บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีทางไฟฟ้า

2.1.1 สนามไฟฟ้า (Electric Fields), $\vec{E}$

สนามไฟฟ้าที่จุดใด ๆ คือ แรงทางไฟฟ้า (Electrostatic Force), $\vec{F}$ ที่กระทำต่อประจุทดสอบบวก (Test charge), q_0 ขนาดหนึ่งหน่วยประจุ ที่จุดนั้น ๆ ดังสมการ

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{2.1}$$

ค่าแรงทางไฟฟ้านั้นสามารถหาได้จากกฎของคูลอมบ์ (Coulomb's law)

$$\vec{F} = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \tag{2.2}$$

หรือ

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \tag{2.3}$$

โดยที่ k คือ Electrostatic constant มีค่าเท่ากับ 8.99×10^{9} N.m^2/C^2

ε_0 คือ Permittivity constant มีค่าเท่ากับ 8.85×10^{-12} C^2/N.m^2

r คือ ระยะห่างระหว่างประจุ q_1 และ q_2

เมื่อแทนแรงทางไฟฟ้าจากสมการที่ (2.3) ลงในสมการที่ (2.1) จะสามารถแสดงสมการของค่าสนามไฟฟ้าได้ดังนี้

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \tag{2.4}$$

2.1.2 ศักย์ไฟฟ้า (Electric Potential), V

จุดใด ๆ ในสนามไฟฟ้า ศักย์ไฟฟ้า V จะมีค่าเฉพาะไม่ขึ้นกับขนาดของประจุไฟฟ้าดังสมการ

$$V = \frac{U}{q} \tag{2.5}$$

ค่าความต่างศักย์ (Potential difference), ΔV ระหว่างสองจุด i และ f ในสนามไฟฟ้าเท่ากับผลต่างพลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยประจุ (Potential energy per unit charge)

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \tag{2.6}$$

หรือ

$$V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} \tag{2.7}$$

แรงทางไฟฟ้าเป็นแรงอนุรักษ์ (Conservative Force) ดังนั้นงานจากแรงทางไฟฟ้าจึงเท่ากับผลต่างของพลังงานศักย์ (Potential energy)

$$U_f - U_i = -W \tag{2.8}$$

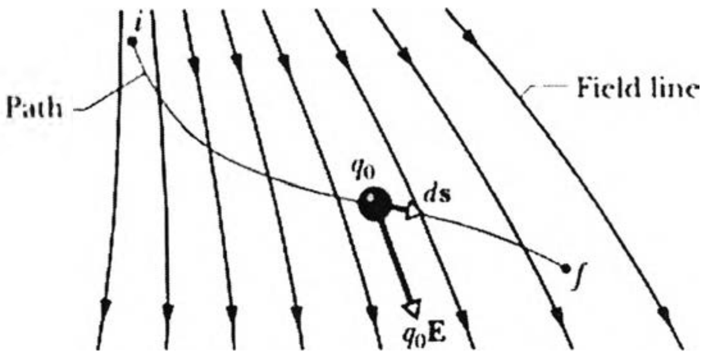
ดังนั้นสมการที่ (2.7) แสดงได้ดังนี้

$$V_f - V_i = -\frac{W}{q} \tag{2.9}$$

งานจากแรงทางไฟฟ้าที่กระทำบนประจุทดสอบ q_0 ภายใต้สนามไฟฟ้า สามารถหาได้โดยพิจารณารูปที่ 2.1 โดยนิยามของงาน (Work), W จะได้

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{2.10}$$

โดยที่ $d\vec{s}$ คือ เส้นทางการเคลื่อนที่ (Path)



รูปที่ 2.1 การเคลื่อนที่ของประจุทดสอบจากตำแหน่ง i ไป f ภายใต้สนามไฟฟ้าไม่คงที่ [21]

แทนแรงทางไฟฟ้า (สมการที่ 2.1)

$$dW = q_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} \tag{2.11}$$

ดังนั้นงานรวม (Total work) ที่ทำให้ประจุเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ

$$W = q_0 \int_i^f \bar{E} \cdot d\bar{s} \tag{2.12}$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความต่างศักย์ไฟฟ้า (สมการที่ 2.9) กับสนามไฟฟ้า (สมการที่ 2.12) แสดงดังนี้

$$V_f - V_i = -\int_i^f \bar{E} \cdot d\bar{s} \tag{2.13}$$

หรือ

$$E_s = \frac{\partial V}{\partial s} \tag{2.14}$$

2.1.3 กระแสไฟฟ้า (Electric current), i

ขนาดกระแสไฟฟ้า i คือ ปริมาณของประจุไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดต่อหนึ่งหน่วยเวลา

