บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 เครื่องมือทดสอบ Falling Weight Deflectometer (FWD)

เครื่องมือทดสอบ FWD จัดเป็นเครื่องมือทดสอบเพื่อประเมินสภาพถนนที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในปัจจุบัน ตัวอย่างของเครื่องทดสอบชนิดนี้ ได้แก่ เครื่อง Dynatest FWD เครื่อง KUAB FWD และเครื่อง Phonix FWD ซึ่งในประเทศไทยโดยกรมทางหลวงได้รับมอบเครื่อง FWD รุ่น Dynatest 8000 จากประเทศเดนมาร์กตามโครงการออกแบบโครงสร้างถนนและประมาณความแข็งแรงของถนนโดยใช้เครื่อง FWD (ธีรชาติ พรหมศร, 2544) ลักษณะโดยทั่วไปและการใช้งานของเครื่อง FWD มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1.1 ลักษณะทั่วไป

เครื่อง FWD จะมีลักษณะเป็นรถพ่วงที่สามารถใช้รถตู้ลากไปในขณะปฏิบัติงานและสามารถวิ่งได้ที่ความเร็วเทียบเท่าการจราจรโดยทั่วไป ตัวอย่างของเครื่อง FWD ที่นิยมใช้กันในแถบยุโรปและฝั่งอเมริกาแสดงไว้ในรูปที่ 3.1 ส่วนประกอบโดยรวมของเครื่อง FWD ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 3.2 จะประกอบด้วยสองส่วนหลักที่สำคัญคือ

3.1.1.1 ส่วนที่ให้น้ำหนักกระทำ มีส่วนประกอบได้แก่ ก้อนน้ำหนัก แกนปล่อยน้ำหนัก แผ่นรองรับก้อนน้ำหนัก แผ่นโลหะถ่ายน้ำหนัก และแผ่นยางกันกระแทกที่ทำหน้าที่คล้ายสปริง โดยเครื่องมือจะมีแท่นรองรับก้อนน้ำหนักที่สามารถเพิ่มลดจำนวนลงได้ โดยมีแกนปล่อยน้ำหนักที่ตั้งฉากกับผิวถนน อีกทั้งระยะความสูงในการปล่อยน้ำหนักก็สามารถปรับเปลี่ยนได้ตามความเหมาะสมกับสภาพถนนที่ต้องการตรวจสอบ โดยปกติความสูงในการปล่อยก้อนน้ำหนักจะสามารถปรับได้ในช่วงระหว่าง 2 ถึง 20 นิ้ว (Chang et al., 1992) สำหรับกลไกควบคุมการยกและปล่อยก้อนน้ำหนักบนแผ่นรองรับก้อนน้ำหนักนั้นเป็นระบบอิเลคโทรไฮโดรลิกควบคุมโดยระบบคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ควบคุมสามารถจัดรูปแบบการให้น้ำหนักเพื่อให้เกิดแรงกระทำต่อโครงสร้างถนนตามความต้องการได้จากคีย์บอร์ดของเครื่องคอมพิวเตอร์เท่านั้น นอกจากนี้ในระหว่างการทดสอบระบบจะสามารถตรวจวัดแรง (ในหน่วยกิโลปาสคาล, kPa) ที่กระทำตั้งฉากกับแผ่นรองรับน้ำหนักได้อย่างถูกต้อง

3.1.1.2 ส่วนที่ใช้วัดสัญญาณเพื่อหาค่าการทรุดตัว (Geophone) เป็นส่วนที่สามารถทำการตรวจวัดค่าการทรุดตัว (ในหน่วยไมโครเมตร, μm) ที่เป็นผลจากแรงที่กระทำ โดยทั่วไปเครื่อง FWD จะประกอบด้วย Geophone ตั้งแต่ 7 ถึง 10 ตัวทำงานร่วมกัน โดยมี

Geophone หนึ่งตัวทำหน้าที่วัดค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนที่ตำแหน่งกึ่งกลางใต้จุดที่แรงทดสอบกระทำ ขณะที่ Geophone ตัวอื่นๆ ที่เหลือจะกระจายตัวเรียงกันบนแนวหน้าหรือหลัง Geophone ตัวแรก ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการทดสอบ แต่ละ Geophone จะถูกยึดติดกับแกนที่สามารถเลื่อนขึ้นลงโดยอัตโนมัติไปพร้อมกับแผ่นโลหะถ่ายน้ำหนัก สำหรับระยะห่างระหว่าง Geophone แต่ละตัวนั้นสามารถปรับเปลี่ยนได้ตามลักษณะการทดสอบ โดยปกติ Geophone แต่ละตัวจะมีระยะห่างกันประมาณ 30 เซนติเมตร

3.1.2 พฤติกรรมของโครงสร้างถนนขณะทดสอบ

ขณะทำการทดสอบด้วยเครื่อง FWD น้ำหนักกระทำชนิดแรงดลที่เกิดจากการปล่อยก้อนน้ำหนักให้ตกลงไปกระแทกและถ่ายแรงผ่านไปยังชั้นถนนนั้น จะส่งผลให้เกิดคลื่นของความเครียด (Stress wave) คลื่นดังกล่าวจะเกิดการแผ่กระจายไปในโครงสร้างถนนโดยมีลักษณะเป็นรูปครึ่งทรงกลม ดังแสดงในรูปที่ 3.3 การแผ่กระจายของคลื่นจะนำพาเอาพลังงานเนื่องจากแรงกระทำไปยังส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง ซึ่งพลังงานนี้เองเป็นสาเหตุให้เกิดการสั่นไหวที่ผิวของถนน

ลักษณะโดยทั่วไปของข้อมูลการทรุดตัวที่ถูกบันทึกได้จากเครื่อง FWD แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 เส้นกราฟแต่ละเส้นแสดงถึงค่าการทรุดตัวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาของแต่ละ Geophone ในขณะทำการทดสอบทั้งนี้จะเห็นได้ว่าค่าการทรุดตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละ Geophone นั้นจะมีช่วงเวลาเกิดที่เหลื่อมล้ำกัน โดยค่าการทรุดตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นก่อนใน Geophone ที่อยู่ใกล้กับแรงกระทำ และเกิดขึ้นภายหลังใน Geophone ที่อยู่ห่างออกไปตามลำดับ สำหรับสาเหตุที่ทำให้เกิดการทรุดตัวที่เหลื่อมล้ำกันนี้ เนื่องมาจากเวลาที่คลื่นจำเป็นต้องใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง

เมื่อพิจารณาค่าการทรุดตัวที่ผิวบนของโครงสร้างถนนที่ระยะต่างๆ ในแต่ละเวลาดังในรูปที่ 3.5 จะพบว่ากราฟของการทรุดตัวที่เกิดขึ้นจะเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละเวลา โดยเส้นประจะแสดงถึงค่าการทรุดตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละตำแหน่งของผิวถนน ซึ่งค่าดังกล่าวจะถูกนำไปใช้ในการคำนวณย้อนกลับในเชิงสถิต

3.1.3 ลักษณะการทำงาน

ในขณะทำการทดสอบนั้นเครื่อง FWD จะปล่อยก้อนน้ำหนักเพื่อให้เกิดแรงทดสอบกระทำไปบนโครงสร้างถนนโดยการปล่อยน้ำหนักทดสอบที่ทราบขนาดจากระดับความสูงที่กำหนดไว้ สำหรับขนาดของแรงกระทำสูงสุดโดยปกติจะมีค่าตั้งแต่ 2,000 ปอนด์จนถึงมากกว่า

20,000 ปอนด์ ขึ้นอยู่กับประเภทและรุ่นของเครื่อง FWD แรงกระทำที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะใกล้เคียงกับสัญญาณคลื่นรูป half-sine wave ในช่วงเวลาประมาณ 30 ถึง 40 มิลลิวินาที (Hossain, Zaniewski and Rajan, 1994; Sebaaly, Davis and Mamlouk, 1985) ก้อนน้ำหนักทดสอบจะตกลงกระแทกกับแผ่นรองรับที่เป็นยางโดยทำหน้าที่คล้ายสปริง (รูปที่ 3.2) ซึ่งขนาดของก้อนน้ำหนักทดสอบ ความสูงที่ปล่อยก้อนน้ำหนัก และคุณสมบัติของแผ่นยางรองรับต้องได้รับการออกแบบให้เหมาะสมเพราะเป็นส่วนสำคัญที่จะทำให้ได้ลักษณะแรงที่กระทำต่อโครงสร้างถนนมีขนาด รูปร่าง และช่วงเวลาของแรงกระทำที่เหมาะสมคล้ายคลึงกับลักษณะของแรงกระทำที่เกิดขึ้นเมื่อล้อรถบรรทุกหนักกระทำต่อโครงสร้างถนนขณะรถวิ่งผ่าน อย่างไรก็ตามในการทำงานทดสอบโดยใช้เครื่อง FWD นั้นค่าแรงกระทำสูงสุด จะได้รับการวัดและบันทึกโดยตัวควบคุมการให้น้ำหนัก (Load cell) ของเครื่อง FWD (รูปที่ 3.2)

