



## บทที่ 2

### ทฤษฎี และ แนวคิดที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับดวงจันทร์ที่กระทำกับอนุภาควงแหวนโดยใช้ข้อมูลของดาวเสาร์ ดาวเคราะห์ที่มีวงแหวนพบตั้งแต่ดาวพฤหัสบดีถึงดาวพลูโตซึ่งตำแหน่งของดาวอยู่ระหว่างแถบดาวเคราะห์น้อย ถึง แถบไคเปอร์เรียกว่าดาวเคราะห์รอบนอก(Outer Planet) ได้แก่ดาวพฤหัสบดีถึงดาวเนปจูน และ ตำแหน่งของแถบไคเปอร์ขึ้นไปเรียกว่าดาวที่อยู่ถัดจากเนปจูน(Trans-Neptunian Object) ได้แก่ดาวพลูโต การกำเนิดของวงแหวนดาวเคราะห์ถูกอธิบายสาเหตุน่าจะเป็นไปได้เกิดจากการแตกตัวของดาวบริวาร, ดาวหาง และ ดาวเคราะห์น้อยเข้ามาใกล้บริเวณที่เรียกว่าขอบเขตโรช(Roche limit) ทำให้เกิดการแตกตัว และ โดยมีดวงจันทร์ของดาวเสาร์ทำหน้าที่เป็นดาวผู้ให้กำเนิดเกิดการรวมกันของอนุภาควงแหวนจนกลายเป็นวงแหวนโดยใช้ทฤษฎีของทีมงานของเดอโมท, โกลด์ และ เมอเลย์ และ หน้าที่ควบคุมอนุภาควงแหวนเป็นของทฤษฎีของทีมงาน โกลด์คริช และ ตรีเมน ทฤษฎีของทั้งสองใช้ขอบเขตโรช, ขนาดของดาวบริวาร และ การหมุนรอบตัวเองของดวงจันทร์เป็นตัวอธิบายหน้าที่ที่แตกต่างกันของดวงจันทร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวน

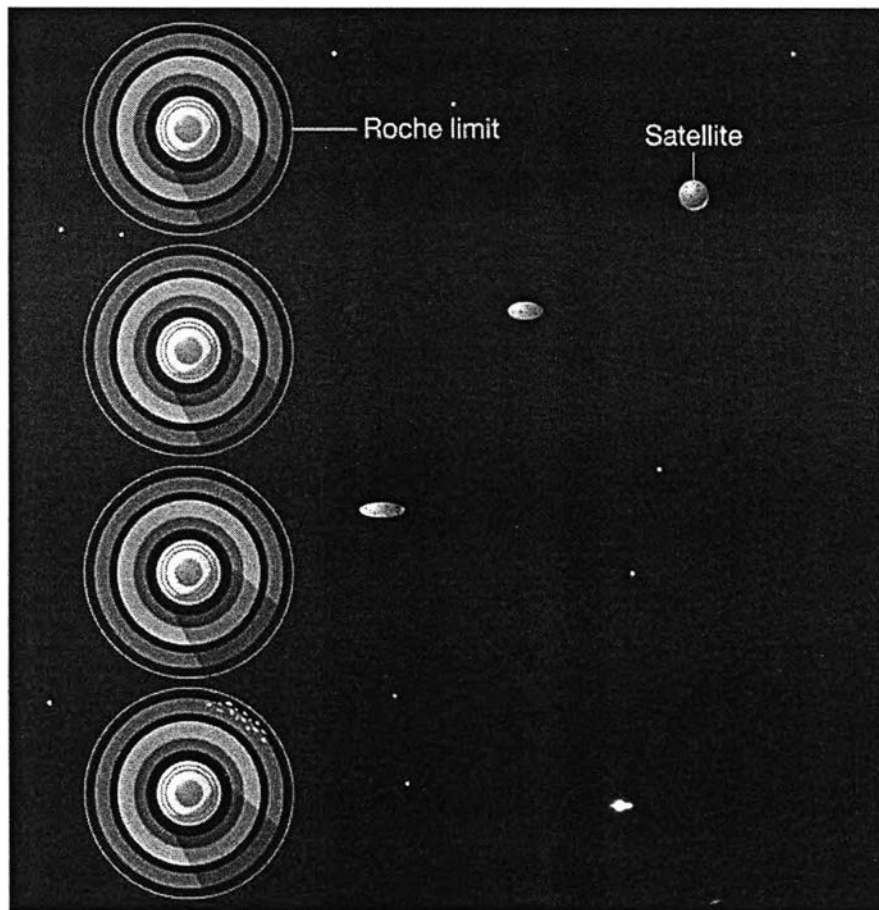
#### 2.1 ข้อตกลงของปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัด และ การพิจารณาภายใต้กรอบอ้างอิงหมุน

ทฤษฎีในงานวิจัยเป็นทฤษฎีที่ใช้ในปัญหาวัตถุสามชิ้นในกรณีจำกัดซึ่งอธิบายถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามโดยมีการกำหนดให้มวลโน้มถ่วงของวัตถุชิ้นที่สามมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ทำให้ไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่หนึ่งและวัตถุชิ้นที่สอง โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล โดยมีทางโคจรเข้าใกล้ทางโคจรแบบวงกลม ( $e \rightarrow 0$ ) และ ตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่หนึ่งและสองอยู่ในแนวเดียวกันกับแนวเส้นศูนย์สูตรของดาวเสาร์ ข้อมูลของยานอวกาศวอยเอเจอร์ 2 และ โพนีย์ 11 เป็นการสังเกตผลในลักษณะติดตามเหตุการณ์นั้นซึ่งเป็นเงื่อนไขการพิจารณาผลภายใต้กรอบอ้างอิงหมุน

##### 2.1.1 ขอบเขตของโรช

ขอบเขตของโรช(Roche limit) คือระยะทางน้อยที่สุดที่วัตถุบนท้องฟ้าสามารถอยู่ร่วมกันได้ อนุภาควงแหวนตามคำอธิบายของโรชเกิดจากการแตกตัวของวัตถุเนื่องมาจากแรงการโป่งตัวของดาวเสาร์สามารถเอาชนะแรงยึดเหนี่ยวของวัตถุนั้นเมื่อเคลื่อนที่เข้ามาใกล้ขอบเขตโรชจะทำให้เกิดการแตกตัวออกของวัตถุนั้นได้ดังแสดงจากรูปที่ 1 ตัวอย่างของขอบเขตโรชคือการแตกตัวของ

ดาวหางชูมาร์คเกอร์-เลวี9(Shoemaker-Levy9)ซึ่งเป็นผลมาจากดาวหางถูกแรงการ โป่งตัวของดาว พฤษหสดีมีการ โป่งตัวมากขึ้นเกินกว่าที่ดาวหางจะสามารถรักษาพื้นผิวไว้ได้จนสุดท้ายเกิดการแตก ตัวภายใต้อิทธิพลของแรงการ โป่งตัวของดาวพฤษหสดี ขอบเขตของโรชใช้อธิบายเหตุผลของ การดำรงอยู่ของดวงจันทร์โดยเปรียบเทียบกันของขอบเขตโรชกับระยะทางโคจรของดาวบริวาร



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

### รูปที่1 แสดงการแตกตัวของดาวบริวาร (6)

ขอบเขตโรชมีแนวคิดมาจากการพิจารณาว่าดวงจันทร์มีลักษณะเป็นของไหลถูกกระทำด้วย แรงการ โป่งตัวของดาวเสาร์จนทำให้ดวงจันทร์เกิดการ โป่งตัวเพิ่มขึ้นจนสามารถเอาชนะแรงยึดเหนี่ยวของผิวดวงจันทร์จนทำให้เกิดการแตกตัวในบริเวณที่เรียกว่าขอบเขตโรช(d)

$$d = 2.423R \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} \quad (4,5,6)$$

R เป็นรัศมีดาวเสาร์,  $\rho_M$  เป็นความหนาแน่นดาวเสาร์ และ  $\rho_m$  เป็นความหนาแน่นดาวบริวาร

ระยะทางการโคจรของดาวบริวารเป็นการนำระยะทางที่ได้จากสมการของเคปเลอร์

$$(r_{\min}, r_{\max}) = (a(1 - e), a(1 + e)) \quad (1,6)$$

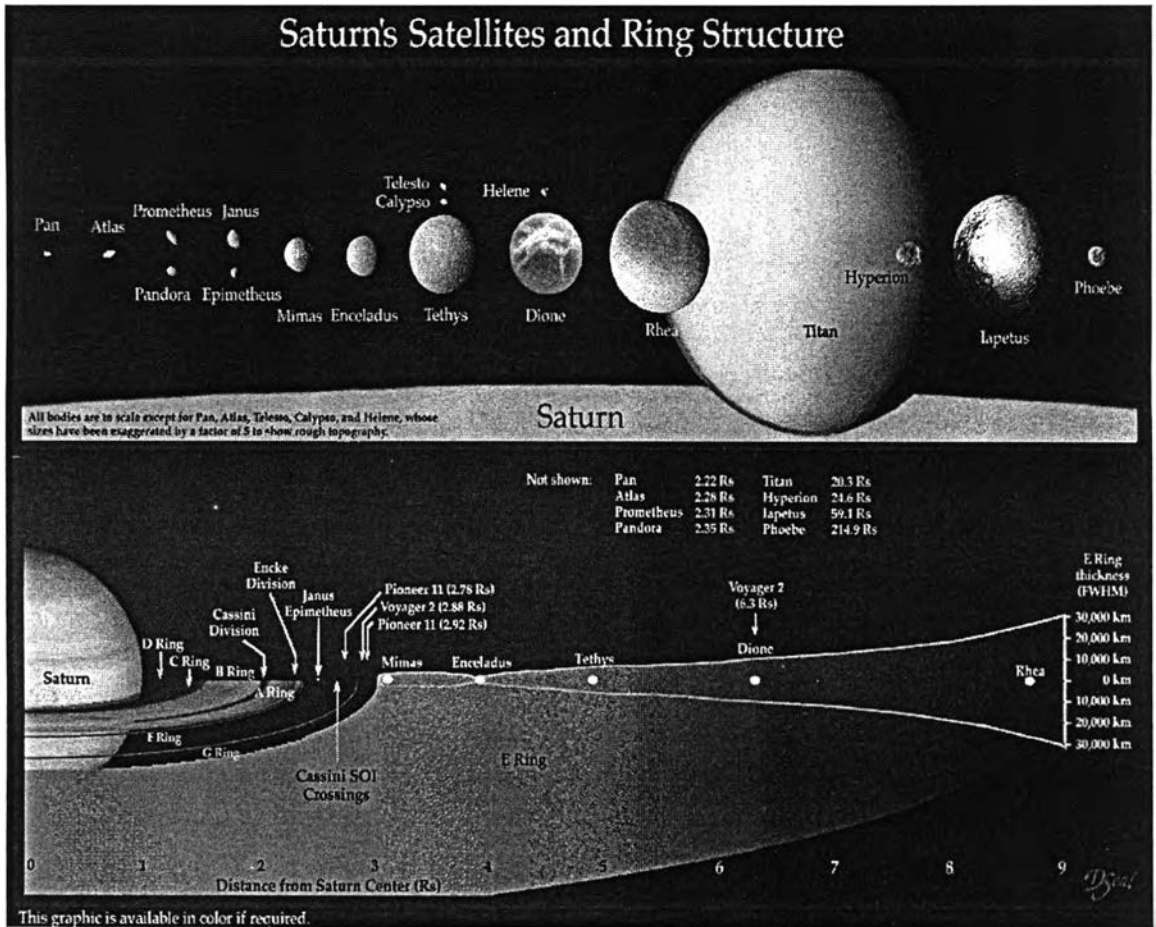
$r_{\min}$  คือระยะทางใกล้ที่สุด,  $r_{\max}$  คือระยะทางไกลที่สุด,  $a$  คือความยาวครึ่งแกนเอก,  $e$  คือความรี และ  $i$  คือมุมระหว่างระนาบเส้นศูนย์สูตรถึงวงโคจรของดาวบริวาร

