

## บทที่ 2

### ทฤษฎี

จากที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่หนึ่งว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแบ่งโดยใช้เกณฑ์ของการสมมุติฐานของตัวแปรอันได้แก่ การกระจัด ความเค้นหรือแรง และ ความเครียด โดยจะสามารถแบ่งได้เป็นสี่วิธีด้วยกัน นั่นคือ ระเบียบวิธีการกระจัดซึ่งสมมุติฐานการกระจัด ระเบียบวิธีทางแรงซึ่งสมมุติฐานความเค้นหรือแรง ระเบียบวิธีพันธู์ทางซึ่งสมมุติทั้งสมมุติฐานความเค้นและสมมุติฐานการกระจัด และระเบียบวิธีผสมซึ่งทำการสมมุติทั้งสามสมมุติฐานคือ ความเค้น การกระจัด และความเครียด ซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวซึ่งรายละเอียดของแต่ละวิธีในอันดับต่อไป

ในขั้นแรกนั้น จะกล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้นของแผ่นบาง (thin plate) เพื่อที่จะเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป อันดับถัดมาจะกล่าวถึงวิธีการแปรผัน (variational principle) ซึ่งเป็นทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้นำไปหาเมตริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix) ของแต่ละระเบียบวิธี อันได้แก่ หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด (principle of minimum potential energy) ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสของระเบียบวิธีการกระจัด หลักการพลังงานศักย์เติมเต็ม (principle of complementary potential energy) ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสของระเบียบวิธีทางแรง และระเบียบวิธีพันธู์ทาง (ในกรณีนี้ที่สมมุติการกระจัดที่ขอบของชิ้นส่วน) หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (Hellinger – Reissner principle) ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสของระเบียบวิธีพันธู์ทาง (ในกรณีนี้ที่สมมุติการกระจัดภายในชิ้นส่วน) และ หลักการฮู-วาซิชู (Hu-Washisu principle) ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสของระเบียบวิธีผสม

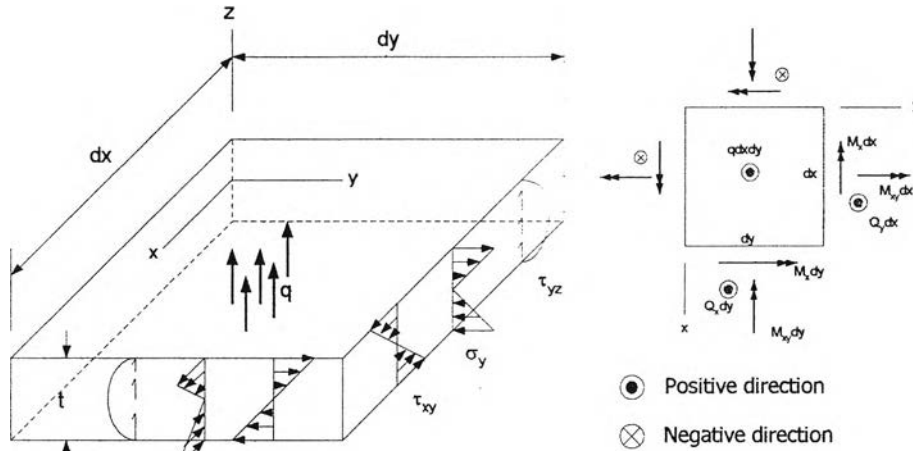
และสุดท้ายจะแสดงตัวอย่างของการหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนแผ่นพื้น ในแต่ละระเบียบวิธีดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น

#### 2.1 ทฤษฎีเบื้องต้นของแผ่นบาง (thin plate theory)

สมมุติฐานเบื้องต้นของแผ่นบางนั้นคือ ความหนาของแผ่นพื้น ( $t$ ) มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวของแผ่นพื้น ( $L$ ) รวมทั้ง การโก่งตัว (deflection) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา และ ไม่คิดผลของแรงดึงและแรงอัดในแผ่น (membrane force)

จากรูปที่ 2.1.1 แสดงความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นพื้น ในกรณีที่เป็นวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous) และเป็นการยืดหยุ่นเชิงเส้น (linearly elastic) ความเค้นตั้งฉาก  $\sigma_x$  และ  $\sigma_y$  จะแปรผันเป็นเส้นตรงกับระยะทางจากกึ่งกลาง  $z$  และจะก่อให้เกิดโมเมนต์ที่กระทำในทิศทาง  $x$  คือโมเมนต์  $M_x$  และโมเมนต์ที่กระทำในทิศทาง  $y$  คือโมเมนต์  $M_y$  ความเค้นเฉือน (shear stress)  $\tau_{xy}$  จะแปรผันเป็นเส้นตรงกับระยะทางจากกึ่งกลาง  $z$  เช่นเดียวกัน และก่อให้เกิดโมเมนต์บิด (twisting moment)  $M_{xy}$  ความเค้นเฉือนตั้ง

ฉาก (transverse shear stresses)  $\tau_{yz}$  และ  $\tau_{zx}$  จะแปรผันในรูปกำลังสองกับระยะทางจากกึ่งกลาง  $z$  และจะก่อให้เกิดแรงเฉือน  $Q_x$  และ  $Q_y$  ตามลำดับ ความเค้นตั้งฉาก  $\sigma_z$  จะไม่นำมาพิจารณาเพราะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ  $\sigma_x$   $\sigma_y$  และ  $\tau_{xy}$  แรงในแนวตั้งฉาก  $q$  จะกระทำในแนวตั้งฉากกับระนาบ หรือในแนวแกน  $z$  ดังนั้นค่าว่าการดัดของแผ่นพื้น (plate bending) จึงหมายถึง การที่ไม่มีแรงกระทำจากภายนอกในแนวที่ขนานกับระนาบของแผ่นพื้นหรือระนาบ  $xy$  และ  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$  ที่ระนาบกลางของแผ่น หรือ  $z = 0$



รูปที่ 2.1.1 ระบบแรงในแผ่นพื้น

จากรูปที่ 2.1.1 สามารถเขียนสมการสมดุลของแผ่นพื้นได้ดังนี้

$$\sum F_z = 0: \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad \dots\dots 2.1.1$$

$$\sum M_y = 0: \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad \dots\dots 2.1.2$$

$$\sum M_x = 0: \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad \dots\dots 2.1.3$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad \dots\dots 2.1.4$$

และจากความเค้นในรูปที่ 2.1.1 นั้นจะก่อให้เกิดโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนตั้งฉากและหาค่าได้จากความสัมพันธ์

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz \quad \dots\dots 2.1.5a$$

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{zx} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \quad \dots\dots 2.1.5b$$

นั่นคือเราสามารถหาค่าความเค้นออกมาในรูปของความสัมพันธ์กับระยะทางจากระนาบกลางได้ดังนี้

$$\sigma_x = \frac{zM_x}{I^3/12} \quad \sigma_y = \frac{zM_y}{I^3/12} \quad \sigma_{xy} = \frac{zM_{xy}}{I^3/12} \quad \dots\dots 2.1.6ก$$