ข้อมูลการทดสอบจากเครื่อง FWD สามารถจะใช้ในการจำลองรูปแบบของการทรุดตัวของโครงสร้างถนนเนื่องจากการจราจรได้ โดยได้มีการศึกษาทดสอบเปรียบเทียบผลที่ได้จากเครื่อง FWD กับผลที่เกิดจากสภาพน้ำหนักจริงที่กระทำกับถนนของล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนน ซึ่ง Tholen และคณะ (1992) ได้รายงานถึงความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีระหว่างผลของค่าการทรุดตัวที่วัดได้จากเครื่อง FWD กับผลของค่าการทรุดตัวทีเกิดจากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนนดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.6 ซึ่งแสดงถึงลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากเครื่อง FWD โดยทั่วไปซึ่งแสดงไว้เปรียบเทียบกับลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนน จะเห็นว่าผลสะท้อนที่ได้จากเครื่อง FWD นั้นไม่แตกต่างไปจากผลสะท้อนที่ได้จากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนนนักจะมีก็แต่ว่าสัญญาณค่าการทรุดตัวของเครื่อง FWD นั้น มีช่วงเวลาระหว่างสัญญาณเพียง 0.025 วินาทีซึ่งสั้นกว่าช่วงเวลาระหว่างสัญญาณที่เกิดจากล้อรถ ยิ่งไปกว่านั้นการที่เครื่อง FWD สามารถปรับขนาดของน้ำหนักทดสอบได้ตั้งแต่น้อยไปจนถึงน้ำหนักที่มากในลักษณะ Overload นั้นเป็นข้อดีอีกประการหนึ่งที่ทำให้สามารถทดสอบประเมินสภาพความแข็งแรงของโครงสร้างถนนได้ในหลายรูปแบบ สำหรับข้อมูลที่ได้จากเครื่อง FWD นั้นจะเป็นชุดของค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนที่วัดได้จากการปล่อยน้ำหนักในแต่ละจุดทดสอบ ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนต่อไป ในส่วนของการใช้เครื่อง FWD ตรวจสอบวัดสภาพความแข็งแรงของโครงสร้างถนนนั้นก่อนการทดสอบต้องตรวจให้แน่ใจด้วยว่าผิวรับสัญญาณของ Geophone สัมผัสกับผิวถนนได้เป็นอย่างดี หลังจากระบบได้รับสัญญาณที่อ่านได้จาก Geophone แล้วสัญญาณของค่าการทรุดตัวที่วัดได้จะได้รับการบันทึกโดยระบบเก็บข้อมูลคอมพิวเตอร์ที่ต่ออยู่กับ Geophones ในทางปฏิบัตินั้นผู้ควบคุมเครื่องเพียงหนึ่งคนสามารถควบคุมเครื่องผ่านระบบคอมพิวเตอร์จากภายในรถลากเครื่อง FWD จากนั้นเมื่อเครื่อง

FWD เคลื่อนมาถึงยังตำแหน่งที่ต้องการบนถนนที่จะทำการตรวจสอบ เครื่อง FWD ต้องหยุดเพื่อปล่อยก้อนน้ำหนักพร้อมทั้งวัดค่าการทรุดตัว โดยปกติจะทำการวัดค่าทุกระยะ 50 ถึง 100 เมตร โดยเวลาที่ใช้ในการทดสอบแต่ละจุดไม่เกิน 5 นาที

3.2 การคำนวณย้อนกลับ

ปัญหาที่ต้องใช้วิธีการคำนวณย้อนกลับส่วนใหญ่มักพบบ่อยครั้งในงานด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม โดยผลที่ได้จากการแก้ปัญหานี้มักจะเป็นค่าพารามิเตอร์ที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบได้ ลักษณะของปัญหาจะเป็นไปตามรูปที่ 3.7 ยกตัวอย่างเช่น ระบบการทดสอบออกแรงดึงสปริง ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึง (F) และการยืดตัว (x) คือ $F = kx$ เมื่อ k คือ ค่าคงที่ของสปริง โดยในปัญหานี้ต้องการจะทราบค่า พารามิเตอร์ k ที่จะสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง แรงดึงและระยะยืดของสปริงได้ จากปัญหาที่กล่าวมาเมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 3.7 ค่าที่ป้อนเข้า (input) จะหมายถึง แรงดึงของสปริง ส่วนกระบวนการ (process) จะหมายถึง แบบจำลองของความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงและระยะยืดที่เกิดขึ้น ส่วนผลลัพธ์ (output) ของระบบจะหมายถึง ระยะยืดที่วัดได้จากเครื่องมือทดสอบ เมื่อทราบข้อมูลของค่าที่ป้อนเข้า (แรงดึง) และผลลัพธ์ที่ได้ (ระยะยืด) แล้วทำการเลือกกระบวนการหรือแบบจำลองที่เหมาะสม ($F = kx$) ก็จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบที่เป็นไปได้ของค่าพารามิเตอร์ (k) ที่จะอธิบายพฤติกรรมของระบบดังกล่าว

ในการคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าคุณสมบัติของโครงสร้างถนนจากข้อมูลการทดสอบด้วยเครื่อง FWD ในลักษณะพลวัตนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.8 โดยค่าที่ป้อนเข้าจะประกอบด้วย ข้อมูลของน้ำหนักกระทำ ตำแหน่งที่วัดการทรุด ค่าคุณสมบัติของวัสดุในแต่ละชั้นของถนน อันประกอบด้วย ค่าอัตราส่วนปัวซอง ความหนาแน่น ความหนาของชั้นถนน และค่าโมดูลัสเริ่มต้น ส่วนผลลัพธ์ที่ได้ออกมา คือ ค่าการทรุดตัวที่ตำแหน่งต่างๆ จากนั้นจึงทำการเลือกแบบจำลองของโครงสร้างถนนที่รับแรงกระทำแบบพลวัตและวิธีการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุด ก็จะวิเคราะห์หาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของชั้นถนนออกมาได้

3.3 แบบจำลองของโครงสร้างถนนที่รับแรงกระทำแบบพลวัต

โครงสร้างถนนจะถูกจำลองให้มีลักษณะเป็นตัวกลางยืดหยุ่นหลายชั้น ที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุจำนวนหลายชั้นที่วางตัวอยู่บนชั้นดินยืดหยุ่น (รูปที่ 3.9 ก) หรือบนชั้นหินแข็ง (รูปที่ 3.9 ข) ในแต่ละชั้นของวัสดุจะพิจารณาเป็นตัวกลางยืดหยุ่นเนื้อเดียว ในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำในลักษณะพลวัต โดยแรงที่มากระทำจะมีลักษณะเป็นแรงดล ที่สมมาตรรอบแกน (Axisymmetric

loading) และมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอภายใต้แผ่นโลหะวงกลมที่ถ่ายน้ำหนักกระทำจากเครื่อง FWD (รูปที่ 3.9) ในการศึกษานี้จะใช้แบบจำลองของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนเป็นชนิดยืดหยุ่นเชิงเส้น การที่ให้วัสดุมีพฤติกรรมเป็นเชิงเส้นได้เพราะในการทดสอบไม่ทำลายด้วยเครื่อง FWD จะให้น้ำหนักกระทำน้อย ซึ่งช่วงที่น้ำหนักกระทำดังกล่าว ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นจะประมาณได้ด้วยเส้นตรง

3.3.1 <u>รูปคำตอบทั่วไป</u>

การวิเคราะห์หาค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนในลักษณะพลวัต เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของกฎข้อที่สองของนิวตัน ในระบบทางกลศาสตร์ที่มีความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) โดยกฎของนิวตันสามารถเขียนเป็นสมการ Navier's displacement equation of motion ที่แสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ดังนี้