ข้อมูลวงจันทร์ของดาวเสาร์ตรวจสอบหาโอกาสความน่าจะเป็นที่จะกลายเป็นอนุภาควงแหวนของดวงจันทร์ได้หรือไม่โดยการตรวจสอบนี้คำนวณค่าขอบเขตโรช และ ระยะทางโคจรของดวงจันทร์ในตารางที่ 1 เปรียบเทียบหาความน่าจะเป็นไปได้ของเงื่อนไขทั้งสอง คือ ดาวบริวารสามารถรักษาพื้นผิวดาวไว้ได้โดยมีเงื่อนไขว่าค่าขอบเขตโรชน้อยกว่าระยะทางการโคจร หรือ ดาวบริวารไม่สามารถรักษาพื้นผิวของดาวไว้ได้โดยมีเงื่อนไขว่าค่าขอบเขตโรชมากกว่าระยะทางการโคจร

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบกันของระยะทางขอบเขตโรชกับตำแหน่งของดวงจันทร์

$$\rho_{\text{Saturn}} = 0.69 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad \text{และ} \quad R_{\text{saturn}} = 60,268 \text{km}$$

	Dione	Tethys	Prometheus	Pandora
$\rho(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$	1.50	0.99	0.63	0.60
$a(\times R_s)$	6.26	4.89	2.31	2.35
$e$	0.0022	0	0.0024	0.0042
$i(^{\circ})$	0.02	1.09	0	0
$d(\times R_s)$	1.87	2.15	2.50	2.54
$(r_{\min}, r_{\max})$ $(\times R_s)$	(6.25, 6.28)	(4.89, 4.89)	(2.31, 2.32)	(2.34, 2.36)



รูปที่ 2 แสดงขนาดและตำแหน่งของดาวบริวาร (6)

รูปที่ 2 อธิบายถึงตำแหน่งของดวงจันทร์สี่ดวง ชื่อไดโอนี (Dione) และ เททีส (Tethys) อยู่ในชั้นวงแหวน E และ ดวงจันทร์ที่มีชื่อว่า โพรมิทรีอัส (Prometheus) และ เพนดูล่า (Pandora) อยู่ในชั้นวงแหวน F เมื่อเปรียบเทียบกับดวงจันทร์ในชั้นของวงแหวน F มีโอกาสกลายเป็นอนุภาควงแหวนได้ง่ายกว่าดวงจันทร์ในชั้นของวงแหวน E เพราะว่า ดวงจันทร์ในชั้นของวงแหวน F อยู่ใกล้ดาวเสาร์มากกว่าจึงทำให้แรงการ โป่งตัวของดาวเสาร์มีค่าสูงกว่าดวงจันทร์ในชั้นของวงแหวน E

ตารางที่ 1 แสดงว่าดวงจันทร์ทั้งสี่อยู่ใกล้กับระนาบเส้นศูนย์สูตรของดาวเสาร์ทำให้ง่ายต่อการพิจารณาเงื่อนไขของทั้งสองทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย และ เงื่อนไขที่คาดไว้มีอยู่สองเงื่อนไข คือ ดวงจันทร์สามารถรักษาพื้นผิวดาวไว้ได้เช่นไดโอนี และ เททีส ซึ่งดวงจันทร์ในกลุ่มนี้อยู่ในบริเวณของอนุภาควงแหวนและมีความเป็นไปได้ที่จะทำหน้าที่ควบคุมอนุภาควงแหวน โดยทฤษฎีของทีมงานเคอโมท, โกลด์ และ เมอเลย์ ว่าดวงจันทร์ในกลุ่มนี้สามารถทำหน้าที่ควบคุมอนุภาคของวงแหวนจนกลายเป็นวงแหวนของดาวเคราะห์ได้ และ ดวงจันทร์ไม่สามารถรักษาพื้นผิวได้เช่น โพรมิทรีอัส และ เพนดูล่าซึ่งดวงจันทร์ในกลุ่มนี้อยู่นอกวงแหวนของดาวเคราะห์ซึ่งอาจใช้ตรวจสอบเงื่อนไข

ของทฤษฎีของทีมงาน โกลด์ริชและทรีเมนว่าดวงจันทร์ในกลุ่มนี้อาจมีส่วนหนึ่งของดวงจันทร์ กลายเป็นอนุภาควงแหวนเนื่องจากเงื่อนไขการเปรียบเทียบกันของขอบเขตโรซกับระยะทางโคจร หรือ ไม่ ทำให้หน้าที่ของดวงจันทร์ในกลุ่มนี้ทำได้เฉพาะการควบคุมวงแหวนได้เท่านั้น

### 2.1.2 การลดผลของแรงการป้องกัน

ขอบเขตโรซถูกใช้อธิบายการแตกตัวของวัตถุในบริเวณวงแหวนจนเกิดอนุภาควงแหวนได้ดีกว่าการนำมาใช้อธิบายถึงเหตุผลของการที่ดวงจันทร์สามารถดำรงอยู่ภายใต้ระบบของวงแหวน เนื่องมาจากการเปรียบเทียบกันของขอบเขตโรซกับระยะทางโคจรของดาวเสาร์พบว่าดวงจันทร์ยังคงดำรงอยู่ได้โดยที่ไม่จำเป็นต้องมีตำแหน่งอยู่นอกขอบเขตของโรซเท่านั้นจึงแน่ใจว่าดวงจันทร์ควรมีวิธีการรักษาพื้นผิวของดาวมากกว่าการที่ดวงจันทร์ต้องมีทางโคจรอยู่ได้เฉพาะนอกขอบเขตโรซเท่านั้น การพิจารณาถึงขนาด และ คาบการหมุนรอบตัวเองของดวงจันทร์พบว่าน่าจะเป็นสาเหตุของการลดผลของแรงการป้องกันของดาวรอบตัวของมันที่กระทำกับดวงจันทร์

ตารางที่2 แสดงขนาด, ระยะห่างจากดาวเสาร์ และ การหมุนรอบตัวเองของดวงจันทร์ (6)

	Dione	Tethys	Prometheus	Pandora
Diameter(km)	1118	1059.8	50.1	41.9
a (km)	377,396	294,619	139,350	141,700
Rotation period (d)	2.736915	1.887802	0.614102	0.6285

ตารางที่2 แสดงข้อมูลของการลดผลของแรงการป้องกันของดวงจันทร์สามารถแบ่งออกเป็นสองกลุ่มใหญ่ตามเงื่อนไขของขนาด, ระยะทาง และ คาบการหมุนรอบตัวเอง ทำให้ทราบว่าดวงจันทร์มีเงื่อนไขดังกล่าวเหล่านี้เพื่อลดผลของแรงการป้องกันโดยมีได้สองเงื่อนไข คือ

(1) การลดผลของแรงการโป่งตัวเนื่องจากขนาดของดวงจันทร์ และ ระยะทางของดวงจันทร์ ถึงดาวเสาร์โดยมีความสัมพันธ์ของแรงการโป่งตัว คือ

$$F_T \approx \frac{2GM M_{\oplus} r}{d^3} \quad (6)$$

โดย  $M$  คือมวลของดาวเสาร์และ  $M_{\oplus}$  คือมวลของดวงจันทร์

แรงนี้แปรผันตรงกับระยะห่างของดาว ( $r$ ) และ แปรผกผันกับระยะทางระหว่างดาวเสาร์กับ ดวงจันทร์ยกกำลังสาม ( $d^3$ ) ดวงจันทร์ที่มีทางโคจรอยู่นอกขอบเขตโรซพบว่าดาวในกลุ่มนี้ไม่มีโอกาสที่จะกลายเป็นอนุภาควงแหวนทำให้ขนาดของดวงจันทร์มีขนาดใหญ่เพราะว่าไม่มีผลต่อ ของตัวมันเอง ดาวบริวารมีทางโคจรอยู่ภายในขอบเขตโรซมีทางโคจรรอบดาวเสาร์ใกล้กว่าดาว ในกลุ่มแรกจึงทำให้ดาวในกลุ่มนี้มีขนาดเล็กเพื่อลดผลของแรงการโป่งตัว

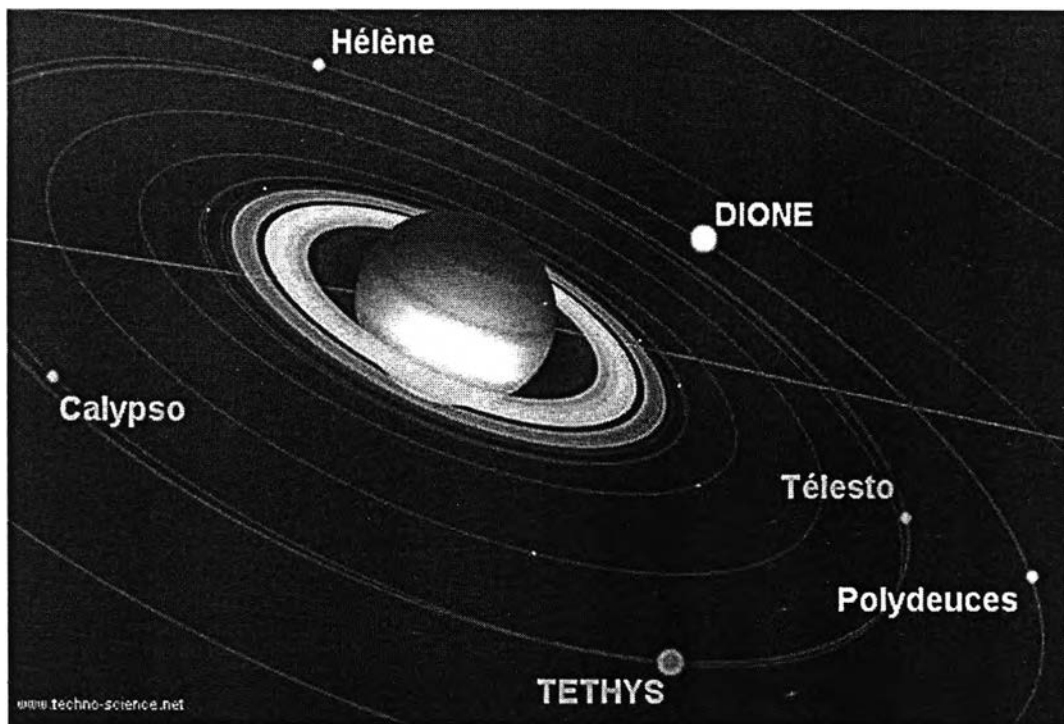
(2) การลดผลของแรงการโป่งตัวโดยอาศัยผลของอัตราเร็วเชิงมุมของดวงจันทร์ร่วมกับขนาดของ ดวงจันทร์จะทำให้เกิดการลดผลของแรงการโป่งตัวในธรรมชาติร่วมกันเพราะว่าคาบการหมุนรอบ ตัวเองของดวงจันทร์จะทำให้การโป่งตัวของดวงจันทร์เนื่องจากดาวรอบตัวของมันเกิดการลดลงจน สามารถรักษาพื้นผิวของดาวไว้ได้โดยเรียกปรากฏการณ์นี้ว่าทอร์กการโป่งตัว การลดผลการโป่ง ตัวของดวงจันทร์เป็นสิ่งที่ดวงจันทร์และดาวบริวาร โดยทั่วไปต้องเกิดขึ้นเพราะการโป่งตัวของดาว ที่มากเกินไปจะทำให้เกิดสภาพร้าวของผิวดาวจนเกิดการแตกตัวขึ้นได้

ข้อสังเกตของทั้งสองเหตุการณ์นี้เกิดขึ้นร่วมกันคือดวงจันทร์ หรือ ดาวบริวารอื่นๆจะมีลักษณะ เป็นทรงกลมเพราะว่าเกิดการลดผลของแรงการโป่งตัวได้อย่างสมบูรณ์

## 2.2 ทฤษฎีของทิมงาน เดอโมท, โกลด์ และ เมอเลย์

ทฤษฎีของพวกเขาอธิบายถึงการกำเนิดของวงแหวนมาจากดวงจันทร์ผู้ให้กำเนิดซึ่งทำหน้าที่ เป็นวัตถุชิ้นที่สองโดยมีการรบกวนอนุภาควงแหวน(วัตถุชิ้นที่สาม)เนื่องจากดาวพฤหัสบดี และ ดาว รอบอนุภาควงแหวนจนทำให้เกิดวงแหวนโดยถ้าวงแหวนนี้เคลื่อนที่ผ่านได้เฉพาะจุดลากรานจ์ที่สี่ ( $L_4$ ) หรือ จุดลากรานจ์ที่ห้า ( $L_5$ ) เรียกว่าวงแหวนไม่ครบรอบ(วงโคจรรูปปลุกอียด) และ วงแหวน ที่เคลื่อนที่ผ่านจุดลากรานจ์ได้สามจุดคือจุดลากรานจ์ที่สาม, จุดลากรานจ์ที่สี่ และ จุดลากรานจ์ที่ห้า เรียกว่าวงแหวนเต็มวง(วงโคจรรูปเกือบม้า)โดยทั้งสองวงโคจรนี้อยู่ภายใต้กรอบอ้างอิงหมุน ดวง จันทร์ในทฤษฎีนี้มีคาบการหมุนรอบตัวเองที่มีค่าที่สูงแสดงว่าดาวในกลุ่มนี้ไม่จำเป็นที่จะต้องมี

