

## บทที่ 6

### การออกแบบตัวควบคุม

จากบทที่ผ่านมาเราได้ทำแบบจำลองพลวัต และสร้างชุดทดลองของ camera gimbal และได้ทราบพารามิเตอร์ต่างๆของระบบนี้ ต่อไปจะนำเสนอการออกแบบตัวควบคุม เนื่องจาก camera gimbal เป็นระบบที่มีสัญญาณเข้า 2 สัญญาณคือ  $\tau_{a1}$ ,  $\tau_{a2}$  ซึ่งเป็นแรงบิดจากมอเตอร์ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 ตามลำดับ และมีสัญญาณออก 2 สัญญาณคือ  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  เรามีจุดประสงค์คือการควบคุมตำแหน่งของมอเตอร์ซึ่งในที่นี้คือการควบคุม  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  และพบว่าแบบจำลองที่ได้เป็นแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งระบบไม่เชิงเส้นประกอบด้วยระบบแปรตามเวลา (nonautonomous system) และระบบไม่แปรตามเวลา (autonomous system) สำหรับปัญหาของการควบคุมไม่เชิงเส้นจะแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาด้านเสถียรภาพ และปัญหาด้านการตามรอยสัญญาณอ้างอิง ตัวอย่างของปัญหาด้านเสถียรภาพ เช่น การควบคุมอุณหภูมิของตู้เย็น การควบคุมตำแหน่งของแขนกล ส่วนปัญหาด้านการตามรอยสัญญาณ เช่น การกำหนดแนววิถีของแขนกลเป็นวงกลมหรือ เป็นเส้นตรง เป็นต้น เราจะนิยามปัญหาของการควบคุมไม่เชิงเส้นดังนี้

- ปัญหาด้านเสถียรภาพ พิจารณาพลวัตของระบบไม่เชิงเส้น  $\dot{x} = f(x, u, t)$  แล้วหากฎการควบคุม  $u$  จากจุดใดๆในพื้นที่  $\Omega$  โดยที่  $x(t) \rightarrow 0$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$
- ปัญหาด้านการตามรอยสัญญาณ พิจารณาพลวัตของระบบไม่เชิงเส้น  $\dot{x} = f(x, u, t)$  และ  $y = h(x)$  กำหนดให้  $y_d$  คือ สัญญาณอ้างอิง แล้วหากฎการควบคุม  $u$  จากสถานะเริ่มต้นใดๆในพื้นที่  $\Omega$  โดยที่ค่าผิดพลาดของสัญญาณอ้างอิง  $y(t) - y_d(t)$  จะเข้าสู่ศูนย์ในขณะที่  $x(t)$  มีขอบเขต

#### 6.1 ทฤษฎีของเลียปูนอฟ

##### 6.1 ระบบแปรตามเวลาและระบบไม่แปรตามเวลา

*นิยาม 6.1* ระบบไม่เชิงเส้น จะเป็นระบบไม่แปรตามเวลา (autonomous system) ถ้าสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$\dot{x} = f(x) \tag{6.1}$$

และจะเป็นระบบแปรตามเวลา (nonautonomous system) เมื่อ

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{6.2}$$

##### 6.2 จุดสมดุล

*นิยาม 6.2* จุด  $x^*$  จะเป็นจุดสมดุล (equilibrium point) ของระบบ ( 6.1) ถ้า  $\dot{x}(t) = x^*$  สำหรับค่า  $t \geq 0$  ทุกค่า นั่นคือจุดสมดุลหาได้จาก

$$f(x^*) = 0 \tag{6.3}$$

## 6.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ

จะใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function) ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

นิยาม 6.3 จุดสมดุล  $x = 0$  จะมีเสถียรภาพ ถ้า

$$\forall R > 0, \exists r > 0 \implies \|x(0)\| < r \implies \|x(t)\| < R, \forall t \geq 0 \quad (6.4)$$

นิยาม 6.4 ที่จุดสมดุล 0 จะเรียกว่ามีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) ถ้าจุดนั้นมีเสถียรภาพ และมี  $r > 0$  ซึ่งถ้า  $\|x(0)\| < r$  แล้วจะได้ว่า  $x(t) \rightarrow 0$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$

### ทฤษฎีบท 6.1 เสถียรภาพในวงกว้าง

สมมติให้  $V$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ของตัวแปรสถานะ  $x$  ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่องและ

- $V(x)$  เป็นบวกแน่นอน (positive definite)
- $\dot{V}(x)$  เป็นลบแน่นอน (negative definite)
- $V(x) \rightarrow \infty$  เมื่อ  $\|x\| \rightarrow \infty$

จะได้ว่าที่จุดกำเนิดจะเป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับในวงกว้าง (globally asymptotically stable)

### ทฤษฎีบท 6.2

(uniform asymptotic stability) ถ้าจุดกำเนิดเป็นจุดสมดุลที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูป (uniformly asymptotically stable) และมีฟังก์ชัน  $V(x)$  เป็นฟังก์ชันลดและเป็นบวกแน่นอน จะได้ว่า  $\dot{V}(x)$  จะเป็นฟังก์ชันลบแน่นอน

## 6.3 Barbalat's Lemma

บทตั้ง 6.3.1 (Barbalat) ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีอนุพันธ์ที่มีขอบเขต เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  และถ้า  $f(t)$  มีความต่อเนื่องอย่างเอกรูป จะได้ว่า

$$f(t) \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } t \rightarrow \infty$$

