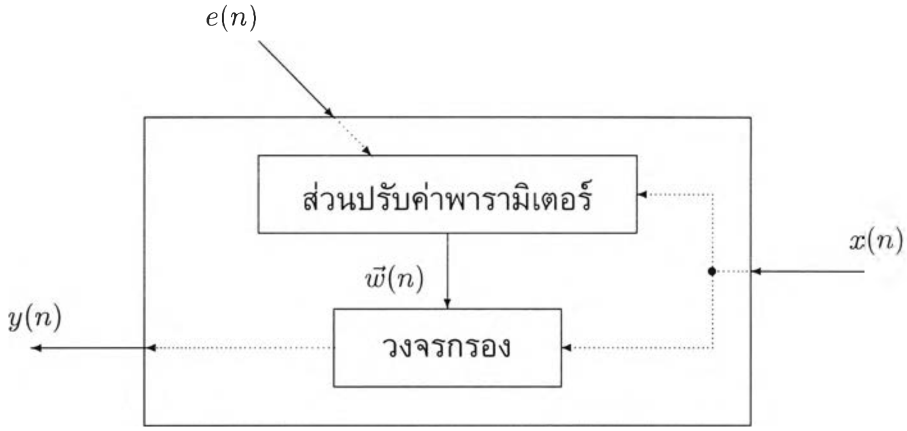
บทที่ 3

การปรับขนาดช่วงก้าวของ
ขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับวงจรกรองปรับตัวในหัวข้อ 3.1 ในหัวข้อ 3.2 จะอธิบายถึงวิธีปรับขนาดช่วงก้าวของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดที่มีผู้เสนอไว้ 5 วิธี ในหัวข้อ 3.3 จะแสดงการพิสูจน์หาขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุดในกรณีที่รู้ค่าเฉลี่ยทางสถิตอันดับสองของสัญญาณขาเข้าของวงจรกรอง และสัญญาณที่ต้องการให้วงจรกรองสร้าง ในหัวข้อ 3.4 จะอธิบายถึงวิธีปรับขนาดช่วงก้าววิธีใหม่ของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดที่เสนอใหม่ในงานวิจัยนี้ สำหรับส่วนสุดท้ายคือ หัวข้อ 3.5 เราจะเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณ ของวิธีปรับขนาดช่วงก้าวของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดของวิธีที่เสนอใหม่ เทียบกับอีก 5 วิธีที่อธิบายในหัวข้อ 3.2

3.1 วงจรกรองปรับตัว

วงจรกรองปรับตัวเป็นอุปกรณ์ที่ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ วงจรกรอง และส่วนปรับค่าพารามิเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยกำหนดให้ $e(n)$, $x(n)$, และ $y(n)$ คือ ความคลาดเคลื่อน สัญญาณขาเข้า และสัญญาณขาออกของวงจรกรองปรับตัวตามลำดับ โดยส่วนปรับค่าพารามิเตอร์จะใช้สัญญาณขาเข้าและความคลาดเคลื่อนของวงจรกรองปรับตัวเพื่อปรับค่าพารามิเตอร์ และส่งค่าพารามิเตอร์ไปยังวงจรกรอง ส่วนวงจรกรองจะใช้ค่าพารามิเตอร์ร่วมกับสัญญาณขาเข้า $x(n)$ เพื่อสร้างสัญญาณขาออก $y(n)$



รูปที่ 3.1: องค์ประกอบของวงจรกรองปรับตัว

3.1.1 วงจรกรอง

วงจรกรองที่เราใช้ในงานวิจัยนี้คือ วงจรกรองตามขวาง (transversal filter) ซึ่งเป็นวงจรกรองแบบที่มีความจำจำกัด (finite memory impulse response filter : FIR filter) ประกอบด้วยองค์ประกอบหลัก 4 อย่าง (ดังแสดงในรูปที่ 3.2) คือ