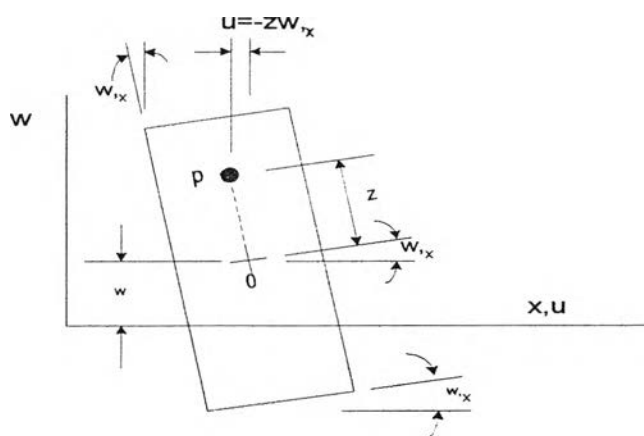
โดยทั้งค่าที่มากที่สุดของโมเมนต์ทั้งสามตัวจะเกิดขึ้นที่ขอบนอกสุดของแผ่นพื้น เมื่อแทนค่า  $z = \pm \frac{t}{2}$  จะได้ค่าความเค้นมากที่สุดดังนี้

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{t^2} \quad \sigma_y = \frac{6M_y}{t^2} \quad \sigma_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2} \quad \dots\dots 2.1.6ข$$

ในส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากนั้นจะมีค่ามากที่สุดเกิดขึ้นที่ระนาบกลางของแผ่นพื้นนั่นเอง

$$\tau_{yz} = \frac{1.5Q_y}{t} \quad \tau_{zx} = \frac{1.5Q_x}{t} \quad \dots\dots 2.1.6ค$$

ในกรณีของแผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff plate) ตำแหน่งระนาบกลางแผ่น หรือที่  $z=0$  จะมีการเคลื่อนที่เฉพาะในทิศทางตั้งฉากกับระนาบเท่านั้น นั่นคือจะเคลื่อนที่ในทิศทาง  $z$  เท่านั้น การเปลี่ยนรูปร่าง (deformation) จะไม่ทำให้หน้าตัดเกิดการเปลี่ยนรูปทรง อย่างเช่น เส้นตรง  $OP$  ซึ่งเดิมตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นพื้นก่อนการเปลี่ยนรูปร่างก็ยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นเหมือนเดิม [ ดูได้จากรูปที่ 2.1.2 ] ดังนั้นการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนตั้งฉาก (transverse shear deformation) ก็จะถูกสมมุติให้เป็นศูนย์ หมายถึงการที่ระนาบกลางของแผ่นจะไม่มี การเคลื่อนที่ในแนวระนาบของแผ่นทั้งทิศทาง  $x$  และ  $y$  จากสมมุติฐานดังกล่าวข้างต้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการกระจัด ความเค้น และความเครียดของแผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1.2 ชิ้นส่วนเคอร์ชอฟฟ์หลังการเปลี่ยนรูป

หากเรามีการกระจัดในแนวตั้งฉาก (translation)  $w$  นั่นคือจะก่อให้เกิดการหมุน (rotation) ที่กระทำในทิศทาง  $x$  เท่ากับ  $w_{,x}$  และเกิดการหมุนที่กระทำในทิศทาง  $y$  เท่ากับ  $w_{,y}$  ดังนั้นจะมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ที่แปรผันโดยตรงกับระยะตั้งฉากจากระนาบกลางและมุมหมุน หรือสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} u &= -zw_{,x} \\ v &= -zw_{,y} \end{aligned} \quad \dots\dots 2.1.7$$

และเราสามารถจะหาความเครียดที่เกิดขึ้นได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดตามหลักของกลศาสตร์วัสดุ ซึ่งความเครียดตั้งฉาก  $\epsilon_x$  และ  $\epsilon_y$  ที่สอดคล้องกับการกระจัด  $u$  และ  $v$  ตามลำดับ และความเครียดเฉือน  $\gamma_{xy}$  ได้จากความสัมพันธ์คือ

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} = -zw_{,xx} \\ \epsilon_y &= v_{,y} = -zw_{,yy} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -2zw_{,xy} \end{aligned} \quad \dots\dots 2.1.8$$

จากสมการที่ 2.1.8 เราสามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\epsilon_b\} = -z\{\kappa_b\} \quad \dots\dots 2.1.9$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \{\epsilon_b\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} && \text{คือ ความเครียดดัด (bending strains)} \\ \{\kappa_b\} &= \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} && \text{คือ ความโค้ง (curvatures)} \end{aligned}$$

จากหลักการของกลศาสตร์วัสดุ เราสามารถที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดออกมาได้ ซึ่งสามารถที่จะเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.10$$

เมื่อ

- $E$  คือ โมดูลัสยืดหยุ่น (elastic modulus)
- $\nu$  คือ อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's ratio)

เมื่อเรานำความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด ในสมการที่ 2.1.8 แทนค่าเพื่อที่จะหาความเค้นจากความเครียดในสมการที่ 2.1.10 และทำการอินทิเกรตหาค่าโมเมนต์ดัดดังสมการที่ 2.1.5 ก็จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งดังสมการ

$$\{M\} = -[D_k]\{\kappa_b\} \quad \dots\dots 2.1.11ก$$

เมื่อ

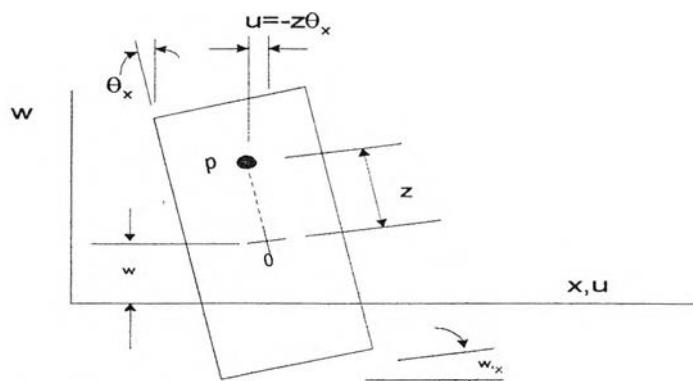
$$\{M\} = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T \quad \dots\dots 2.1.11ข$$

$$[D_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.11ค$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots 2.1.11ง$$

โดยที่  $D$  เรียกว่า ค่าความแข็งของการดัด (flexural rigidity) ซึ่งในกรณีของคานาก็คือ  $EI$  นั่นเอง ในกรณีของแผ่นพื้นหากแผ่นพื้นมีความกว้างหนึ่งหน่วยและอัตราส่วนปัวส์ซองของเป็นศูนย์จะได้ว่า  $D = EI = \frac{Et^3}{12}$  และ  $[D_k]$  หมายถึงเมตริกซ์ความแข็งของแผ่นพื้นเคอร์ซอพฟ์

หากพิจารณาทฤษฎีแผ่นมินดลินด์ (Mindlin plate theory) นั้นการเปลี่ยนรูปจะก่อให้เกิดการเปลี่ยนรูปทรงของหน้าตัดด้วย นั่นคือเส้นตรง  $OP$  [ ดังรูปที่ 2.1.3 ] ซึ่งตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นพื้น ก่อนการเปลี่ยนรูปร่าง แต่หลังจากเกิดการเปลี่ยนรูปร่าง  $OP$  ก็ยังคงเป็นเส้นตรงเพราะจะไม่ยอมให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างในแนวตั้งฉากกับระนาบ แต่  $OP$  ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นอีกต่อไป นั่นคือเราจะยอมให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนตั้งฉาก (transverse shear deformation) การเคลื่อนที่ของจุดต่างๆที่ไม่ใช่จุดบนระนาบกลางของแผ่นจะขึ้นอยู่กับ การหมุน  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  แทนที่จะเป็น  $w_x$  และ  $w_y$  เหมือนในกรณีของแผ่นพื้นเคอร์ซอพฟ์ จากสมมุติฐานดังกล่าวข้างต้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดได้ดังนี้