บทตั้ง 6.3.2 (Lyapunov-Like Lemma) ให้  $V(x)$  เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- $V(x, t)$  มีขอบเขตล่าง
- $\dot{V}(x, t)$  เป็นกึ่งลบแน่นอน (negative semi-definite)
- $\dot{V}(x, t)$  มีความต่อเนื่องแบบเอกรูปในเวลา

จะได้ว่า  $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$

## 6.4 การออกแบบตัวควบคุม

พิจารณาพลวัตของระบบไม่เชิงเส้นที่มี  $n$  ข้อต่อ ( $n$  DOF)

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + F_v\dot{q} + K(q) + g(q) = \tau \quad (6.5)$$

โดยที่

- $q$  คือ ตำแหน่งเชิงมุมของข้อต่อ โดยที่  $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $\dot{q}$  คือ ความเร็วเชิงมุมของข้อต่อ โดยที่  $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $\ddot{q}$  คือ ความเร่งเชิงมุมของข้อต่อ โดยที่  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $\tau$  คือ แรงบิดของข้อต่อ โดยที่  $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $M(q)$  คือ เมทริกซ์ความเฉื่อย ซึ่ง  $M = M^T > 0$  และ  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $H(q, \dot{q})$  คือ coriolis torque โดยที่  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $F_v\dot{q}$  คือ แรงเสียดทานเนื่องจากความหนืด เป็นเมทริกซ์เฉียง โดยที่  $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $K(q)$  คือ ค่าคงที่ของสปริง  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $M(q) - 2H(q, \dot{q})$  คือ เมทริกซ์สมมาตรเสมือน (skew symmetric matrix) โดย

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k$$

### การควบคุมตำแหน่ง (Position control)

สมมติให้  $q_d$  คือตำแหน่งที่ต้องการ ในการออกแบบตัวควบคุม จะป้อนกลับกฎการควบคุมของตัวขับเคลื่อนแต่ละตัวที่เป็นอิสระต่อกัน และนิยามให้ตำแหน่งผิดพลาดคือ

$$\tilde{q}_j = q_j - q_{dj} \quad (6.6)$$

และความเร็วของข้อต่อคือ  $\dot{q}_j$  โดยที่  $j = 1, 2, \dots, n$  จะได้กฎการควบคุมคือ [1]

$$\tau_j = -K_P \tilde{q}_j - K_D \dot{q}_j \quad (6.7)$$

โดยที่

- $\tau$  คือ ตัวขับเคลื่อนของแต่ละข้อต่อ  $n$  ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน
- $K_P, K_D$  คือค่าคงตัวบวก

และสามารถเขียนพลวัตของระบบในรูปแบบของการถ่ายเทพลังงาน (Hamiltonian form) คือ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q}^T M \dot{q}] = \dot{q}^T \cdot \tau \quad (6.8)$$

โดยด้านซ้ายของ (6.8) คืออนุพันธ์ของพลังงานจลน์ ส่วนด้านขวาคือพลังงานจากตัวขับเคลื่อน และสัญญาณควบคุม (6.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$\tau = -K_P \bar{q} - K_D \dot{q} \quad (6.9)$$

โดยที่  $K_P, K_D$  คือค่าคงตัวบวก พิจารณาผลรวมของพลังงานกล  $V$  ของระบบ โดยที่

$$V = \frac{1}{2} [\dot{q}^T M \dot{q} + \bar{q}^T K_P \bar{q}] \quad (6.10)$$

หาอนุพันธ์ของ (6.10) จะได้ว่า

$$\dot{V} = \dot{q}^T (\tau + K_P \bar{q}) \quad (6.11)$$

เลือกกฎการควบคุม (6.9) จะได้ว่า

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D \dot{q} \leq 0 \quad (6.12)$$

ซึ่งพบว่า  $\dot{V} \rightarrow 0$  เมื่อ  $\dot{q} \rightarrow 0$  ในทางกลับกัน  $\ddot{q} = M^{-1} K_P \bar{q}$  จะได้ว่า  $\dot{V} \rightarrow 0$  เมื่อ  $\bar{q} \rightarrow 0$

## การจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์

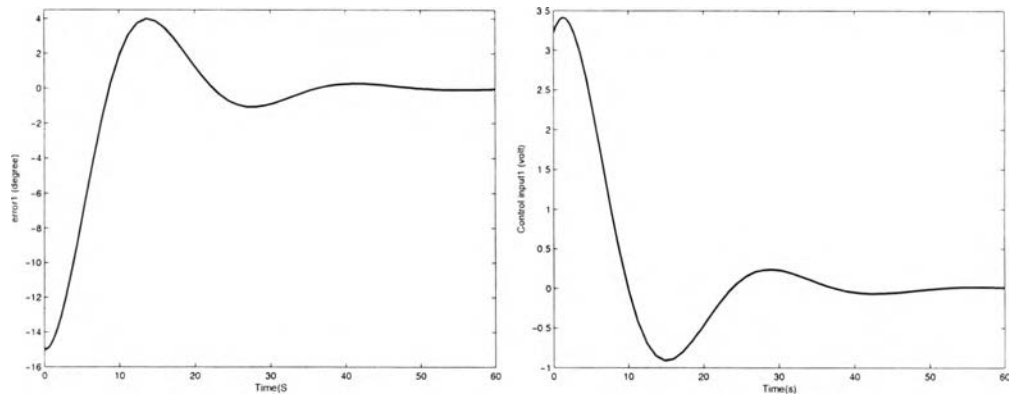
จุดประสงค์ของการควบคุมคือ การควบคุมตำแหน่ง กล่าวคือมุม  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  ซึ่งในการจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์และมีค่าพารามิเตอร์ของระบบดังตาราง 6.1 จะใช้กฎการควบคุม (6.7) โดยจะแยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 มอเตอร์ตัวที่ 1 สัญญาณอ้างอิงคือมุม 15 องศา ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 2 ไม่ต้องใส่สัญญาณ และ  $K_d = 20, K_p = 15$  จะได้ผลดังรูป 6.1. 6.2