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{2.15}$$

โดยที่ Q คือ ขนาดของประจุไฟฟ้าทั้งหมด

2.1.4 ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (Current density), $\bar{J}$

ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าหรือฟลักซ์กระแสไฟฟ้า $\bar{J}$ คือ กระแสไฟฟ้าต่อหน่วยพื้นที่หน้าตัด โดยมีทิศเดียวกับค่าสนามไฟฟ้า

$$i = \int \bar{J} \cdot d\bar{A} \tag{2.16}$$

ถ้ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านสม่ำเสมอ (Uniform) ทั้งหน้าตัด และมีทิศขนานกับเวกเตอร์ของพื้นที่หน้าตัด (Area vector) จะหาค่าขนาดความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าได้ดังสมการ

$$J = \frac{i}{A} \tag{2.17}$$

2.1.5 สภาพต้านทานไฟฟ้า (Resistivity), ρ

ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าในตัวนำไฟฟ้าสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้า และธรรมชาติของตัวนำไฟฟ้า ซึ่งโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อน แต่สำหรับวัสดุบางประเภทอย่างเช่นโลหะสามารถเขียนในรูปสัดส่วนได้โดยตรง [23]

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \tag{2.18}$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นนั้นใช้ได้เฉพาะกับวัสดุที่มีคุณสมบัติทางไฟฟ้าเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic materials) นิยามสภาพการนำไฟฟ้า (Conductivity) σ เป็นส่วนกลับของ ρ หรือ $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ดังนั้นสมการที่ (2.18) จะเขียนได้ใหม่ในรูปของ

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{2.19}$$

2.1.6 ความต้านทานไฟฟ้า (Resistance), R

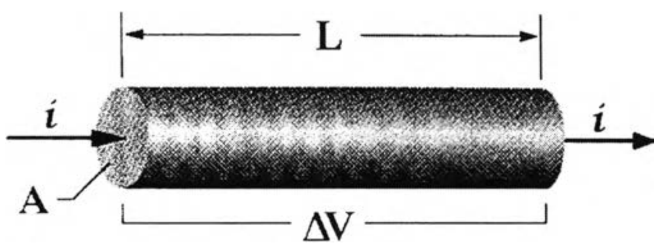
กฎของโอห์ม (Ohm's law) กล่าวว่า สำหรับตัวนำไฟฟ้าที่มีอุณหภูมิคงที่ อัตราส่วนของความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างสองจุดใด ๆ กับค่ากระแสไฟฟ้าจะมีค่าคงที่ ซึ่งคือค่าความต้านทานไฟฟ้า R

$$R = \frac{\Delta V}{i} \tag{2.20}$$

ส่วนกลับของค่าความต้านทานไฟฟ้า จะเรียกว่า ค่าความนำไฟฟ้า (Conductance)

ความต้านทานไฟฟ้าและสภาพต้านทานไฟฟ้า นั้นมีความเกี่ยวข้องกันซึ่งสามารถแสดงได้โดยพิจารณารูปที่ 2.2 ประกอบ จากสมการที่ (2.18)

$$\rho = \frac{E}{J}$$



รูปที่ 2.2 กระแสไฟฟ้าขนาดคงที่ไหลผ่านวัสดุนำไฟฟ้า [21]