รูปที่ 2.1.2 ชิ้นส่วนแผ่นมินดลินหลังการเปลี่ยนรูป

จากรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned} u &= -z\theta_x \\ v &= -z\theta_y \end{aligned} \quad \dots\dots 2.1.12$$

และเราสามารถจะหาความเครียดที่เกิดขึ้นได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดตามหลักของกลศาสตร์วัสดุ ซึ่งความเครียดจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความหนา

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} = -z\theta_{x,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} = -z\theta_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x})\end{aligned}\quad \dots\dots 2.1.13$$

จากสมการที่ 2.1.13 เราสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon_b\} = -z \{\kappa_b\} \quad \dots\dots 2.1.14ก$$

เมื่อ

$$\{\kappa_b\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.14ข$$

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.14ค$$

และสามารถหาความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนตั้งฉาก ซึ่งมีค่าคงที่ตลอดความหนา จากความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} = w_{,y} - \theta_y \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = w_{,x} - \theta_x\end{aligned}\quad \dots\dots 2.1.15$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{\varepsilon_s\} = -\{\kappa_s\} \quad \dots\dots 2.1.16$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\{\varepsilon_s\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \text{ คือความเครียดเฉือนตั้งฉาก (transverse shear strains)} \\ \{\kappa_s\} &= \begin{Bmatrix} \theta_y - w_{,y} \\ \theta_x - w_{,x} \end{Bmatrix} \text{ คือความโค้งที่สอดคล้องกับแรงเฉือนตั้งฉาก}\end{aligned}$$

เนื่องจากเราไม่คิดผลที่ขึ้นต่อกันและกัน (coupling) ระหว่างความเครียดดัด  $\{\varepsilon_b\}$  และ ความเครียดเฉือนตั้งฉาก  $\{\varepsilon_s\}$  ทำให้เราสามารถหาความเค้นจากความเครียดโดยอาศัยหลักการของกลศาสตร์วัสดุ ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.17$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.18$$

เมื่อนำความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด ในสมการที่ 2.1.13 และ 2.1.15 แทนค่าเพื่อหาความเค้นในสมการที่ 2.1.17 และ 2.1.18 แล้วทำการอินทิเกรตหาค่าโมเมนต์ดัด และแรงเฉือนตั้งฉาก ดังสมการที่ 2.1.5 ก็จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งดังสมการ

$$\{M\} = -[D_M]\{K\} \quad \dots\dots 2.1.19ก$$

เมื่อ

$$\{M\} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y]^T \quad \dots\dots 2.1.19ข$$

$$\{K\} = [\theta_{xx} \quad \theta_{yy} \quad \theta_{xy} + \theta_{yx} \quad \theta_x - w_{,x} \quad \theta_y - w_{,y}]^T \quad \dots\dots 2.1.19ค$$

$$[D_M] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots 2.1.19ค$$

โดย  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  เรียกว่าค่าความแข็งของการดัด และ  $[D_M]$  หมายถึงเมตริกซ์ความแข็งของแผ่นพื้นมินดิสลิน

หรือสามารถเปรียบเทียบได้ดังตารางที่ 2.1.1

ตารางที่ 2.1.1 เปรียบเทียบทฤษฎีแผ่นมอดลิ่งและเคอร์ชอฟฟ์

แผ่นพื้นเคอร์ชอฟฟ์	แผ่นพื้นมอดลิ่ง
<b>การกระจัด</b>	
$u = -zw_{,x}$	$u = -z\theta_x$
$v = -zw_{,y}$	$v = -z\theta_y$
<b>ความเครียด</b>	
$\varepsilon_x = u_{,x} = -zw_{,xx}$	$\varepsilon_x = u_{,x} = -z\theta_{,xx}$
$\varepsilon_y = v_{,y} = -zw_{,yy}$	$\varepsilon_y = v_{,y} = -z\theta_{,yy}$
$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2zw_{,xy}$	$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -z(\theta_{,xy} + \theta_{,yx})$
	$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = w_{,y} - \theta_y$
	$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = w_{,x} - \theta_x$
<b>ความเค้น</b>	
$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$
<b>ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง</b>	
$\{M\} = -[D_K]\{\kappa_b\}$	$\{M\} = -[D_M]\{\kappa\}$
$\{M\} = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T$	$\{M\} = [M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_x \ Q_y]^T$
$\{\kappa_b\} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}$	$\{\kappa\} = [\theta_{,xx} \ \theta_{,yy} \ \theta_{,xy} + \theta_{,yx} \ \theta_x - w_{,x} \ \theta_y - w_{,y}]^T$
$[D_K] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$	$[D_M] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$
$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$



## 2.2 หลักการแปรผัน (variational principle)

หลักการแปรผันเป็นทฤษฎีพื้นฐาน ในการที่จะนำไปหาเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละระเบียบวิธีที่ได้กล่าวไว้แล้ว ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงรายละเอียดของแต่ละวิธีการ โดยจะอธิบายโดยยกตัวอย่างในกรณีสามมิติ หลังจากนั้นในหัวข้อถัดไปจึงจะกล่าวถึงการนำวิธีการแปรผัน ไปประยุกต์กับชิ้นส่วนแผ่นพื้นรับแรงดัด

โดยทั่วไปในปัญหากลศาสตร์นั้นตัวแปรที่เราสนใจจะประกอบด้วย การกระจัด  $\{u\}$  ซึ่งจะมีอยู่ด้วยกัน ทั้งสามทิศทางอันได้แก่  $u$   $v$   $w$  ซึ่งสอดคล้องกับทิศทางพิกัดจาก  $x$   $y$   $z$  ตามลำดับ ความเค้น  $\{\sigma\}$  ซึ่งมีอยู่ทั้งหมดหกค่า คือ ความเค้นตั้งฉาก  $\sigma_x$  ,  $\sigma_y$  ,  $\sigma_z$  ความเค้นเฉือน  $\tau_{xy}$  ความเค้นเฉือนตั้งฉาก  $\tau_{yz}$  ,  $\tau_{zx}$  และความเครียด  $\{\varepsilon\}$  ซึ่งมีอยู่ด้วยกันหกค่าที่สอดคล้องกับความเค้น ดังนั้นเราสามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้เป็น

$$\{u\} = \{u \ v \ w\} \quad \dots\dots 2.2.1$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\} \quad \dots\dots 2.2.2$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\} \quad \dots\dots 2.2.3$$

โดยจากหลักของกลศาสตร์วัสดุ เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดออกมาได้ ดังสมการ

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \dots\dots 2.2.4ก$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \dots\dots 2.2.4ข$$

โดยที่  $[S]$  เมตริกซ์ปริงแต่งที่ทำการเปลี่ยนจากความเค้นเป็นความเครียด (constitutive matrix) และ  $[C] = [S]^{-1}$  เรียกว่าเมตริกซ์สอดคล้องที่ทำการเปลี่ยนจากความเครียดเป็นความเค้น (compliance matrix) นอกจากนี้เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดและความเครียดได้จากหลักการของกลศาสตร์วัสดุ จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \dots\dots 2.2.5ก$$

หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad \dots\dots 2.2.5ข$$

เมื่อ

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots\dots 2.2.5\text{ก}$$

[D] คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ (differential operator) และสามารถที่จะเขียนสมการสมดุลของแรงได้ (ตัวอย่างสมการสมดุลของแผ่นพื้นนั้นได้แสดงไว้ในสมการที่ 2.1.1 – 2.1.3 )

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots 2.2.6\text{ก}$$

หรือสามารถเขียนสมการที่ 2.2.6ก ในรูปง่าย ๆ ได้ดังนี้

$$[D]^T \{\sigma\} + \{F\} = 0 \quad \dots\dots 2.2.6\text{ข}$$

เมื่อ

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad \text{คือ แรงตัว (body force)}$$

จากหลักการพื้นฐานของงานเสมือน (principle of virtual displacements) ซึ่งกล่าวไว้ว่า “ถ้าหากระบบอยู่ภายใต้สมดุลแล้ว หากเราสร้างการกระจัดเสมือนขึ้นมา พลังงานภายในจะเท่ากับงานเสมือนภายนอก”

จากหลักการดังกล่าวนำไปสู่หลักการพลังงานศักย์ (potential energy) ดังสมการ

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dV - \int_{s_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds \quad \dots\dots 2.2.7$$

เมื่อ  $A(\epsilon_x \dots \epsilon_{xz}) = A(\{\epsilon\}) = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\}$  เรียกว่าพลังงานความเครียด (strain energy) ซึ่งอยู่ในพจน์ของความเครียด และเมื่อเราทำการแปรผันเทียบกับความเครียดก็จะได้ความเค้น [ดังสมการ 2.2.8 ] นั่นแสดงว่าพลังงานความเครียดนั้นต้องอาศัยหลักการว่าความเครียดจะต้องสอดคล้องกับความเค้น นั่นเอง

$$\frac{\partial A}{\partial \{\varepsilon\}} = [C]\{\varepsilon\} = \{\sigma\} \quad \dots\dots 2.2.8$$

ดังนั้น ค่า  $\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV$  จึงหมายถึงพลังงานความเครียดทั้งหมดของในปริมาตร  $V$  เพราะเราทำการอินทิเกรตทั้งปริมาตร (เมื่อ  $dV$  คือปริมาตรของส่วนย่อยๆ) และ ค่า  $\int_{s_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds$  หมายถึงงานภายนอกนั่นเอง เมื่อ  $\{\bar{T}\}$  แรงที่เราใส่เข้าไป (prescribed tractions) ทั้งนี้เราจะทำการอินทิเกรตในบริเวณขอบ  $S_\sigma$  ที่เราได้ใส่แรงเข้าไป

หากทำการแปรผันสมการพลังงานศักย์ในสมการที่ 2.2.7 เทียบกับความเครียด ก็จะทำให้ได้สมการกำหนดเงื่อนไข (constraint equations) คือ

$$\{\varepsilon\} - [\partial]\{u\} = 0 \quad \text{ใน } V \quad \dots\dots 2.2.9$$

นั่นคือความเครียดที่ใช้นั้น นอกจากจะเท่ากับความเค้นแล้ว ยังต้องเท่ากับความเครียดที่เกิดจากการกระจัดด้วย ดังนั้นการการกระจัด  $\{u\}$  ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของขอบที่กำหนดด้วย ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\{u\} - \{\bar{u}\} = 0 \quad \text{บนขอบ } S_u \quad \dots\dots 2.2.10$$

เมื่อ

$$\{\bar{u}\} \text{ คือ การกระจัดที่เรากำหนดไว้บนขอบ } S_u$$

โดยทั้งนี้  $\partial V = S + S_\sigma + S_u$  คือขอบของปริมาตรทั้งหมดซึ่งจะประกอบไปด้วย ส่วนที่กำหนดแรง ส่วนที่กำหนดการกระจัด และส่วนที่ไม่ได้กำหนดอะไร

ซึ่งจากหลักการพลังงานศักย์นั้นหากเราไม่ได้กำหนดเงื่อนไขใดๆ จะทำให้สามารถที่จะปรับปรุงสมการดังกล่าวได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} \Pi_G = \int_V \left[ \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}^T ([\partial]\{u\}) \right] dV \\ - \int_{s_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds - \int_{s_u} \{T\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds \quad \dots\dots 2.2.11 \end{aligned}$$

เรียกสมการที่ 2.2.11 ว่า หลักการของฮู-วาซิชู (Hu-Washisu principle) เมื่อเราทำการแปรผันเทียบกับ ความเค้นในปริมาตร ( $\delta \{\sigma\}$  in  $V$ ) ก็จะได้ความสัมพันธ์ของการกระจัดและความเครียด  $\{\varepsilon\} - [\partial]\{u\} = 0$  ดังสมการ 2.2.9 หากทำการแปรผันเทียบกับความเครียดในปริมาตร ( $\delta \{\varepsilon\}$  in  $V$ ) จะได้  $[C]\{\varepsilon\} = \{\sigma\}$  ในทำนองเดียวกับสมการที่ 2.2.8 และหาทำการแปรผันเทียบกับการกระจัดใน ปริมาตร ( $\delta \{u\}$  in  $V$ ) จะได้สมการสมมูลย์  $[\partial]^T \{\sigma\} = 0$  ในทำนองเดียวกันสมการ 2.2.6 แต่ไม่มีแรงของวัสดุ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีการดังกล่าวก็ทำให้คุณสมบัติทางด้านต่างๆ ยังคงเป็นไปตามกลศาสตร์วัสดุอยู่นั่นเอง

ในสมการที่ 2.2.11  $\{T\} = \{T_x \ T_y \ T_z\}$  คือแรงที่ขอบซึ่งสามารถเขียนในรูปของสมมูลกับความเค้นได้คือ

$$\begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 & v_y & 0 & v_z \\ 0 & v_y & 0 & v_x & v_z & 0 \\ 0 & 0 & v_z & 0 & v_x & v_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad 2.2.12n$$

หรือสามารถเขียนสมการที่ 2.2.12 ได้อย่างง่ายคือ

$$[v]\{\sigma\} = \{T\} \quad 2.2.12x$$

เมื่อ  $[v]$  เวกเตอร์กำหนดทิศทางที่ตั้งฉากกับขอบ (unit vector normal to the boundary)

จากสมการของวู-วาซิชู นั้นจะกล่าวได้ว่าจะไม่เงื่อนไขใดๆกำหนดสำหรับแต่ละสนามตัวแปรเลย เพราะทำยที่สุดแล้วเงื่อนไขต่างๆ ก็จะเป็นไปด้านในด้านการแปรผัน หรือจะพูดให้ง่ายกว่านั้นว่าแต่ละตัวแปรนั้นจะทำให้เกิดพลังงานภายในด้วยตัวมันเอง  $\int_V \left[ \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} \right] dV$  คือพลังงานความเครียด เป็นพลังงานส่วนที่เกิดจากสนามความเครียดโดยตรง  $\int_V \left[ -\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \right] dV$  คือพลังงานที่เกิดจากสนามความเค้นและสนามความเครียด และส่วนสุดท้ายคือพลังงานการเปลี่ยนรูป (deformation energy)  $\int_V \left[ \{\sigma\}^T ([\partial]\{u\}) \right] dV$  ซึ่งเกิดจากส่วนของความเค้นและความเครียดที่เกิดจากการกระจัด หากว่าจะอาศัยความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด เพื่อขจัดสนามของความเค้นออกไป ด้วยความสัมพันธ์

