

บทที่ 4

วิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์

วิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์ (boundary element method : BEM) คือ วิธีเชิงตัวเลขหรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพโดยอยู่บนพื้นฐานของสมการอินทิกรัลหรือที่เรียกกันว่าสมการบาวนด์ารีอินทิกรัล (boundary integral equations : BIEs) ของปัญหาค่าขอบเขต การหาผลเฉลยตามวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์ จะต้องแบ่งขอบเขต (boundary) ของโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นขอบเขตย่อยๆ (segment) หรือที่เรียกว่าอีลีเมนต์ (element) ก่อน ซึ่งแตกต่างจากวิธีไฟไนต์-อีลีเมนต์ที่ต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ทำให้จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยจะมีเป็นจำนวนมาก นอกจากนี้วิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์จะลดมิติของปัญหาลง 1 มิติ เช่น ปัญหาการอินทิเกรตพื้นที่ก็จะกลายเป็นการอินทิเกรตเชิงเส้นแทน เป็นต้น จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า การหาผลเฉลยด้วยวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์จะกระทำได้ง่าย มีความแม่นยำสูงและเหมาะสมที่จะนำมาหาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง (open boundary) ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตซับซ้อน เป็นต้น (El-Zafrany, 1993; Kythe, 1995) ขณะเดียวกันวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์มีจุดด้อย คือ การเกิดจุดเอกฐาน (singularity) ขึ้นในระบบสมการ

สำหรับบทนี้จะประกอบด้วยเนื้อหาต่างๆ ดังนี้

4.1 สมการบาวนด์ารีอินทิกรัล

4.2 การหาผลเฉลยคำตอบสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์

4.3 บทสรุป

4.1 สมการบาวนด์ารีอินทิกรัล (boundary integral equations)

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งกรณี 2 มิติ จะเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ (maxwell's equation) ดังนี้

$$\text{จากสมการที่ (2.2)} \quad \nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\text{และจากสมการที่ (2.3)} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก \vec{B} กับความเข้มสนามแม่เหล็ก \vec{H} แสดงได้ดังนี้

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.1)$$

โดยที่ μ = ความซาบซึม (permeability)

จากสมการที่ (2.7) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก \vec{B} กับศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก A_z ได้ดังนี้

$$\vec{B} = \nabla \times A_z$$

แทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้สมการ ดังนี้

$$\nabla \times (\nabla \times A_z) = 0 \quad (4.2)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ ทำให้จัดสมการที่ (4.2) ได้ดังนี้

$$\nabla(\nabla \cdot A_z) - \nabla^2 A_z = 0 \quad (4.3)$$

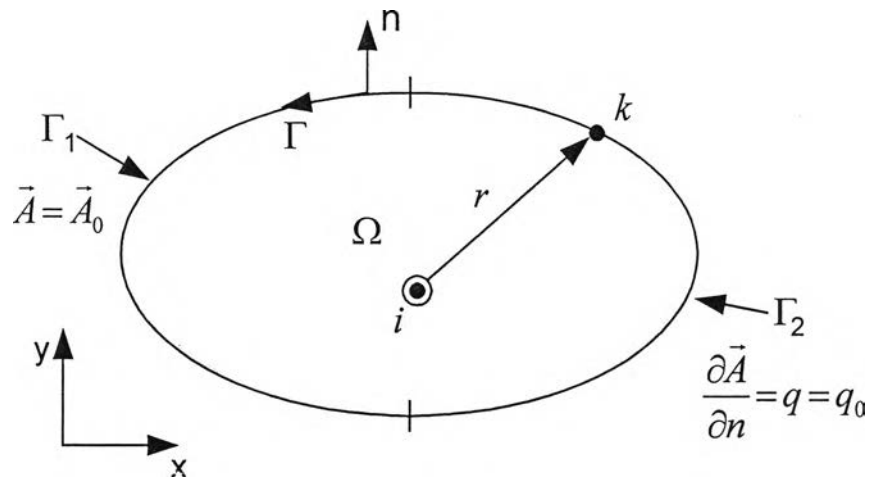
กำหนดให้ $\nabla \cdot A_z = 0$ ดังนั้นจัดสมการที่ (4.3) ได้ดังนี้

$$\nabla^2 A_z = 0 \quad (4.4)$$

และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned} A_z &= A_0 && \text{บน } \Gamma_1 \\ \frac{\partial A_z}{\partial n} &= q = q_0 && \text{บน } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

โดยที่ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตบน Γ และการพิจารณาโดเมนปัญหา 2 มิติ