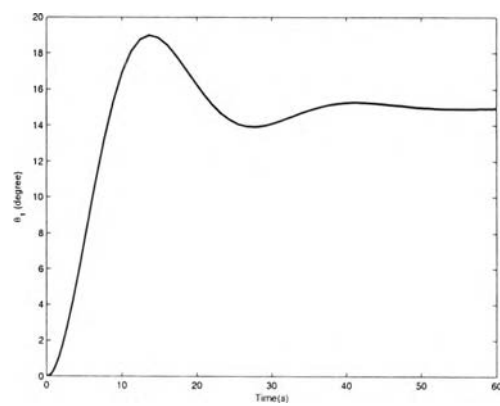
กรณีที่ 2 มอเตอร์ตัวที่ 2 สัญญาณอ้างอิงคือมุม 15 องศา ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 1 ไม่ต้องใส่สัญญาณ และ  $K_d = 20, K_p = 15$  จะได้ผลดังรูป 6.3. 6.4

พารามิเตอร์	ค่า	หน่วย
น้ำหนักภาระของมอเตอร์ 1 $M$	1.556	kg
น้ำหนักภาระของมอเตอร์ 2 $m$	0.558	kg
โมเมนต์ความเฉื่อย $I_{122}$	0.00031	kg.m <sup>2</sup>
โมเมนต์ความเฉื่อย $I_{211}$	0.0001	kg.m <sup>2</sup>
โมเมนต์ความเฉื่อย $I_{222}$	0.0055	kg.m <sup>2</sup>
โมเมนต์ความเฉื่อย $I_{233}$	0.0055	kg.m <sup>2</sup>
ค่าคงที่ของแรงบิด $K_{m1}$	2	N.m/A
ค่าคงที่ของแรงบิด $K_{m2}$	0.5	N.m/A
ค่าคงที่แรงดันป้อนกลับ $K_{b1}$	0.1	Volt/rad
ค่าคงที่แรงดันป้อนกลับ $K_{b2}$	0.02	Volt/rad
ความต้านทานขดลวด $R_1$	1	$\Omega$
ความต้านทานขดลวด $R_2$	0.05	$\Omega$
สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานเนื่องจากความหนืด $F_{v1}$	0.5	N
สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานเนื่องจากความหนืด $F_{v2}$	0.01	N

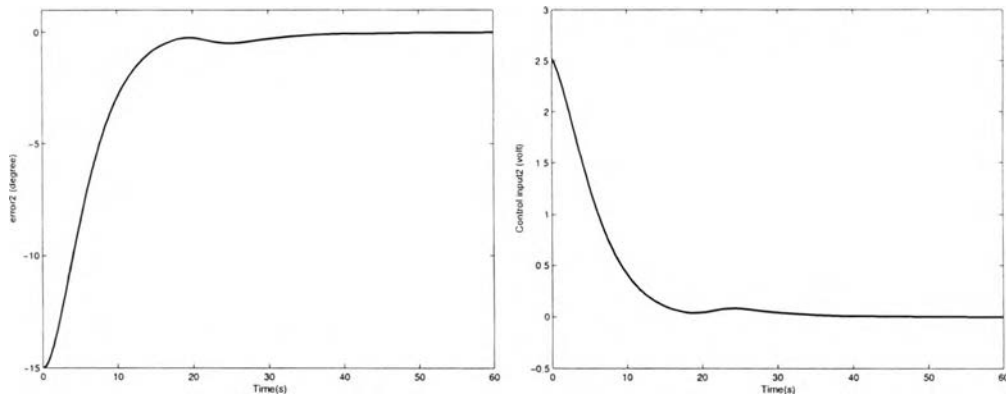
ตารางที่ 6.1: พารามิเตอร์ของระบบ



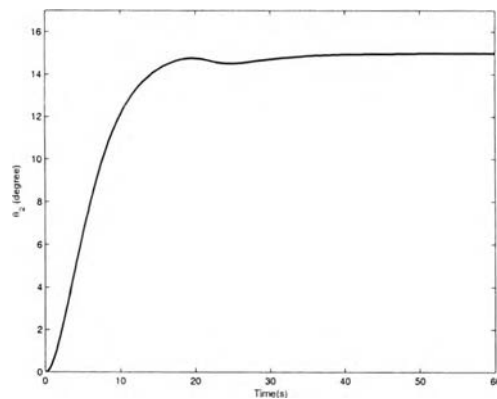
รูปที่ 6.1: ค่าผิดพลาดและสัญญาณควบคุมภายใต้การควบคุม PD กรณีที่ 1