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\} \quad \dots\dots 2.2.13$$

นำเงื่อนไขของความเค้นในสมการที่ 2.2.13 ไปใส่ในสมการของวู-วาซิชู ในสมการที่ 2.2.11 จะได้

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_V \left[ -\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} + \{\sigma\}^T ([\partial]\{u\}) \right] dV \\ & - \int_{s_r} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds - \int_{s_f} \{T\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds \end{aligned} \quad \dots\dots 2.2.14$$

เรียกสมการที่ 2.1.14 ว่า หลักการของเฮลลิงเกอร์-ริสเนอร์ (Hellinger-Riessner principle) หากเราทำการแปรผันเทียบกับความเค้นและการกระจัดในปริมาตรก็จะได้

$$[S]\{\sigma\} = [\partial]\{u\} \quad \dots\dots 2.2.15$$

$$[\partial]^T \{\sigma\} = 0 \quad \dots\dots 2.2.16$$

นั่นหมายความว่าความเครียดที่ได้จากทั้งความเค้นและการกระจัดจะต้องเท่ากัน รวมทั้งระบบจะมีสมมูลด้วย โดยทั้งนี้  $B(\sigma_x \dots \tau_x) = B(\{\sigma\}) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\}$  เรียกว่า พลังงานความเครียดเต็มเต็ม (complementary strain energy) ซึ่งอยู่ในพจน์ของความเค้น และเมื่อทำการแปรผันเทียบกับความเค้นก็จะได้ความเครียดนั่นเอง

$$\frac{\partial B}{\partial \{\sigma\}} = [S] \{\sigma\} = \{\varepsilon\} \quad \dots\dots 2.2.17$$

ในการทำงานเดียวกันหากเราใส่เงื่อนไขของการกระจัดเข้าไป  $\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\}$  ตั้งแต่ตอนต้น พลังงานภายในก็จะเปลี่ยนจาก

$$\int_V \left[ -\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} + \{\sigma\}^T ([\partial] \{u\}) \right] dV \quad \dots\dots 2.2.18$$

เป็น

$$\int_V \left[ \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right] dV \quad \dots\dots 2.2.19$$

ซึ่งก็จะเท่ากับพลังงานความเครียดเต็มเต็มนั่นเอง ดังนั้นเราจึงสามารถที่จะเขียนสมการพลังงานศักย์เต็มเต็ม (complementary potential energy) ได้ดังสมการ

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} dV - \int_{s_u} \{T\}^T \{\bar{u}\} ds \quad \dots\dots 2.2.20$$

### 2.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

จากหลักการแปรผันในหัวข้อที่ผ่านมา นั้น จะมีหลักการแปรผันทั้งหมดสี่ประเภท อันได้แก่ หลักการพลังงานศักย์ หลักการพลังงานศักย์เต็มเต็ม หลักการเฮลลิงเกอร์โรสเนอร์ และหลักการวู-วิสิล์ ซึ่งหลักการเหล่านี้จะนำไปใช้ในการหาเมตริกซ์สติเฟเนสของในแต่ละระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเราได้แบ่งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ออกเป็น 4 ชนิดคือ ระเบียบวิธีการกระจัด ระเบียบวิธีทางแรง ระเบียบวิธีพันธุ์ทาง และระเบียบวิธีผสม ซึ่งอาศัยการสมมุติสนามตัวแปรเป็นการแบ่งประเภท ในหัวข้อนี้จะได้แสดงรายละเอียดของระเบียบวิธีต่างๆ เมื่อนำไปใช้กับแผ่นพื้น รวมทั้งตัวอย่างในการหาเมตริกซ์สติเฟเนส

#### 2.3.1 ระเบียบวิธีการกระจัด (Displacement Method)

ระเบียบวิธีการกระจัด คือระเบียบวิธีที่สมมุติเฉพาะการกระจัดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบ และจะมีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนหรือไม่ก็ได้ หลังจากนั้นก็นำการกระจัดที่สมมุติไปหาความเครียด และนำ

ความเครียดไปหาความเค้นต่อไป ซึ่งจะเห็นได้ว่าทุกตัวแปรจะขึ้นกับการกระจัดที่สมมุติทั้งหมด ความถูกต้องจึงขึ้นอยู่กับวิธีการกระจัดที่สมมุติทั้งสิ้น

ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสที่อาศัยหลักการพลังงานศักย์ ในสมการที่ 2.2.7 เราสามารถที่จะเขียนสมการในรูปของชิ้นส่วนได้ดังนี้

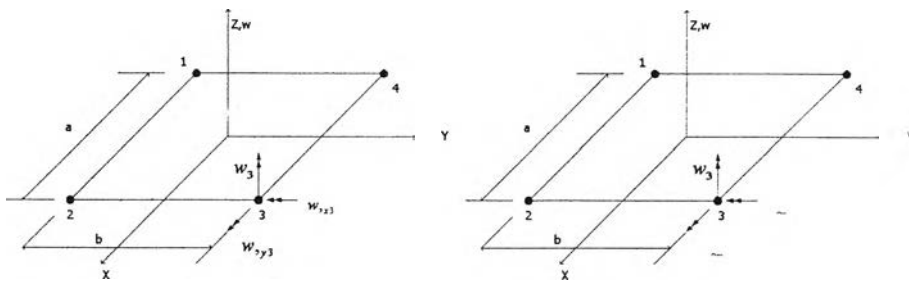
$$\Pi_p = \sum_n \left[ \frac{1}{2} \int_{V_n} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} dV - \int_{S_{\sigma_n}} \{\bar{T}\}^T \{u\} ds \right] \quad \dots\dots 2.3.1.1$$

เมื่อ

$V_n$  คือ ปริมาตรของชิ้นส่วนที่  $n$

$S_{\sigma_n}$  คือ ขอบของชิ้นส่วนที่  $n$  ที่มีการกำหนดแรง  $\{\bar{T}\}$

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มจากการสมมุติสนามการกระจัด  $\{u\}$  ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐาน (Shape function) และการกระจัดที่ขั้ว



ก) แผ่นพื้นเคอร์ซอफी

ข) แผ่นพื้นมินดลิน

รูปที่ 2.3.1 ตัวอย่างชิ้นส่วนแผ่นพื้นเคอร์ซอफी

$$\{u\} = [N] \{r\} \quad \dots\dots 2.3.1.2$$

โดย

$[N]$  คือ ฟังก์ชันพื้นฐาน

$\{r\}$  คือ การกระจัดที่ขั้ว

ซึ่งในกรณีของแผ่นพื้นเคอร์ซอफीนั้นจะทำการสมมุติ การเคลื่อนที่ในแนวตั้งจาก  $w$  ในรูปของพหุนามในพจน์ของตัวไม่ทราบค่าหรือการกระจัดสามัญ (generalized displacement)  $q$  อย่างเช่น

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \{q\} \quad \dots\dots 2.3.1.3$$