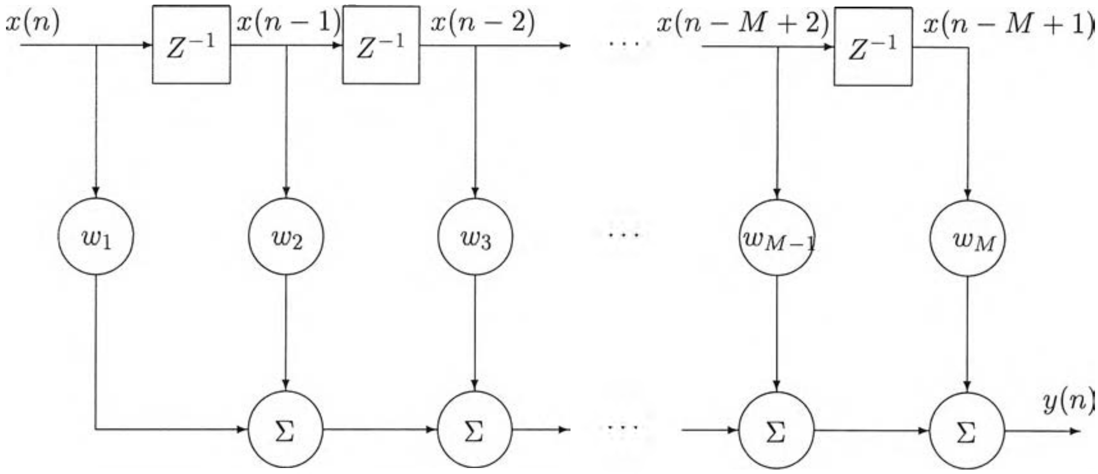
1. หน่วยความจำ สำหรับเก็บค่าพารามิเตอร์
2. วงจรหน่วงเวลา สำหรับหน่วงเวลาสัญญาณขาเข้า
3. วงจรคูณ สำหรับคูณสัญญาณขาเข้ากับพารามิเตอร์
4. วงจรบวก สำหรับหาผลรวมของผลคูณของสัญญาณขาเข้ากับพารามิเตอร์

สมมติให้วงจรกรองมีอันดับ M และกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรอง ที่เวลา n แทนด้วย เวกเตอร์

$$\vec{w}(n) = (w_1(n), \ldots, w_M(n))^{\mathrm{T}}$$

ในที่นี้ $(.)^{\mathrm{T}}$ หมายถึง ตัวสลับเปลี่ยน (transpose) ของเวกเตอร์หรือของเมตริกซ์ (.) และกำหนดให้ สัญญาณขาเข้าของวงจรกรองที่เวลา n แทนด้วยเวกเตอร์

$$\vec{x}(n) = (x(n), \ldots, x(n - M + 1))^{\mathrm{T}}$$



รูปที่ 3.2: องค์ประกอบของวงจรกรองอันดับ M

วงจรกรองมีความจำจำกัด หมายถึง วงจรกรองจะทำงานโดยอาศัยสัญญาณขาเข้า x ในช่วงเวลาจำกัดช่วงหนึ่ง ซึ่งในที่นี้คือ ที่เวลา $n, n-1, \ldots, n-M+1$ และพารามิเตอร์ของวงจรกรอง (tap weight) w ตัวที่ $1, 2, 3, \ldots, M$ ($w_i(n)$ คือพารามิเตอร์ของวงจรกรอง ตัวที่ i ที่เวลา n) โดยสัญญาณขาออกของวงจรกรอง $y(n)$ จะอยู่ในรูปกำหนดตามสมการที่ (3.1)