รูปที่ 6.2: สัญญาณออก  $\theta_1$  กรณีที่ 1



รูปที่ 6.3: ค่าผิดพลาดและสัญญาณควบคุมภายใต้การควบคุม PD กรณีที่ 2



รูปที่ 6.4: สัญญาณออก  $\theta_2$  กรณีที่ 2

## 6.5 การควบคุมระบบจริง

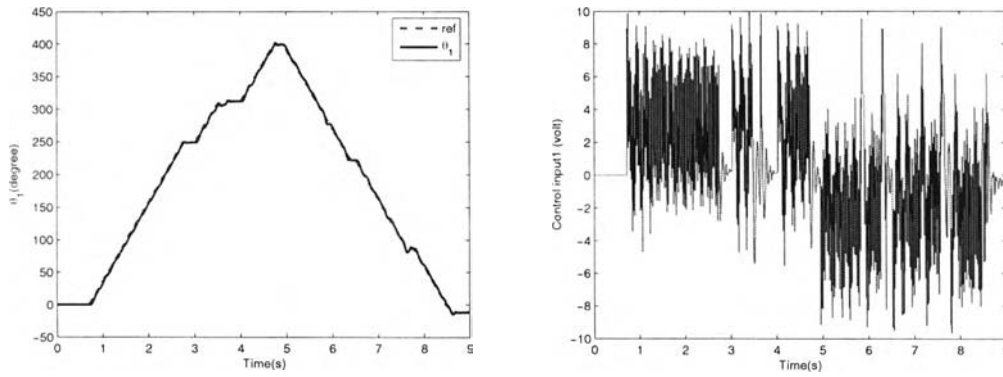
สำหรับขั้นตอนในการทดลองจะแยกเป็น 3 กรณี คือการควบคุมมอเตอร์ตัวที่ 1, 2 และการควบคุมมอเตอร์ทั้ง 2 ตัว ซึ่งใช้สัญญาณอ้างอิงต่างกันคือสัญญาณอ้างอิงจากการกำหนดตำแหน่ง (มุม) และสัญญาณอ้างอิงจากการกดเลือกตำแหน่งเพิ่มขึ้นทีละ 1 องศา โดยในการควบคุมจะใช้การควบคุมแบบพีดีและพารามิเตอร์คือ  $K_{p1} = 1$ ,  $K_{d1} = 0.1$ ,  $K_{p2} = 0.4$ ,  $K_{d2} = 0.01$  และคาบการซัดตัวอย่าง 0.05 วินาที

### ควบคุมมอเตอร์ตัวที่ 1

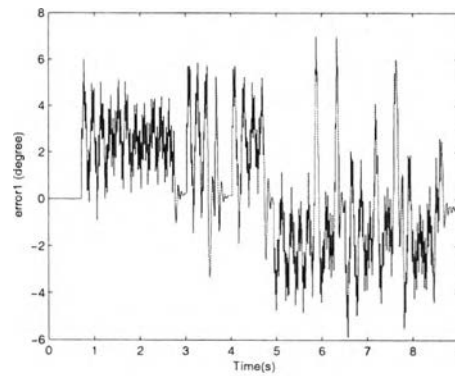
โดยการใส่สัญญาณเข้าเฉพาะมอเตอร์ตัวที่ 1 ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 2 ไม่ต้องใส่สัญญาณใดๆมี 2 กรณี คือ

- กรณีที่ 1 ใช้สัญญาณอ้างอิงโดยการกดปุ่มจากรีโมทคอนโทรล ได้ผลดังรูป 6.5, 6.6

- กรณีที่ 2 ใช้สัญญาณอ้างอิงคือมุม 15 องศา ได้ผลดังรูป 6.7, 6.8

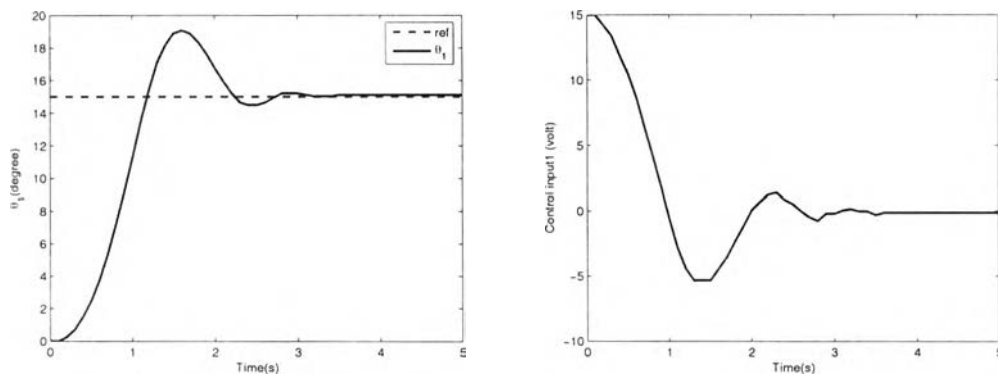


รูปที่ 6.5: สัญญาณออก  $\theta_1$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 1

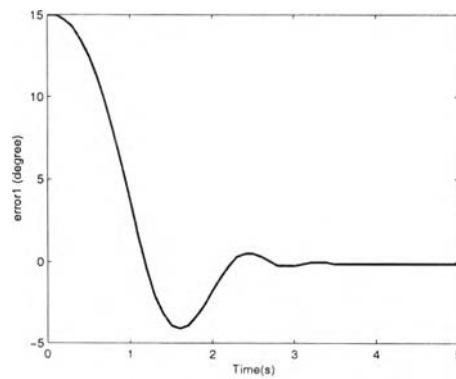


รูปที่ 6.6: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 1





รูปที่ 6.7: สัญญาณออก  $\theta_1$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 2

