บทที่ 4
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืด

ในบทนี้จะเป็นการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ โดยจะเริ่มอธิบายตั้งแต่ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ จากนั้นจะได้กล่าวถึงรายละเอียดของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับตัวแปรความดัน และอธิบายถึงขั้นตอนการคำนวณโดยใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น สุดท้ายจะแสดงไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

4.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด

จากสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ ซึ่งได้แก่

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \qquad (2.22ก)$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \qquad (2.22ข)$$

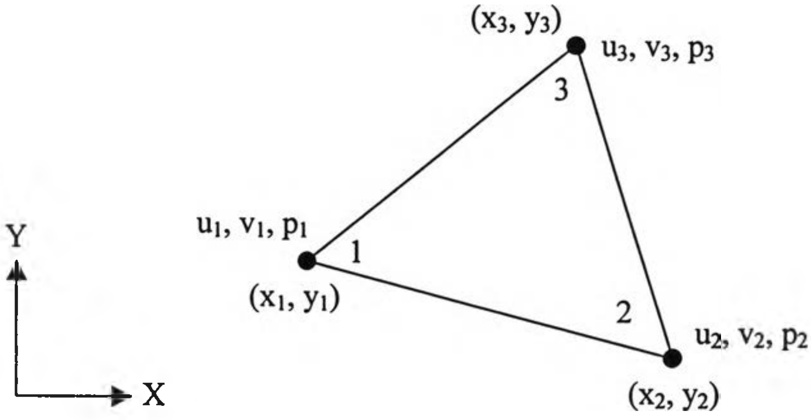
จากที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 3.1 ว่าการนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ขั้นแรกจะต้องทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ โดยในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 ซึ่งประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน x, ตัวไม่ทราบค่าของความเร็วในทิศทางของแกน y และตัวไม่ทราบค่าของความดัน p ที่จุดต่อทั้งสามที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น จากนั้นกำหนดให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของความเร็วและความดันบนเอลิเมนต์มีลักษณะดังนี้

$$u(x,y) = \lfloor N \rfloor \{u\} \qquad (4.1ก)$$

$$v(x,y) = \lfloor N \rfloor \{v\} \qquad (4.1ข)$$

$$p(x,y) = \lfloor N \rfloor \{p\} \qquad (4.1ค)$$

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณภายใน $\lfloor N \rfloor$ ของทั้งความเร็วและความดันเป็นชนิดเดียวกันซึ่งอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 การแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) \rfloor$$

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{4.2}$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$A = \frac{1}{2}[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_1 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

จากนั้นทำการประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์โดยใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างดังที่ได้อธิบายไว้แล้วในบทที่ 3 กับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการ แต่สำหรับในที่นี้จะได้อธิบายวิธีการประยุกต์กับสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x เท่านั้นซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x จะได้

$$\int_\Omega N\left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\Omega = -\int_\Omega N \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega N\left(\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) d\Omega \tag{4.5}$$

โดยที่พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (4.5) นั้นจะได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้กล่าวถึงรายละเอียดแล้วในบทที่ 3 มาประยุกต์ใช้ ส่วนพจน์ของการแพร่ (พจน์ที่

สองทางด้านขวามือของสมการ (4.5)) นั้นจะใช้การอินทิเกรตโดยทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังอธิบายไว้ในบทที่ 3 แล้วเช่นกัน

ซึ่งภายหลังจากการจัดพจน์ต่างๆแล้ว สมการของเอลิเมนต์สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน x สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]\{u\} = \{R_u\}+\{R_{Px}\} \tag{4.6}$$

โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของสมการ (4.6) ประกอบไปด้วยพจน์จากการพาที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ในการจัด และพจน์ที่ได้จากพจน์ของการแพร่ดังที่ได้แสดงไว้ในพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.9) ส่วนอีกสองพจน์ทางด้านขวาของสมการ (4.6) นั้นมีรายละเอียดดังนี้

$$\{R_u\} = \mu\int_\Gamma \{N\}\left[\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right]d\Gamma \tag{4.7}$$

$$\{R_{Px}\} = -\int_\Omega \{N\}\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega \tag{4.8}$$

สำหรับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกันซึ่งจะได้รูปแบบดังนี้

$$[A]\{v\} = \{R_v\}+\{R_{Py}\} \tag{4.9}$$

และเช่นเดียวกันกับสมการ (4.6) เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ นั้นประกอบไปด้วยพจน์ของการพาและพจน์ของการแพร่ โดยที่พจน์ทั้งสองทางด้านขวาของสมการ (4.9) มีรายละเอียดดังนี้

$$\{R_v\} = \mu\int_\Gamma \{N\}\left[\frac{\partial v}{\partial x}n_x+\frac{\partial v}{\partial y}n_y\right]d\Gamma \tag{4.10}$$

$$\{R_{Py}\} = -\int_\Omega \{N\}\frac{\partial p}{\partial y}d\Omega \tag{4.11}$$

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวที่จะทำการวิเคราะห์นี้มีทั้งหมด 3 สมการด้วยกัน ซึ่งได้แก่สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสองสมการ และสมการอนุรักษ์มวลอีกหนึ่งสมการ ประกอบกับมีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัวเช่นเดียวกันด้วย นั่นคือความเร็วในแนวแกนทั้งสองและความดัน ถ้ากำหนดให้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการใช้ในการแก้หาค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองแล้ว ดังนั้นก็จะเหลือสมการอนุรักษ์มวลที่ต้องนำไปใช้ในการแก้หาค่าความดัน แต่จะเห็นได้ว่าในสมการอนุรักษ์มวลนั้นไม่ปรากฏตัวแปรความดันอยู่เลย ดังนั้นจะต้องใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับความดันที่มีอยู่ในสมการโมเมนตัมมาประยุกต์ร่วมกับสมการอนุรักษ์มวลเพื่อใช้ในการสร้างสมการสำหรับความดัน โดยสามารถทำได้ดังนี้

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับความดันนั้น สามารถทำได้โดยเริ่มจากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการการอนุรักษ์มวลก่อน ซึ่งจะได้สมการสำหรับเอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_\Omega N_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\Omega = -\int_\Omega\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}u+\frac{\partial N_i}{\partial y}v\right)d\Omega + \int_\Gamma N_i\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma = 0 \quad (4.12)$$

นำสมการ (4.6) และ (4.9) มาจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$A_{ii}u_i = -\sum_{j\neq i}A_{ij}u_j + f_i^u - \int_\Omega N_i\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega \quad (4.13)$$

$$A_{ii}v_i = -\sum_{j\neq i}A_{ij}v_j + f_i^v - \int_\Omega N_i\frac{\partial p}{\partial y}d\Omega \quad (4.14)$$

โดยที่ f_i^u และ f_i^v คือพจน์เงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในสมการ (4.7) และ (4.10) ตามลำดับ

จากนั้นสมมติให้การเปลี่ยนแปลงของความดันตลอดภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$u_i = \hat{u}_i - K_{pi}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$v_i = \hat{v}_i - K_{pi}\frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.16)$$

โดยที่

$$\hat{u}_i = \frac{-\sum_{j\neq i}A_{ij}u_j + f_i^u}{A_{ii}} \quad (4.17)$$

$$\hat{v}_i = \frac{-\sum_{j\neq i}A_{ij}v_j + f_i^v}{A_{ii}} \quad (4.18)$$

$$K_{pi} = \frac{\int_A N_i d\Omega}{A_{ii}} \quad (4.19)$$

ต่อมานำฟังก์ชันการประมาณภายในของ u และ v จากสมการ (4.1ก) และ (4.1ข) แทนลงในสมการ (4.12) จะได้ว่า

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j u_j\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j v_j\right)d\Omega+\int_{\Gamma}N_i\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma=0 \qquad (4.20)$$

จากนั้นแทนค่า u_i และ v_i จากสมการ (4.15) , (4.16) ลงในสมการ (4.20) แล้วจัดพจน์ใหม่

$$\int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega+\int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j K_{p_j}\right)\frac{\partial p}{\partial y}d\Omega \;=\; \int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\sum_j N_j \hat{v}_j\right)d\Omega-\int_{\Gamma}N_i\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma \qquad (4.21)$$

สุดท้ายแทนฟังก์ชันการประมาณภายในของความดัน (สมการ (4.1ค)) ลงในสมการ (4.21) และจัดพจน์ใหม่ จะสามารถเขียนสมการเอลิเมนต์ของความดันในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left[K_x+K_y\right]\{p\} \;=\; \{R_u\}+\{R_v\}+\{R_b\} \qquad (4.22)$$