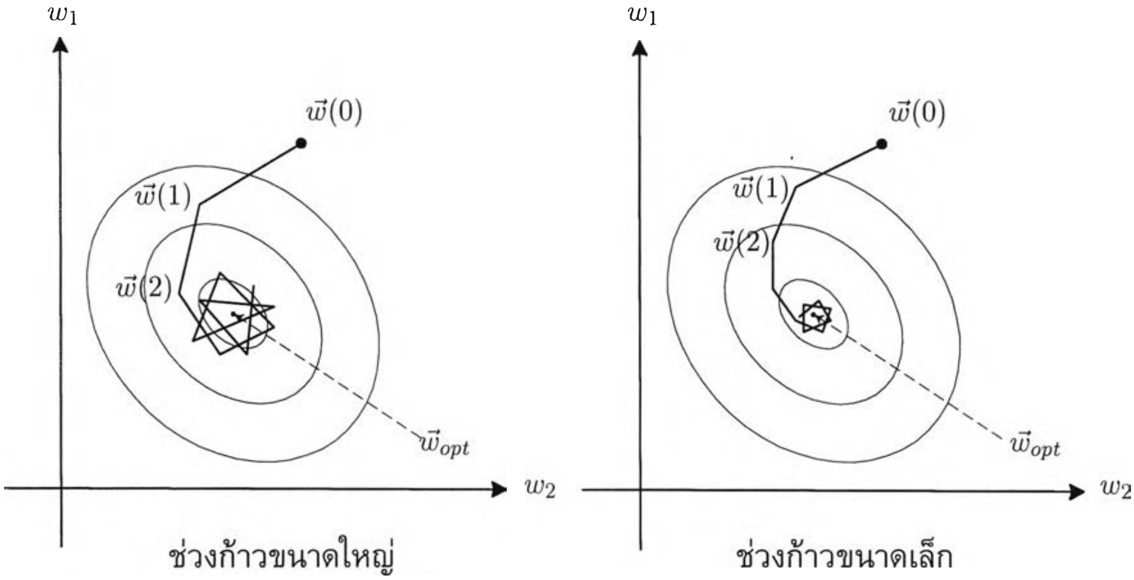
$$y(n) = \vec{w}^{\mathrm{T}}(n) \cdot \vec{x}(n) \tag{3.1}$$

และ ถ้าให้ $d(n)$ เป็นสัญญาณขาออกที่ต้องการให้วงจรกรองสร้าง ความคลาดเคลื่อนของวงจรกรองจะนิยามด้วยสมการที่ (3.2)

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{3.2}$$

3.1.2 ส่วนปรับค่าพารามิเตอร์

ในการปรับค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองจะปรับค่าพารามิเตอร์เพื่อลดค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวงจรกรอง (คือ เพื่อให้สัญญาณขาออกของวงจรกรอง $y(n)$ ใกล้เคียงกับสัญญาณขาออกที่ต้องการให้วงจรกรองสร้าง $d(n)$) ให้มากที่สุดในการปรับค่าแต่ละครั้ง ซึ่งทำได้โดยปรับค่าพารามิเตอร์แต่ละครั้ง ตามทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของเกรเดียนต์ของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเทียบกับค่าพารามิเตอร์ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากค่าสถิติของสัญญาณ แต่ในทางปฏิบัติจะไม่รู้ค่าสถิติของสัญญาณจึงต้องประมาณเกรเดียนต์ของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเทียบกับค่าพารามิเตอร์ ด้วยค่าลบของผลคูณระหว่างความคลาดเคลื่อนกับสัญญาณขาเข้าของวงจรกรอง



รูปที่ 3.3: ผลของขนาดช่วงก้าวต่อประสิทธิภาพในการปรับตัวของวงจรกรอง

วิธีการปรับค่าพารามิเตอร์ที่อาศัยค่าประมาณของเกรเดียนต์นี้เรียกว่า ขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด (Least Mean Square algorithm : LMS algorithm) ซึ่งการปรับค่าพารามิเตอร์ที่เวลา n จะเป็นไปตามสมการที่ (3.3)

$$\vec{w}(n+1) = \vec{w}(n) + \mu e(n)\vec{x}(n) \tag{3.3}$$

โดย $-2e(n)\vec{x}(n)$ คือค่าประมาณเกรเดียนต์ของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเทียบกับค่าพารามิเตอร์ และ μ คือค่าคงตัวที่เรียกว่า ช่วงก้าว (step-size) หรืออัตราการเรียนรู้ (learning rate) ของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด ซึ่งเป็นตัวกำหนดประสิทธิภาพในการปรับตัวของวงจรกรอง กล่าวคือถ้าขนาดช่วงก้าวใหญ่วงจรกรองจะปรับตัวอย่างรวดเร็วแต่ความถูกต้องในการประมาณค่าของวงจรกรองจะลดลง ในทางกลับกันถ้าขนาดช่วงก้าวเล็กวงจรกรองจะประมาณค่าได้ถูกต้องมากขึ้นแต่การปรับตัวจะช้าลง เช่นการเปรียบเทียบผลของการใช้ช่วงก้าวค่าเล็กและค่าใหญ่ ดังแสดงในรูปที่ 3.3 ซึ่งเป็นกรณีสมมติให้วงจรกรอง ปรับตัวมีพารามิเตอร์ 2 ตัว โดยจุดต่าง ๆ บนวงรีวงหนึ่งแทนตำแหน่งต่าง ๆ ของค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองปรับตัว ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าเท่ากัน และวงรีวงเล็กจะแทนความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยค่าเล็ก