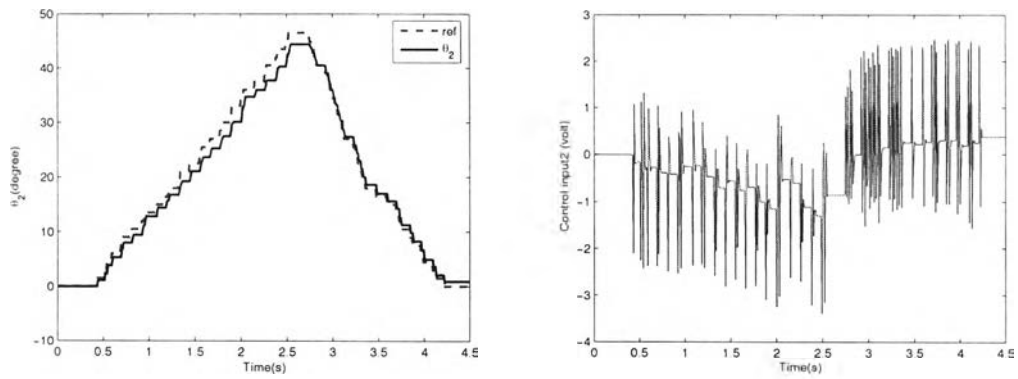


รูปที่ 6.8: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 2

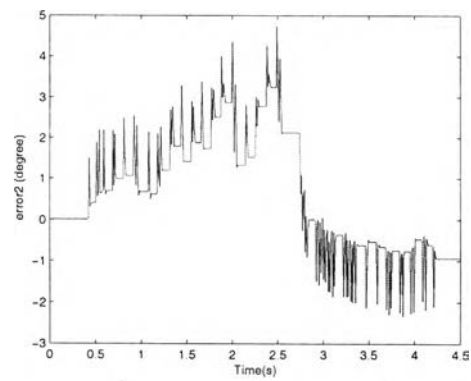
## ควบคุมมอเตอร์ตัวที่ 2

โดยการใส่สัญญาณเข้าเฉพาะมอเตอร์ตัวที่ 2 ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 1 ไม่ต้องใส่สัญญาณใดๆ มี 2 กรณี คือ

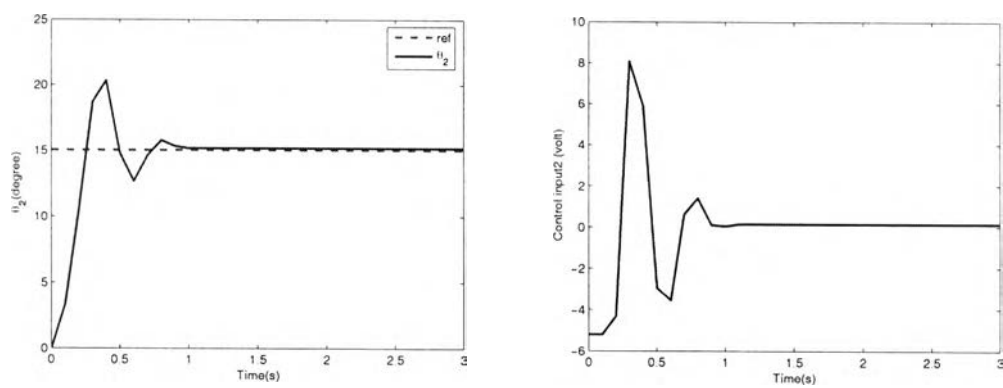
- กรณีที่ 1 ใช้สัญญาณอ้างอิงโดยการกดปุ่มจากรีโมทคอนโทรล ได้ผลดังรูป 6.9, 6.10
- กรณีที่ 2 ใช้สัญญาณอ้างอิงคือมุม 15 องศา ได้ผลดังรูป 6.11, 6.12



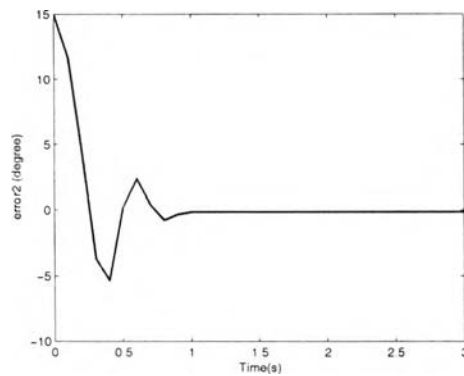
รูปที่ 6.9: สัญญาณออก  $\theta_2$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 1



รูปที่ 6.10: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 1



รูปที่ 6.11: สัญญาณออก  $\theta_2$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 2