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial r}+\mu\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r} \quad =\rho \ddot{u}_r \tag{3.1}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z \quad =\rho \ddot{u}_z \tag{3.2}$$

เมื่อ $e = \frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$ (3.3)

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.4}$$

เมื่อ u_r และ u_z คือ การเคลื่อนที่บนผิวถนนในทิศทางแกนรัศมี (r) และแกนดิ่ง (z) ตามรูปที่ 3.9 ρ คือ ความหนาแน่นมวล (Mass density) λ และ μ คือ ค่าคงที่ Lame's constants และเครื่องหมาย " $\ddot{}$ " ที่ปรากฏบนฟังก์ชัน หมายถึง การหาอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันเทียบกับเวลา

เนื่องจากสมมติฐานข้างต้นทำให้การเคลื่อนที่ในแนว θ หรือ u_θ ไม่เกิดขึ้น ในการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ u_r และ u_z จะสามารถจัดให้อยู่ในรูปของ Lame potentials $\phi(r,z,t)$ และ $\chi(r,z,t)$ ได้ดังนี้

$$u_r=\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \tag{3.5}$$

$$u_z=\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right) \tag{3.6}$$

โดยการแทนค่าสมการที่ 3.5 และ 3.6 ลงในสมการที่ 3.1 และ 3.2 ก็จะได้ความสัมพันธ์ของ $\phi(r,z,t)$ และ $\chi(r,z,t)$ ดังนี้

$$c_1^2\nabla^2\phi = \ddot{\phi} \tag{3.7}$$

$$c_2^2\nabla^2\chi = \ddot{\chi} \tag{3.8}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3.9}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดังสมการที่ 3.7 และ 3.8 เพื่อหาค่า Lame potentials จะใช้วิธีการแปลงลาปลาซเพื่อแปลงเวลา (t) ให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซ และวิธีการแปลงฮันเกลเพื่อแปลงระยะทาง (r) ให้อยู่ในโดเมนของฮันเกล

ให้การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของฟังก์ชัน $y(r,z,t)$ เทียบกับตัวแปร t เขียนแทนด้วย $\bar{y}(r,z,p)$ และ

$$\bar{y}(r,z,p) = \int_0^\infty y(r,z,t)e^{-pt}dt \tag{3.10}$$

เมื่อ p คือ พารามิเตอร์ของการแปลงลาปลาซ (Laplace transform parameter) และเครื่องหมาย " $\bar{}$ " ที่ปรากฏบนฟังก์ชัน หมายถึง การแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซ

ให้การแปลงฮันเกล (Hankel transform) อันดับที่ m ของฟังก์ชัน $\bar{y}(r,z,p)$ เทียบกับตัวแปร r เขียนแทนด้วย $y^*(\xi,z,p)$ และ การหาส่วนผกผันของฮันเกล คือ

$$y^*(\xi,z,p) = \int_0^\infty r\bar{y}(r,z,p)J_m(\xi r)dr \tag{3.11}$$

$$\bar{y}(r,z,p) = \int_0^\infty \xi y^*(\xi,z,p)J_m(\xi r)d\xi \tag{3.12}$$

เมื่อ ξ คือ พารามิเตอร์ของการแปลงฮันเกล (Hankel transform parameter) และ J_m คือ ฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่ m และเครื่องหมาย " * " ที่ปรากฏบนฟังก์ชัน หมายถึง การแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซและฮันเกล

โดยใช้ การแปลงลาปลาซกับสมการที่ 3.7 และ 3.8 เทียบกับ t จะได้

$$\nabla^2\bar{\phi} - k_1^2\bar{\phi} = 0 \tag{3.13}$$

$$\nabla^2\bar{\chi} - k_2^2\bar{\chi} = 0 \tag{3.14}$$

เมื่อ $$k_1 = \frac{p}{c_1} \qquad k_2 = \frac{p}{c_2} \tag{3.15}$$

ใช้วิธี Separation of variables กับสมการที่ 3.13 และ 3.14 โดยกำหนดให้ค่า Lame potentials อยู่ในรูปผลคูณระหว่างฟังก์ชันของระยะทาง r หรือ $R(r)$ และฟังก์ชันของระยะในแนวดิ่ง z หรือ $Z(z)$ ดังนี้

$$\phi(r,z,p) = R_1(r)\,Z_1(z) \tag{3.16}$$

$$\chi(r,z,p) = R_2(r)\,Z_2(z) \tag{3.17}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ 3.16 และ 3.17 ลงในสมการที่ 3.13 และ 3.14 จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $R_i(r)$ ดังสมการที่ 3.18

$$r\frac{d^2R_i}{dr^2} + \frac{dR_i}{dr} - (k_i^2 - p)rR_i = 0 \tag{3.18}$$

โดย i เท่ากับ 1 และ 2 เมื่อพิจารณาสมการที่ 3.13 และ 3.14 ตามลำดับ

สมการที่ 3.18 จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลอันดับที่ศูนย์ เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีการเคลื่อนที่สมมาตรรอบแกนดิ่ง ดังนั้น ในการแปลงฮันเกลดังสมการที่ 3.11 กับสมการที่ 3.13 และ 3.14 จะใช้เบสเซลฟังก์ชันอันดับที่ศูนย์

โดยการใช้การแปลงฮันเกลกับสมการที่ 3.13 และ 3.14 เทียบกับ r แล้วทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์และหาส่วนผกผันของฮันเกลดังสมการที่ 3.12 จะได้ผลเฉลยของ Lame potentials ในโดเมนของลาปลาซ ดังนี้

$$\bar{\phi}(r,z,p) = \int_0^\infty \left[A(\xi,p)e^{-k_2\alpha_1 z} + B(\xi,p)e^{k_2\alpha_1 z}\right] J_0(\xi r)\,d\xi \tag{3.19}$$

$$\bar{\chi}(r,z,p) = \int_0^\infty \left[C(\xi,p)e^{-k_2\alpha_2 z} + D(\xi,p)e^{k_2\alpha_2 z}\right] J_0(\xi r)\,d\xi \tag{3.20}$$

โดย $$k_2\alpha_1 = \sqrt{\xi^2 + k_1^2} \qquad k_2\alpha_2 = \sqrt{\xi^2 + k_2^2} \tag{3.21}$$

เมื่อ A, B, C และ D เป็นฟังก์ชันค่าเลือก (Arbitrary functions) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบและเงื่อนไขความต่อเนื่อง (Boundary/continuity condition)

จากสมการที่ 3.3 3.4 3.19 และ 3.20 จะได้ผลเฉลยของการเคลื่อนที่ u_r และ u_z ในโดเมนของลาปลาซดังนี้

$$\bar{u}_r = \int_0^\infty \left[-\xi A e^{-k_2\alpha_1 z} - \xi B e^{k_2\alpha_1 z} + k_2\alpha_2 \xi C e^{-k_2\alpha_2 z} - k_2\alpha_2 \xi D e^{k_2\alpha_2 z} \right] J_1(\xi r) d\xi \qquad (3.22)$$

$$\bar{u}_z = \int_0^\infty \left[-k_2\alpha_1 A e^{-k_2\alpha_1 z} + k_2\alpha_1 B e^{k_2\alpha_1 z} + \xi^2 C e^{-k_2\alpha_2 z} + \xi^2 D e^{k_2\alpha_2 z} \right] J_0(\xi r) d\xi \qquad (3.23)$$

โดยค่าความเค้น σ_{zr} และ σ_{zz} สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \qquad (3.24)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (3.25)$$

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการที่ 3.24 และ 3.25 และจากสมการที่ 3.22 และ 3.23 จะได้ผลเฉลยของค่าความเค้น $\bar{\sigma}_{zr}$ และ $\bar{\sigma}_{zz}$ ที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ u_r และ u_z ตามลำดับในโดเมนของลาปลาซดังนี้

$$\bar{\sigma}_{zr} = \mu \int_0^\infty \left[2k_2\alpha_1 A e^{-k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_1 B e^{k_2\alpha_1 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right) C e^{-k_2\alpha_2 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right) D e^{k_2\alpha_2 z} \right] \xi J_1(\xi r) d\xi \qquad (3.26)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \mu \int_0^\infty \left[\left(2\xi^2 + k_2^2\right) A e^{-k_2\alpha_1 z} + \left(2\xi^2 + k_2^2\right) B e^{k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_2 \xi^2 C e^{-k_2\alpha_2 z} + 2k_2\alpha_2 \xi^2 D e^{k_2\alpha_2 z} \right] J_0(\xi r) d\xi \qquad (3.27)$$