โดยที่

$$[K_x] \;=\; \int_{\Omega}\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega \qquad (4.23)$$

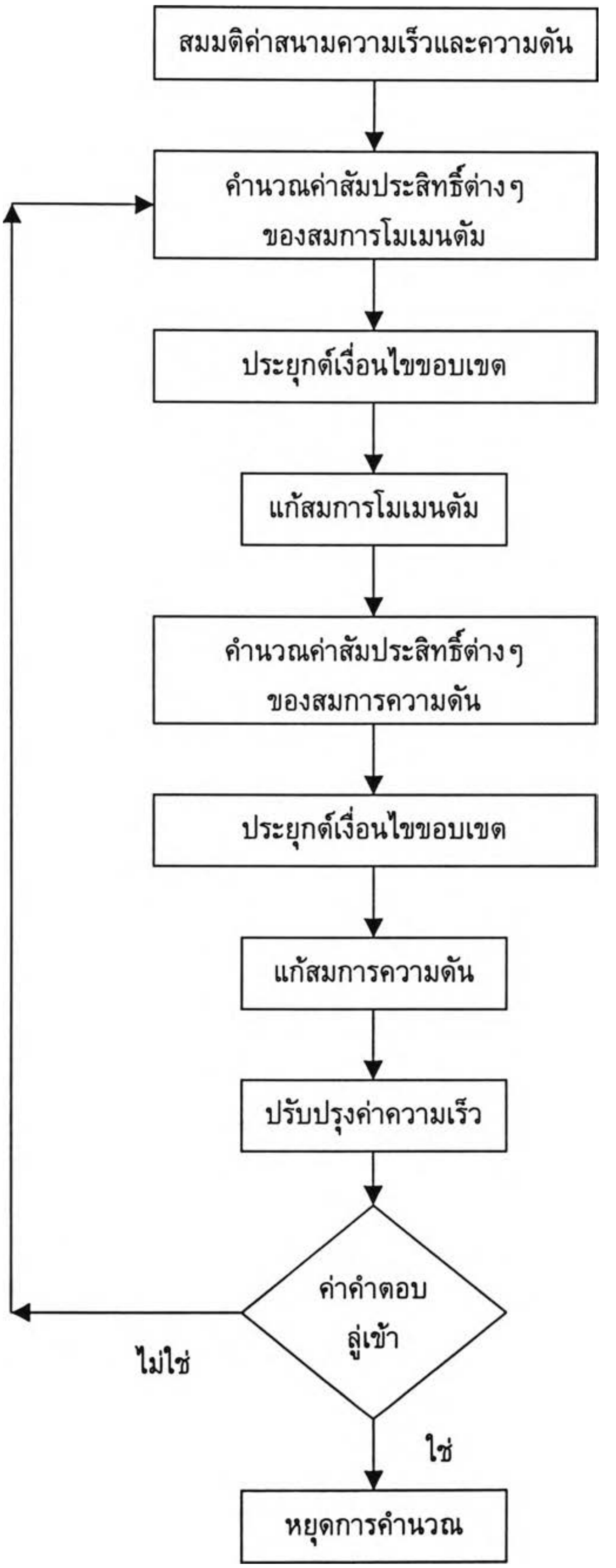
$$[K_y] \;=\; \int_{\Omega}\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left(\sum_j N_j K_j\right)\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor d\Omega \qquad (4.24)$$

$$\{R_u\} \;=\; \int_{\Omega}\left(\sum_j N_j \hat{u}_j\right)\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}d\Omega \qquad (4.25)$$

$$\{R_v\} \;=\; \int_{\Omega}\left(\sum_j N_j \hat{v}_j\right)\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}d\Omega \qquad (4.26)$$

$$\{R_b\} \;=\; -\int_{\Gamma}\{N\}\left(un_x+vn_y\right)d\Gamma \qquad (4.27)$$

สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้สมการต่าง ๆข้างต้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.2 ซึ่งจะเริ่มต้นจากการสมมติค่าสนามความเร็วและความดัน จากนั้นคำนวณหาค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.6) และ (4.9) เมื่อได้ค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อแล้วนำค่าเหล่านี้ไปคำนวณหาค่าความดันค่าใหม่ที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.22) สุดท้ายใช้ค่าความดันใหม่ที่ได้มาทำการปรับปรุงค่าความเร็วที่แต่ละจุดต่อโดยใช้สมการ (4.13) และ (4.14) ขั้นตอนการคำนวณดังกล่าวจะดำเนินซ้ำเป็นวงรอบจนกว่าค่าของคำตอบที่ต้องการจะลู่เข้า



