

บทที่ 2

สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวและสนามแม่เหล็กจากกลุ่ม ตัวจับทรงกระบอกในตัวกรอง

จากบทที่ 1 ได้กล่าวถึงการศึกษาการจับอนุภาคแม่เหล็กโดย J.H.P. Watson (1973) และ J.H.P. Watson (1975) ซึ่งได้สมการการเคลื่อนที่ที่เป็น $dr/dt = (v/a)(1-1/r_s^2)(\cos\theta-\alpha)-(v_m/a)[(K_s/r_s^5)+(1/r_s^3)\cos(2\theta)]$ และ $r_s d\theta/dt = -(v/a)(1+1/r_s^2)\sin(\theta-\alpha)-(v_m/ar_s^3)\sin 2\theta$ สำหรับในบทนี้ จะแสดงสนามแม่เหล็กรอบตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก (\vec{H}) ซึ่งจะแยกพิจารณา ดังนี้ กรณีวิธีจำลองตามแบบตัวจับเดี่ยวและ กรณีสนามแม่เหล็กของกลุ่มตัวจับทรงกระบอก (magnetic field for an assemblage of cylinders) ตามลำดับ ซึ่งจะใช้นำไปหาสมการการเคลื่อนที่ในบทที่ 3 และ บทที่ 4 ต่อไป สำหรับสนามแม่เหล็กตามแบบตัวจับเดี่ยว (single collector model) จะศึกษากรณีตัวจับเป็นสารชนิดเฟอร์โรแมกเนติก มีสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็ก μ_2 มีลักษณะเป็นทรงกระบอกรัศมี a วางอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (uniform applied magnetic field, \vec{H}_0) โดยมีทิศตั้งฉากกับแกนของตัวจับ ทำให้ตัวจับถูกแมกนีโตเซชัน \vec{M} , ทิศเดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอก ความเหนี่ยวนำภายในตัวจับเป็นไปตามสมการ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$,

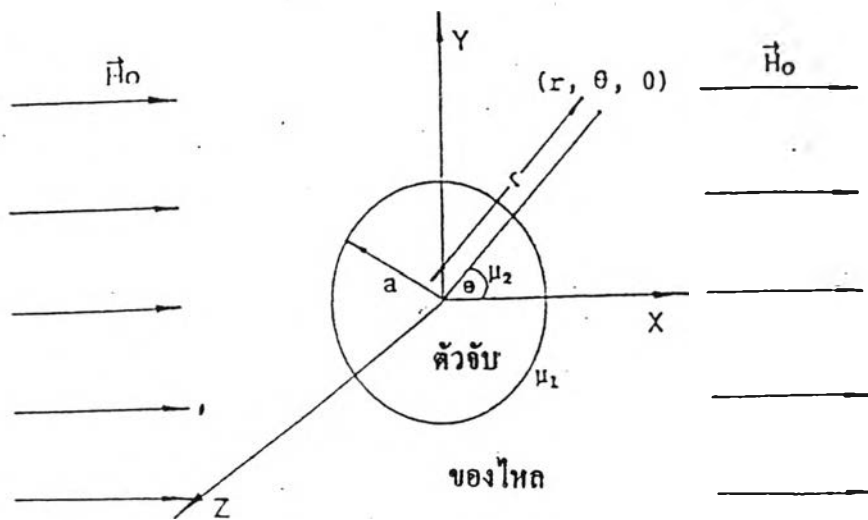
2.1 สนามแม่เหล็กรอบตัวจับทรงกระบอกเดี่ยว

การหาสนามแม่เหล็กบริเวณรอบตัวจับ (\vec{H}) สามารถคำนวณโดยวิธีแก้ปัญหามีขอบเขตเพื่อหาค่าศักย์แม่เหล็ก (magnetic potential, Φ) เมื่อ Φ สัมพันธ์กับสนามแม่เหล็กดังนี้

$$\vec{H} = -\nabla\Phi \quad (2.1)$$

โดยให้แกน Z ในระบบพิกัดทรงกระบอกให้อยู่ซ้อนกับตัวจับดังรูปที่ 2.1 กำหนดให้ Φ_1 และ Φ_2 เป็นศักย์แม่เหล็กบริเวณรอบตัวจับและในตัวจับตามลำดับเมื่อ Φ_1 และ Φ_2 สอดคล้องกับสมการลาปลาซในแต่ละบริเวณดังนี้

$$\nabla^2\Phi_1 = 0, \quad a < r < \infty \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.1 แสดงภาคตัดขวางของตัวจับทรงกระบอกที่ถูกล้อมด้วยของไหลที่อยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0) \perp แกนของตัวจับและ แกน Z ขนานกับแกนของตัวจับ