เพื่อให้ผลเฉลยอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นจะพิจารณาฟังก์ชันของการเคลื่อนที่และความเค้นให้อยู่ในโดเมนของลาปลาซและฮันเกลซึ่งจะไม่อยู่ในรูปของปริพันธ์ โดยการพิจารณาเปรียบเทียบการหาส่วนผกผันของฮันเกลกับการเคลื่อนที่และความเค้นที่อยู่ในโดเมนของลาปลาซและฮันเกลดังนี้

$$\bar{u}_r(r, z, p) = \int_0^\infty u_r^*(\xi, z, p) J_1(\xi r) \xi d\xi \qquad (3.28)$$

$$\bar{u}_z(r,z,p) = \int_0^\infty u_z^*(\xi,z,p) J_0(\xi r)\xi d\xi \tag{3.29}$$

$$\bar{\sigma}_{zr}(r,z,p) = \int_0^\infty \sigma_{zr}^*(\xi,z,p) J_1(\xi r)\xi d\xi \tag{3.30}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(r,z,p) = \int_0^\infty \sigma_{zz}^*(\xi,z,p) J_0(\xi r)\xi d\xi \tag{3.31}$$

พิจารณาค่าปริพัทธ์ของสมการที่ 3.22 3.23 3.26 และ 3.27 เปรียบเทียบสมการที่ 3.28 3.29 3.30 และ 3.31 ตามลำดับ จะได้รูปคำตอบทั่วไปของการเคลื่อนที่และความเค้นในโดเมนของลาปลาซและฮันเกลดังนี้

$$u_r^*(\xi,z,p) = -Ae^{-k_2\alpha_1 z} - Be^{k_2\alpha_1 z} + k_2\alpha_2 Ce^{-k_2\alpha_2 z} - k_2\alpha_2 De^{k_2\alpha_2 z} \tag{3.32}$$

$$u_z^*(\xi,z,p) = -\frac{k_2}{\xi}\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z} + \frac{k_2}{\xi}\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z} + \xi Ce^{-k_2\alpha_2 z} + \xi De^{k_2\alpha_2 z} \tag{3.33}$$

$$\sigma_{zr}^*(\xi,z,p) = \mu\left[2k_2\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ce^{-k_2\alpha_2 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)De^{k_2\alpha_2 z}\right] \tag{3.34}$$

$$\sigma_{zz}^*(\xi,z,p) = \frac{\mu}{\xi}\left[\left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ae^{-k_2\alpha_1 z} + \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Be^{k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_2\xi^2 Ce^{-k_2\alpha_2 z} + 2k_2\alpha_2\xi^2 De^{k_2\alpha_2 z}\right] \tag{3.35}$$

ซึ่งสามารถจัดสมการที่ 3.32 ถึง 3.35 ได้ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{u}^*(\xi,z,p) = \mathbf{R}(\xi,z,p)\mathbf{C}(\xi,p) \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\xi,z,p) = \mathbf{S}(\xi,z,p)\mathbf{C}(\xi,p) \tag{3.37}$$

เมื่อ

$$\mathbf{u}^*(\xi,z,p) = \begin{bmatrix} u_r^* & u_z^* \end{bmatrix}^T \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\xi,z,p) = \begin{bmatrix} \sigma_{zr}^* & \sigma_{zz}^* \end{bmatrix}^T \tag{3.39}$$

$$\mathbf{C}(\xi,p) = \begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix}^T \tag{3.40}$$

โดย

$$\mathbf{R}(\xi,z,p)=\begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z} & -e^{k_2\alpha_1 z} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z} & \xi e^{k_2\alpha_2 z} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{S}(\xi,z,p)=\mu\begin{bmatrix} 2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z} & -2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z} \\ \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z}}{\xi} & -2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z} & 2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

สัญลักษณ์ T ที่ปรากฏ หมายถึง **ทรานสโพสของเมทริกซ์**

3.3.2 <u>สมการสติฟเนสเมทริกซ์</u>

พิจารณาแบบจำลองโครงสร้างชั้นถนนที่มี N ชั้นตามรูปที่ 3.9 ในกรณีนี้เราจะสามารถแบ่งชั้นของโครงสร้างถนนได้เป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ ส่วนที่เป็นชั้นที่มีความลึกจำกัด (จำนวน N ชั้น) และส่วนที่เป็นชั้นดินยืดหยุ่นที่มีความลึกอนันต์ (ชั้นที่ $N+1$ ในรูปที่ 3.9 ก) พิจารณาความสัมพันธ์ของการทรุดตัวและความเค้นที่ผิวบนและล่างของชั้นที่มีความลึกจำกัดชั้นที่ n (n = 1, 2, 3,.., N) จะได้ความสัมพันธ์จากสมการที่ 3.36 และ 3.37 เป็นดังนี้

$$\mathbf{U}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(\xi,z_n,p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{R}_n(\xi,z_{n+1},p) \end{bmatrix}\mathbf{C}_n \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{U}_n^* = \mathbf{R}_n\mathbf{C}_n \tag{3.43}$$

$$\mathbf{F}_n^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_n(\xi,z_n,p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{S}_n(\xi,z_{n+1},p) \end{bmatrix}\mathbf{C}_n \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{F}_n^* = \mathbf{S}_n\mathbf{C}_n \tag{3.44}$$

เมื่อ $$\mathbf{U}_n^* = \left[\mathbf{u}_n^*(\xi,z_n,p) \quad \mathbf{u}_n^*(\xi,z_{n+1},p)\right]^T \tag{3.45}$$

$$\mathbf{F}_n^* = \left[\boldsymbol{\sigma}_n^*(\xi,z_n,p) \quad \boldsymbol{\sigma}_n^*(\xi,z_{n+1},p)\right]^T \tag{3.46}$$

ในสมการข้างต้น $\mathbf{U}_n^*$ และ $\mathbf{F}_n^*$ เป็นเวคเตอร์ของค่าการทรุดตัวและหน่วยแรงที่ผิวบนและล่างของแต่ละชั้นตามลำดับ ส่วนค่า $\mathbf{C}_n$ ในสมการที่ 3.43 และ 3.44 เป็นเวคเตอร์ของฟังก์ชันค่าเลือกที่สอดคล้องในแต่ละชั้น จากการจัดรูปสมการที่ 3.43 และ 3.44 ใหม่จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathbf{U}_n^*$ และ $\mathbf{F}_n^*$ ดังนี้

$$\mathbf{F}_n^* = \mathbf{K}_n^*\mathbf{U}_n^* \qquad (n = 1\,2\,3,..,N) \tag{3.47}$$

โดยที่ $\mathbf{K}_n^* = \mathbf{S}_n \mathbf{R}_n^{-1}$ (3.48)

เมื่อ

$$\mathbf{R}_n(\xi,z,p)=\begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z_n} & -e^{k_2\alpha_1 z_n} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_n} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_n} & \xi e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ -e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & \xi e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{S}_n(\xi,z,p)=\mu\begin{bmatrix} -2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_n} & 2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_n} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z_n} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_n}}{\xi} & 2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z_n} & -2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ 2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \\ \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}}}{\xi} & -2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & 2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

เมื่อ $\mathbf{K}_n^*$ ในสมการที่ 3.47 และ 3.48 คือ สติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ n ซึ่ง $\mathbf{K}_n^*$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด 4×4 และขึ้นอยู่กับ ความหนาของชั้น ค่าคุณสมบัติของวัสดุ และค่าพารามิเตอร์ ξ และ p

สำหรับความสัมพันธ์ของการทรุดตัวและความเค้นที่ผิวบนของชั้นที่มีความลึกอนันต์ (ชั้นกึ่งปริภูมิ) หรือชั้นที่ $N+1$ (รูปที่ 3.9 ก) เป็นดังนี้

$$\mathbf{F}_{N+1}^* = \mathbf{K}_{N+1}^* \mathbf{U}_{N+1}^* \quad (3.51)$$

เมื่อ $\mathbf{U}_{N+1}^* = \left[\mathbf{u}_{N+1}^*(\xi,z_{N+1},p)\right]^T$ (3.52)

$$\mathbf{F}_{N+1}^* = \left[\boldsymbol{\sigma}_{N+1}^*(\xi,z_{N+1},p)\right]^T \quad (3.53)$$