เงื่อนไขการลดผลแรงการ โป่งตัวโดยใช้สมบัติของดวงจันทร์เพราะว่าตำแหน่งของดวงจันทร์อยู่นอกขอบเขตโรซ ตำแหน่งของดวงจันทร์ชื่อว่าไดโอนิ, เททิส และ วัตถุรอบจตุลากรานจ์ที่สี่ หรือ จตุลากรานจ์ที่ห้าของดาวทั้งสองนี้เมื่อพิจารณามุมเอียงระนาบเส้นศูนย์สูตรพบว่า  $i \rightarrow 0$  แสดงว่าดวงจันทร์ในระบบนี้เคลื่อนที่อยู่ในบริเวณระนาบเส้นศูนย์สูตรดังรูปที่ 2 โดยมีภาพขยายของดาวดังรูปที่ 3 การเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามารถรอบจตุลากรานจ์มีเงื่อนไขของจตุลากรานจ์อยู่สองเงื่อนไขคือจตุลากรานจ์ที่เสถียร ( $L_4, L_5$ ) ซึ่งเป็นจุดที่พบวัตถุเคลื่อนที่เชิงคาบอยู่รอบบริเวณนี้ และ จตุลากรานจ์ไม่เสถียร ( $L_1, L_2, L_3$ ) ซึ่งเป็นจุดที่ไม่สามารถพบวัตถุรอบบริเวณนี้ได้ยกเว้นวัตถุที่มนุษย์สร้างขึ้นต้องมีการบังคับให้อยู่รอบบริเวณนี้เท่านั้น



รูปที่ 3 อธิบายถึงตำแหน่งดาวบริวารที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีเคอโอมท,โกลด์ และ เมอเลย์ (6)

รูปที่ 3 แสดงระบบดาวเสาร์กับไดโอนิ โดยมีดวงจันทร์ชื่อเฮเลน(Helene) เคลื่อนที่รอบ  $L_4$  กับ โปริโดส์(Polydeuces) เคลื่อนที่รอบ  $L_5$  และ ระบบของ ดาวเสาร์กับเททิสมีดวงจันทร์ชื่อเทสโต้(Telesto)เคลื่อนที่รอบ  $L_4$  และคาลิปโซ(Calypso)เคลื่อนที่รอบ  $L_5$  ดวงจันทร์ทั้งสี่มีทางโคจรเป็นวง โคจรรูปลูกอ้อรอบจตุลากรานจ์ที่เสถียรนี้

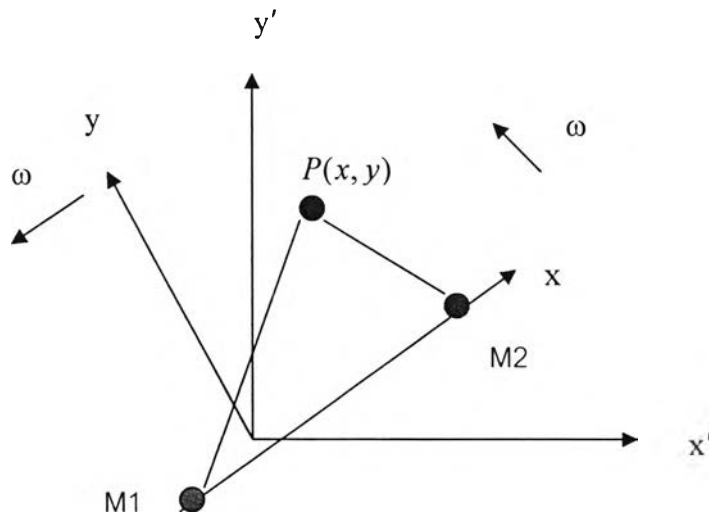
2.2.1 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สาม (1,6,9)

สมการจากกรอบอ้างอิงเฉื่อยคือ

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -\frac{M_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \frac{M_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} \text{ -----1}$$

สมการที่อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามภายใต้กรอบอ้างอิงเฉื่อยได้รับแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุชิ้นที่หนึ่งและวัตถุชิ้นที่สอง ดาวเสาร์มีพิกัด  $(x_1, 0, 0)$ , ดวงจันทร์ทำหน้าที่ผู้ให้กำเนิดมีพิกัด  $(x_2, 0, 0)$  และ ดวงจันทร์ หรือ อนุภาควงแหวนเป็นวัตถุชิ้นที่สามมีพิกัด  $(x, y, z)$  อยู่ในกรอบอ้างอิงหมุนซึ่งกรอบนี้จะหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมที่คงที่เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนถูกดัดแปลงจากสมการที่ 1 โดยการหมุนรอบแกน z ของกรอบอ้างอิงเฉื่อยเข้าสู่กรอบอ้างอิงหมุนเพื่อหาสมการในกรอบอ้างอิงหมุน โดยมีเงื่อนไขการหมุนแกนดังในสมการที่ 2

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \cos \omega t - y_i \sin \omega t \\ y_i' &= x_i \sin \omega t + y_i \cos \omega t \text{ -----2} \\ z_i' &= z_i \end{aligned}$$



รูปที่ 4 แสดงการพิจารณาวัตถุชิ้นที่สามภายในกรอบอ้างอิงเฉื่อยกับกรอบอ้างอิงหมุน (6,9)

รูปที่ 4 ให้แกนของ  $y, \zeta$  อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน และมีทิศออกจากกระดาษ



สมการที่2แทนเงื่อนไขการตัดแปลงลงในสมการที่1 ได้สมการการเคลื่อนที่ภายใต้กรอบหมุนคือ

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x &= \frac{M_1(x-x_1)}{\sqrt{[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2]^3}} + \frac{M_2(x-x_2)}{\sqrt{[(x-x_2)^2 + y^2 + z^2]^3}} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y &= \frac{M_1y}{\sqrt{[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2]^3}} + \frac{M_2y}{\sqrt{[(x-x_2)^2 + y^2 + z^2]^3}} \quad \text{----- 3} \\ \ddot{z} &= \frac{M_1z}{\sqrt{[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2]^3}} + \frac{M_2z}{\sqrt{[(x-x_2)^2 + y^2 + z^2]^3}}\end{aligned}$$

สมการที่3มีการตัดแปลงสมการเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณดังสมการที่4

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{-----4} \\ u &= \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{M_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}$$

สมการที่4เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนโดยพิจารณาในกรอบของวัตถุชิ้นที่สองโคจรรอบวัตถุชิ้นที่หนึ่ง ตัวแปรในสมการที่4 คือ  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$  เป็นอัตราเร่งของวัตถุเทียบกับกรอบอ้างอิงหมุน,  $(-2\omega\dot{y}, 2\omega\dot{x}, 0)$  เป็นแรงโคลิอริสต่อมวลของวัตถุชิ้นที่สาม และ  $u$  เป็นศักย์ขั้วผลของวัตถุชิ้นที่สามประกอบด้วยศักย์ของแรงสู่ศูนย์กลาง  $(\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2))$  และผลรวมของศักย์โน้มถ่วงของวัตถุชิ้นที่หนึ่งและวัตถุชิ้นที่สองกระทำกับวัตถุชิ้นที่สามคือ

$$\left( \frac{M_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

ข้อกำหนดของวัตถุชิ้นที่สามคือมวลโน้มถ่วงของวัตถุชิ้นที่สามมีค่าเป็นศูนย์ทำให้วัตถุชิ้นที่หนึ่งและวัตถุชิ้นที่สองเคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางมวลและความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองนี้เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาวัตถุสองชิ้นเพื่อหาเงื่อนไขของ  $M_1, M_2, x_1, x_2$

$$M_1 + M_2 = 1$$

$\omega$  เป็นอัตราเร็วเชิงมุม และ  $a$  เป็นระยะทางเฉลี่ย กำหนดให้  $\omega = 1, a = 1$  ทำให้ค่า  $G$  ในสมการ ปัญหาวัตถุสองชิ้นกลายเป็นค่าใหม่ที่ไม่ใช้ค่านิจสนามโน้มถ่วง ( $G \rightarrow G' = \frac{1}{m_1 + m_2}$ ) ได้ค่าใหม่คือ  $M_1 \rightarrow 1 - \mu, M_2 \rightarrow \mu, M_3 = 0$  ได้ค่า  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  ตำแหน่งของค่า  $x_1$  และ  $x_2$  ถูกกำหนดให้จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุดกำเนิดและระยะห่างมวลของวัตถุชิ้นที่หนึ่งกับวัตถุชิ้นที่สองมีค่าเป็น 1 ได้ค่าของ  $x_1$  เท่ากับ  $(-\mu, 0, 0)$  และ  $x_2$  เท่ากับ  $(1 - \mu, 0, 0)$  ----- 5

สมการที่ 5 นำไปใช้ตัดแปลงบางค่าในสมการที่ 4 ให้กลายเป็นสมการที่ 6 โดยมีเหตุผลของการตัดแปลงคือระบบที่เราสนใจหากการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามนี้มีลักษณะที่คล้ายกันจนมีการคิดว่าถ้าเราสร้างเงื่อนไขที่สามารถบรรยายลักษณะการเคลื่อนที่ด้วยตัวแปรแค่ค่าเดียวก็จะสามารถบรรยายระบบได้ทุกระบบของปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัดก็จึงทำให้ง่ายต่อการพิจารณา

สมการการเคลื่อนที่ของดวงจันทร์ หรือ อนุภาควงแหวน (1,6,9)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \\ u &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad \text{----- 6}$$

$u$  เรียกว่าศักย์ซูด (Pseudo-Potential)

สมการที่ 6 เป็นสมการที่มีความสำคัญมากในปัญหาวัตถุสามชิ้นในกรณีจำกัด โดยการพิจารณา ค่า  $\mu$  เท่านั้นเพื่อหาทางโคจรที่เกิดจากการรบกวนจุดลากรางจ์ที่สี่ หรือ ห้าจะสามารถได้วงโคจรในระบบที่เป็นไปได้คือวงโคจรรูปลูกล้อ และ วงโคจรรูปเกือกม้า

## 2.2.2 สมการจาโคบี

สมการจาโคบีเป็นปริมาณอนุรักษ์ในปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัดซึ่งสามารถพิจารณา ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามในบริเวณความเร็วศูนย์กลางของพื้นผิว สมการถูกตัดแปลงมา

จากสมการการเคลื่อนที่ของปัญหาวัตถุสามชิ้นในกรณีจำกัดในสมการที่ 6 โดยมีเงื่อนไขของการเปลี่ยนแปลงดังนี้