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0, \quad 0 < r < a \quad (2.3)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

1. สนามแม่เหล็กที่ไกลตัวจัมมากมีค่าเท่ากับ (H_0) ดังนั้น

$$\Phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta \quad \text{เมื่อ } r \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

2. ความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวจัม (B_n) มีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างตัวจัมกับของไหล นั่นคือ

$$-\mu_1 \partial \Phi_1 / \partial r \Big|_{r=a} = -\mu_0 \partial \Phi_2 / \partial r \Big|_{r=a} + M_s \cos \theta \quad (2.5)$$

3. สนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวของตัวจัมมีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อระหว่างผิวของตัวจัมกับของไหล ดังนั้น

$$\partial \Phi_1 / \partial \theta \Big|_{r=a} = \partial \Phi_2 / \partial \theta \Big|_{r=a} \quad (2.6)$$

ผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการลาปลาซ (2.2) และ (2.3) เป็นจริงตามเงื่อนไขขอบเขต 1. คือ

$$\Phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-(n-1)} \cos(n\theta) \quad (2.7)$$

และ

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \cos(n\theta) \quad (2.8)$$

จากเงื่อนไข 2. และ 3. จะได้

$$A_1 = (-H_0 a^2 (\mu_1 - \mu_0) - M_s a^2) / (\mu_1 - \mu_0)$$

$$B_1 = (M_s - 2\mu_1 H_0) / (\mu_1 + \mu_0)$$

และ $A_n = B_n = 0$ กรณี $n \neq 1$ (2.9.1)

โดยธรรมชาติค่าสภาพซึมได้ทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibilities) ของของไหลมีค่าใกล้เคียงกับสภาพให้ซึมได้ของสูญญากาศ เนื่องจาก $\mu_0 - \mu_1 < 10^{-3}$ จึงสามารถประมาณ μ_1 เป็น μ_0 ซึ่งทำให้ A_1 และ B_1 ลดรูปเป็น

$$A_1 = M_s a^2 / 2\mu_0$$

$$B_1 = (M_s / 2\mu_0) - H_0 \quad (2.9.2)$$

เมื่อแทนค่า A_n จากสมการ (2.9.2) ลงในสมการ (2.7) จะได้ศักย์แม่เหล็กเป็น

$$\Phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos\theta + (M_s a^2 / 2\mu_0 r) \cos\theta \quad (2.10)$$

จากสมการที่ (2.1) สามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็กภายนอกตัวจับ (H) ได้ดังนี้

$$\vec{H} = H_0 [(1 + K_s / r_s^2) \cos\theta \hat{r} - (1 - K_s / r_s^2) \sin\theta \hat{\theta}], 1 < r_s < \infty \quad (2.11)$$

เมื่อ $K_s = M_s / 2\mu_0 H_0$

2.2 สนามแม่เหล็กจากกลุ่มตัวจับทรงกระบอก (magnetic field for an assemblage of cylindrical collectors)

จากการศึกษาสนามแม่เหล็กรอบตัวจับทรงกระบอกที่ผ่านมา ได้สมมติให้สนามแม่เหล็กจริง เกิดจากทรงกระบอกเพียงอันเดียวโดยไม่สนใจสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกลุ่มทรงกระบอกข้างเคียง สำหรับในหัวข้อนี้สนามแม่เหล็กที่ศึกษาจะคิดผลจากกลุ่มทรงกระบอกข้างเคียง ซึ่งจะคำนวณโดยวิธีตัวกลางยังผล ตามแนวความคิดของ M. Natenapit (ปี ค.ศ.1988) วิธีตัวกลางยังผลคือ การพิจารณาให้ระบบของตัวจับทรงกระบอกแม่เหล็ก และตัวกลางของไหลที่อยู่รอบๆ แต่ละทรงกระบอกถูกมองว่าประกอบด้วยทรงกระบอกร่วม (composite cylindrical cell) ซึ่งมีทรงกระบอกตัวจับอันหนึ่งรัศมี a เป็นแกน ล้อมรอบด้วยเซลล์ของไหลเป็นทรงกระบอก รัศมีภายนอก