แทนสมการที่ (2.14) กับ (2.17) ในสมการที่ (2.18) ได้ว่า

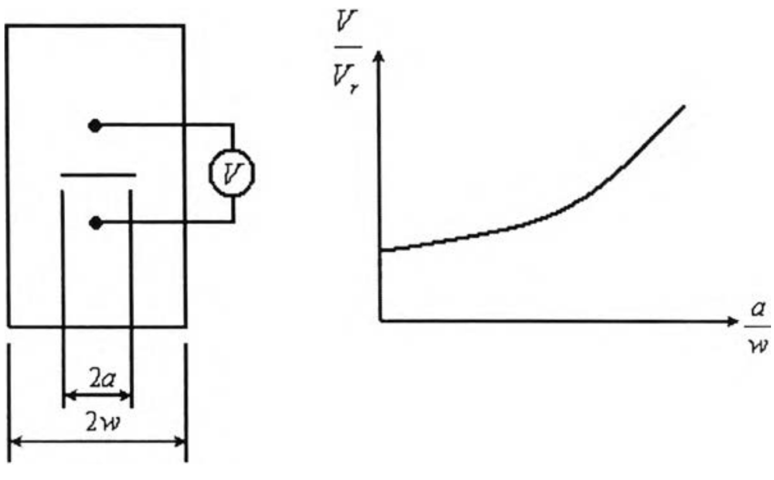
$$\rho = \frac{(\Delta V / L)}{(i / A)}$$

ดังนั้น
$$\frac{\Delta V}{i} = \frac{\rho L}{A}$$

หรือ
$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{2.21}$$

2.2 หลักการความต่างศักย์ตกคร่อม

การหาความยาวรอยร้าวด้วยวิธีวัดความต่างศักย์ตกคร่อมนั้นอาศัยหลักการว่า ชิ้นทดสอบที่ถูกป้อนกระแสไฟฟ้าจะมีความต่างศักย์คร่อมจุดอ้างอิงใด ๆ เท่ากับค่าหนึ่ง แต่ถ้ามีรอยร้าวเกิดขึ้นระหว่างจุดอ้างอิงแล้ว รอยร้าวจะรบกวนเส้นทางการไหลของกระแสไฟฟ้าและลดพื้นที่หน้าตัดที่กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน ทำให้ความด้านทานไฟฟ้าระหว่างจุดอ้างอิงและความต่างศักย์ตกคร่อมระหว่างจุดอ้างอิงเพิ่มขึ้น ความสัมพันธ์ระหว่างความต่างศักย์ V และความยาวรอยร้าว a แสดงในรูปไร้หน่วยโดยนอร์มัลไลซ์ความต่างศักย์ด้วยความต่างศักย์อ้างอิง V_r ซึ่งเป็นความต่างศักย์ที่ความยาวรอยร้าวเริ่มต้น และนอร์มัลไลซ์ความยาวรอยร้าวด้วยความกว้างชิ้นทดสอบ w ตัวอย่างเส้นโค้งสอบเทียบสำหรับชิ้นทดสอบแบบ MT แสดงอยู่ในรูปที่ 2.3 เนื่องจากเส้นโค้งนี้เป็นความสัมพันธ์ของตัวแปรไร้หน่วยจึงไม่ขึ้นกับ ขนาดกระแสไฟฟ้า ความหนาชิ้นทดสอบและคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของวัสดุ แต่จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งป้อนกระแสไฟฟ้า ตำแหน่งวัดศักย์ไฟฟ้าและรูปร่างรอยร้าวเริ่มต้น [15]



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความต่างศักย์ที่นอร์มัลไลซ์แล้วกับความยาวรอยร้าวที่นอร์มัลไลซ์แล้ว ของชิ้นงานทดสอบแบบ MT

การระบุตำแหน่งป้อนกระแสไฟฟ้าและตำแหน่งวัดความต่างศักย์ที่เหมาะสมที่สุดในเชิงการทดลองนั้นพิจารณาจากพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ ความแม่นยำ (Accuracy) ความไว (Sensitivity) ความทำซ้ำได้ (Reproducibility) และ ความสามารถวัดได้ (Measurability) [9, 24]

ความแม่นยำ (Accuracy) มีความหมายทั่วไปคือ ความถูกต้องใกล้เคียงกัน ระหว่างผลของการวัดกับค่าจริงของปริมาณที่วัด ในวิทยานิพนธ์นี้ หมายถึง ความใกล้เคียงกันระหว่างค่าความต่างศักย์ตกคร่อมที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าที่คำนวณจากผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution)

ความไว (Sensitivity) มีความหมายทั่วไปคือ การเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนองของเครื่องวัดหารด้วยการเปลี่ยนแปลงของสิ่งเร้าที่สมนัยกัน ในวิทยานิพนธ์นี้ จะหมายถึง การเปลี่ยนแปลงความต่างศักย์ V ต่อการเปลี่ยนแปลงความยาวรอยร้าว a หรือ $\frac{dV}{da}$