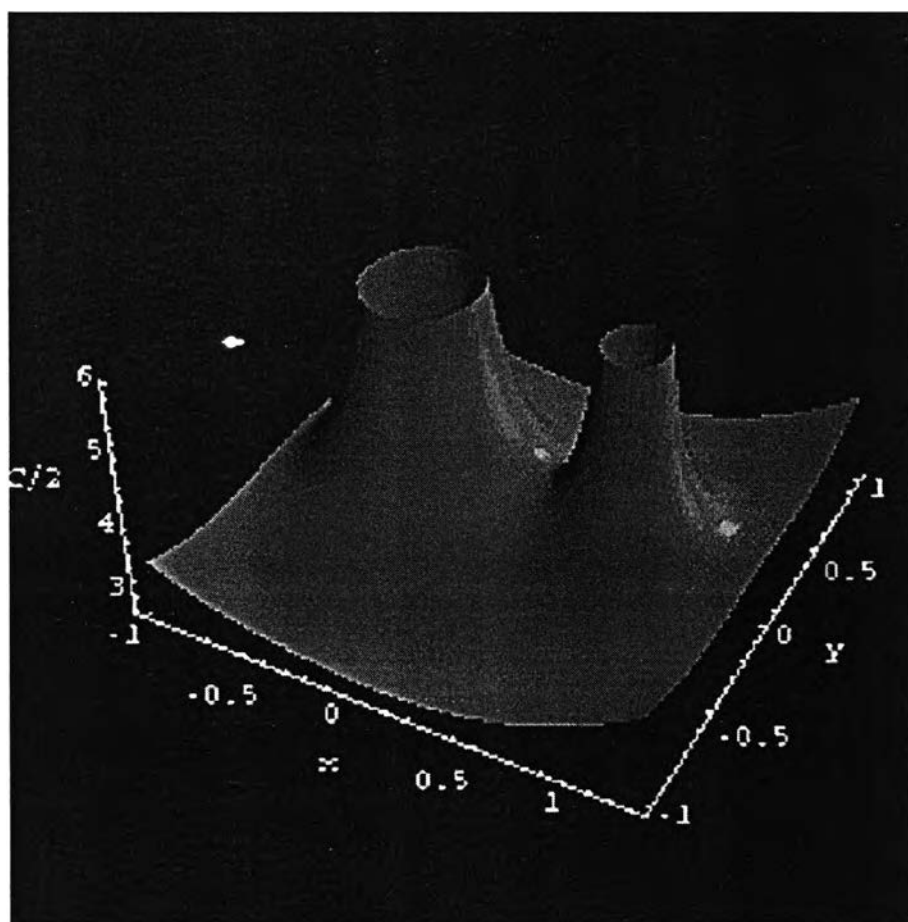
$$\text{(คุณค่า } 2\dot{x} \text{ ตลอดสมการ } 2\ddot{x}x - 4\dot{x}\dot{y} = 2\dot{x} \frac{\partial u}{\partial x}) + \text{(คุณค่า } 2\dot{y} \text{ ตลอดสมการ } 2\ddot{y}y + 4\dot{x}\dot{y} = 2\dot{y} \frac{\partial u}{\partial y}) +$$

$$\text{(คุณค่า } 2\dot{z} \text{ ตลอดสมการ } 2\ddot{z}z = 2\dot{z} \frac{\partial u}{\partial z}) \text{ ได้สมการจาโคบีคือ}$$

$$v^2 = 2u - c_j, \quad c_j \text{ เรียกว่าค่าคงที่ของจาโคบี}$$

สมการจาโคบีทำการตัดแปลงโดยกำหนดให้ค่าอัตราเร็วของแนวการเคลื่อนที่ของ  $x$  และ  $y$  มีค่าเป็น 0 ( $v = 0$ ) ทำให้ได้สมการที่มีชื่อว่าเส้นโค้งความเร็วศูนย์มีสมการคือ

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}} = c_j \quad (1,6,9)$$



รูปที่ 5 แสดงเส้นโค้งความเร็วศูนย์ของสมการจาโคบี (6,9)

รูปที่ 5 เป็นการกำหนดค่าของช่วง  $x$  และ  $y$  ทำให้ได้สมการเส้นโค้งโดยมีค่าของ  $c_j$  ต่างๆ เกิดขึ้น และ การตรวจสอบค่าของ  $\mu$  จากรูปที่ 5 พบว่ามีค่าประมาณ 0.25 ซึ่งค่านี้เป็นค่าที่ทำให้ไม่พบวัตถุที่เคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์ที่สี่และห้า เส้นโค้งบริเวณของ  $L_1, L_2, L_3$  มีลักษณะเป็นภูเขา แสดงว่าเกิดลักษณะของจุดสมดุลที่ไม่เสถียรจึงทำให้วัตถุในธรรมชาติไม่สามารถเคลื่อนที่เข้ามาอยู่รอบบริเวณนี้ หรือ วัตถุที่อยู่รอบบริเวณนี้มีการเคลื่อนที่ออกจากจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม เส้นโค้งบริเวณ  $L_4, L_5$  มีลักษณะเป็นหุบเขาแสดงว่าเกิดลักษณะของจุดสมดุลที่เสถียรจึงสามารถพบวัตถุในธรรมชาติรอบบริเวณนี้เพราะว่าเกิดการเคลื่อนที่เนื่องจากการรบกวนของระบบภายนอกนั้นจะทำให้ระบบมีการลดผลของการรบกวนโดยเคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์ที่สี่และห้าบริเวณที่ทำให้วัตถุมีความเร็วเป็นศูนย์จนเกิดได้ทั้งวงโคจรรูปลูกธนูหรือ วงโคจรรูปเกือบมาได้

### 2.2.3 การเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ จุดลากรานจ์ที่ห้า (1,6,9)

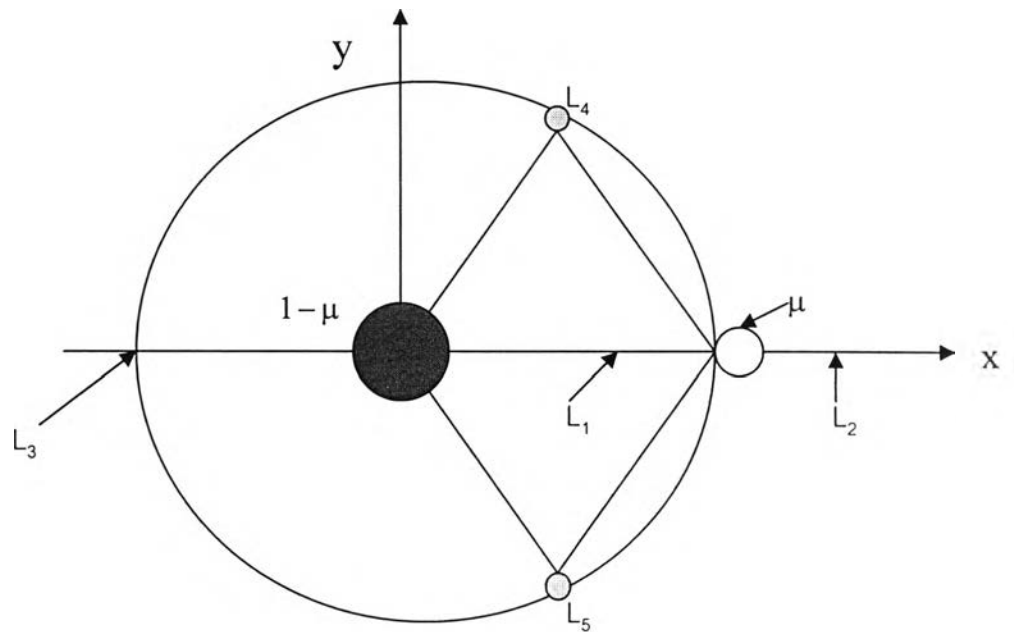
การเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามมีการเคลื่อนที่เชิงคาบเกิดขึ้นทำให้เราสนใจเฉพาะการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามในบริเวณจุดลากรานจ์ที่สี่ และ จุดลากรานจ์ที่ห้าโดยหาเหตุผลในทางฟิสิกส์ว่าทำไมวัตถุนี้ต้องเคลื่อนที่ในบริเวณนี้โดยพิจารณาศักย์ของระบบดาวเสาร์กับเททิส และ ระบบดาวเสาร์กับไดโอนีเพื่อหาบริเวณที่มีค่าศักย์น้อยที่สุดของจุดลากรานจ์ซึ่งศักย์ดังกล่าวนี้จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่เชิงคาบของระบบได้

#### 2.2.3.1 ตำแหน่งและศักย์ของจุดลากรานจ์ทั้งห้า

จุดลากรานจ์ทั้งห้ามีสมบัติของจุดอย่างไร โดยเริ่มหาค่าตำแหน่งของแต่ละจุดหาศักย์เพื่อใช้ในการพิจารณาสมบัติของจุดเหล่านั้น จุดลากรานจ์เป็นจุดสมดุลภายใต้กรอบหมุนมีเงื่อนไของจุดลากรานจ์คือความเร่งของวัตถุชิ้นที่สามเทียบกับกรอบอ้างอิงหมุนมีค่าเป็น  $0[(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0]$  และ ความเร็วของวัตถุชิ้นที่สามเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงหมุนมีค่าเป็น  $0[(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ ----- 7}$$

ปัญหาวัตถุสามชิ้นจะมีจุดลากรานจ์มีทั้งหมดห้าจุดดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 แสดงตำแหน่งจุดลากรางจ์ทั้งห้าจุด (6,9)

สมการที่ 7 ใช้หาค่าตำแหน่งของจุดลากรางจ์ที่ 1, 2 และ 3 โดยค่า  $y=z=0$ , ค่าของ  $x$  คือ

$$\text{ตำแหน่งของจุดลากรางจ์ที่ 1 ค่า } x \text{ ได้จากสมการคือ } x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ตำแหน่งของจุดลากรางจ์ที่ 2 ค่า } x \text{ ได้จากสมการคือ } x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ตำแหน่งของจุดลากรางจ์ที่ 3 ค่า } x \text{ ได้จากสมการคือ } x + \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} = 0 \quad (1)$$

สมการที่ 7 หาค่าตำแหน่งของจุดลากรางจ์ที่สี่และห้าโดยมีการกำหนดให้ค่าของ  $x$  และ  $y$  มีค่าไม่เป็น 0

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \left[ 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] + \left[ \frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3} \right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y \left[ 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0 \quad (1,6,9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = z \left[ \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0$$

เงื่อนไขของพิกัดของ  $L_4$  เป็น  $(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$  และพิกัดของ  $L_5$  เป็น  $(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$  (1,6,9)

ตารางที่ 3 แสดงตำแหน่งและศักย์ชูโคของจุดลากรานจ์ของระบบดาวเสาร์กับเททิส

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$
x	0.992374	1.007662	-1.000000	0.49999866	0.49999866
y	0	0	0	0.86625000	-0.86625000
z	0	0	0	0	0
u	1.5002607	1.5002598	1.5000007	1.4999993	1.4999993

ตารางที่ 4 แสดงตำแหน่งและศักย์ชูโคของจุดลากรานจ์ของระบบดาวเสาร์กับไดโอนี

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$
x	0.991511	1.00873	-1.000000	0.49999815	0.49999815
Y	0	0	0	0.86625000	-0.86625000
Z	0	0	0	0	0
u	1.5003229	1.5003217	1.5000009	1.4999991	1.4999991

ข้อมูลแสดงตำแหน่งของจุดลากรานจ์และศักย์ชูโคของระบบดาวเสาร์กับไดโอนี และ ระบบดาวเสาร์กับเททิสดังในตารางที่3และตารางที่4เมื่อพิจารณาศักย์ชูโคของจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม พบว่าศักย์มีค่าที่สูงกว่าศักย์ของจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า ทำให้ทราบว่าจุดลากรานจ์ที่สี่ และห้าจึงเป็นจุดที่มีความเสถียรมากที่สุดของระบบทำให้สามารถพบดวงจันทร์รอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้าได้เท่านั้น

#### 2.2.3.2 สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบจุดลากรานจ์ทั้งห้า (1,6,9)

ศักย์ชูโคของจุดลากรานจ์ทั้งห้าของทั้งสองระบบไม่สามารถยืนยันว่าการเคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์นี้มีลักษณะคล้ายกับเงื่อนไขของสมดุลทั่วไปหรือไม่จึงทำการตรวจสอบหาการเคลื่อนที่

น้อยยิ่งรอบจุดลากรานจ์เพื่อหาการเคลื่อนที่เชิงคาบ การเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบจุดลากรานจ์เป็นการเคลื่อนที่ที่แสดงสมบัติของจุดลากรานจ์นั้น เงื่อนไขของการตัดแปลงสมการการเคลื่อนที่คือเทอมทางซ้ายของสมการแทนค่า ( $x \rightarrow x_0 + \xi, y \rightarrow y_0 + \eta, z \rightarrow z_0 + \zeta$ ) และ เทอมขวาประมาณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์เก็บค่าตัวแปรกำลังที่ 1 โดยกำหนดให้ค่าของ  $(\xi, \eta, \zeta)$  มีค่าน้อยมากๆเมื่อเทียบกับค่าของ  $(x, y, z)$  ได้สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่ง คือ

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi u_{xx}|_0 + \eta u_{xy}|_0 + \zeta u_{xz}|_0 \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi u_{yx}|_0 + \eta u_{yy}|_0 + \zeta u_{yz}|_0 \text{ ----- 8 (1,6,9)} \\ \ddot{\zeta} &= \xi u_{zx}|_0 + \eta u_{zy}|_0 + \zeta u_{zz}|_0\end{aligned}$$