สมการที่ (4.4) เป็นสมการที่จะถูกนำมาจัดให้อยู่ในรูปสมการบาวน์คาร์อินทิกรัล เพื่อที่จะนำไปคำนวณหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง ซึ่งสามารถทำได้โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างและเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเป็น G_z คือ Green's function ในระบบโคออดิเนตทรงกระบอก ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ (r คือ ระยะจากโนด i ไปยังโนด k ดังรูปที่ 4.1) ในกรณีปัญหา 2 มิติ (Sadiku, 1992) ดังนั้นจะได้สมการ ดังนี้

$$\iint G_z \nabla^2 A_z dx dy = 0 \quad (4.6)$$

จากทฤษฎีบท green's second identity ใน 2 มิติที่ว่า

$$\iint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.7)$$

ประยุกต์ทฤษฎีบท green's second identity ต่อสมการที่ (4.6) จะได้สมการดังนี้

$$\iint A_z \nabla^2 G_z dx dy + \int_{\Gamma} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4.8)$$

จากรูปที่ 4.1 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามอยู่ที่โนด i ภายในโดเมน Ω จะได้สมการสนามที่โนด i ดังนี้

$$\nabla^2 G_z = -\delta(i) \quad (4.9)$$

จัดรูปสมการที่ (4.9) ใหม่โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกข้าง เลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกข้างเป็น A_z จะได้สมการดังนี้

$$\iint A_z (\nabla^2 G_z + \delta(i)) dx dy = 0 \quad (4.10)$$

จากคุณสมบัติฟังก์ชันเคลต้า ทำให้ผลการอินทิเกรตสมการที่ (4.10) คือ

$$\iint A_z \nabla^2 G_z dx dy = -A_z(i) \quad (4.11)$$

แทนสมการที่ (4.11) ลงในพจน์แรกของสมการที่ (4.8) ได้ ดังนี้

$$A_z(i) + \int_{\Gamma} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \quad (4.12)$$

สมการที่ (4.12) คือ สมการเบาว์คาร์อินทิกรัล (boundary integral equations) ซึ่งเป็นสมการเริ่มต้นในการหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งด้วยวิธีบาว์คาร์อีลีเมนต์และถ้ากำหนดให้โนด i อยู่บนขอบเขต Γ จะได้สมการบาว์คาร์อินทิกรัล ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \int_{\Gamma} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \quad (4.13)$$

โดยที่ $A_z(i)$ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่โนด i

A_z คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

G_z คือ Green's function . ในกรณีปัญหา 2 มิติของระบบไดโอดิเนตทรงกระบอก

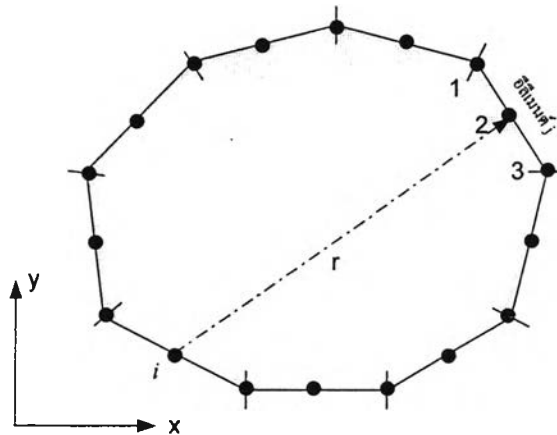
$\frac{\partial A_z}{\partial n}$ คือ อนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต

$\frac{\partial G_z}{\partial n}$ คืออนุพันธ์ของ G_z ในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต
 $c(i)$ คือค่าคงที่และมีค่าดังนี้ (Kythe, 1995)

$$c(i) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าโหนด } i \text{ อยู่นอก } \Omega \cup \Gamma \\ 1 & \text{ถ้าโหนด } i \text{ อยู่ภายใน } \Omega \\ 1/2 & \text{ถ้าโหนด } i \text{ อยู่บนขอบเขต} \\ \theta/2\pi & \text{ถ้าโหนด } i \text{ อยู่ที่มุม} \end{cases}$$

4.2 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีบาวนด์คาร์อีลีเมนต์

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิด โล่งกรณี 2 มิติด้วยวิธีบาวนด์คาร์อีลีเมนต์ จะเริ่มจากการแบ่งขอบเขตของโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็น N อีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.2