หลังจากนั้นก็จะทำการหาการหมุนอีกสองตัวซึ่งก็คือ คือ  $w_{,x}$  และ  $w_{,y}$  และเราก็จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของสนามการกระจัดที่สมมุติได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{q\} \quad \dots\dots 2.3.1.4$$

ดังนั้นเราก็จะสามารถที่จะเขียนการกระจัดที่ชั่วซึ่งในกรณีนี้แต่ละชั่วจะมีการกระจัดที่ต้องการ 3 ตัว ในรูปฟังก์ชันที่เราสมมุติไว้ ในสมการที่ 2.3.1.4 ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันได้ ดังนี้

$$\{r\} = [G]\{q\} \quad \dots\dots 2.3.1.5$$

เมื่อ  $[G]$  คือเมตริกซ์ที่ประกอบไปด้วยฟังก์ชันที่สอดคล้องกับการกระจัดที่ชั่วนั้นๆ ดังนั้นเราก็สามารถหาค่าของตัวไม่ทราบค่า หรือการกระจัดสามัญ ได้จากสมการที่ 2.3.1.5 ได้ดังนี้

$$\{q\} = [G]^{-1}\{r\} \quad \dots\dots 2.3.1.6$$

เราก็สามารถที่จะเขียนสนามการกระจัดในสมการที่ 2.3.3 ในรูปของการกระจัดที่ชั่วได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [f(x,y)][G]^{-1}\{r\} = [N]\{r\} \quad \dots\dots 2.3.1.7$$

โดยในที่นี้ ฟังก์ชันพื้นฐาน  $[N]$  ก็จะเท่ากับ  $[f(x,y)][G]^{-1}$  นั่นเอง

หลังจากนั้นเราสามารถหาความเครียดดังสมการที่ 2.1.8 ได้จากการกระจัดที่สมมุติ ซึ่งในกรณีของแผ่นพื้นเคอร์ซอพพื้นนั้นความเครียดจะมีเพียงสามตัวเท่านั้นคือ

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{r\} = [B]\{r\} \quad \dots\dots 2.3.1.8$$

เมื่อ

$$[D][N] = [B] \text{ คือเมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดที่ชั่ว}$$

เมื่อนำการกระจัดที่สมมุติเอาไว้ในสมการที่ 2.3.1.2 และความเครียดที่ได้จากการกระจัดในสมการที่ 2.3.1.8 แทนลงในสมการพลังงานศักย์ดังสมการที่ 2.3.1.1 จะได้

$$\Pi_P = \sum_n \left[ \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} - \{r\}^T \{Q\} \right] \quad \dots\dots 2.3.1.9a$$

เมื่อ

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad \text{คือ สติฟเนสของชิ้นส่วน} \quad \dots\dots 2.3.1.9ข$$

$$\{Q\} = \int_{S_n} [N]^T \{\bar{T}\} ds \quad \text{คือ แรงที่กระทำต่อชิ้นส่วน} \quad \dots\dots 2.3.1.9ค$$

ทำการแปรผันสมการ 2.3.1.9 เทียบกับ  $\{r\}$  จะได้ว่า

$$[K]\{r\} = \{Q\} \tag{.....2.3.1.10}$$

ซึ่ง  $[K]$  จะเป็น กึ่งบวกแน่นอน (positive semi-definite) หมายถึงว่างานที่เกิดขึ้นที่สอดคล้องกับการกระจัดนั้น ต้องเป็นบวก แต่ก็มีโอกาสที่จะเป็นศูนย์ได้ด้วย และการกระจัดที่ชั่ววินาทีแต่ละชั่วจะมี สามตัว หากว่าเป็นชิ้นส่วน 4 ชั่วก็就会有การกระจัดที่ชั่วทั้งหมด 12 ตัว [ดังรูปที่ 2.3.1] หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{r\} = [w_1 \ w_{x1} \ w_{y1} \ w_2 \ w_{x2} \ w_{y2} \ w_3 \ w_{x3} \ w_{y3} \ w_4 \ w_{x4} \ w_{y4}]^T$$

ในการทำงานเดียวกันกับแผ่นพื้นเคอร์ซอพท์ เราก็สามารถหาเมตริกสติเฟนของแผ่นพื้นมิตลินได้ใน ทำงานเดียวกัน ในชิ้นส่วนมิตลินนั้นจะมีการสมมุติทั้งการเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉาก และการหมุนอีกสองตัวดังตัวอย่างเช่น

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \{q\} \tag{.....2.3.1.11}$$

$$\theta_x = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \{q\} \tag{.....2.3.1.12}$$

$$\theta_y = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \{q\} \tag{.....2.3.1.13}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสนามการกระจัดจากสมการที่ 2.3.1.11-2.3.1.13 ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{q\} \tag{.....2.3.1.14}$$

ด้วยขั้นตอนแบบเดียวกันกับสมการที่ 2.3.1.5 -2.3.1.7 เราก็สามารถหาได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{r\} \tag{.....2.3.1.15}$$

เมื่อเราได้สนามการกระจัดออกมาแล้วในอันดับถัดไปคือการหาความเครียดจากสมการที่ 2.1.13 และ 2.1.15 ดังนั้นจะมีจำนวนของความเครียดทั้งหมด 5 ตัวด้วยกันคือ ความเครียดตั้งฉาก  $\epsilon_x$  และ  $\epsilon_y$  ความเครียดเฉือน  $\gamma_{xy}$  และความเครียดตั้งฉาก  $\gamma_{yz}$  และ  $\gamma_{zx}$  ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์กับการกระจัดได้เป็น

$$\{\epsilon\} = [D][N]\{r\} = [B]\{r\} \tag{.....2.3.1.16}$$

เมื่อนำสนามการกระจัดที่สมมุติไว้ในสมการที่ 2.3.1.15 และความเครียดที่ได้จากการกระจัดในสมการที่ 2.3.1.16 ไปแทนค่าสมการพลังงานศักย์ในสมการที่ 2.3.1.1 จะได้ว่า



$$\Pi_P = \sum_n \left[ \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} - \{r\}^T \{Q\} \right] \quad \dots\dots 2.3.1.17$$

ทำการแปรผันสมการ 2.3.1.17 เทียบกับ  $\{r\}$  จะได้ว่า

$$[K] \{r\} = \{Q\} \quad \dots\dots 2.3.1.18$$

ซึ่ง  $[K]$  จะเป็น กึ่งบวกแน่นอน (positive semi-definite) หมายถึงว่างานที่เกิดขึ้นที่สอดคล้องกับการกระจัดนั้น ต้องเป็นบวก แต่ก็มีโอกาสที่จะเป็นศูนย์ได้ด้วย และการกระจัดที่ขั้วนั้นแต่ละขั้วจะมี สามตัว หากว่าเป็นชิ้นส่วน 4 ขั้วก็就会有การกระจัดที่ขั้วทั้งหมด 12 ตัว [ดังรูปที่ 2.3.1] หรือสามารถเขียนได้ว่า

$$\{r\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}]^T$$

### 2.3.2 ระเบียบวิธีทางแรง (Equilibrium Method)

ในการทำงานเดียวกันกับแบบจำลองการกระจัด แต่วิธีการนี้จะทำการสมมุติความเค้นที่มีความสมดุลย์ แทนที่จะสมมุติการกระจัด โดนในขั้นตอนนั้นจะทำการสมมุติสนามความเค้นในรูปของตัวไม่ทราบค่า หรือความเค้นสามัญ อย่างเช่นในกรณีของแผ่นพื้นมีดลิตินด์เราสามารถที่จะสมมุติความเค้นได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ : \\ : \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = [P]_{5 \times 9} \{\beta\} \quad \dots\dots 2.3.2.1$$