และโดยเงื่อนไขสภาพขอบ ที่ความลึกอนันต์นั้น การทรุดตัวและความเค้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ ค่า B และ D ในสมการที่ 3.32 ถึง 3.35 จะเท่ากับศูนย์ จะได้

$$\mathbf{R}_{N+1}(\xi,z,p)=\begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\mathbf{S}_{N+1}(\xi,z,p)=\mu\begin{bmatrix}-2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}}\\ -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}}}{\xi} & 2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}}\end{bmatrix} \tag{3.55}$$

และ $\mathbf{K}^{*}_{N+1}=\mathbf{S}_{n+1}\,\mathbf{R}^{-1}_{N+1}$ (3.56)

นั่นคือ

$$\mathbf{K}^{*}_{N+1}=\frac{\mu}{k_2^2\alpha_1\alpha_2-\xi^2}\begin{bmatrix}k_2^3\alpha_1 & \xi\left(2k_2^2\alpha_1\alpha_2-2\xi^2-k_2^2\right)\\ \xi\left(2k_2^2\alpha_1\alpha_2-2\xi^2-k_2^2\right) & k_2^3\alpha_{21}\end{bmatrix} \tag{3.57}$$

จะเห็นได้ว่าสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ $N+1$ หรือ $\mathbf{K}^{*}_{N+1}$ นั้นจะเป็นเมทริกซ์สมมาตร ขนาด 2×2 และขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติของวัสดุ และค่าพารามิเตอร์ ξ และ p เท่านั้น

จากนั้นก็ทำการรวมสติฟเนสเมทริกซ์ในแต่ละชั้น ก็จะได้สติฟเนสเมทริกซ์รวมของทั้งโครงสร้าง คือ

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{F}^{(1)}\\ \mathbf{F}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{F}^{(N)}\\ \mathbf{F}^{(N+1)}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{K}^{(1)} & & & \\ & \mathbf{K}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}^{(N)} \\ & & & & \mathbf{K}^{(N+1)}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}^{(1)}\\ \mathbf{U}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{U}^{(N)}\\ \mathbf{U}^{(N+1)}\end{Bmatrix} \tag{3.58}$$

สำหรับค่าหน่วยแรงทางด้านซ้ายมือของสมการที่ 3.58 นั้น $F^{(1)}$ จะมีค่าเท่ากับหน่วยแรงที่กระทำที่ผิวบนของโครงสร้างถนนซึ่งประกอบด้วยความเค้นในแนวตั้งฉากกับผิวถนนที่มีค่าเท่ากับความเค้นเนื่องจากน้ำหนักทดสอบจากเครื่อง FWD และความเค้นเฉือนที่มีค่าเป็นศูนย์ ส่วน F อื่นๆ จะเท่ากับศูนย์เพราะไม่มีแรงกระทำภายนอกที่ผิวรอยต่อระหว่างชั้นของถนน

จาก $\mathbf{K}^{*}_{n}$ ของทุกชั้น และ $\mathbf{K}^{*}_{N+1}$ จะสามารถสร้างโกลบัลสติฟเนสเมทริกซ์ (Global Stiffness Matrix) ที่มีขนาด $2(N+1)\times 2(N+1)$ กรณีที่โครงสร้างชั้นถนนวางอยู่บนชั้นดินยืดหยุ่น และมีขนาด $2N\times 2N$ กรณีที่โครงสร้างชั้นถนนวางอยู่บนชั้นหินแข็ง

เพื่อให้การทดสอบด้วยเครื่อง FWD มีความสอดคล้องกันกับสมมติฐานของงานวิจัย ที่สมมติให้ตัวกลางยืดหยุ่นหลายชั้นมีอาณาบริเวณของเนื้อวัสดุทางด้านข้างขยายออกไปอย่างไม่จำกัดนั้น ก็ควรจะทำการทดสอบที่ตำแหน่งห่างออกมาจากขอบของถนน เป็นระยะทางไม่น้อย

กว่าระยะทางระหว่างตำแหน่งที่ให้น้ำหนักกระทำกับตำแหน่งของ Geophone ตัวทีอยู่ไกลที่สุด เพื่อไม่ให้เกิดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากผลของการสะท้อนของคลื่นในขณะทดสอบ ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะไม่เกิดขึ้นในกรณีที่ทดสอบกับโครงสร้างขนาดใหญ่ เช่น สนามบิน เป็นต้น

3.3.3 วิธีการหาส่วนผกผันของลาปลาซเชิงตัวเลข (Numerical Laplace Inversion)

ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้ในโดเมนของลาปลาซจากจากวิธีการข้างต้นนั้นจะถูกแปลงให้อยู่ในโดเมนของเวลา โดยใช้วิธีการหาส่วนผกผันของลาปลาซเชิงตัวเลข เนื่องจากไม่สามารถทำการหาปริพันธ์โดยตรงเพื่อหาส่วนผกผันของลาปลาซได้ วิธีการหาส่วนผกผันของลาปลาซเชิงตัวเลขที่มีผู้เสนอและเป็นที่นิยมใช้กันมีอยู่หลายวิธี (Davies and Martin, 1979) เช่น

Widder (1934)

$$f(t) \approx I_n(t) \tag{3.59}$$

$$I_n(t) = (-1)^n n^{n+1} (n!)^{-1} t^{-(n+1)} \bar{f}^{(n)}(n/t) \tag{3.60}$$

$$\bar{f}^{(n)}(n/t) = \frac{d^n \bar{f}(n/t)}{d t^n} \tag{3.61}$$

n คือ จำนวนเต็มบวกถ้ามีค่ามากจะมีความถูกต้องมากขึ้น

Haar (1951)

$$f(t) \approx p \bar{f}(p) \tag{3.62}$$

$$p = \frac{1}{t} \tag{3.63}$$

Shapery (1962)

$$f(t) \approx p \bar{f}(p) \tag{3.64}$$

$$p = \frac{0.5}{t} \tag{3.65}$$

Stehfest (1970)

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^{N} C_n \bar{f}\left(\frac{n \ln 2}{t}\right) \tag{3.66}$$

$$C_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\lfloor (n+1)/2 \rfloor}^{\min(n, N/2)} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(N/2 - k\right)!\ k!\ (k-1)!\ (n-k)!\ (2k-n)!} \tag{3.67}$$

N คือ จำนวนเต็มคู่มีค่าอยู่ในช่วง 6-14 โดยประมาณ การเลือกใช้จะขึ้นอยู่กับปัญหาซึ่งต้องทำการพิจารณา เช่น ปัญหากึ่งสถิต N มีค่าเท่ากับ 6 โดยประมาณ

จากวิธีการหาส่วนผกผันของลาปลาซเชิงตัวเลขข้างต้น วิธีของ Widder จำเป็นต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับที่ n ซึ่งวิธีนี้จะเหมาะสมกับปัญหาในลักษณะพลวัตเมื่อค่า n ที่เลือกใช้มีค่าเข้าสู่อนันต์ทำให้ใช้เวลาในการคำนวณมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อฟังก์ชันมีความซับซ้อนมาก ส่วนวิธีของ Haar และ Shapery สามารถทำได้โดยง่ายแต่จะเหมาะสมกับปัญหากึ่งสถิต (Quasi Static Problems) สำหรับวิธีของ Stehfest จะเริ่มมีความยุ่งยากมากขึ้นแต่วิธีนี้สามารถใช้กับปัญหาในลักษณะพลวัตได้ โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้พิจารณาเลือกใช้วิธีการของ Stehfest ทั้งนี้ได้แสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขไว้ในบทที่ 4

3.3.4 การหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Method)

ในการคำนวณย้อนกลับนั้นมีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างถนนที่จะสามารถอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างถนนได้ดีที่สุด การพิจารณาว่าค่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่ใช้ในแบบจำลองให้ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้ใกล้เคียงกับผลการทดสอบเพียงใดนั้นจำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันจุดประสงค์ที่แสดงถึงค่าความแตกต่างของค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้กับค่าที่ได้จากการทดสอบขึ้นมา จากนั้นจึงใช้กระบวนการแก้ปัญหาคาเหมาะสมที่สุดเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่เป็นคำตอบ ซึ่งทำให้ค่าที่ได้จากฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าน้อยที่สุด โดยฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เรียกว่า ผลรวมของผลต่างสัมพัทธ์กำลังสอง (Sum of square relative differences)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d_i^c(\mathbf{x}) - d_i^m}{d_i^m}\right]^2 \qquad (3.68)$$