เป็น b และกำหนดค่ารัศมี b โดยกำหนดให้อัตราส่วนระหว่างปริมาตรรวมของตัวจับทรงกระบอกทั้งหมดในระบบตัวกรองกับปริมาตรของระบบตัวกรอง ซึ่งก็คือสัดส่วนการบรรจุตัวจับของทรงกระบอกในตัวกรอง (packing fraction, F) มีค่าเท่ากับ a^2/b^2 ให้ตัวจับทรงกระบอกมีสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กเท่ากับ μ_2 ของไหลมีสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กเท่ากับ μ_1 ในการจำลองวิธีตัวกลางขังผลนี้เราจะพิจารณาเฉพาะเซลล์ตัวแทนที่เราสนใจเท่านั้น ส่วนเซลล์ที่อยู่ถัดไปจะถูกแทนที่ด้วยตัวกลางที่ต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกันที่มีสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กขังผลเท่ากับ μ^* (ซึ่งยังไม่ทราบค่า) ดังรูปที่ 2.2 สำหรับสนามแม่เหล็กรอบๆตัวจับ (\vec{H}) ภายในตัวจับและ ภายในตัวกลางขังผล หาได้โดยวิธีแก้ปัญหามุมขอบเขต เพื่อหาศักย์แม่เหล็ก (magnetic potential, Φ) เมื่อ Φ สัมพันธ์กับสนามแม่เหล็ก \vec{H} ดังนี้

$$\vec{H} = -\nabla\Phi \quad (2.12)$$

กำหนดให้ Φ^* , Φ_1 และ Φ_2 เป็นศักย์แม่เหล็กที่บริเวณตัวกลางขังผล เซลล์ของไหลและตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก ตามลำดับ จะได้สมการลาปลาซ (Laplace's equation) แต่ละบริเวณคือ

$$\nabla^2\Phi^* = 0, \quad b < r < \infty \quad (2.13)$$

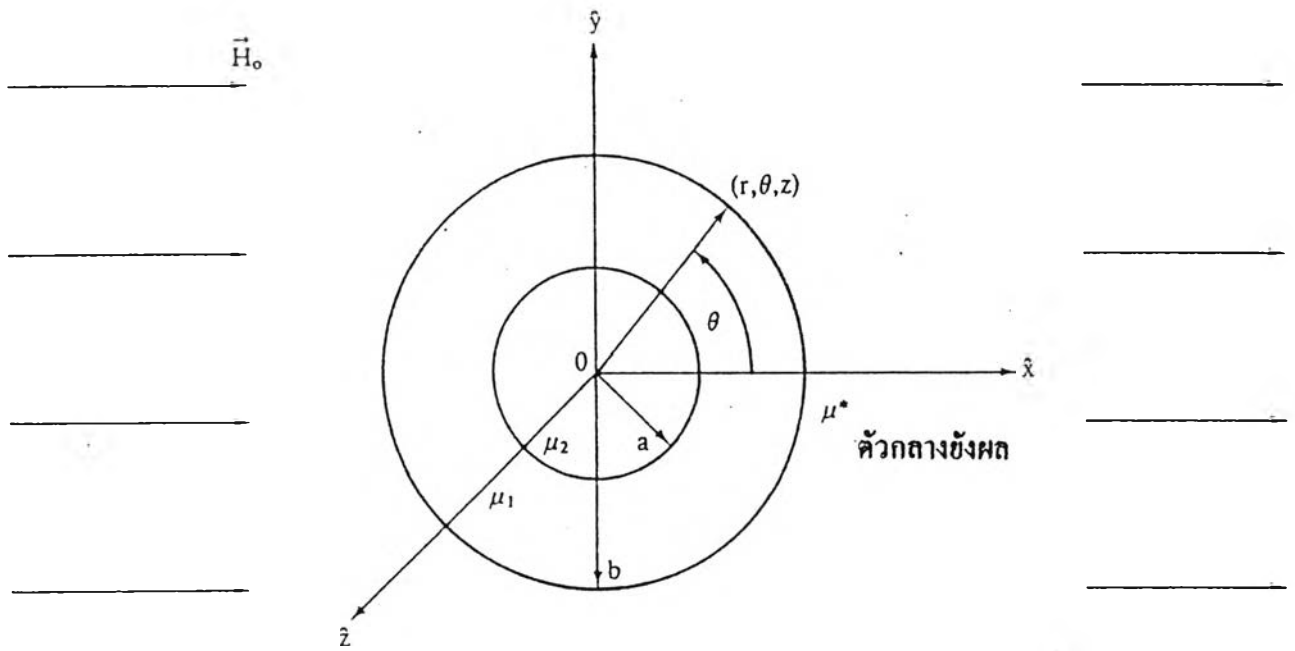
$$\nabla^2\Phi_1 = 0, \quad a < r < b \quad (2.14)$$