ซึ่งจากสนามความเค้นที่สมมุติขึ้น เราต้องทำการเขียนแรงที่สอดคล้องกับสนามความเค้นที่สมมุติ หรือเขียน  $\{T\}$  ที่สอดคล้องกับความเค้น จากสมการ 2.2.12x ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$\{T\} = [v] \{\sigma\} = [R] \{\beta\} \quad \dots\dots 2.3.2.2$$

โดย  $[R]$  คือแรงเค้นลัพธ์ (resultant stresses) ที่ขอบนั่นเอง

จากสมการ พลังงานศักย์เต็มเต็มในสมการที่ 2.2.20 ซึ่งจะเขียนได้ว่า

$$\Pi_C = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} dV - \int_{s_u} \{T\}^T \{\bar{u}\} ds \quad \dots\dots 2.3.2.3$$

เมื่อความเค้นที่เราสมมุติไว้ในสมการที่ 2.3.2.1 และ และแรงที่กระทำในสมการที่ 2.3.2.2 มาแทนค่าลงในสมการพลังงานศักย์เต็มเต็มในสมการที่ 2.3.2.3 จะได้ว่า

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{Q\} \tag{.....2.3.2.4}$$

เมื่อ

$$[H] = \int_V [P]^T [S] [P] dV \tag{.....2.3.2.5}$$

$$\{Q\} = \int_{s_u} \{R\}^T \{\bar{u}\} ds \tag{.....2.3.2.6}$$

ในที่นี้  $[H]$  เมตริกซ์เฟล็กซิบิลิตี (flexibility matrix) นั้นเอง และ  $\{Q\}$  ในที่นี้คือการกระจัดที่เกิดขึ้นที่ขั้วนั่นเอง เมื่อเราทำการแปรผันสมการที่ 2.3.2.4 เทียบกับ  $\{\beta\}$  จะได้ว่า

$$[H] \{\beta\} = \{Q\} \tag{.....2.3.2.7}$$

### 2.3.3 แบบจำลองพันธู์ทาง (Hybrid Model)

จากระเบียบวิธีพันธู์ทางคือระเบียบวิธีที่มีการสมมุติทั้งสนามความเค้นและสนามการกระจัด หากเราจะทำความเข้าใจหลักการพันธู์ทางให้ลองพิจารณาปัญหาในหนึ่งมิติ สมมุติว่าเรานำเหล็กเส้นหนึ่งมาดึง หากว่าเราสนใจวัดเฉพาะระยะยืดของเหล็ก นั่นคือเราสนใจเฉพาะการกระจัด หลังจากนั้นเราก็นำการกระจัดที่ได้ไปหาความเครียด และนำความเครียดที่ได้ไปหาความเค้นอีกต่อหนึ่ง การกระทำดังกล่าวจะเหมือนกันกับระเบียบวิธีการกระจัด โดยความเค้นที่ได้ออกมา นั้น จะมีความผิดพลาดที่สะสมมาจากการกระจัดเป็นหลัก ในทำนองเดียวกันถ้าหากว่าเราวัดมาเฉพาะแรง แล้วนำแรงที่ได้ไปหาความเครียด จากความเครียดค่อยนำไปหาระยะยืดของเหล็กอีกต่อหนึ่ง วิธีการดังกล่าวก็จะเปรียบเสมือนระเบียบวิธีทางแรง ส่วนวิธีการพันธู์ทางนั้นคือการที่เราจะวัดทั้งระยะยืด และแรง เพราะฉะนั้นผลของความผิดพลาดของแต่ละตัวก็จะเป็นอิสระต่อกัน จึงเป็นคำกล่าวที่ว่าเราสามารถสมมุติสนามการกระจัด และสนามความเค้นที่เป็นอิสระต่อกัน แต่ถึงอย่างไรก็ตาม ทั้งแรงและระยะยืดที่วัดมานั้น จะต้องเกิดความเค้นที่เท่ากันด้วย นั่นคือเงื่อนไขหลักของระเบียบวิธีพันธู์ทาง ส่วนวิธีการผสมนั้นคือการที่เราวัดทั้งความแรง ระยะยืด และความเครียด ที่เกิดขึ้น แต่ถึงอย่างไรก็ตามค่าทั้งสามตัวจะต้องมีความสัมพันธ์ต่อกันเป็นไปตามกฎของกลศาสตร์วัสดุ

จากหลักการเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์ ในสมการที่ 2.2.11 เราสามารถที่จะเขียนในรูปของชิ้นส่วนได้เป็น

$$\Pi_R = \sum_n \left[ \int_{V_n} \left[ -\frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} + \{\sigma\} ([\partial] \{u\}) \right] dV - \int_{s_{\sigma_n}} \{T\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) ds \right] \tag{.....2.3.3.1}$$

ในแบบจำลองการกระจัดจะทำการสมมุติการกระจัด  $\{u\} = [N] \{r\}$  และในแบบจำลองสมดุลงจะทำการสมมุติความเค้น  $\{\sigma\} = [P] \{\beta\}$  แต่ในแบบจำลองพันธู์ทางจะทำการสมมุติทั้งสองตัวแปรข้างต้น

เราสามารถแยกการกระจัด  $\{u\}$  ออกเป็นสองส่วนคือ  $\{u\} = \{u_q\} + \{u_\lambda\}$   
 $\{u_q\}$  คือ การกระจัดที่สอดคล้อง (compatible)

$\{u_\lambda\}$  คือ การกระจัดที่เพิ่มเข้าไปหรือบางครั้งเรียกว่าตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multiplier) ซึ่งไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบ ในบางครั้งอาจใช้ฟังก์ชันฟองสบู่ (bubble function) ซึ่งมีลักษณะของการเป็นศูนย์ที่ขอบ ทำให้ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงความสอดคล้อง

ในการทำงานเดียวกันกับกรณีของระเบียบวิธีการกระจัด ทั้งแผ่นพื้นเคอร์ซอर्फและแผ่นพื้นมิลด์ลีน เราจะสามารถสมมุติสนามการกระจัดที่สอดคล้องได้คือ

$$\{u_q\} = [N]\{r\} \quad \dots\dots 2.3.3.2$$

และในการทำงานเดียวกันเราก็สามารถที่จะสมมุติสนามการกระจัดที่เพิ่มเข้าไปได้ในทำงานองเดียวกับการกระจัดที่สอดคล้อง ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐาน  $[L]$  และการกระจัดภายในชิ้นส่วน  $\{\lambda\}$

$$\{u_\lambda\} = [L]\{\lambda\} \quad \dots\dots 2.3.3.3$$

ดังนั้นจะสามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นจากการกระจัดได้เป็น

$$[\partial]\{u_q\} = [\partial][N]\{r\} = [B]\{r\} \quad \dots\dots 2.3.3.4$$

$$[\partial]\{u_\lambda\} = [\partial][L]\{\lambda\} = [\bar{E}]\{\lambda\} \quad \dots\dots 2.3.3.5$$