เมื่อ $d_i^c(\mathbf{x})$ คือ ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้จากแบบจำลองโดยใช้ค่า $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$ คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและความหนาที่ไม่ทราบค่า

$\mathbf{x} = \{E_1, h_1, E_2, h_2, E_3, h_3, \ldots, E_M, h_M\}$

d_i^m คือ ค่าการทรุดตัวที่บันทึกได้จากการทดสอบ ค่าที่ i

M คือ จำนวนชั้นของโครงสร้างถนน

n คือ จำนวนข้อมูลการทรุดตัวที่บันทึกได้และนำมาใช้ในการคำนวณย้อนกลับ

สำหรับการเลือกฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังกล่าวนั้น ได้พิจารณาถึงวิธีการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดร่วมด้วย ซึ่งปกติแล้ววิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมักจะใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา และโดยการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม (Random error) ของเครื่อง FWD Sivanneswaran et al. (1991) พบว่าสมการที่ 3.68 เหมาะที่จะใช้ในปัญหาการคำนวณย้อนกลับจากข้อมูลการทดสอบด้วยเครื่อง FWD

การคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่น ของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนจะใช้หลักการของ nonlinear least square optimization โดยใช้วิธี Modified Levenberg-Marquardt Algorithm (Dennis and Schnabel 1983) โดยวิธีดังกล่าวได้ประยุกต์มาจากวิธีของนิวตันโดยได้รวมเอาข้อดีของวิธีของนิวตัน (Newton's method) กับวิธี Gradient method มาไว้ด้วยกัน คือ ในการวิเคราะห์จะมีการลู่เข้าสู่คำตอบได้อย่างรวดเร็วซึ่งเป็นข้อดีของวิธีของนิวตัน และมีความสามารถวิเคราะห์หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสมบูรณ์ได้เป็นอย่างดีซึ่งเป็นข้อดีของวิธี Gradient method (Polyak, 1987) สำหรับหลักการวิเคราะห์นั้น จะพิจารณาให้ฟังก์ชัน f ใดๆ สามารถกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series) และโดยการประมาณค่าจะสามารถจัด f ให้อยู่ในรูปของ Quadratic form ได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)+(\nabla f(\mathbf{x}_0))^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\cdot\mathbf{H}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad (3.69)$$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $\mathbf{x}_0$ เวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของตัวแปรอิสระ ∇ คือ สัญลักษณ์ของเกรเดียน หรือเวกเตอร์ของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $\mathbf{H}$ คือ Hessian matrix หรือ เมทริกซ์ของอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

พิจารณาค่าเกรเดียนของฟังก์ชันจากสมการที่ 3.69 จะได้

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0)+\mathbf{H}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad (3.70)$$

โดยวิธีของนิวตัน จะกำหนดให้ $\nabla f(\mathbf{x})$ เท่ากับศูนย์ก็จะได้ค่า $\mathbf{x}$ ในการคำนวณซ้ำรอบถัดไป นั่นคือ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0-\mathbf{H}^{-1}\cdot\nabla f(\mathbf{x}_0) \qquad (3.71)$$

สำหรับวิธี Levenberg-Marquardt Method ได้พัฒนาสมการที่ 3.71 โดยปรับปรุงค่า $\mathbf{H}$ ใหม่ ดังนี้

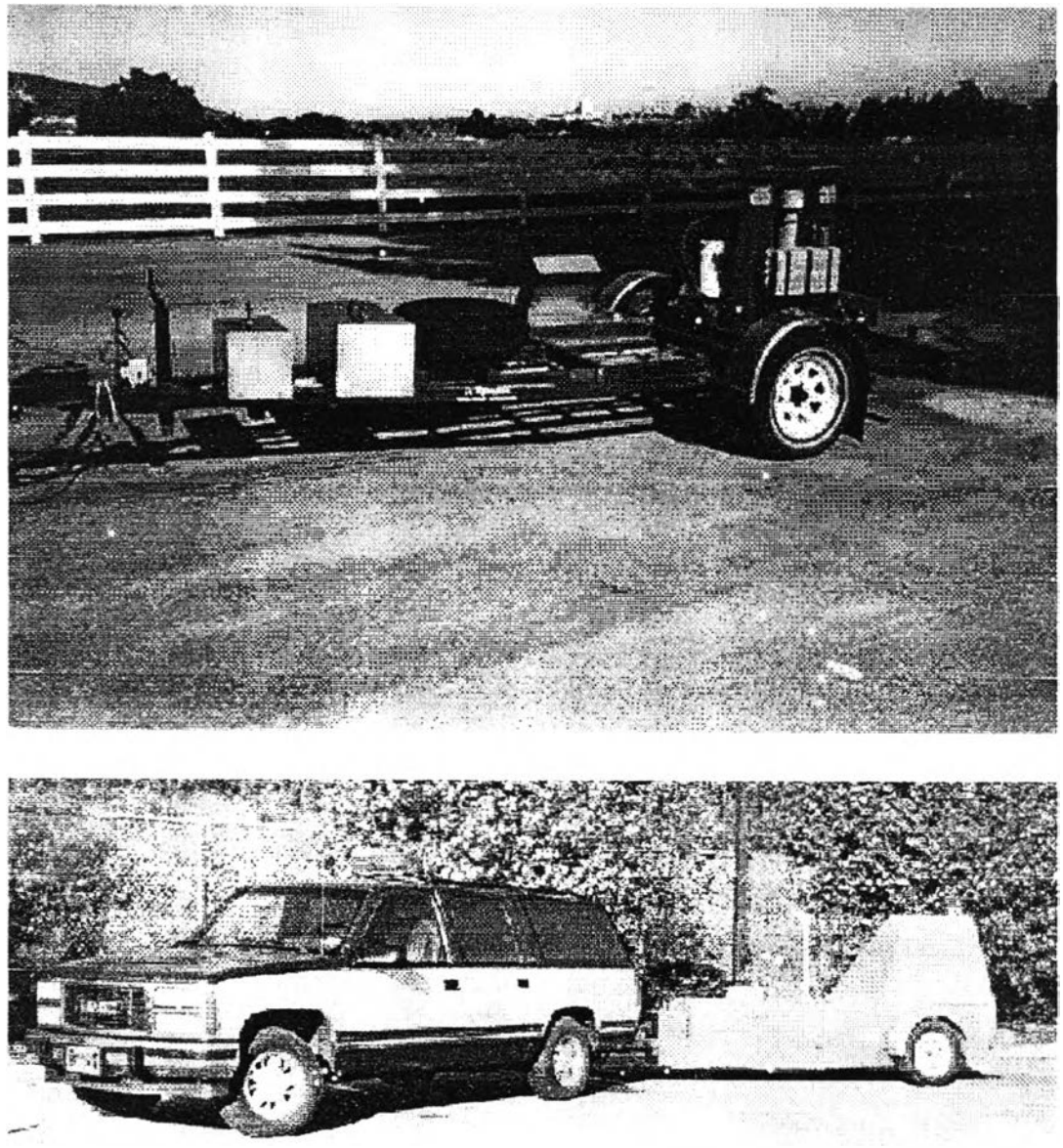
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0-(\mathbf{H}+\alpha\mathbf{I})^{-1}\cdot\nabla f(\mathbf{x}_0) \qquad (3.72)$$

เมื่อ $\mathbf{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ และ α คือ Levenberg-Marquardt parameter $(\alpha\geq 0)$