จากรูปที่ 3.3 จะพบว่ามีปัญหาในการเลือกขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสม และถึงแม้ว่าจะสามารถหาขนาดช่วงก้าวคงตัวที่ดีที่สุดได้ ก็ยังต้องเลือกว่าจะให้วงจรกรองปรับตัวได้เร็วที่สุด หรือจะให้วงจรกรองมีค่าความคลาดเคลื่อนที่สภาวะอยู่ตัวต่ำสุดเช่นกัน [10]

ดังนั้นเพื่อที่จะหลีกเลี่ยงปัญหาในการเลือกขนาดช่วงก้าว จึงเกิดแนวความคิดในการปรับขนาดช่วงก้าว โดยพยายามให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าใหญ่เมื่อค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองต่างจากค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุด ($\vec{w}_{opt}$) มาก และให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าลดลงเมื่อวงจรกรองปรับค่าพารามิเตอร์เข้าใกล้ค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดมากขึ้น

3.2 วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแบบต่าง ๆ ของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด

วิธีการปรับขนาดช่วงก้าวของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดมีหลายวิธี ในงานวิจัยนี้ได้รวบรวมวิธีปรับขนาดช่วงก้าวไว้ 5 วิธีโดยแต่ละวิธีมีแนวความคิดในการปรับขนาดช่วงก้าวแตกต่างกันดังนี้

3.2.1 Normalized step-size (Honig and Messerschmitt [11])

จากการสังเกตสมการที่ (3.3) พบว่าถ้าสัญญาณขาเข้ามีขนาดใหญ่ขึ้น k เท่า จะเทียบได้กับการเพิ่มขนาดช่วงก้าวขึ้น k^2 เท่า คือจาก μ เป็น μk^2 ซึ่งแสดงว่าความเร็วในการลู่เข้าในการปรับค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองจะขึ้นอยู่กับขนาดของสัญญาณขาเข้าอย่างมาก และถ้าขนาดของสัญญาณขาเข้าใหญ่เกินไป ขั้นตอนวิธีปรับค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองจะขาดเสถียรภาพได้ ปัญหานี้มักเกิดกับการใช้งานวงจรกรองกับสัญญาณที่มีขนาดเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาโดยเฉพาะการใช้งานกับสัญญาณเสียง วิธีแก้ปัญหานี้ทำได้โดยหารขนาดช่วงก้าวด้วยกำลังของสัญญาณขาเข้าตามสมการที่ (3.4) ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกวิธีปรับขนาดช่วงก้าววิธีนี้ว่าวิธี Normalized Step-Size (ต่อไปจะเรียกว่าวิธี NMS)

$$\mu(n) = \frac{a}{\sigma^2(n) + b} \tag{3.4}$$

เมื่อ $\mu(n)$ คือขนาดช่วงก้าวที่เวลา n โดย a และ b คือค่าคงตัวที่เป็นค่าบวก (ค่าคงตัว b มีเพื่อป้องกันไม่ให้ขนาดช่วงก้าวใหญ่เกินไปเมื่อกำลังของสัญญาณขาเข้ามีค่าน้อยมาก ๆ) และ $\sigma^2(n)$ คือ ค่าประมาณของกำลังของสัญญาณขาเข้าที่เวลา n ซึ่งนิยมใช้ค่าประมาณกำหนดตามสมการที่ (3.5)

$$\sigma^2(n) = \alpha\sigma^2(n-1) + (1-\alpha)x^2(n) \tag{3.5}$$

โดย α เป็นค่าคงตัวที่เป็นค่าบวกและน้อยกว่าหนึ่ง และ $x(n)$ คือสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองที่เวลา n