ตัวแปรมีการกำหนดค่าดังนี้

$$u_{ij}|_0 = \frac{\partial}{\partial j} \frac{\partial u}{\partial i} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \text{ --- 9}$$

เงื่อนไขของสมการที่ 10 แทนค่าต่างๆด้วยคำตอบที่ได้จากหัวข้อ 2.2.2 ลงในสมการที่ 9 ได้สมการดังนี้

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งกรณีของจุดลากรานจ์ที่ สาม มีค่า  $\mu \in (0, 0.5)$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= (1 + 2A_0)\xi \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= (1 - A_0)\eta \\ \ddot{\zeta} &= 0 \text{ ----- 10 (1)} \\ A_0 &= \left[ \frac{(1-\mu)}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu}{|x-1+\mu|^3} \right]_{x_0, 0, 0}\end{aligned}$$

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งกรณีของจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{3}{4}\xi \pm \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \right] \eta \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \pm \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \right] \xi + \frac{9}{4}\eta \text{ ----- 11 (1,6,9)} \\ \ddot{\zeta} &= 0\end{aligned}$$

เครื่องหมายบวกคือกรณีของจุดลากรานจ์ที่สี่ และ เครื่องหมายลบคือกรณีของจุดลากรานจ์ที่ห้า

สมการที่ 10 และ สมการที่ 11 เป็นสมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งไม่ต้องพิจารณาในทิศ  $z$  เพราะค่าของ  $z$  มีค่าเป็น 0 และ กฎข้อหนึ่งของนิวตันคือวัตถุที่มีความเร่งเป็นศูนย์จะหยุดนิ่ง หรือ เคลื่อนที่

ด้วยอัตราเร็วคงที่ทำให้แน่ใจว่าการเคลื่อนที่ในทิศ  $z$  ไม่สามารถเกิดขึ้นได้จึงคิดเฉพาะการเคลื่อนที่ของ  $\xi$  และ  $\eta$  เท่านั้น โดยกำหนดเงื่อนไขการแก้สมการที่ 10 และ 11 คือ

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda t}, \eta = \eta_0 e^{\lambda t} \text{ ----- 12 (1)}$$

สมการที่ 12 แทนค่าในสมการที่ 10 ได้สมการรอบจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม คือ

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 - 2A_0 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - 1 + A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \text{ ----- 13 (1,6,9)}$$

สมการที่ 12 แทนค่าในสมการที่ 11 ได้สมการรอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า คือ

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4} & -2\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \\ 2\lambda + \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} & \lambda^2 - \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \text{ ----- 14 (1,6,9)}$$

สมการที่ 13 และ 14 โดยให้ค่าของ  $\xi, \eta \neq 0$  ทำให้ต้องได้ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริก  $2 \times 2$  เป็น 0 เรียกสมการที่ออกมาว่าสมการเอกลักษณ์

สมการเอกลักษณ์ของกรณีจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม คือ

$$\lambda^4 + (2 - A_0)\lambda^2 + (1 + A_0 - 2A_0^2) = 0 \text{ ----- 15 (1,6,9)}$$

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งในบริเวณจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม คือ

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_1 t} + b_1 \cos \lambda_2 t + b_2 \sin \lambda_2 t \\ \eta &= a_3 e^{\lambda_1 t} + a_4 e^{-\lambda_1 t} + b_3 \cos \lambda_2 t + b_4 \sin \lambda_2 t \end{aligned} \text{ (1,6,9)}$$

สมการเอกลักษณ์ของกรณีจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า คือ

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \left(\frac{27}{4}\mu - \frac{27}{4}\mu^2\right) = 0 \text{ (1,6,9)}$$

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu + 27\mu^2}}{2} \text{ ----- 16 (1,6,9)}$$

สมการที่ 16 ได้เงื่อนไขของ  $\mu$  คือ

$$(27\mu^2 - 27\mu + 1 \geq 0) \cup \mu \in (0, 0.5] \text{ จากการรวมเงื่อนไขดังกล่าวได้ค่า } \mu \in (0, 0.0385]$$



$\mu$  ของระบบดาวเสาร์กับไดโอนีเท่ากับ  $1.85 \times 10^{-6}$  และ  $\mu$  ของระบบดาวเสาร์กับเททีสเท่ากับ  $1.34 \times 10^{-6}$  โดยค่า  $\mu$  ของทั้งสองระบบนี้อยู่ในช่วงของค่า  $\mu$  นี้แสดงว่าระบบทั้งสองนี้จะพบวัตถุเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่สี่ และ ห้า สรุปได้ว่าค่า  $\mu$  เป็นเงื่อนไขแรกในการใช้วิเคราะห์เพื่อหาโอกาสในการพบวัตถุเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่สี่ และ ห้าได้

ค่า  $\mu$  คัดแปลงสมการที่ 16 โดยใช้ทฤษฎีไบโนเมียลเพื่อหาอัตราเร็วเชิงมุม คือ

$$\lambda_{1,2} = \pm i(1 - \frac{27}{8}\mu), \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\mu\frac{27}{4}} \quad (9)$$

คาบของระบบหาได้จากความสัมพันธ์ของ  $T \propto |\lambda|^{-1}$

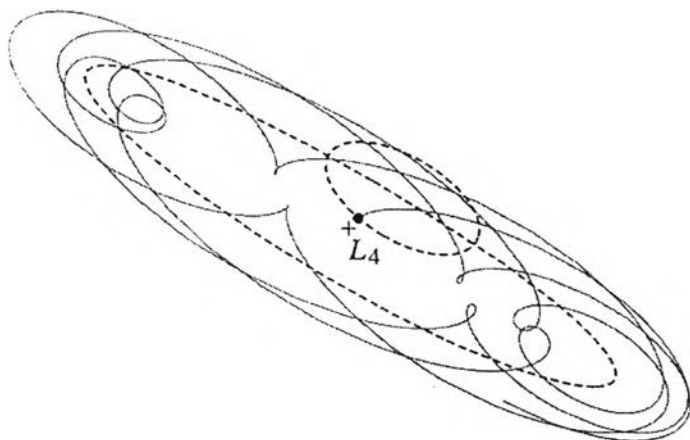
$$T_s = \frac{T}{(1 - \frac{27}{8}\mu)}, T_l = \frac{T}{\sqrt{\mu\frac{27}{4}}} \quad (9)$$

T เป็นคาบของวัตถุชั้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชั้นที่ 1,  $T_s$  เป็นคาบสั้น และ  $T_l$  เป็นคาบยาว

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาครอบ  $L_4, L_5$  โดยการแทนค่า  $\lambda$  เข้าไปในสมการที่ 14 คือ

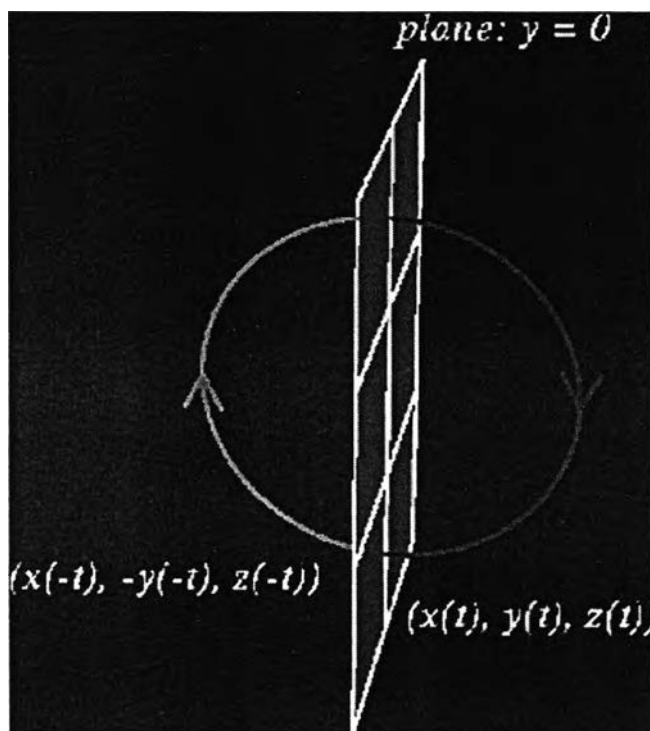
$$\begin{aligned} \xi &= C_1 \cos(t(1 - 3.375\mu) + \Theta) + C_2 \sin(t\sqrt{6.75\mu} + \Psi) \\ \eta &= D_1 \sin(t(1 - 3.375\mu) + \Theta) + D_2 \sin(t\sqrt{6.75\mu} + \Psi) \dots\dots 17 \quad (1,6,9) \\ \xi(t=0) &= C, \eta(t=0) = C, \dot{\xi}(t=0) = 0, \dot{\eta}(t=0) = 0 \end{aligned}$$

### 3 The Restricted Three-Body Problem



รูปที่ 7 แสดงการสั้นรอบจุดสมดุลที่เสถียร (6)

การเพิ่มค่าCของทั้งสองระบบทำเพื่อพิจารณาหาว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามที่เกิดขึ้นว่าจะสามารถเกิดการเคลื่อนที่ของวงโคจรรูปเกือบมาได้ หรือ ไม่



รูปที่ 8 แสดงรูปสมมาตรทางโคจรของปัญหาวัตถุสามชิ้นในกรณีจำกัด (6)

การเคลื่อนที่น้อยยี่รอบจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สามพบว่าสมการที่เกิดขึ้นนี้ทำให้วัตถุไม่สามารถอยู่รอบบริเวณนี้ได้เปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่ขึ้นภูเขาทำให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ยากลำบากจนไม่สามารถพบวัตถุรอบบริเวณนี้ได้ การเคลื่อนที่รอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้าเกิดการเคลื่อนที่เชิงคาบประกอบด้วยวงโคจรคาบสั้นเคลื่อนที่ร่วมกับวงโคจรคาบยาวเกิดเป็นการเคลื่อนที่ที่เรียกว่าการเคลื่อนที่แบบไซคลิกดังรูปที่ 7 ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่พื้นฐานของวงโคจรรูปลูกฮ็อค และ วงโคจรรูปเกือบมาซึ่งทั้งสองวงโคจรนี้เป็นสิ่งที่ต้องการในทฤษฎีของทิมมาน เดอ โมท, โกลด์ และ เมอเลย์ สมมาตรทางโคจรดังรูปที่ 8 อธิบายว่าวงโคจรที่เกิดขึ้นเกิดจากการรบกวนจุดลากรานจ์ที่สี่ และ จุดลากรานจ์ที่ห้าจะมีจำนวนวงรอบของคาบสั้นและจำนวนวงรอบของคาบยาวเท่ากันทั้งสองบริเวณ แต่มีการวนครบรอบที่ตรงข้ามกันทำให้เกิดลักษณะของวงโคจรที่เหมือนกันทั้งสองบริเวณเมื่อมีการรบกวนที่เหมือนกัน เช่น วงโคจรรูปลูกฮ็อคเป็นวงโคจรที่เกิดการเคลื่อนที่ร่วมกันของวงโคจรคาบสั้นกับวงโคจรคาบยาวเคลื่อนที่หนึ่งรอบโดยถ้าการรบกวนเพิ่มขึ้นพบว่าจำนวนวงไซคลอยด์เพิ่มขึ้นเนื่องจากวงโคจรคาบยาวเกิดการยืดตัวออกทำให้มีการวนของวงโคจรคาบสั้นเพิ่มขึ้น และ วงโคจรรูปเกือบมาเป็นผลมาจากการรบกวนที่เพิ่มขึ้นที่ให้กับระบบจนเกิดวงโคจรที่มีการเคลื่อนที่ร่วมกันรอบบริเวณของจุดลากรานจ์ที่สี่, จุดลากรานจ์ที่ห้า และ จุดลากรานจ์ที่สามเนื่องจากศักย์ฮูด