$$\nabla^2\Phi_2 = 0, \quad 0 < r < a \quad (2.15)$$

ในการหาผลเฉลยสมการที่ (2.13), (2.14) และ (2.15) เพื่อหาค่า Φ^* , Φ_1 และ Φ_2 จะต้องใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ต่อไปนี้

1. สนามแม่เหล็กที่ไกลตัวจับมากๆมีค่าเท่ากับสนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{H}_0) นั่นเอง ซึ่งทำให้ได้

$$\Phi^*(r,\theta) = -H_0 r \cos\theta \quad \text{ที่ } r \rightarrow \infty \quad (2.16)$$



รูปที่ 2.2 แสดงภาคตัดขวางของเซลล์ตัวแทนซึ่งประกอบด้วย ตัวจับทรงกระบอก ของไฮลรอบ
ตัวจับ ตัวกลางยังผล โดยมีสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ (\vec{H}_0) \perp กับแกน
ของตัวจับและ แกน Z ร่วมกับ แกนของตัวจับ

2. สนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวของตัวจับมีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อผิวตัวจับกับเซลล์ของไหล นั่นคือ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \quad (2.17)$$

3. สนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวนอกของเซลล์ของไหลมีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างของไหลในเซลล์ตัวกลางยังผล นั่นคือ

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=b} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \Big|_{r=b} \quad (2.18)$$

4. ความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวจับ (B_n) มีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างตัวจับกับของไหลในเซลล์ นั่นคือ

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (2.19)$$

5. ความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวนอกของเซลล์ของไหลมีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างของไหลในเซลล์กับตัวกลางยังผล นั่นคือ

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = \mu^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \Big|_{r=b} \quad (2.20)$$

2.3 ผลเฉลยของสมการลาปลาซ

รูปทั่วไปของ Φ^* , Φ_1 และ Φ_2 ซึ่งเป็นเฉลยของสมการลาปลาซ (2.3), (2.4) และ (2.5) ที่เป็นจริงตามเงื่อนไขขอบเขต 1. คือ

$$\Phi^*(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\theta \quad (2.21)$$

และ

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n r^n + C_n r^{-n}] \cos n\theta \quad (2.22)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^n \cos n\theta \quad (2.23)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต 2 - 5 จะได้

$$aB_1 + a^{-1}C_1 - aD_1 = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$B_n a^n + C_n a^{-n} - D_n a^n = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

$$H_0 b - bA_1 + bB_1 + b^{-1}C_1 = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$Ab^{-n} - B_n b^n - C_n b^{-n} = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

$$\mu_1 B_1 - \mu_2 a^{-2} C_1 - \mu_2 D_1 = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$\mu_1 C_n a^{-n-1} - \mu_1 B_n a^{n-1} + \mu_2 D_n a^{n-1} = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

$$\mu_1 H_0 + \mu_1 b^{-2} A_1 + \mu_1 B_1 - \mu_1 b^{-2} C_1 = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$\mu_1 A_n b^{-n-1} + \mu_1 (B_n b^{n-1} - C_n b^{-n-1}) = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