3.2.2 Delta-Bar-Delta (Jacobs [12])

Jacobs [12] ได้เสนอความคิดในการปรับขนาดช่วงก้าวไว้ว่า ขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมกับพารามิเตอร์แต่ละตัวไม่จำเป็นต้องเท่ากัน พารามิเตอร์แต่ละตัวควรจะมีขนาดช่วงก้าวเป็นของตัวเอง และขนาดช่วงก้าวแต่ละตัวควรปรับเปลี่ยนค่าได้ โดยสังเกตว่าถ้าพารามิเตอร์เพิ่มขึ้นติดต่อกันหรือลดลงติดต่อกันก็ควรจะเพิ่มขนาดช่วงก้าว ในทางกลับกันถ้าพารามิเตอร์เพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันก็ควรจะลดขนาดช่วงก้าว

เนื่องจากพารามิเตอร์แต่ละตัวมีขนาดช่วงก้าวเป็นของตัวเอง ทำให้การปรับค่าพารามิเตอร์ไม่ใช้การปรับในทิศทางที่ตรงข้ามกับเกรเดียนต์ของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย แต่เป็นการปรับค่าพารามิเตอร์ที่อาศัยการหาอนุพันธ์ย่อยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัว

วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแบบหนึ่งที่อาศัยแนวคิดของ Jacobs [12] คือ วิธี Delta-Bar-Delta (ต่อไปจะเรียกว่าวิธี DBD) โดยขนาดช่วงก้าวจะปรับค่าตามสมการที่ (3.6)

$$\mu_i(n+1) = \begin{cases} \mu_i(n) + k & \text{ถ้า } \bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n) > 0 \\ \mu_i(n) - \phi\mu_i(n) & \text{ถ้า } \bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n) < 0 \\ \mu_i(n) & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i(n) &= \alpha\bar{\delta}_i(n-1) + (1-\alpha)\delta_i(n) \\ \delta_i(n) &= e(n)x_i(n) \end{aligned}$$

โดย k, ϕ และ α คือ ค่าคงตัวที่เป็นค่าบวก ($\alpha < 1$) และ $\delta_i(n)$ คือ ค่าประมาณของอนุพันธ์ย่อยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยเทียบกับพารามิเตอร์ตัวที่ i ที่เวลา n ส่วน $\bar{\delta}_i(n)$ คือ ค่าเฉลี่ยของ $\delta_i(n)$

จากสมการที่ (3.6) หมายความว่าขนาดช่วงก้าวตัวที่ i จะเพิ่มขึ้นครั้งละ k ถ้า $\bar{\delta}_i(n)$ มีเครื่องหมายเหมือนกับ $\delta_i(n)$ และ ขนาดช่วงก้าวตัวที่ i จะลดลง $\phi\mu_i(n)$

ทุก ๆ ครั้งที่ $\bar{\delta}_i(n)$ มีเครื่องหมายต่างกับ $\delta_i(n)$ ทั้งนี้การที่เพิ่มขนาดช่วงก้าวขึ้นแบบเชิงเส้น แต่ลดขนาดช่วงก้าวลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเพื่อเป็นการป้อนกันไม่ให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าใหญ่เกินไป หรือเพิ่มขึ้นเร็วเกินไป เพราะการลดขนาดช่วงก้าวแบบนี้ทำให้ขนาดช่วงก้าวสามารถลดลงได้อย่างรวดเร็ว ทั้งยังแน่ใจได้ว่าขนาดช่วงก้าวจะเป็นค่าบวกตลอดเวลา

3.2.3 Squared Error (Kwong and Johnston [13])

Kwong และ Johnston [13] เสนอความคิดว่าควรปรับขนาดช่วงก้าวตามความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เมื่อความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่ามากค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองจะต่างจากค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดมาก จึงควรใช้ช่วงก้าวขนาดใหญ่เพื่อให้ค่าพารามิเตอร์ลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดเร็วขึ้น หรือลดค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยให้เร็วขึ้น ในทางตรงกันข้ามเมื่อความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีค่าน้อยแสดงว่าค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดก็ควรให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าเล็ก เพื่อให้การปรับค่าพารามิเตอร์มีความถูกต้องมากขึ้น

โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกการปรับขนาดช่วงก้าวที่อาศัยหลักการนี้ว่า Squared Error (ต่อไปจะเรียกว่าวิธี SE) และการปรับขนาดช่วงก้าวจะกำหนดตามสมการที่ (3.7)

$$\mu'(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma e^2(n)$$

$$\mu(n+1) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{ถ้า}\mu'(n+1) > \mu_{max} \\ \mu_{min} & \text{ถ้า } \mu'(n+1) < \mu_{min} \\ \mu'(n+1) & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases} \tag{3.7}$$

เมื่อ $e(n)$ คือความคลาดเคลื่อนของวงจรกรอง, $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$, และ $0 < \mu_{min} < \mu_{max}$ โดย μ_{min}, μ_{max} คือค่าคงตัวแทนขนาดช่วงก้าวที่เล็กที่สุด และขนาดช่วงก้าวที่ใหญ่ที่สุดตามลำดับ

ค่า μ_{max} มีไว้เพื่อป้องกันไม่ให้ขนาดช่วงก้าวใหญ่จนทำให้การปรับค่าพารามิเตอร์ขาดเสถียรภาพ ส่วนค่า μ_{min} มีเพื่อให้ขนาดช่วงก้าวอยู่ในช่วงที่สามารถส่งผลให้มีการปรับค่าพารามิเตอร์ได้

3.2.4 Cross Correlation (Karni and Zeng [14])

Karni และ Zeng [14] ใช้ค่าสหสัมพันธ์ไขว้ระหว่างความคลาดเคลื่อนกับสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองเป็นตัวกำหนดขนาดช่วงก้าว ทั้งนี้เพราะมีทฤษฎีอยู่ว่าที่สภาวะอยู่ตัว ค่าสหสัมพันธ์ไขว้ระหว่าง ความคลาดเคลื่อนกับสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าค่าสหสัมพันธ์ไขว้ระหว่างความคลาดเคลื่อนกับสัญญาณขาเข้ามีค่ามาก แสดงว่าวงจรกรองยังอยู่ไกลจากสภาวะอยู่ตัวจึงควรใช้ขนาดช่วงก้าวค่าใหญ่ และถ้าค่าสหสัมพันธ์ไขว้ระหว่างความคลาดเคลื่อนกับสัญญาณขาเข้ามีค่าน้อย ควรจะใช้ขนาดช่วงก้าวค่าเล็ก Karni และ Zeng [14] เสนอให้ปรับขนาดช่วงก้าวตามสมการที่ (3.8) และในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกวิธีปรับขนาดช่วงก้าวแบบนี้ว่าวิธี Cross Correlation (ต่อไปจะเรียกว่าวิธี CC)

$$\begin{aligned} C &= \|e(n)\vec{x}(n)\|^2 \\ \mu(n+1) &= \mu_{max}(1 - \exp(-\alpha C)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

เมื่อ $e(n)$ คือความคลาดเคลื่อนที่เวลา n และ $\vec{x}(n)$ คือ เวกเตอร์แทนสัญญาณขาเข้าของวงจรกรอง ที่เวลา n โดย α คือ ค่าคงตัวมากกว่าศูนย์

3.2.5 Uniform Variance (Chinrungrueng [15])

จากผลสรุปตอนหนึ่งในบทความของ Ungerboeck [16] ที่ว่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์แต่ละตัวจะมีค่าเท่ากันที่สภาวะอยู่ตัว Chinrungrueng [15] จึงเสนอวิธีปรับขนาดช่วงก้าวตามความเหมือน และแตกต่างกันของค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์แต่ละตัว โดยให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าใหญ่เมื่อค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์แต่ละตัวแตกต่างกันมาก และให้ขนาดช่วงก้าวมีค่าเล็ก เมื่อค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์แต่ละตัวมีค่าใกล้เคียงกัน ในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกวิธีปรับขนาดช่วงก้าวนี้ว่าวิธี Uniform Variance (ต่อไปจะเรียกว่าวิธี UNI) โดยการปรับค่าขนาดช่วงก้าววิธีนี้กำหนดตามสมการที่ (3.9)