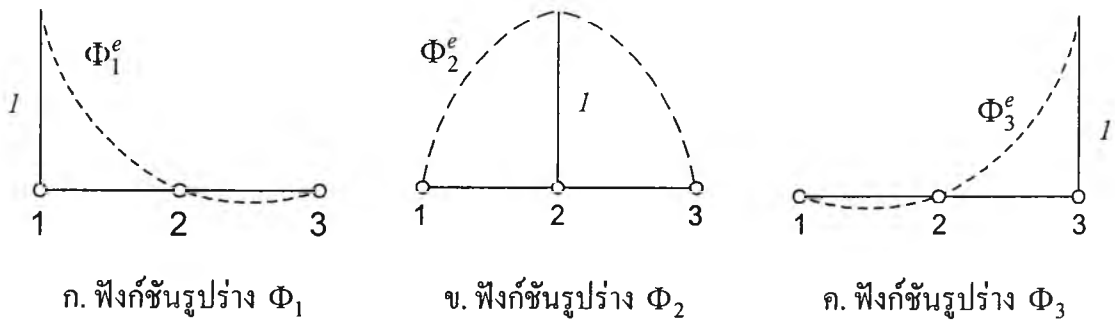
รูปที่ 4.2 ลักษณะการแบ่งขอบเขตออกเป็นขอบเขตย่อยๆ

จากสมการที่ (4.13) แสดงสมการในรูป N อีลีเมนต์ได้ ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \quad (4.14)$$

จากรูปที่ 4.2 แสดงลักษณะการแบ่งขอบเขตที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์ย่อยๆ พบว่าในหนึ่งอีลีเมนต์ประกอบด้วยจำนวนโนดที่ใช้ประมาณค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 3 โนด คือ โนดที่ 1, โนดที่ 3 จะอยู่ที่จุดปลายอีลีเมนต์และ โนดที่ 2 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางอีลีเมนต์ ลักษณะการประมาณอีลีเมนต์ดังกล่าวนี้ เรียกว่า “ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง” (quadratic element) จุดประสงค์ของการประมาณลักษณะอีลีเมนต์เช่นนี้ คือ เพื่อที่จะให้ผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์ในแต่ละตำแหน่งโนดสอดคล้องกัน

ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองแสดงได้ดังรูปที่ 4.3 และสมการแต่ละโนดของฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองแสดงได้ดังสมการที่ (4.15)



รูปที่ 4.3 ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \Phi_2 &= (1-\xi^2) \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

โดยที่ ξ มีค่าเท่ากับ $-1 < \xi < 1$

ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองในสมการที่ (4.15) จะมีคุณสมบัติดังนี้

$$\Phi_i = \begin{cases} 1 & \text{ที่จุด } i \\ 0 & \text{ที่จุดอื่นๆ} \end{cases}, i = 1, 2, 3 \quad (4.16)$$

การที่กำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า $(A_z, \frac{\partial A_z}{\partial n})$ ในแต่ละอีลีเมนต์มีการเปลี่ยนแปลงตามฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง ดังนั้นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ทุกตำแหน่ง โหนดบนแต่ละอีลีเมนต์สามารถที่จะหาได้จากเทอมของฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง ดังนี้

$$A_z(\xi) = \Phi_1 A_{z1} + \Phi_2 A_{z2} + \Phi_3 A_{z3} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] [A_{z1} \quad A_{z2} \quad A_{z3}]^T \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial n}(\xi) = \Phi_1 \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} + \Phi_2 \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} + \Phi_3 \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \left[\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \right]^T \quad (4.18)$$

โดยที่ Φ_1, Φ_2, Φ_3 เป็นฟังก์ชันรูปร่างบนแต่ละอีลีเมนต์

พิจารณาเทอมอินทิเกรตบนอีลีเมนต์ j ทางซ้ายมือของสมการที่ (4.14) ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปของ $A_z(\xi)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] [A_{z1} \quad A_{z2} \quad A_{z3}]^T \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} (\Phi_1 A_{z1} + \Phi_2 A_{z2} + \Phi_3 A_{z3}) \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma \\ &= [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] [A_{z1} \quad A_{z2} \quad A_{z3}]^T \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\text{โดยที่ } h_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma, k = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

นำคุณสมบัติจาโคเบียน (jacobian transformation) มาใช้ในการแปลงพิกัด จากพิกัด xy ให้อยู่ในพิกัด ξ ในสมการที่ (4.20) ได้ดังนี้

$$d\Gamma = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \right) d\xi = |JA| d\xi \quad (4.21)$$

จากสมการที่ (4.21) สามารถที่จะจัดสมการที่ (4.20) ในพิกัด ξ ได้ดังนี้

$$h_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{-1}^1 \Phi_k(\xi) \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi \quad (4.22)$$

แทนสมการที่ (4.22) ลงในสมการที่ (4.19) ได้สมการดังนี้

$$\int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \sum_{k=1}^3 A_{zk} \int_{-1}^1 \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi \quad (4.23)$$