แก้สมการเพื่อหาค่าคงที่ A_n , B_n , C_n และ D_n จากสมการข้างต้นได้ผลดังนี้

$$A_1 = (H_0 a^2 / lF)(F(V-1)(V+1) - (V-1)(V+1))$$

$$B_1 = (-2H_0 \dot{V}(V+1)) / l$$

$$C_1 = (2H_0 a^2 \dot{V}(V-1)) / l$$

$$D_1 = (-4H_0 \dot{V}) / l$$

และ $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ สำหรับ $n \neq 1$

เมื่อ $\dot{V} = \mu_1 / \mu_2$, $V = \mu_2 / \mu_1$ และ $l = (V+1)(V+1) - F(V-1)(V-1)$

แทนค่า A_n, B_n, C_n และ D_n ในสมการ (2.11), (2.12) และ (2.13) จะได้ศักย์แม่เหล็กเป็น

$$\Phi'_0(r, \theta) = H_0 [(a^2(V-1)(V'+1) - (V'-1)(V+1))/IFr - r] \cos \theta \quad (2.24)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = (2H_0 V' / I) [(V-1)(a^2/r) - (V+1)r] \cos \theta \quad (2.25)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = (-4H_0 V' / I) r \cos \theta \quad (2.26)$$

2.4 สนามแม่เหล็กตัวกลางยังผล

เราสามารถคำนวณสนามแม่เหล็ก \vec{H} ที่บริเวณต่างๆในระบบตัวกรองได้ โดยแทนค่า $\Phi'_0(r, \theta), \Phi_1(r, \theta)$ และ $\Phi_2(r, \theta)$ จากสมการ (2.24) และ (2.26) ลงในสมการ (2.12) ซึ่งได้สนามแม่เหล็กรอบตัวจับ ดังนี้

$$\vec{H} = 2H_0 V' (V+1) [(1 + K_c / r_s^2) \cos \theta \hat{r} - (1 - K_c / r_s^2) \sin \theta \hat{\theta}], \quad 1 < r_s < b/a \quad (2.27)$$

$$\vec{H} = H_0 \hat{z}, \quad b/a < r_s < \infty \quad (2.28)$$

เมื่อ $r_s = r/a$ และ $K_c = (V-1)/(V+1)$

สำหรับ μ' หาได้จากหลักความสอดคล้องกันในตัวเอง (selfconsistency) ที่ว่าความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กเฉลี่ยโดยปริมาตร (volume average magnetic induction, $\langle \vec{B} \rangle = \mu \langle \vec{H} \rangle$) ของเซลล์ตัวแทนที่พิจารณาต้องเท่ากับความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กเฉลี่ยโดยปริมาตรของตัวกลางยังผล ดังนี้

$$F \mu_2 \langle H_2 \rangle_1 + (1-F) \mu_1 \langle H_1 \rangle_1 = \mu' \langle H' \rangle_1 \quad (2.29)$$

เมื่อ i แทนส่วนประกอบของเวกเตอร์ตามแกน x, y หรือ z จากสมการ (2.29) คำนวณสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กสัมผัสของตัวกลางยังผล (V^*) ได้เป็น

$$V^* = (V(F+1)-(F-1))/(V(F-1)+(F+1)) \quad (2.30)$$

เมื่อแทนค่า V^* จากสมการ (2.20) ในสมการ (2.17) จะได้สนามแม่เหล็กรอบตัวจับ ดังนี้

$$\vec{H} = AH_0[(1+K_c/r_s^2)\cos\theta \hat{r} - (1-K_c/r_s^2)\sin\theta \hat{\theta}], \quad 1 < r_s < b/a \quad (2.31)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0, \quad b/a < r_s < \infty \quad (2.32)$$

เมื่อ $A = 1/(1-FK_c)$ เรียกค่าคงที่ยังผล กรณีตัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาคแม่เหล็กมีค่าน้อยมาก $F (=a^2/b^2) \rightarrow 0$, $V^* = 1$ (หรือ $\mu^* = \mu_1$) สมการที่ (2.21) ลดรูปเป็นกรณีสนามแม่เหล็กตัวจับเดี่ยวนั่นเอง