รูปที่ 4.2 ขั้นตอนในการคำนวณ

4.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆดังในสมการที่ได้แสดงข้างต้นนั้นสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่าย วิธีการดังกล่าวจะได้แสดงในหัวข้อนี้

4.2.1 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการโมเมนตัม

เริ่มจากสมการของโมเมนตัมทั้งสองสมการ นั่นคือจากสมการ (4.6) และ (4.9)

$$[A]\{u\} = \{R_u\}+\{R_{px}\} \tag{4.6}$$

$$[A]\{v\} = \{R_v\}+\{R_{py}\} \tag{4.9}$$

สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ ของทั้งสองสมการนั้นประกอบไปด้วยพจน์การพาและพจน์จากการแพร่นั่นคือ

$$[A] = [A_{conv}] + [A_{diff}]$$

โดยที่ $[A_{conv}]$ = สามารถหาได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ในบทที่ 3

$$[A_{diff}] = \mu\int_\Omega\left[\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\rfloor\right]d\Omega$$

เนื่องจาก
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{b_i}{2A}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{c_i}{2A}\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3$$
ดังนั้น

$$[A_{diff}] = \mu\left(\frac{1}{4A^2}\right)\int_\Omega\left[\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{Bmatrix}\lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3\rfloor + \begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}\lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3\rfloor\right]d\Omega$$

$$= \mu\,\frac{1}{4A}\begin{bmatrix}b_1^2+c_1^2 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3\\ & b_2^2+c_2^2 & b_2b_3+c_2c_3\\ \text{Sym} & & b_3^2+c_3^2\end{bmatrix} \tag{4.28}$$

ส่วนทางด้านขวามือของสมการ (4.6) และ (4.9) นั้นสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_{px}\} = -\int_\Omega\{N\}\frac{\partial p}{\partial x}d\Omega = -\int_\Omega\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\end{Bmatrix}\left\lfloor\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x}\right\rfloor d\Omega\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{Bmatrix}$$

$$= \quad -\frac{1}{2A}\int_{\Omega}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}\lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad -\frac{1}{2A}\int_{\Omega}\begin{bmatrix} N_1 b_1 & N_1 b_2 & N_1 b_3 \\ N_2 b_1 & N_2 b_2 & N_2 b_3 \\ N_3 b_1 & N_3 b_2 & N_3 b_3 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$\because \int_{\Omega} N_i \, d\Omega \;=\; \frac{A}{3}$ จะได้

$$= \quad -\frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad -\frac{1}{6}\begin{Bmatrix} b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{R_{px}\} \quad = \quad -\frac{b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.29)$$

ส่วนพจน์ $\{R_{py}\}$ หรือ $-\int_{\Omega}\{N\}\frac{\partial p}{\partial y} d\Omega$ ทางด้านขวาของสมการ (4.9) ก็สามารถประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์ได้ด้วยวิธีเดียวกันซึ่งจะได้เมตริกซ์ลักษณะดังนี้

$$\{R_{py}\} \quad = \quad -\frac{c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.30)$$

สำหรับพจน์อินทิเกรดขอบเขตทางด้านขวาของสมการ (4.6) และ (4.9) $(\{R_u\}, \{R_v\})$ นั้น ภายในขอบเขตของปัญหาพจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไปจึงไม่จำเป็นต้องหาค่า

4.2.2 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการความดัน

จากสมการ (4.22)

$$[K_x + K_y]\{p\} \quad = \quad \{R_u\} + \{R_v\} + \{R_b\} \qquad (4.22)$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของความดันสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$[K] = [K_x] + [K_y]$$

$$= \int_\Omega \left[\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}(N_j K_j)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}(N_j K_j)\left\lfloor\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\rfloor \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{4A^2}\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \int_\Omega (N_1 K_1 + N_2 K_2 + N_3 K_3) d\Omega$$

$$= \frac{1}{4A^2}\frac{A}{3}(K_1 + K_2 + K_3)\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \left(\frac{K_1 + K_2 + K_3}{3}\right)\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{Sym} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