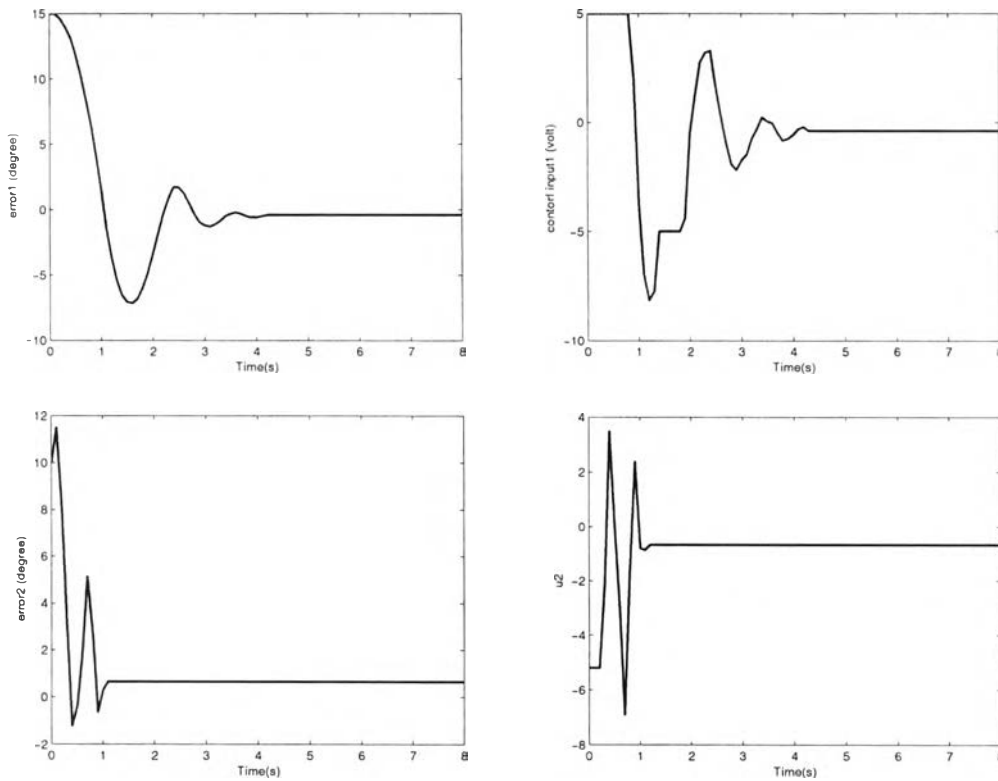


รูปที่ 6.12: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 2

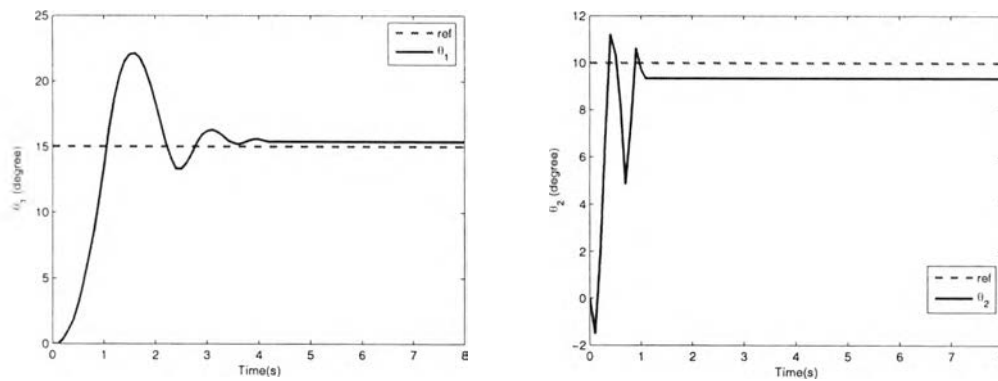
### การควบคุมมอเตอร์ทั้ง 2 ตัว

โดยการใส่สัญญาณอ้างอิงของมอเตอร์ทั้ง 2 ตัว แยกเป็น 2 กรณี คือ

- กรณีที่ 1 ใช้สัญญาณอ้างอิงของมอเตอร์พร้อมกันทั้ง 2 ตัว โดยที่สัญญาณอ้างอิงของมอเตอร์ตัวที่ 1 คือมุม 15 องศา และมอเตอร์ตัวที่ 2 คือมุม 10 องศา ได้ผลดังรูป 6.13, 6.14
- กรณีที่ 2 ใช้สัญญาณอ้างอิงโดยการกดปุ่มจากรีโมทคอนโทรล โดยกดปุ่มให้มอเตอร์ทำงานทีละตัว ได้ผลดังรูป 6.15, 6.16



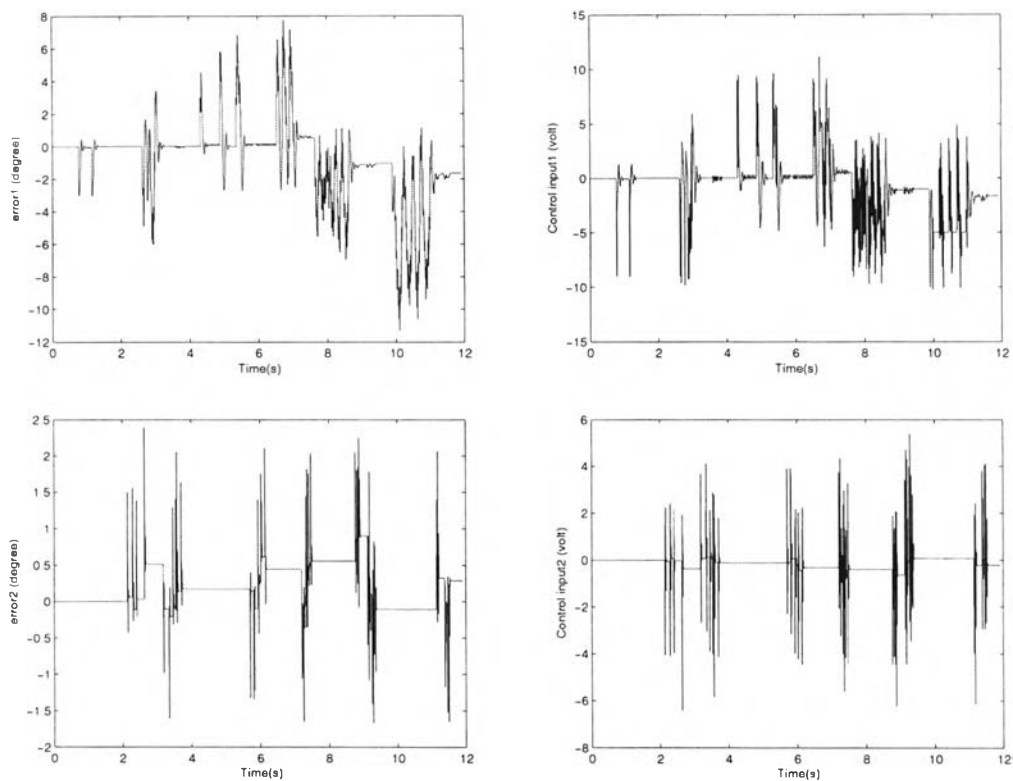
รูปที่ 6.13: ค่าผิดพลาด (องศา) และสัญญาณควบคุม ภายใต้การควบคุม PD กรณีที่ 1