การทำซ้ำได้ (Reproducibility) มีความหมายทั่วไปคือ ความถูกต้องใกล้เคียงกัน ระหว่างผลการวัดปริมาณเดียวกันหลาย ๆ ครั้ง โดยการวัดครั้งหนึ่ง ๆ มีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขเช่น ระเบียบวิธีวัด ผู้วัด เครื่องวัด สถานที่ ภาวะการวัด เวลา เป็นต้น ในวิทยานิพนธ์นี้ ความทำซ้ำได้ในเชิงการทดลองขึ้นอยู่กับ อัตราการเปลี่ยนแปลงความต่างศักย์เทียบกับความไม่แน่นอนของตำแหน่งวัดความต่างศักย์ เป็นต้น ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ความทำซ้ำได้จะสูงหากที่จุดวัดความต่างศักย์มีค่า $\frac{dV}{dx}$ และ $\frac{dV}{dy}$ ต่ำ

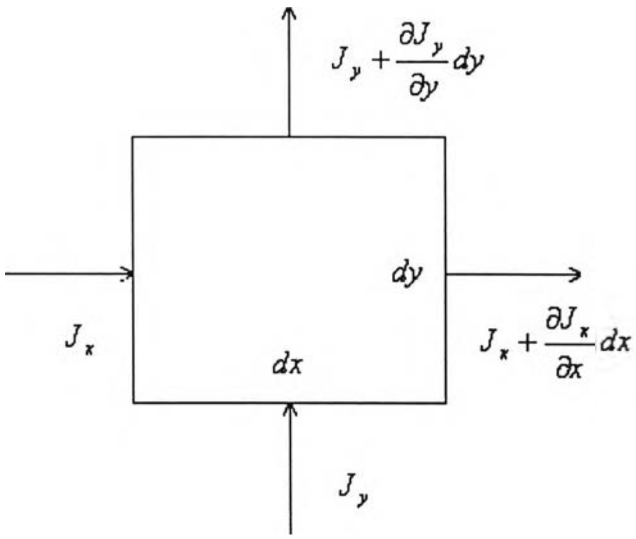
การสามารถวัดได้ (Measurability) หมายถึง ขนาดของความต่างศักย์ตกคร่อมซึ่งสามารถตรวจจับได้ด้วยเครื่องมือวัดที่ใช้ และต้องเด่นชัดกว่าอิทธิพลของสัญญาณรบกวนต่าง ๆ การเพิ่มความสามารถวัดได้ทำได้หลายวิธี เช่น เลือกจุดวัดที่มีความต่างศักย์มาก หรือการเพิ่มขนาดกระแสไฟฟ้าป้อนเข้า

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาศักย์ไฟฟ้า

วัตถุนำไฟฟ้าแผ่นบางถูกป้อนด้วยไฟฟ้ากระแสตรงดังรูปที่ 2.4 จะมีสมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) การไหลของฟลักซ์กระแสไฟฟ้า ดังนี้ [15]

$$J_x dy - \left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dy + J_y dx - \left(J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dx = \frac{\partial q_\upsilon}{\partial t} dxdy$$

โดยที่ q_υ คือ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้า (Charge density)



รูปที่ 2.4 ฟลักซ์กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน Differential element หนาหนึ่งหน่วย [25]

$$\frac{\partial J_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial J_y}{\partial y}dydx = -\frac{\partial q_v}{\partial t}dxdy$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial q_v}{\partial t} = 0 \tag{2.22}$$

เมื่อระบบเข้าสู่สภาวะคงตัว(Steady state) จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right] \cdot \left[J_x\vec{i} + J_y\vec{j}\right] = 0 \tag{2.24}$$

กฎของโอห์ม (Ohm's law)

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$J_x\vec{i} + J_y\vec{j} = \sigma(E_x\vec{i} + E_y\vec{j}) \tag{2.25}$$

จากสมการที่ (2.14)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{y}\vec{j}\right) \tag{2.26}$$

แทนสมการที่ (2.26) ในสมการที่ (2.25)

$$J_x\vec{i} + J_y\vec{j} = -\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right) \tag{2.27}$$

แทนสมการที่ (2.27) ในสมการที่ (2.24)

$$-\sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

สำหรับวัสดุเอกพันธ์ (Homogeneous material) จะได้สภาพนำไฟฟ้า (Electric conductivity), σ มีค่าคงที่