การสร้างเมตริกซ์ต่างๆทางด้านขวาของสมการ (4.22) มีขั้นตอนดังนี้
พจน์ $\{R_u\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_u\} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\right\}\left(N_j \hat{u}_j\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \int_\Omega \left(N_1 \hat{u}_1 + N_2 \hat{u}_2 + N_3 \hat{u}_3\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}\left(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3\right)$$

$$\{R_u\} = \left(\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3}{6}\right)\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

พจน์ $\{R_v\}$ สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\{R_v\} = \int_\Omega \left\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\left(N_j \hat{v}_j\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \int_\Omega \left(N_1 \hat{v}_1 + N_2 \hat{v}_2 + N_3 \hat{v}_3\right) d\Omega$$

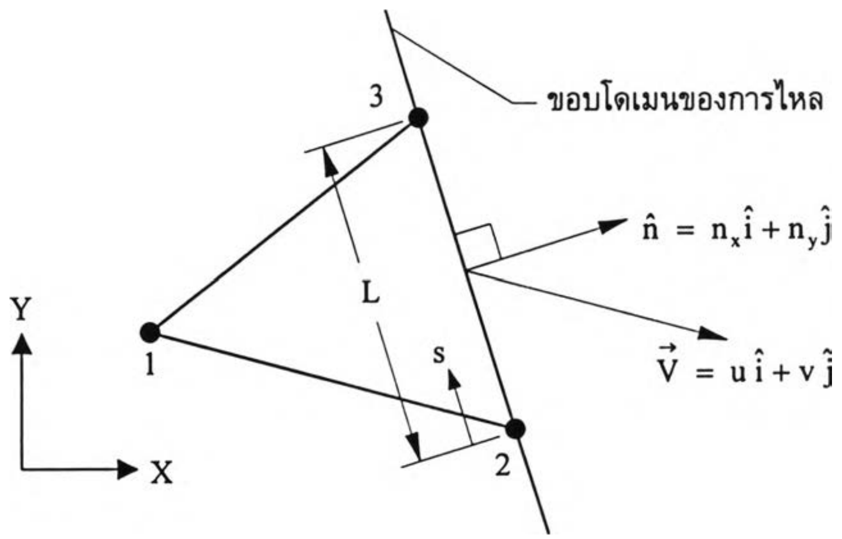
$$= \frac{1}{2A}\frac{A}{3}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}\left(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3\right)$$

$$\{R_v\} = \left(\frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3}{6}\right)\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

พจน์ $\{R_b\}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\{R_b\} = -\int_\Gamma \{N\}\left(u n_x + v n_y\right) d\Gamma$$

เนื่องจากเป็นพจน์การอินทิเกรดขอบเขด ดังนั้นภายในขอบเขตของปัญหา พจน์เหล่านี้จะตัดกันหมดไป เหลือที่จะต้องคำนวณเฉพาะบริเวณขอบเขตของโดเมนเท่านั้น หากพิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 4.3 ซึ่งมีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 เป็นขอบโดเมนของการไหล และเนื่องจากลักษณะการกระจายของฟังก์ชันความเร็วสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะอยู่ในลักษณะเชิงเส้นตามขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L ดังที่แสดงในรูปที่ 4.3 ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ ในรูปแบบของสูตรอินทิเกรดสมการ (4.27) ที่สอดคล้องกับขอบนี้คือ



รูปที่ 4.3 การคำนวณพจน์ $\{R_b\}$ ที่บริเวณขอบของโดเมนการไหล

$$-\int_0^L \left(u n_x + v n_y\right)\begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds \quad = \quad -\left(u n_x + v n_y\right)\int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds$$

$$= \quad -\left(u n_x + v n_y\right)\frac{L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้นพจน์ $\{R_b\}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L อยู่ติดขอบโดเมนของการไหลคือ

$$\{R_b\} \;=\; \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left(u n_x + v n_y\right)\dfrac{L}{2} \\ -\left(u n_x + v n_y\right)\dfrac{L}{2} \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ได้แสดงในหัวข้อนี้ สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวได้โดยตรง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะได้แสดงไว้ในบทที่ 6