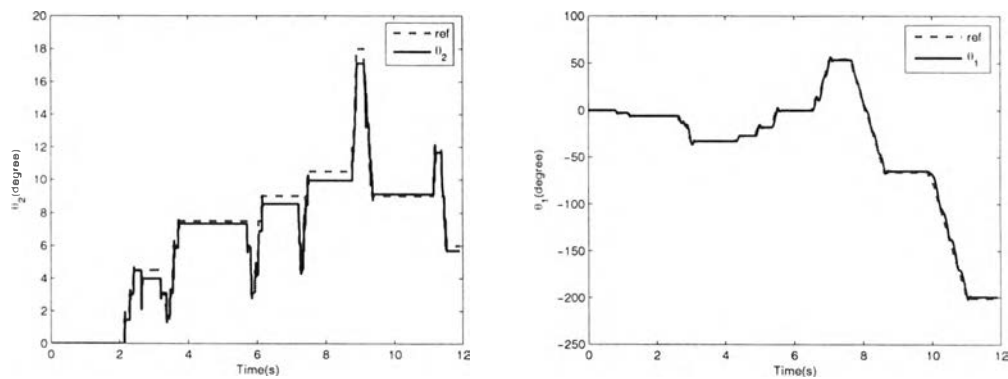
รูปที่ 6.14: สัญญาณออก  $\theta_1, \theta_2$  กรณีที่ 1

### 6.6 เปรียบเทียบผลการจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์กับระบบจริง

ในการเปรียบเทียบผลการทดลองระหว่างการจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์กับระบบจริง จะแยกเป็น 2 กรณี คือ