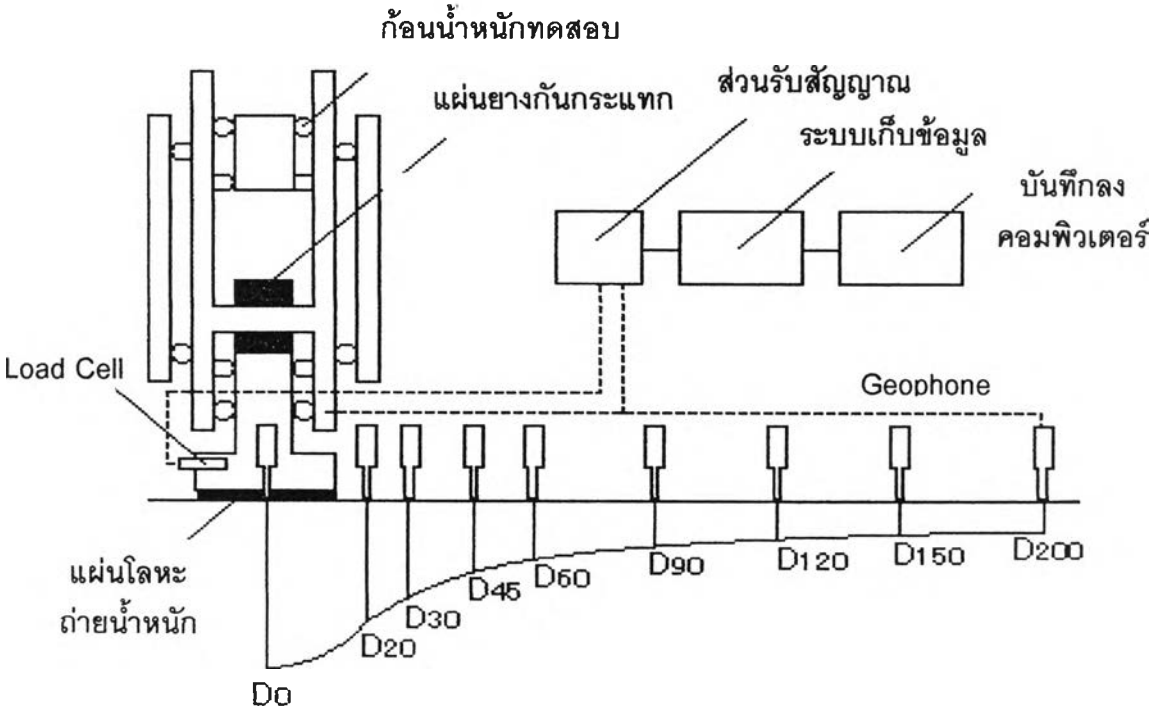
หลังจากกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรอิสระให้กับฟังก์ชัน โดยการคำนวณซ้ำตามสมการที่ 3.72 ก็จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบออกมาได้ในที่สุด

ในการคำนวณย้อนกลับจะนำเอาวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดดังกล่าวกับสมการที่ 3.68 ไปทำการวิเคราะห์ โดยที่ตัวแปรไม่ทราบค่าอาจจะเป็นค่าโมดูลัสเพียงอย่างเดียวหรืออาจเป็น

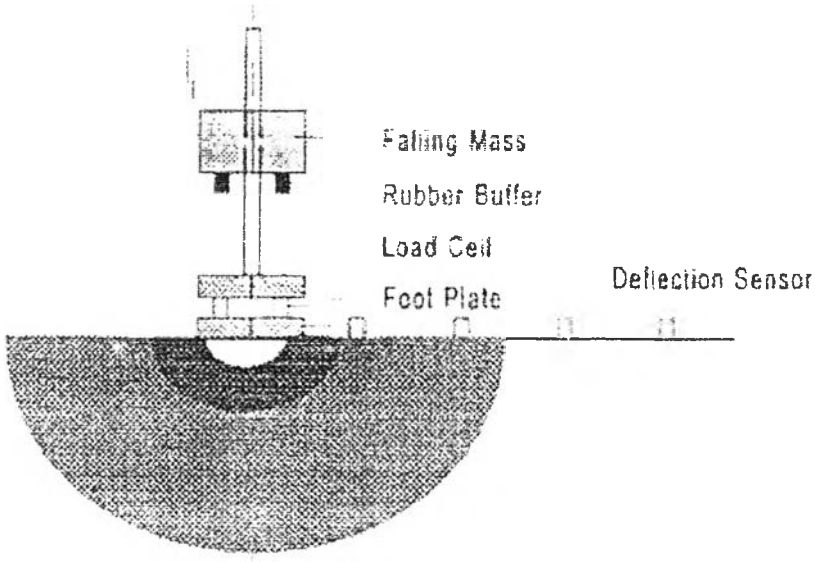
ทั้งค่าโมดูลัสและความหนาของชั้นถนนก็ได้ โดยการเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาฟอร์แทรน ซึ่งมีโปรแกรมย่อยสำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุดคือ BCLSF



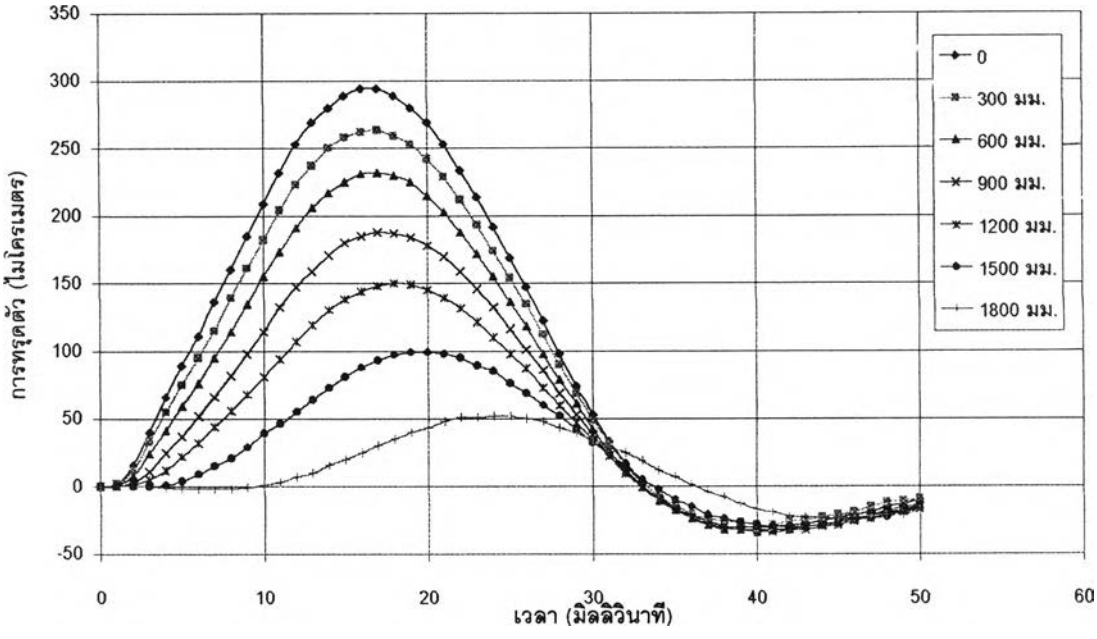
รูปที่ 3.1 รูปแสดงตัวอย่างเครื่อง Falling Weight Deflectometer (FWD)



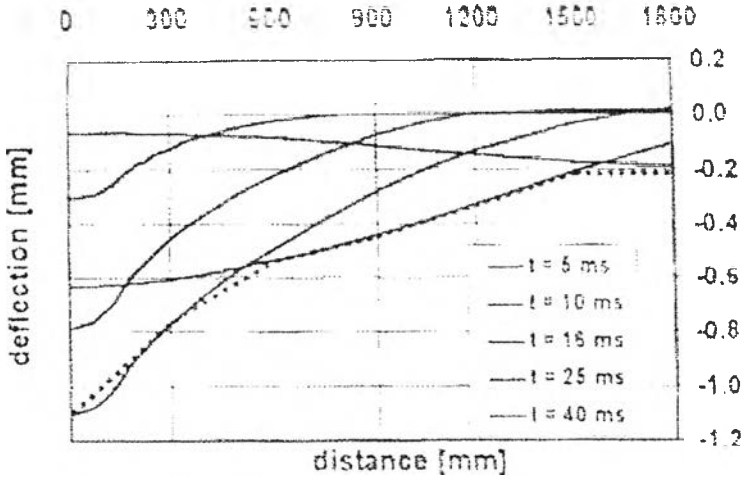
รูปที่ 3.2 รูปแสดงส่วนประกอบที่สำคัญของเครื่อง Falling Weight Deflectometer (FWD)