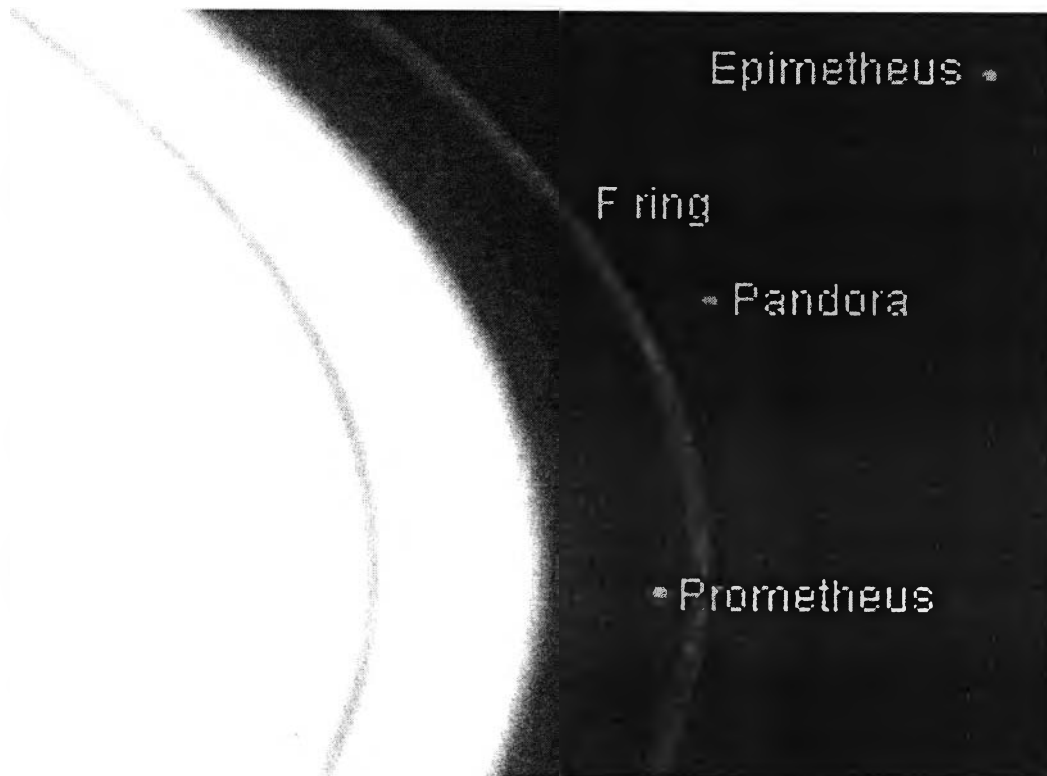
ของจุดลากรางจ์ที่เสถียรมีค่าเท่ากันจึงทำให้เกิดการเคลื่อนที่เหมือนกันรอบบริเวณดังกล่าวนี้ทำให้การวนของวงโคจรคาบยาวมีทั้งหมดสองรอบโดยถ้ามีการรบกวนเพิ่มขึ้นจะทำให้เกิดการวนของวงไซคลอยด์เพิ่มขึ้น และมีคาบของการเคลื่อนที่ของระบบโดยประมาณ คือ

$$T_{\text{system}} = mT_{\text{long}} + nT_{\text{short}}, m = 1, 2, n \in [0, N] \quad (6.9)$$

$m$  เป็นจำนวนของจุดลากรางจ์ที่เสถียร,  $N$  เป็นจำนวนนับ และ  $n$  เป็นจำนวนของวงของคาบสั้น

### 2.3 ทฤษฎีของทีมงานโกลด์ครีช และ ทรีเมน

ดวงจันทร์ในระบบวงแหวนมีอีกหน้าที่หนึ่งที่สำคัญนอกจากการกำเนิดวงแหวนนั้นก็คือทำหน้าที่เป็นผู้ควบคุมอนุภาควงแหวนภายในระบบวงแหวนไม่ให้หลุดออกจากวงแหวนโดยมีทฤษฎีที่สนับสนุนเป็นของทีมงาน โกลด์ครีช และ ทรีเมน ทฤษฎีนี้ใช้พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนนี้เป็นปัญหาหนึ่งของปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัด ดวงจันทร์ที่ทำหน้าที่นี้เรียกว่าดวงจันทร์ผู้ควบคุม(Shepherd moons) ซึ่งทำหน้าที่คล้ายกับสุนัขเฝ้าแกะโดยแรงดึงดูดของดวงจันทร์คู่นี้ทำการรบกวนอนุภาควงแหวนจนสามารถบังคับอนุภาควงแหวนไม่ให้หลุดออกจากวงแหวน ดาวบริวารของดาวเสาร์ทำหน้าที่นี้คือ แพนดูล่า และ โปมีทรีอัส ซึ่งทั้งคู่ถูกค้นพบโดยข้อมูลของยานอวกาศไพเนียร์11(Pioneer11) , ตำแหน่งของดาวทั้งสองนี้ดังรูปที่9 และ รูปที่10 เป็นภาพขยายผลของดวงจันทร์คู่นี้เดินทางผ่านบริเวณอนุภาควงแหวนโดยมีผลต่ออนุภาควงแหวน ข้อมูลของยานอวกาศพิจารณาผลโดยการสังเกตในกรอบของอนุภาควงแหวน(กรอบอ้างอิงหมุน) เพราะว่า ข้อมูลของยานอวกาศเป็นการสังเกตในลักษณะของการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับอนุภาควงแหวนจนสามารถตรวจสอบผลของเหตุการณ์นี้ได้



รูปที่ 9 แสดงถึงตำแหน่งของดวงจันทร์ ชื่อ แพนดูล่า และ โพรมิทีอัส (7)

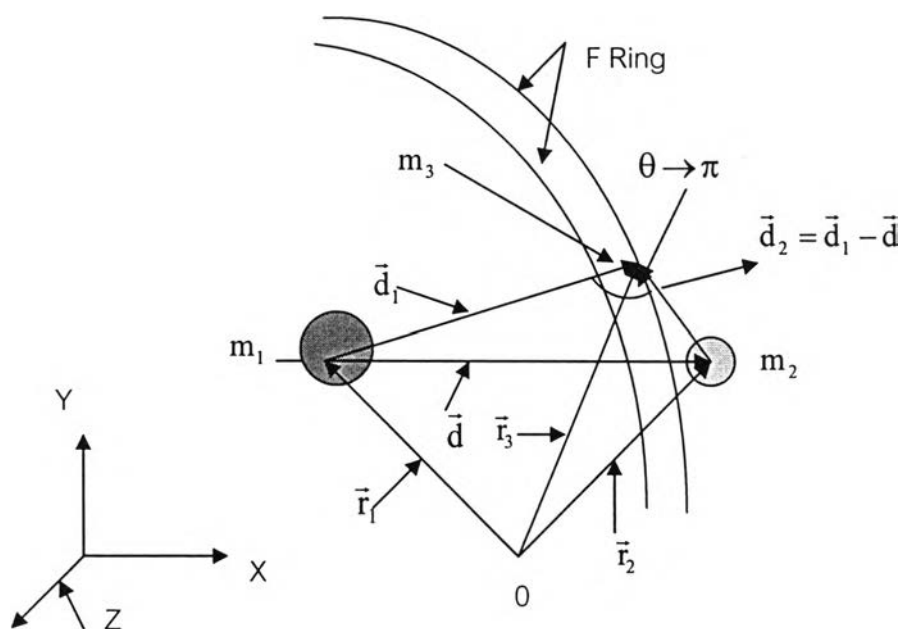


รูปที่10 ภาพขยายของเหตุการณ์ของอนุภาควงแหวนเนื่องจากอิทธิพลของดวงจันทร์ (7)

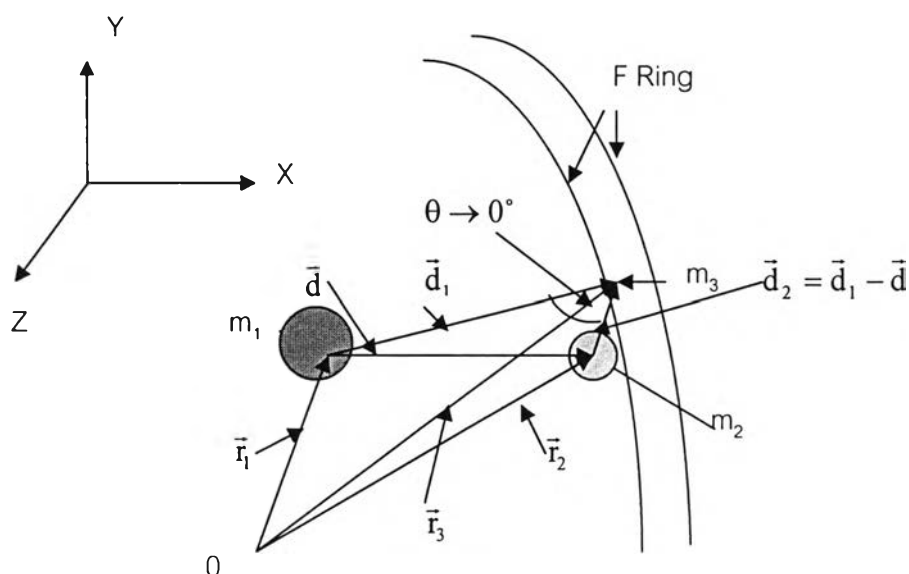
ตำแหน่งของดวงจันทร์ทั้งสองนี้อยู่ด้านนอกของวงแหวน และการตรวจสอบขอบเขตโรซพพบว่า มีค่าที่สูงกว่าระยะทางโคจรรอบดาวเสาร์ทำให้เกิดแนวคิดที่ดวงจันทร์นี้อาจเคยกลายเป็นส่วนหนึ่งของอนุภาควงแหวนในอดีตก่อนที่ดวงจันทร์ในกลุ่มนี้จะมีขนาดเล็กเพื่อใช้ในการลดผลของแรง การโป่งตัวที่เกิดขึ้นให้มากที่สุด งานวิจัยนี้ตรวจสอบถึงหน้าที่ของดวงจันทร์ทั้งสองนี้กระทำกับ อนุภาควงแหวน โดยใช้สมการของฮิลล์เป็นตัวตรวจสอบเปรียบเทียบกับข้อมูลจากยานโพเนียว 11 ได้ มีการยืนยันเหตุการณ์โดยมีลักษณะของการเคลื่อนที่คล้ายกับการเคลื่อนที่น้อยยิ่งรอบบริเวณของ จุดสมดุลที่ไม่เสถียรทำให้เกิดแนวคิดของการคำตอบคล้ายกับการหาเงื่อนไขของจุดลากรางจ์ที่สี่ และ ห้าในทฤษฎีของทีมงานเคอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์

### 2.3.1 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนภายใต้อิทธิพลของดวงจันทร์ (1,6)

กฎข้อสองของนิวตันทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของมวล  $m_2$  และ  $m_3$  มีสมการดังนี้



รูปที่ 11 แสดงเงื่อนไขของสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนถูกกระทำโดยแพนดูล่า (1)



รูปที่12 เงื่อนไขของสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนถูกกระทำโดยโพมีทรีอัส (1)

กรอบอ้างอิงเฉื่อยของมวลหนึ่งมีพิกัดคือ  $(X', Y', Z')$ , มวลสองมีพิกัดคือ  $(X_2', Y_2', Z_2')$  และมวลสามมีพิกัดคือ  $(X_3', Y_3', Z_3')$  กรอบอ้างอิงหมุนของมวลสองมีพิกัดคือ  $(X, Y, Z)$  และ พิกัดนี้มีค่าประมาณตำแหน่งของดาวเสาร์กับขอบอนุภาควงแหวน, มวลหนึ่งมีพิกัดคือ  $(0,0,0)$  และ มวลสามเป็นศูนย์กลางของอนุภาควงแหวนมีพิกัดคือ  $(X', Y', Z')$  กำหนดมุมของเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเสาร์กับดวงจันทร์ และ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของดาวเสาร์กับอนุภาควงแหวน  $\theta \rightarrow \pi$  และ ค่า  $\theta \rightarrow 0^\circ$  เป็นกรณีโพมีทรีอัส และ แพนดูล่า ตามลำดับ,  $m_1, m_2, m_3$  แทนมวลของดาวเสาร์, มวลของดวงจันทร์ และ มวลของอนุภาควงแหวน ตามลำดับ,  $d_2 \ll (d_1, d)$ ,  $m_3 \ll (m_1, m_2)$  และ เงื่อนไขต่างๆของแรงการโป่งตัวจะทำในบริเวณสามเหลี่ยม  $(d, d_1, d_2)$