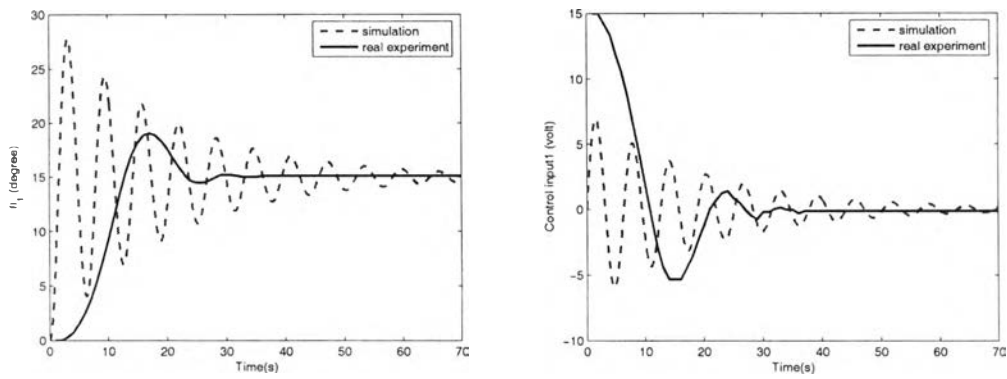


รูปที่ 6.15: ค่าผิดพลาดและสัญญาณควบคุม ภายใต้การควบคุม PD กรณีที่ 2

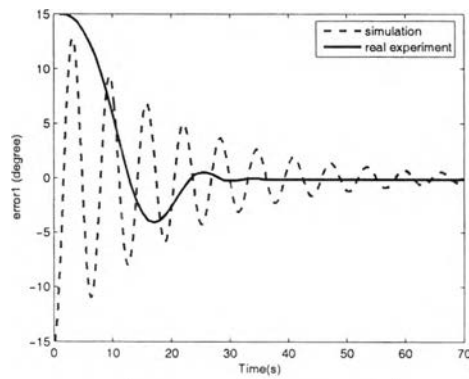


รูปที่ 6.16: สัญญาณออก  $\theta_1, \theta_2$  กรณีที่ 2

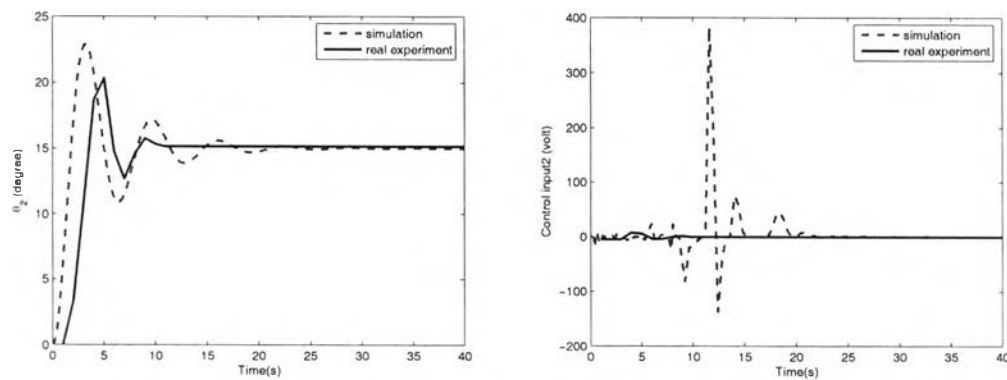
- กรณีที่ 1 ใช้สัญญาณอ้างอิงมอเตอร์ตัวที่ 1 คือมุม 15 องศา ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 2 ไม่ต้องใส่สัญญาณใดๆ และ  $K_{p1} = 1, K_{d1} = 0.1$  ได้ผลดังรูป 6.17, 6.18
- กรณีที่ 2 ใช้สัญญาณอ้างอิงมอเตอร์ตัวที่ 2 คือมุม 15 องศา ส่วนมอเตอร์ตัวที่ 1 ไม่ต้องใส่สัญญาณใดๆ และ  $K_{p2} = 0.4, K_{d2} = 0.01$  ได้ผลดังรูป 6.19, 6.20



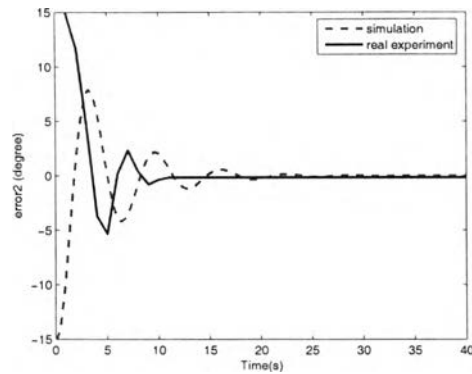
รูปที่ 6.17: สัญญาณออก  $\theta_1$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 1



รูปที่ 6.18: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 1



รูปที่ 6.19: สัญญาณออก  $\theta_2$  และสัญญาณควบคุม กรณีที่ 2



รูปที่ 6.20: ค่าผิดพลาด กรณีที่ 2

## 6.7 สรุป

ในการควบคุมนี้จะใช้สัญญาณอ้างอิงจากรีโมทคอนโทรล โดยการให้มอเตอร์ตัวที่ 1 หมุนแล้วให้มอเตอร์ตัวที่ 2 หมุนตาม ซึ่งจะให้มอเตอร์หมุนทีละตัว จากการทดลองพบว่า การใส่สัญญาณเข้ามอเตอร์ทีละตัวสามารถควบคุมตำแหน่งได้ดีกว่าการใส่สัญญาณเข้ามอเตอร์พร้อมกันทั้ง 2 ตัว ดังรูปที่ 6.7, 6.12 ทั้งนี้เกิดจากการหมุนของมอเตอร์ตัวที่ 1 ทำให้เกิดการสั่นซึ่งมีผลต่อการหมุนของมอเตอร์ตัวที่ 2 ด้วย นอกจากนี้ยังพบว่ามอเตอร์ตัวที่ 2 มีค่าผิดพลาดมากกว่ามอเตอร์ตัวที่ 1 ทั้งนี้เนื่องจากมอเตอร์ตัวที่ 2 ใช้ gear box ในการทดรอบการหมุน ซึ่งพบว่ามีช่องว่างระหว่างเฟืองที่ขบกันทำให้เกิดค่าผิดพลาดได้ ประมาณ 0.5 องศา อย่างไรก็ตามมอเตอร์ทั้ง 2 ตัวสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงได้ ถึงแม้จะมีข้อจำกัดของอุปกรณ์กล่าวคือการออกแบบและการสร้างชุดทดลองไม่ค่อยดี จากผลการทดลองการควบคุมกับระบบจริงพบว่าสามารถควบคุมมอเตอร์ได้ทั้ง 2 ตัว แต่ไม่ดีนัก ทั้งนี้ปัญหาอาจเกิดจาก ทั้งด้าน ฮาร์ดแวร์ ซอฟต์แวร์ และผู้ทดลอง ซึ่งในการควบคุมมอเตอร์ทั้ง 2 ตัวให้ทำงานพร้อมกันนั้นเป็นสิ่งที่ยากในการควบคุมจริง ทั้งนี้ นอกจากโครงสร้างของระบบที่ซับซ้อนแล้ว การเขียนโปรแกรมก็จะเป็นปัญหาตามมา ดังนั้นในการออกแบบชุดทดลองควรคำนึงถึงโครงสร้างและการทำงานทางกลศาสตร์ โดยเน้นทางด้านสมมูลการหมุน ซึ่งจากการทดลองพบว่าปัญหาทางด้านสมมูลเป็นสิ่งที่ทำให้เกิดค่าผิดพลาดในระบบ

ในส่วนของการเปรียบเทียบผลการทดลองระหว่างการจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์กับระบบจริง โดยใช้มุมอ้างอิงและค่า  $K_p$ ,  $K_d$  เท่ากัน พบว่าระบบสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงได้ ดังรูป 6.17 และ 6.19 นั่นคือในการควบคุมระบบจริงจะใช้ค่า  $K_p$ ,  $K_d$  ที่มีค่าน้อยๆ ถ้าใช้ค่ามากระบบจะไม่มีเสถียรภาพ ทั้งนี้อาจมีสาเหตุมาจากโครงสร้างของระบบ รวมทั้งซอฟต์แวร์ ด้วย