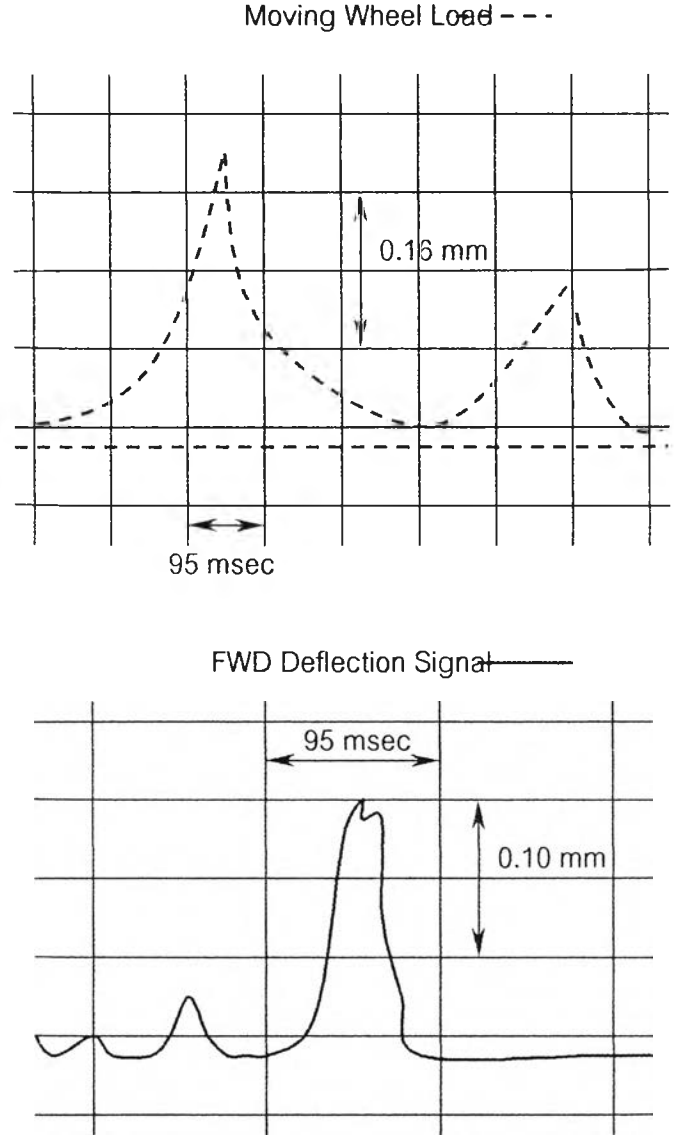
รูปที่ 3.3 ลักษณะการแผ่กระจายของคลื่นพลังงานขณะทำการทดสอบด้วยเครื่อง FWD



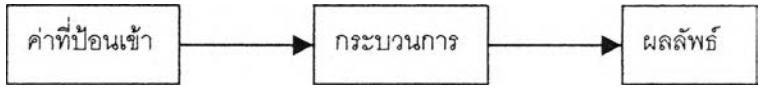
รูปที่ 3.4 ลักษณะทั่วไปของข้อมูลการทรุดตัวที่บันทึกได้ ณ.ตำแหน่งต่างๆ จากเครื่อง FWD



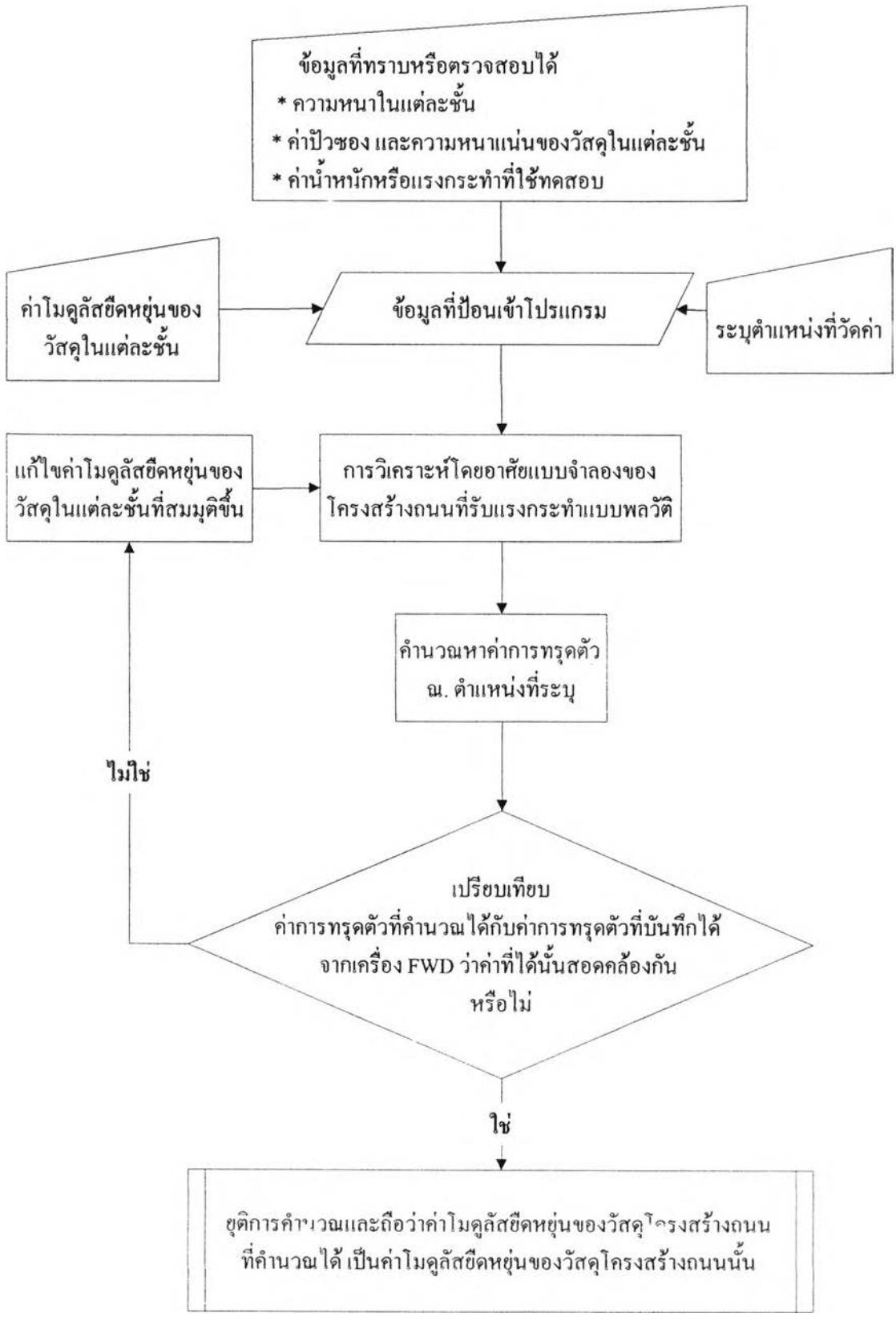
รูปที่ 3.5 ลักษณะการทรุดตัวที่ระยะต่างๆ ในแต่ละเวลาขณะทดสอบด้วยเครื่อง FWD



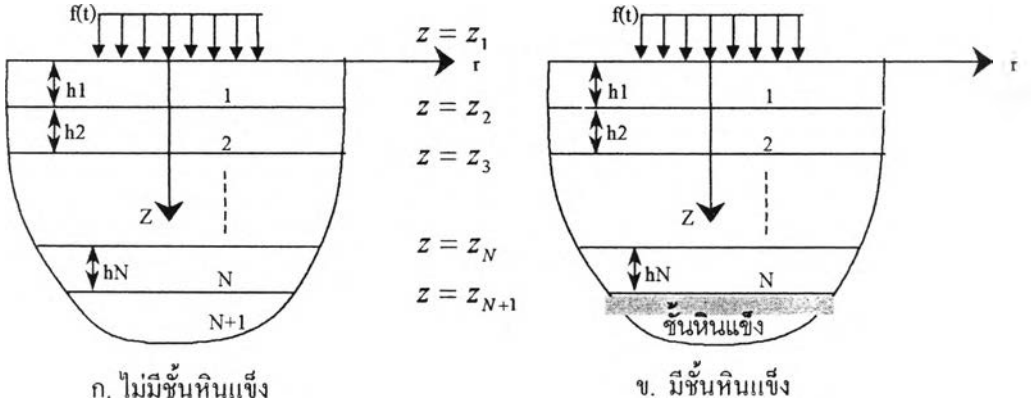
รูปที่ 3.6 ลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากเครื่อง FWD และล้อรถหนักที่สัญจรบนถนนเมื่อพิจารณาเทียบกับเวลา



รูปที่ 3.7 รูปแบบปัญหาการคำนวณย้อนกลับ



รูปที่ 3.8 แผนผังแสดงการคำนวณย้อนกลับเพื่อพิจารณาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างถนน



รูปที่ 3.9 ภาพแสดงแบบจำลองโครงสร้างถนนหลายชั้น