เมื่อ

$$[\partial][N] = [B] \quad \dots\dots 2.3.3.6$$

$$[\partial][L] = [\bar{E}] \quad \dots\dots 2.3.3.7$$

ในส่วนของสนามความเค้นนั้นจะมีการสมมุติในพจน์ของตัวไม่ทราบค่าในการทำงานเดียวกันกับระเบียบวิธีทางแรงอย่างเช่น ในกรณีแผ่นพื้นมิลด์ลีน

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_{10} xy + \frac{1}{2} \beta_{13} x^2 \\ \sigma_y &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y + \beta_{11} xy - \frac{1}{2} \beta_{13} y^2 \\ \sigma_{xy} &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{12} xy \\ \sigma_{xz} &= (\beta_2 + \beta_9) + (\beta_{12} + \beta_{13})x + \beta_{10} y \\ \sigma_{yz} &= (\beta_6 + \beta_8) + \beta_{11} x + (\beta_{12} - \beta_{13})y \\ \sigma_z &= 2\beta_{12} \end{aligned} \quad \dots\dots 2.3.3.8$$

หรือสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\} \quad \dots\dots 2.3.3.9$$

เมื่อ  $[P]$  คือ เมตริกซ์ของพหุนามที่ทำการสมมุติสนามความเค้น จากการสมมุติการกระจัดในสมการที่ 2.3.3.2 และ 2.3.3.3 และความเครียดที่เกิดจากการกระจัดในสมการที่ 2.3.3.4 และ 2.3.3.5

รวมทั้งสนามความเค้นที่สมมุติในสมการที่ 2.3.3.9 นำค่าทั้งหมดไปแทนค่าลงในสมการของ เฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (สมการที่ 2.3.3.1) จะได้ว่า

$$\Pi_R = \sum_n \left[ -\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} + \{\beta\}^T [G] \{r\} + \{\beta\}^T [R] \{\lambda\} - \{F_1\}^T \{r\} - \{F_2\}^T \{\lambda\} \right] \quad \dots\dots 2.3.3.10$$

เมื่อ

$$[H] = \int_{V_n} [P]^T [S] [P] dV \quad \dots\dots 2.3.3.11$$

$$[G] = \int_{V_n} [P]^T [B] dV \quad \dots\dots 2.3.3.12$$

$$[R] = \int_{V_n} [P]^T [\bar{E}] dV \quad \dots\dots 2.3.3.13$$

$$\{F_1\}^T = \int_{S_{\sigma n}} [\bar{T}]^T [N] dS \quad \dots\dots 2.3.3.14$$

$$\{F_2\}^T = \int_{S_{\sigma n}} [\bar{T}]^T [L] dS \quad \dots\dots 2.3.3.15$$

เมื่อทำการแปรผันเทียบกับ  $\{\beta\}$  (ก่อให้เกิดเงื่อนไขว่าความเครียดที่ได้จากสนามความเค้นต้องเท่ากับ ความเครียดที่ได้จากสนามการกระจัด) จะได้ว่า

$$\{\beta\} = [H]^{-1} ([G] \{r\} + [R] \{\lambda\}) \quad \dots\dots 2.3.3.16$$

เมื่อทำการแปรผันเทียบกับ  $\{\lambda\}$  และ  $\{r\}$  ขจัด ให้เหลือในรูปของ

$$[K] \{r\} = \{F\}$$

จะได้ว่า

$$[K] = [\tilde{G}]^T [H]^{-1} [\tilde{G}] \quad \dots\dots 2.3.3.17$$

$$[\tilde{G}] = [G] - [R] ([R]^T [H]^{-1} [R])^{-1} [R]^T [H]^{-1} [G] \quad \dots\dots 2.3.3.18$$

$$\{F\} = \{F_1\} - [G]^T [H]^{-1} [R] ([R]^T [H]^{-1} [R])^{-1} \{F_2\} \quad \dots\dots 2.3.3.19$$

#### 2.3.4 ระเบียบวิธีผสม (Mixed Method)

ระเบียบวิธีผสมจะเป็นระเบียบวิธีที่ทำการสมมุติสนามตัวแปรทั้งสามสนามโดยอาศัยหลักการของ วู-วา ซิส ในกรณีหาเมตริกซ์สติเฟเนส จากหลักการ วู-วา ซิส

$$\Pi_G = \int_V \left[ \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}^T ([\partial] \{u\}) \right] dV - \int_{S_u} T^T (u - \bar{u}) ds \quad \dots\dots 2.3.4.1$$

ทำการสมมุติตัวแปรทั้งสนามการกระจัด สนามความเค้น และสนามความเครียด

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [P] \{\alpha\} \\ \{\sigma\} &= [P] \{\beta\} \\ \{u\} &= [N] \{r\} \end{aligned} \quad \dots\dots 2.3.4.2$$

โดยสมมุติที่จะสมมุติตัวแปรดังกล่าวทั้งหมดหรือจะทำการสมมุติบางส่วนของในแต่และสนามของตัวแปรก็ได้ ทำให้วิธีการนี้สามารถใช้ได้กว้างมาก เมื่อนำค่าที่ทำการสมมุติในสมการที่ 2.3.4.2 ไปแทนค่าลงในสมการของควาชิลู เราก็จะได้ความสัมพันธ์

$$\Pi_G = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\bar{J}] \{\alpha\} - \{\beta\}^T [H] \{\alpha\} + \{\beta\}^T [G] \{r\} - F^T \{r\} \quad \dots\dots 2.3.4.3$$

เมื่อทำการแปรผันก็จะสามารถหาค่าเมตริกซ์สติฟเนสออกมาได้ว่า

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [\bar{J}] [H]^{-1} [G] \quad \dots\dots 2.3.4.4$$

### 2.3.5 ข้อเปรียบเทียบจำลอง

แบบจำลองสมดุลงจะให้ขอบเขตบนคือชิ้นส่วนที่ได้จะอ่อนเกินไป แบบจำลองการกระจัดจะให้ขอบเขตล่างคือการกระจัดที่ได้จะแข็งเกินไป การใช้แบบจำลองพันธู์ทางจะให้โครงสร้างที่อ่อนกว่าแบบจำลองการกระจัดหากใช้การกระจัดที่ขอบเหมือนกัน และจะให้โครงสร้างที่แข็งกว่าแบบจำลองสมดุล ถ้าหากว่าใช้ความเค้นเดียวกันในการสมมุติความเค้นภายใน ดังนั้นหากมองผลของการกระจัดไม่สามารถบอกได้ว่าผลของการวิเคราะห์จากแบบจำลองพันธู์ทางจะถูกต้องแม่นยำกว่าทั้งแบบจำลองการกระจัดและแบบจำลองสมดุล แต่ถ้ามองในแง่ของความเค้นการใช้การสมมุติความเค้นย่อมให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำกว่า

ตารางที่ 2.3.5.1 ชนิดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Model	Variational Principle	Assume inside each element	Along interelement Boundary	Unknown in Final Equations
Compatible	Potential Energy	Smooth Displacement Distribution	Continuous Displacement	Nodal displacement
Equilibrium	Complementary Energy	Smooth and Equilibrium Stress	Equilibrium of Boundary traction	-Generalize Nodal displacement-stress function parameter
Hybrid	Hellinger-Reissner	Stress distribution and Displacement distribution	Displacement	Nodal displacement
Mixed	Hu-Washizu	Stress distribution Displacement distribution Strain distribution	Displacement	Nodal displacement