กฎข้อสองของนิวตันได้สมการการเคลื่อนที่ของมวล  $m_2$  และ  $m_3$  มีสมการดังนี้

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1}{|\vec{d}_1 - \vec{d}_2|^3} (\vec{d}_1 - \vec{d}_2) - \frac{Gm_3}{d_2^3} \vec{d}_2 \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = \frac{Gm_1}{d_1^3} \vec{d}_1 + \frac{Gm_2}{d_2^3} \vec{d}_2$$

สมการการเคลื่อนที่ในกฎข้อสองของนิวตันทำการตัดแปลงเป็นสมการการเคลื่อนที่ของดวงจันทร์กระทำกับอนุภาควงแหวนโดยการนำการกระจัดของมวลสามลบกับการกระจัดของมวลสอง ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ดังสมการที่18 คือ

$$\ddot{\bar{d}}_2 = -\frac{G(m_2 + m_3)}{d_2^3} \bar{d}_2 + Gm_1 \left( -\frac{\bar{d}_1}{d_1^3} + \frac{(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)}{|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|^3} \right) \dots\dots\dots 18 \quad (6)$$

สมการการเคลื่อนที่ในปัญหาวัตถุสองชิ้นคือ  $-\frac{G(m_2 + m_3)}{d_2^3} \bar{d}_2 \approx -\frac{Gm_2}{d_2^3} \bar{d}_2$  และ แรง  
การโป่งตัวเป็นแรงเนื่องมาจากดาวเสาร์กระทำกับอนุภาควงแหวนคือ  $Gm_1 \left( -\frac{\bar{d}_1}{d_1^3} + \frac{(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)}{|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|^3} \right)$

แรงการโป่งตัวมีค่าประมาณคือ

$$\bar{R} = Gm_1 \frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{1}{|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|} - \frac{\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2}{d_1^3} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial d} V \quad (1)$$

$$V \text{ เป็นศักย์ของแรงโป่งตัวมีค่าเท่ากับ } Gm_1 \left( \frac{1}{|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|} - \frac{\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2}{d_1^3} \right) \quad (1)$$

ขนาดของ  $|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|^{-1}$  สามารถดัดแปลงโดยใช้สมการฟังก์ชันก่อนกำเนิดของพหุนามเลอจองด์  
และ เทอมย่อยอื่นๆ คือ

$$\frac{1}{|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|} = \frac{1}{d_1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{d_2}{d} \right)^i P_i(\cos\theta) \quad (1) \quad , \quad \frac{\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2}{d_1^3} = \frac{d_2}{d_1^2} \cos\theta \quad (1)$$

ศักย์แรงการโป่งตัวในกรอบอ้างอิงหมุนกรณีของดวงจันทร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวน

$$V = Gm_1 \frac{d_2^2}{d_1^3} P_2(\cos\theta)$$

$$V = \frac{Gm_1}{2d_1^3} \left[ \frac{3}{d_1^2} [(X'(X' - X) + Y'(Y' - Y) + Z'(Z' - Z))^2 - [(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]] \right]$$

แรงการโป่งตัวของดวงจันทร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวนในพิกัดของกรอบอ้างอิงหมุน คือ

$$\bar{R} = \left( \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \Bigg|_{(X'=d_1, Y'=0, Z'=0)} \quad (1)$$

แรงการโป่งตัวของดวงจันทร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวนในพิกัดของกรอบอ้างอิงหมุน คือ

$$\bar{R} \approx (2(\Omega_0^2 X - \Omega_0^2 d_1), -\Omega_0^2 Y, -\Omega_0^2 Z)$$

สมการการเคลื่อนที่ของแพนดูล่า และ โปมีทรีอัสมีเทอมการเคลื่อนที่ในแนวแกน X ของแรง โน้มถ่วงตรงข้ามกันของดาวเสาร์กระทำกับวงแหวนและวงแหวนในชั้น F มีลักษณะเป็นวงแหวนที่มีความบางมากเมื่อเทียบกับระยะทางของดาวเสาร์ถึงบริเวณของวงแหวนจึงทำให้แรง โน้มถ่วงของดาวเสาร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวนมีขนาดเกือบเท่ากับ  $\Omega_0^2 d_1$  จนมีการหักล้างกันของแรง โน้มถ่วงนี้ปรากฏการณ์นี้สังเกตได้จากรูปที่ 10 พบว่าการบังคับอนุภาคของวงแหวน โดยดวงจันทร์เกิดเฉพาะทางด้านขอบของวงแหวนในส่วนที่อยู่ใกล้กับดวงจันทร์โดยภายในของวงแหวนมีการหักล้างกันของแรง โน้มถ่วงของดาวเสาร์กับอนุภาควงแหวนทั้งหมด

สมการของแรงการ โป่งตัวของดวงจันทร์ที่ใช้พิจารณาผลของอนุภาควงแหวน

$$\bar{R} \approx (2\Omega_0^2 X, -\Omega_0^2 Y, -\Omega_0^2 Z)$$

สมการการเคลื่อนที่นี้เป็นสมการที่ใช้บรรยายผลของดวงจันทร์แต่ละดวงที่มีผลต่ออนุภาควงแหวนทางด้านขอบของวงแหวน โดยส่วนใหญ่จะทราบตำแหน่งของดวงจันทร์กับดาวเสาร์เท่านั้นทำให้สมการนี้สามารถดัดแปลงเพื่อใช้หาผลของดวงจันทร์มีต่ออนุภาควงแหวนได้

ค่าเปลี่ยนพิกัดจากกรอบอ้างอิงเฉื่อยเป็นกรอบอ้างอิงหมุนจะทำการพิจารณาด้วยอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาควงแหวน โดยใช้เงื่อนไขการเปลี่ยนพิกัด คือ

$$\begin{aligned} X'_i &= X_i \cos \Omega_0 t - Y_i \sin \Omega_0 t \\ Y'_i &= X_i \sin \Omega_0 t + Y_i \cos \Omega_0 t \text{ -----19} \\ Z'_i &= Z_i \end{aligned}$$

กรอบอ้างอิงหมุนพิจารณาการเคลื่อนที่โดยให้มีอัตราเร็วเชิงมุมเท่ากับอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาควงแหวนเพื่อใช้ในการดัดแปลงสมการการเคลื่อนที่ภายใต้กรอบหมุนต่อไป

แรงการ โป่งตัวของกรอบอ้างอิงหมุนดัดแปลงเป็นแรงการ โป่งตัวในกรอบอ้างอิงเฉื่อยโดยใช้วิธีการหมุนแกน

$$\bar{R} = [2\Omega_0^2(X'_1 - X'_2), -\Omega_0^2(Y'_1 - Y'_2), -\Omega_0^2(Z'_1 - Z'_2)] \text{ ---- 20}$$

การดัดแปลงนี้จะทำตามเงื่อนไขในการหมุนน้อยมากโดยให้มีข้อกำหนดเพิ่มเติมของสมการนี้คือต้องใช้ใน ช่วงของค่า X คือ  $\frac{|X_i - A|}{d_1} \ll 1$  และ ค่า Y คือ  $\frac{|Y_i - B|}{d_1} \ll 1$  โดยค่า  $d_1 \in [a, b]$  แทนตำแหน่งเฉลี่ยของอนุภาควงแหวน

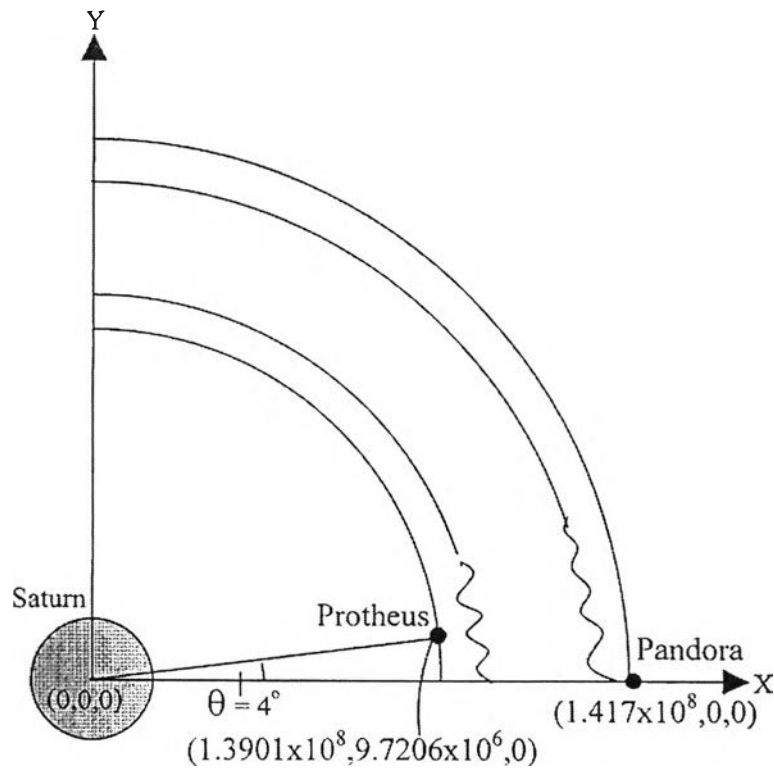


การกระจัดของดวงจันทร์กระทำกับอนุภาควงแหวนภายใต้กรอบเฉื่อย คือ

$$\vec{d}_2 = (X'_1 - X'_3, Y'_1 - Y'_3, Z'_1 - Z'_3) \text{ ----- 21}$$

สมการที่19, สมการที่20 และ สมการที่21 แทนลงในสมการที่18 ได้สมการการเคลื่อนที่ภายใต้กรอบหมุนของอนุภาควงแหวนเนื่องจากผลของดวงจันทร์กระทำกับอนุภาควงแหวนโดยพิจารณาเทียบกับตำแหน่งของดาวเสาร์ ผลงานของ Hill, 1878, Nakazawa and Ida, 1988

$$\begin{aligned} \ddot{X}_i - 2\Omega_0 \dot{Y}_i &= \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \\ \ddot{Y}_i + 2\Omega_0 \dot{X}_i &= \frac{\partial U_i}{\partial Y_i} \\ \ddot{Z}_i &= \frac{\partial U_i}{\partial Z_i} \\ U_i &= \frac{\Omega_0^2}{2} (3X_i^2 - Z_i^2) + \frac{Gm_j}{\sqrt{(X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2 + Z_i^2}}, \Omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{d_1^3}} \end{aligned} \text{ ---22 (3)}$$



รูปที่13 อธิบายการหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนเนื่องจากดวงจันทร์ทั้งสอง (7)

$\Omega_0$  เป็นอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาควงแหวน,  $(A, B, 0) = (a, 0, 0)$  แทนตำแหน่งของแพนดูล่า,  $(A, B, 0) = (b \cos \theta, b \sin \theta, 0)$  แทนตำแหน่งของโพมิตริอัส,  $M$  เป็นมวลของดาวเสาร์ และ  $m_i$  เป็นมวลของดวงจันทร์ที่อยู่ใกล้ๆอนุภาควงแหวน สมการที่ 22 อธิบายผลที่เกิดขึ้นของดวงจันทร์แต่ละดวงที่กระทำกับอนุภาควงแหวนในแต่ละบริเวณ โดยมีส่วนประกอบที่สำคัญของสมการคือ ความเร่งของแรงโคลิอริส  $(-2\Omega_0 \dot{Y}_i, 2\Omega_0 \dot{X}_i, 0)$ , ผลรวมของความเร่งของแรงหนีศูนย์กลางกับแรงการไป่ตัวเนื่องมาจากดาวเสาร์  $(3\Omega_0^2 X_i, 0, -\Omega_0^2 Z_i)$  และ ความเร่งของแรงโน้มถ่วงดวงจันทร์กระทำกับอนุภาควงแหวน คือ

$$\left[ -\frac{Gm_i(X_i - A)}{(\sqrt{(X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2 + Z_i^2})^3}, -\frac{Gm_i(Y_i - B)}{(\sqrt{(X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2 + Z_i^2})^3}, -\frac{Gm_i Z_i}{(\sqrt{(X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2 + Z_i^2})^3} \right]$$