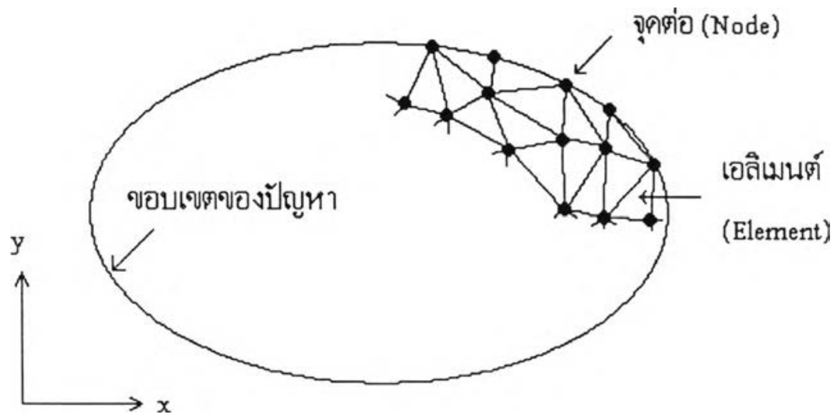
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2.28}$$

2.4 ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก 6 ขั้นตอน [26] ดังนี้

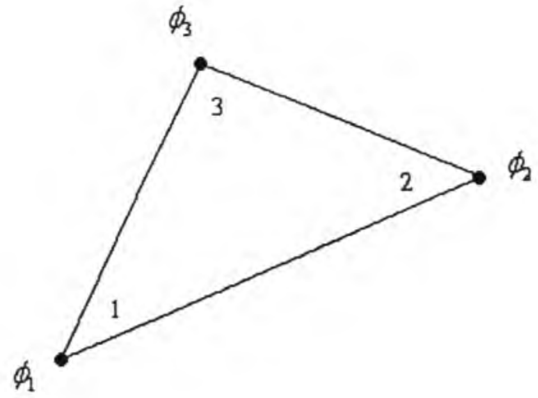
1. การแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

2. การเลือกฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (Interpolation function)

สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ (รูปที่ 2.6) ประกอบด้วยจุดต่อที่ไม่ทราบค่า (Nodal unknowns), ϕ สามตัว แทนด้วย ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 การกระจายของผลเฉลยในเอลิเมนต์จะเขียนอยู่ในรูปของ



รูปที่ 2.6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y) + N_3(x,y)\phi_3 \quad (2.29)$$

หรือ
$$\phi(x,y) = [N_1 \ N_2 \ N_3]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}$$

โดยที่ $N_i(x,y)$, $i = 1, 2, 3$ คือ ฟังก์ชันประมาณค่าภายใน

ϕ_i, $i = 1, 2, 3$ คือ จุดต่อที่ไม่ทราบค่า

3. การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ ดังแสดงรูปที่ 2.6 จะเขียนสมการเอลิเมนต์ได้ในรูปของ

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}_e$$

หรืออาจเขียนในรูป

$$[K]_e\{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.30)$$

การสร้างสมการเอลิเมนต์ (สมการที่ 2.30) ทำได้ 3 วิธี คือ วิธีโดยตรง (Direct approach) วิธีแปรผัน (Variational method) และวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals)

4. รวมสมการเอลิเมนต์ทั้งหมดเป็นสมการระบบ

$$\Sigma(element \quad equations) \Rightarrow [K]_{sys}\{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys}$$

5. ใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ในสมการระบบ แล้วแก้สมการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

6. นำผลเฉลยที่จุดต่อไปคำนวณค่าตัวแปรอื่น ๆ ที่ต้องการ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อแก้สมการหาค่าศักย์ไฟฟ้าได้แล้วก็สามารถนำไปหาค่าสนามไฟฟ้าได้