พิจารณาเทอมอินทิเกรตบนอีลีเมนต์ j ทางขวามือของสมการที่ (4.14) จัดให้อยู่ในรูปของ $\frac{\partial A_z}{\partial n}(\xi)$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial A_z}{\partial n} A^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \left[\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \right]^T G_z d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} \left(\Phi_1 \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} + \Phi_2 \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} + \Phi_3 \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \right) G_z d\Gamma \\ &= [g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i3}] \left[\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \quad \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \right]^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\text{โดยที่ } g_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k G_z d\Gamma, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.25)$$

จัดสมการที่ (4.25) ให้อยู่ในพิกัด ξ โดยใช้คุณสมบัติจาโคเบียน สมการที่ (4.21) ได้ดังนี้

$$g_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k G_z d\Gamma = \int_{-1}^1 \Phi_k G_z |JA| d\xi \quad (4.26)$$

แทนสมการที่ (4.26) ลงในสมการที่ (4.24) จัดสมการได้ ดังนี้

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial A_z}{\partial n} G_z d\Gamma = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} \int_{-1}^1 \Phi_k G_z |JA| d\xi \quad (4.27)$$

แทนสมการที่ (4.23) และสมการที่ (4.27) ลงในสมการที่ (4.14) ได้สมการดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 A_{zk} \int_{-1}^1 \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} \int_{-1}^1 \Phi_k G_z |JA| d\xi \quad (4.28)$$

จัดรูปสมการที่ (4.28) ใหม่ได้ ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 A_{zk} H_{k,j} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} G_{k,j} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } H_{k,j} &= \int_{-1}^1 \Phi_k(\xi) \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi \\ G_{k,j} &= \int_{-1}^1 \Phi_k(\xi) G_z |JA| d\xi \end{aligned}$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$[H][A_z] = [G] \left[\frac{\partial A_z}{\partial n} \right] \quad (4.30)$$

สมการที่ (4.30) ก็คือสมการที่ (2.19) ในบทที่ 2. ซึ่งเมื่อนำไปแทนลงในสมการที่ (2.17) จะยังผลให้สามารถที่จะหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากตลอดโดเมนปัญหา

การอินทิเกรตสมการ (4.22) และสมการ (4.26) ในวิทยานิพนธ์นี้จะเลือกใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์ควอดราเจอร์ (gauss quadrature) (Kythe, 1995) เนื่องจากวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์ควอดราเจอร์มีข้อดี คือ ความสะดวกในการใช้งานและผลเฉลยที่ได้มีความแม่นยำสูง เมื่อฟังก์ชันที่อินทิเกรตเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีอันดับ $2n-1$ หรือต่ำกว่า โดยที่ n คือ จำนวนจุดเกาส์ (ศ.ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2538) สำหรับการอินทิเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่ (4.26) จะแยกออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1. โหนด i และ โหนด k ($k=1,2,3$ ดังรูปที่ 4.2) ไม่ได้อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน การอินทิเกรตสมการ (4.22) และสมการ (4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตเกาส์ควอดราเจอร์ (ภาคผนวก ข.1)

กรณีที่ 2. โหนด i และ โหนด k ($k=1,2,3$ ดังรูปที่ 4.2) อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน การอินทิเกรตสมการที่ (4.22) สมการที่ (4.26) จะแยกออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

- โหนด i และ โหนด k อยู่บนตำแหน่งโหนดเดียวกัน กรณีนี้จะเกิดจุดเอกพันธ์ (singularity) ขึ้นในระบบสมการ เนื่องจาก $\ln\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ เมื่อ $r = 0$ ดังนั้นการอินทิเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่ (4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตแบบ logarithmic gauss quadrature แทน (ภาคผนวก ข.2)

- โหนด i และ โหนด k อยู่คนละตำแหน่งโหนดกัน แต่บนอีลีเมนต์เดียวกัน กรณีนี้การอินทิเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่ (4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตเกาส์ควอดราเจอร์ (ภาคผนวก ข.1) เช่นเดียวกับกรณีที่ โหนด i และ โหนด k ไม่ได้อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน

4.3 บทสรุป

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพ แม่นตรงสูงและใช้จำนวนอีลีเมนต์หาผลเฉลยน้อย ซึ่งจะเหมาะสมที่จะนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง และเมื่อผู้กความสัมพันธ์ของวิธีบาวนด์ารีอีลีเมนต์เข้ากับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ได้ จะทำให้ทราบผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นตลอดทั้ง โดเมนปัญหาได้