สมการการเคลื่อนที่ดังรูปที่ 10 เป็นผลมาจากดวงจันทร์คู่หนึ่งทำให้อนุภาควงแหวนเคลื่อนที่คล้ายกับการเคลื่อนที่ของสมการภายใต้เงื่อนไขแบบ underdamped harmonic ซึ่งอธิบายว่าผลของดวงจันทร์คู่นี้กระทำกับอนุภาควงแหวนดังรูปที่ 10 เกิดการบีบอัดของอนุภาควงแหวนโดยการหักล้างกันของเทอม  $\sin \lambda_1 t$  และ  $\cos \lambda_1 t$  ด้วย เทอมของ  $e^{\lambda_1 t}, e^{-\lambda_1 t}$  จนทำให้เกิดผลตามทฤษฎีการหาคำตอบของสมการนี้คิดว่าอนุภาคของวงแหวนผ่านดวงจันทร์ทั้งสองนี้ต้องเกิดการเคลื่อนที่ในลักษณะของการเคลื่อนที่น้อยยิ่งผ่านจุดสมดุลแบบไม่เสถียร

### 2.3.2 สมการฮิลล์

สมการฮิลล์มีแนวคิดเดียวกันกับสมการจาโคบีซึ่งอธิบายถึงการเคลื่อนที่ในบริเวณใกล้จุดสมดุลในบริเวณค่า  $Z$  เป็นศูนย์กลางควรมีการเคลื่อนที่ใกล้บริเวณจุดสมดุลเป็นอย่างไร โดยลักษณะของพื้นผิวที่เกิดขึ้นเรียกว่าเส้นโค้งความเร็วศูนย์โดยใช้เงื่อนไขดังรูปที่ 13 มาใช้ในการพิจารณา

สมการฮิลล์ของกรณีโพมิตริอัสกระทำกับอนุภาควงแหวนคือ

$$3\Omega_0^2 X^2 + 2 \frac{Gm_{\text{promethous}}}{\sqrt{(X - b \cos \theta)^2 + (Y - b \sin \theta)^2}} = C_H \quad (6)$$

สมการฮิลล์ของกรณีแพนดูล่ากระทำกับอนุภาควงแหวนคือ

$$3\Omega_0^2 X^2 + 2 \frac{Gm_{\text{pandora}}}{\sqrt{(X - a)^2 + Y^2}} = C_H \quad (6)$$

เรียกค่า  $C_H$  นี้ว่า ค่าคงที่ดัดแปลงของจาโคบี(modified Jacobi constant)

การวิเคราะห์สมการนี้กำหนดให้ค่า  $Z = 0$  เพราะว่าการเคลื่อนที่นี้จะเกิดขึ้นเฉพาะระนาบ XY สมการฮิลส์ของโพรมิทธีอัส และ แพนดูล่าเป็นผลของการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลที่ไม่เสถียรเหมือน ผลรอบจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สามทำให้ทราบว่าเกิดการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของอนุภาควงแหวนเป็นกรณีของจุดสมดุลแบบไม่เสถียร

### 2.3.3 จุดสมดุลในบริเวณอนุภาควงแหวน

จุดสมดุลนี้จะหาคล้ายกับเงื่อนไขของจุดลากรานจ์ คือ

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

จุดสมดุลในแนว X ในเงื่อนไขของโพรมิทธีอัส กระทำกับอนุภาควงแหวน คือ

$$4.0990 \times 10^{-8} X - \frac{(2.2011 \times 10^{10})}{(X - 1.3901 \times 10^8)^2} = 0$$

จุดสมดุลในแนว X ในเงื่อนไขของแพนดูล่า กระทำกับอนุภาควงแหวน คือ

$$4.099 \times 10^{-8} X - \frac{(1.294 \times 10^{10})}{(X - 1.417 \times 10^8)^2} = 0$$

ตารางที่ 5 แสดงจุดสมดุล และ ศักย์ยังผลใกล้กับ โพรมิทธีอัส และ แพนดูล่า

	Prometheus	Pandora
X(km)	$1.39072 \times 10^5$	$1.41653 \times 10^5$
Y(km)	9720.6	0
Z(km)	0	0
U(J/kg)	$3.96757 \times 10^8$	$4.11525 \times 10^8$

โพมีทริอัสมีตำแหน่งจุดสมดุลในแนวแกน X มีค่ามากกว่า  $1.3901 \times 10^8$  m โดยค่าของ Y เป็น  $9.7206 \times 10^6$  m และ  $Z=0$  และ แพนดูล่ามีตำแหน่งของจุดสมดุลมีค่าน้อยกว่า  $1.417 \times 10^8$  m โดยค่า  $Y=Z=0$  สักข์ของแพนดูล่ามีค่าสูงกว่าของโพมีทริอัสทำให้ทราบว่าลักษณะการเคลื่อนที่น้อยยิ่งในบริเวณใกล้กับแพนดูล่าเกิดการเคลื่อนที่ได้ยากกว่าในบริเวณใกล้กับโพมีทริอัส

### 2.3.4 สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของอนุภาควงแหวน

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งมีวิธีการหาค่าคล้ายกับปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัด โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\Omega_0^2 \eta &= \xi U_{xx} |_0 \\ \ddot{\eta} + 2\Omega_0^2 \xi &= \eta U_{yy} |_0 \\ \ddot{\zeta} &= \zeta U_{zz} |_0 \\ U_{ij} &= \frac{\partial^2 U}{\partial i \partial j} \end{aligned} \quad (1,6,9)$$

สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งมีความแตกต่างจากสมการในทฤษฎีของเดอ โมท, โกลด์ และ เมอเลย์ คือมีการเคลื่อนที่เชิงคาบเกิดขึ้นในแนว Z แต่การตรวจสอบเงื่อนไขของการเคลื่อนที่น้อยยิ่งพบว่าไม่สามารถเกิดเคลื่อนที่ในแนวนี้ได้เพราะว่าตำแหน่งของสมดุลในแนวการเคลื่อนที่นี้มีค่าเป็นศูนย์จึงทำให้แน่ใจว่าไม่มีจำนวนจริงใดมีขนาดของการเคลื่อนที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ได้ฉะนั้นการพิจารณาถึงการเคลื่อนที่จึงคิดเฉพาะการเคลื่อนที่ในแนว X และ Y การเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนได้รับอิทธิพลของดวงจันทร์เป็นการหาผลของการบังคับอนุภาควงแหวนโดยใช้สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งในแนว X และ Y ( $\xi, \eta$ ) ตามลำดับ

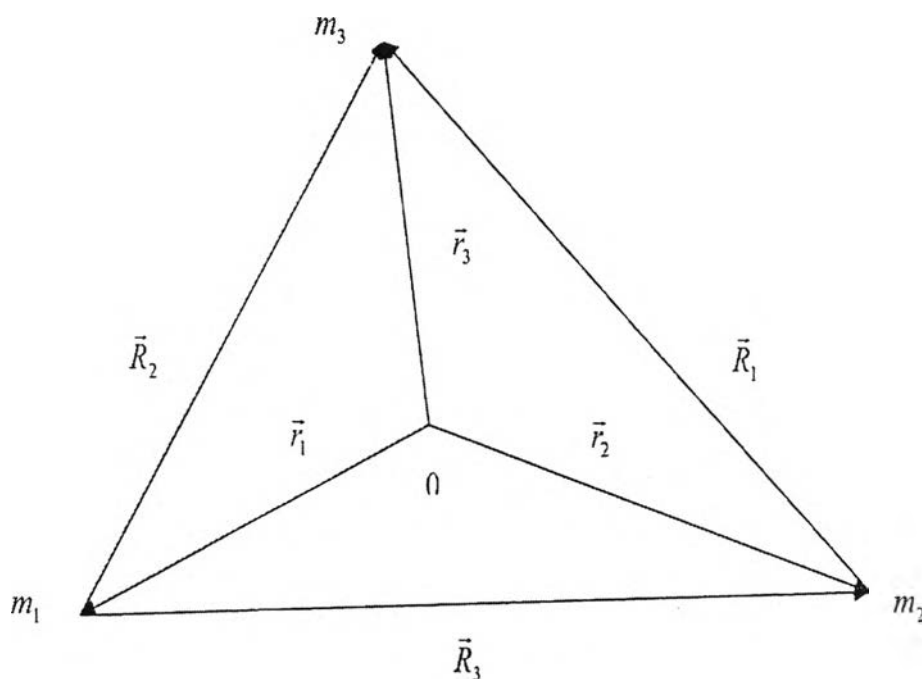
สมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของอนุภาควงแหวน

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_1 t} + b_1 \cos \lambda_2 t + b_2 \sin \lambda_2 t \\ \eta &= a_3 e^{\lambda_1 t} + a_4 e^{-\lambda_1 t} + b_3 \cos \lambda_2 t + b_4 \sin \lambda_2 t \end{aligned} \quad (6)$$

คำตอบของสมการนี้นำไปแทนค่าร่วมกับจุดสมดุลในแนวแกน X และ แกน Y ทำให้ได้สมการของการเคลื่อนที่น้อยยิ่งอธิบายผลของดวงจันทร์ที่มีต่ออนุภาควงแหวนโดยวิธีการหาค่าคล้ายกับการพิจารณาเงื่อนไขของการหาการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของจุดลากรางจ์ที่สี่ และ ห้า

## 2.4 การหาเงื่อนไขของตำแหน่งสมดุล (6)

การหาจุดสมดุลของวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัดได้ตำแหน่งของจุดสมดุลในลักษณะสามเหลี่ยมด้านเท่า กับ เส้นตรง ทำให้คิดว่าระบบของปัญหาวัตถุสามชิ้นนี้ยังมีรูปแบบสมดุลในลักษณะอื่นหรือไม่ การเริ่มต้นของการหาคือการพิจารณาตั้งแต่จุดศูนย์กลางมวลของสามเหลี่ยมดังรูปที่ 14



รูปที่ 14 แสดงเงื่อนไขการพิจารณาสมดุลของปัญหาวัตถุสามชิ้น (6)

จุดศูนย์กลางมวลหาได้จากสมการคือ

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0 \text{ ----- 23}$$

การเคลื่อนที่ของมวลทั้งสามใช้กฎข้อสองของนิวตันเป็นตัวอธิบายได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{Gm_2}{R_3^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_3}{R_2^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{Gm_1}{R_3^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_3}{R_1^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \text{ ----- 24} \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= -\frac{Gm_1}{R_2^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{Gm_2}{R_1^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

เงื่อนไขของสมดุลภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนคือทอร์กของมวลทั้งสามเป็นศูนย์ทำให้ได้สมการคือ

$$\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = 0 \text{ ----- 25}$$

นำ สมการที่ 24 แทนสมการที่ 25 ได้สมการของมวลทั้งสามคือ

$$\text{มวลที่ 1 มีเงื่อนไขของสมการคือ } \vec{r}_1 \times \left( \frac{m_2 \vec{r}_2}{R_3^3} + \frac{m_3 \vec{r}_3}{R_2^3} \right) = 0$$

$$\text{มวลที่ 2 มีเงื่อนไขของสมการคือ } \vec{r}_2 \times \left( \frac{m_1 \vec{r}_1}{R_3^3} + \frac{m_3 \vec{r}_3}{R_1^3} \right) = 0$$

$$\text{มวลที่ 3 มีเงื่อนไขของสมการคือ } \vec{r}_3 \times \left( \frac{m_1 \vec{r}_1}{R_2^3} + \frac{m_2 \vec{r}_2}{R_1^3} \right) = 0$$

เงื่อนไขของทอร์คของมวลทั้งสามแทนเงื่อนไขสมการที่ 23 ได้เงื่อนไขของสมดุลคือ

1 วัตถุทั้งสามอยู่ในตำแหน่งของแนวเส้นตรงเดียวกันพิจารณาจาก  $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 = 0)$

2 วัตถุทั้งสามเป็นลักษณะของสามเหลี่ยมด้านเท่าพิจารณาจาก  $(R_1 = R_2 = R_3)$

สมดุลในปัญหาวัตถุสามชิ้นกรณีจำกัดมีตำแหน่งตรงกับสมดุลของกรอบอ้างอิงหมุนในปัญหาวัตถุสามชิ้นแสดงว่าวัตถุชิ้นที่สามมีการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนี้ ทฤษฎีของเคอโมท, โกลด์ และ เมอเลย์ สนใจผลของการเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่สี่ หรือ ห้า ทฤษฎีของโกลด์ริช และ ทรีเมน สนใจการเคลื่อนที่บริเวณสมดุลในแนวเส้นตรง สมดุลของตำแหน่งมวลทั้งสามเป็นเส้นตรงเกิดสมดุลที่ไม่เสถียร และ สมดุลของตำแหน่งมวลเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเกิดสมดุลแบบมีเสถียรภาพ