$ test) สถิติทดสอบคอแครน (Cochran) สถิติทดสอบ $L-\chi^2$ และ L-A สถิติทดสอบบาร์ตเลย์และเคนดอล (Bartlett and Kendall's stactistic) สถิติทดสอบคิว (Q-test) และสถิติทดสอบ LEV2, LEV3 ภายใต้ลักษณะการแจกแจงต่อไปนี้ แบบปกติ แบบมีความเบ้ 3 ระดับคือ เบ้น้อย เบ้ปานกลาง และเบ้มาก แบบสมมาตรที่มีความโด่งแบบเลปโตเคอร์ติดและแบบยูนิฟอร์ม โดยศึกษา 2 กรณีคือ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 6 และ 18 ตามลำดับ ซึ่งเขาศึกษาเฉพาะเมื่อต้องการทดสอบความเท่ากันระหว่างความแปรปรวนของ 3 ประการเท่านั้น ผลการศึกษาสรุปได้เป็น 2 ประเด็นใหญ่ ๆ ดังนี้

1. อำนาจการทดสอบของ บาร์ตเลต และ $F_{max}$ จะสูงที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 6,ประชากร ซึ่งเป็นที่มาของตัวอย่างทั้ง 3 ชุดเป็นแบบปกติ และความแปรปรวนของประชากรไม่เท่ากันทั้งหมด ถึงแม้ว่าประชากรทั้ง 3 จะมีความเบ้บ้างเล็กน้อยแต่ก็จะไม่มีผลกระทบต่ออำนาจการทดสอบของตัวสถิติทั้งคู่ดังกล่าวนี้

2. กรณีที่ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 18 สถิติทดสอบบาร์ตเลตและเคนดอล สถิติทดสอบ Q มีอำนาจการทดสอบสูงและไม่แตกต่างกันมาก แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ สถิติทดสอบ LEV3 ซึ่งใช้วิธีเปรียบเทียบความแปรปรวนโดยการแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มย่อย (Subsample) จะสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ในการทดสอบได้ดี แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าตัวสถิติอื่น ๆ

และในปีถัดมา เลยาร์ด (Layard : 1973:195-198) ซึ่งทำงานที่หน่วย คณิตศาสตร์-สถิติ ในหน้าที่ Senior Starf ณ สถาบันมะเร็งแห่งชาติ แมรี่แลนด์ สหรัฐอเมริกา โดยที่เขายังคงมีความสนใจเกี่ยวกับสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนอยู่เป็นอย่างมาก แต่มาบัดนี้เขาได้เบนความสนใจดังกล่าวไปที่ความแกร่งของตัวสถิติทดสอบ เป็นหลัก โดยเจาะจงที่จะศึกษากลุ่มตัวอย่างจำนวน 4 กลุ่ม ซึ่งมีขนาดเท่ากันทั้งหมด คือ ขนาด 10 และ 15 ตามลำดับ กับตัวสถิติ 4 ประเภทคือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบ ไคสแควร์ ($\chi^2$ test) สถิติทดสอบบ๊อกซ์ (Box test) และสถิติทดสอบแจคไนฟ์ (Jackknife test) ด้วยวิธีการทดลองแบบมอนติคาร์โลเช่นกัน ภายใต้ลักษณะ การแจกแจงของประชากร 3 รูปแบบคือ ยูนิฟอร์ม (Uniform) แบบปกติ (Normal) และแบบดับเบิ้ลเอ็กซ์โปเนนเชียล (Double Exponential) เมื่ออัตราส่วนของความแปรปรวนกำหนดเป็น 1:1:1:1, 1:1:2:2, 1:2:3:4 และ 1:1:4:4 ผลของการศึกษาของเขาครั้งนี้สรุปได้ว่า สถิติทดสอบบ๊อกซ์ มีความแกร่ง (Roubust) แต่สถิติทดสอบบาร์ตเลตมีอำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ และเมื่อประชากรมีการแจกแจงที่ไม่เป็นแบบปกติ สถิติทดสอบแต่ละตัวจะมีอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างกันมากนัก นอกจากนี้ Layard ยังได้เสนอว่า หากต้องการสถิติทดสอบที่มีความแกร่งและมีอำนาจการทดสอบอยู่ในระดับที่สามารถยอมรับได้นั้นควรเลือกใช้สถิติทดสอบ $\chi^2$ หรือสถิติทดสอบแจคไนฟ์ เพราะถึงแม้ว่า สถิติทดสอบ Box จะมีความเชื่อถือได้เมื่อเกิดมีความผิดพลาดไปจากข้อตกลงเบื้องต้น แต่อำนาจการทดสอบจะต่ำกว่าสถิติทดสอบทั้ง 2 ตัวดังที่ได้กล่าวมาแล้ว