2.5 ฟังก์ชันประมาณค่าภายในสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ

ในปัญหาการกระจายศักย์ไฟฟ้า ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อจะมีองศาอิสระ (Degree of freedom) เท่ากับหนึ่ง คือ ศักย์ไฟฟ้า ดังนั้นสมการพหุนาม (Polynomial equation) ของการกระจายศักย์ไฟฟ้าภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (อ้างอิงกับ global coordinates) คือ

$$V(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{2.31}$$

โดยที่ α_1, α_2, α_3 เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่

ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่อ คือ

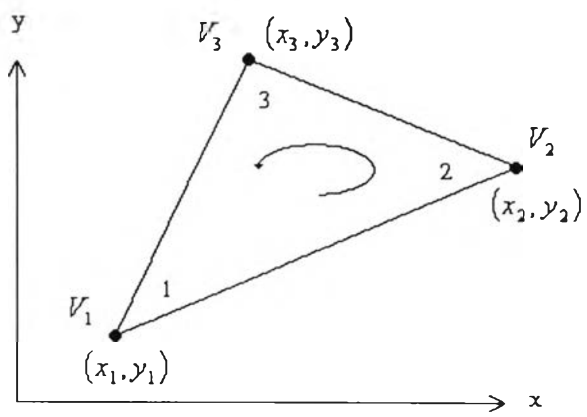
$$V_1(x_1,y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad (2.32\text{ ก})$$

$$V_2(x_2,y_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad (2.32\text{ ข})$$

$$V_3(x_3,y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad (2.32\text{ ค})$$

แก้สมการที่ (2.32) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ α_1, α_2, α_3 จากนั้นแทนค่ากลับไปในสมการที่ (2.31) จะได้

$$V(x,y) = \frac{1}{2A}\left\{\begin{array}{l} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]\ V_1 \\ +[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]\ V_2 \\ +[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]\ V_3 \end{array}\right\} \tag{2.33}$$



รูปที่ 2.7 พิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ

โดย
$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{2.34}$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$V(x,y) = N_1(x,y)V_1 + N_2(x,y)V_2 + N_3(x,y)V_3$$

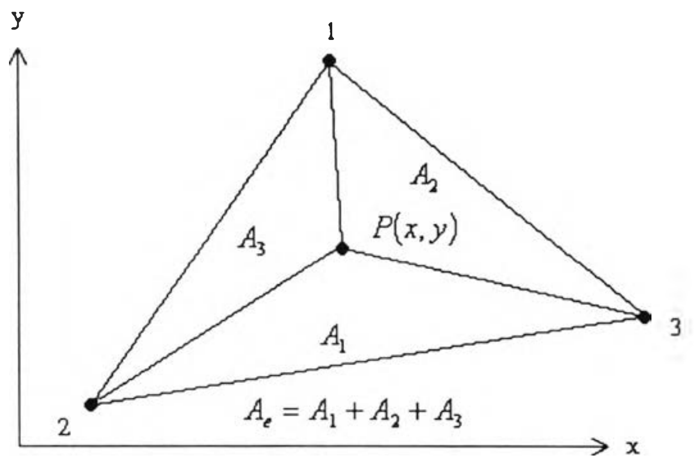
หรือ
$$V(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

โดย
$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \tag{2.35}$$

และ
$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$b_1 = y_2 - y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2$$
$$c_1 = x_3 - x_2, \quad c_2 = x_1 - x_3, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

2.6 วิธีตรวจหาเอลิเมนต์ที่มีจุดวัดศักย์ไฟฟ้า

หากตำแหน่งของจุดที่ต้องการทราบค่าศักย์ไฟฟ้า $P(x,y)$ ไม่ใช่ที่จุดต่อของอลิเมนต์ การหาค่าศักย์ไฟฟ้าต้องใช้การประมาณค่าภายใน (สมการที่ 2.33) แต่สมการดังกล่าวจำเป็นต้องทราบว่าจุดดังกล่าวอยู่ในเอลิมนต์ใด วิธีตรวจสอบทำได้โดยการคำนวณพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่เกิดจากการเชื่อมจุดต่อของเอลิเมนต์ใด ๆ กับจุด $P(x,y)$ ซึ่งแทนด้วย A_1, A_2, A_3 โดยคำนวณจากสมการต่อไปนี้



รูปที่ 2.8 เอลิเมนต์ที่มีจุดวัดศักย์ไฟฟ้า $P(x,y)$ [27]

$$A_1 = 0.5\{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\} \tag{2.36}$$

$$A_2 = 0.5\{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\} \tag{2.37}$$

$$A_3 = 0.5\{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\} \tag{2.38}$$

ตำแหน่งของ $P(x, y)$ จะอยู่ในเอลิเมนต์ที่ทำให้ A_1, A_2, A_3 มีค่าเป็นบวกทั้งหมด [27]