$$\begin{aligned} \overline{w}_i(n+1) &= \alpha\overline{w}_i(n) + (1-\alpha)w_i(n+1) \\ v_i(n+1) &= \alpha v_i(n) + (1-\alpha)\left(w_i(n+1) - \overline{w}_i(n+1)\right)^2 \end{aligned}$$

$$v_{i,norm}(n) = \frac{v_i(n)}{\sum_{j=1}^{M} v_j(n)}$$

$$
\begin{aligned}
H_{(v_1,\ldots,v_M)}(n) &= \frac{\sum_{j=1}^{M} -v_{j,norm}(n)\ln\left(v_{j,norm}(n)\right)}{\ln M} \\
\mu(n+1) &= \mu_{max}(1 - H_{(v_1,\ldots,v_M)}(n))
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

3.3 การหาขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุด (optimum step-size)

มีบทความวิจัยหลายบทความที่วิเคราะห์คุณสมบัติการลู่เข้า ของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด โดยในการวิเคราะห์จะอาศัยสมมติฐานและการประมาณค่าต่าง ๆ เพื่อให้การวิเคราะห์ทำได้สะดวกขึ้น การประมาณค่าที่ใช้กันอย่างกว้างขวางคือ ประมาณว่าพารามิเตอร์และสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัวเป็นอิสระต่อกันทางสถิติ และจะสมมติว่ารู้ค่าสถิติอันดับสองของสัญญาณขาเข้าของวงจรกรอง และสัญญาณที่ต้องการให้วงจรกรองสร้าง สำหรับการประมาณค่าหรือสมมติฐานอื่น ๆ จะแตกต่างกันไปตามวัตถุประสงค์ และ ทฤษฎีที่ใช้ช่วยในการวิเคราะห์ปัญหา เช่นในบทความวิจัยของ Ungerboeck [16] ได้วิเคราะห์คุณสมบัติการลู่เข้าของวงจรกรองปรับตัวที่ทำหน้าเป็นอีควอไลเซอร์ โดยใช้การประมาณค่าสถิติกำลังสี่ด้วยผลคูณของค่าสถิติกำลังสอง และประมาณว่า ค่าเจาะจงของเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ของสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัวทุกตัวมีค่าเท่ากัน เพื่อหาขนาดช่วงก้าวปรับค่าได้ที่เหมาะสมที่สุดที่ทำให้วงจรกรองปรับตัวมีการลู่เข้าที่ดีที่สุด

ในบทความวิจัยของ Gitlin, Mazo, และ Taylor [17] ก็ศึกษาคุณสมบัติการลู่เข้าของวงจรกรองปรับตัวที่ทำหน้าเป็นอีควอไลเซอร์เช่นกัน แต่ใช้ค่าขอบเขตของค่าเฉลี่ยทางสถิติ ในการวิเคราะห์หาค่าช่วงก้าวปรับค่าได้ที่เหมาะสมที่สุดของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด ซึ่งวิธีการวิเคราะห์ของ Gitlin, Mazo, และ Taylor ทำได้โดยไม่ต้องประมาณว่า ค่าเจาะจงของเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ของสัญญาณขาเข้าวงจรกรองปรับตัวทุกตัวมีค่าเท่ากัน ทำให้ขนาดช่วงก้าวที่ได้น่าจะใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้มากขึ้น แต่ว่าการใช้ค่าขอบเขตของค่าเฉลี่ยทางสถิติในการวิเคราะห์หาขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุดกลับทำให้ ขนาดช่วงก้าวที่ได้แตกต่างจากขนาดช่วงก้าวที่ควรจะเป็นอย่างมาก

สำหรับในงานวิจัยนี้มีสมมติฐานว่า สัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัวกับสัญญาณที่ต้องการให้วงจรกรองปรับตัวสร้างเป็นตัวแปรสุ่มที่สัมพันธ์กันแบบ joint Gaussian และมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ เพื่อใช้ทฤษฎี Gaussian moment factoring ช่วยในการวิเคราะห์หา

ขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุด โดยไม่ต้องประมาณว่าค่าเจาะจงของเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ของสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัวทุกตัวมีค่าเท่ากัน และทำให้การหาค่าเฉลี่ยทางสถิติมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์หาขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุดของขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดดังนี้ (ทั้งนี้ขนาดช่วงก้าวที่เหมาะสมที่สุดนี้ไม่สามารถหาได้ล่วงหน้าในการประยุกต์ใช้งานจริง แต่มีประโยชน์ในแง่ที่เป็นค่าขอบเขตของช่วงก้าวที่ทำให้ขั้นตอนวิธีกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดมีประสิทธิภาพดีที่สุด รวมทั้งเป็นตัวเปรียบเทียบกับวิธีการปรับขนาดช่วงก้าวที่มีผู้เสนอไว้มากมาย)

เช่นเดียวกับที่ได้นิยามไว้ข้างต้น กำหนดให้วงจรกรองปรับตัวมีอันดับ M และกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองปรับตัวที่เวลา n แทนด้วย เวกเตอร์

$$\vec{w}(n) = (w_1(n),\, w_2(n),\, \ldots,\, w_M(n))^{\mathrm{T}}$$

ส่วนการนิยามสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัว จะต่างจากที่นิยามไว้ข้างต้นเล็กน้อย (ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปมากขึ้น) ดังนี้

$$\vec{x}(n) = (x_1(n),\, x_2(n),\, \ldots,\, x_M(n))^{\mathrm{T}}$$

โดยสัญญาณขาออกของวงจรกรองปรับตัว $y(n)$, สัญญาณที่ต้องการให้วงจรกรองสร้างปรับตัว $d(n)$, และ ความคลาดเคลื่อนของวงจรกรองปรับตัว $e(n)$ มีนิยามเหมือนกับที่นิยามไว้ข้างต้น

กำหนดให้ $\mathbf{R}$ เป็นเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ของสัญญาณขาเข้า $\vec{x}(n)$ ซึ่งกำหนดโดยสมการ

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \left\langle \vec{x}(n) \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}}(n) \right\rangle \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}(\rho)\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

โดย $\mathbf{U} = [\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \ldots,\, \vec{u}_M]$ คือ เมตริกซ์ที่สดมภ์ (column) ที่ i ($\vec{u}_i$) เป็นเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง (eigenvalue) ตัวที่ i (ρ_i) ของเมตริกซ์ $\mathbf{R}$ และมีคุณสมบัติว่า $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$ เมื่อ $\mathbf{I}$ คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) โดย $\langle \cdot \rangle$ คือการหาค่าเฉลี่ยทางสถิติ และ

$$\mathbf{D}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \rho_M \end{bmatrix}$$

ค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุด $\vec{w}_{opt}$ สามารถหาได้จากสมการ

$$\vec{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\left\langle d(n)\vec{x}(n)\right\rangle$$

จากสมการที่ (3.3) และกำหนดให้ $\vec{p}(n) = \vec{w}(n) - \vec{w}_{opt}$ จะได้ว่า

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n) + \mu(n)e(n)\vec{x}(n) \tag{3.10}$$

แทนค่า $y(n)$ จากสมการที่ (3.1) ในสมการที่ (3.2) และ กำหนดให้ $\vec{q}(n) = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\vec{p}(n)$, $e_{opt}(n) = d(n) - \vec{w}_{opt}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{x}(n)$, และ $\vec{z}(n) = (z_1(n),\, z_2(n),\, \ldots,\, z_M(n)) = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\vec{x}(n)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
e(n) &= d(n) - \vec{w}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n) \\
&= d(n) - \left(\vec{p}(n) + \vec{w}_{opt}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\vec{x}(n) \\
&= \left(d(n) - \vec{w}_{opt}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{x}(n)\right) - \vec{p}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n) \\
&= e_{opt}(n) - \vec{p}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n) \qquad (3.11) \\
&= e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\vec{x}(n) \\
&= e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

และคูณเมตริกซ์ $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ ทางด้านซ้าย ตลอดสมการที่ (3.10) และแทนค่า $e(n)$ จากสมการที่ (3.12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\vec{q}(n+1) &= \vec{q}(n) + \mu(n)e(n)\vec{z}(n) \\
&= \vec{q}(n) + \mu(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)\vec{z}(n)
\end{aligned}$$

ให้ $\vec{q}(n) = (q_1(n),\, q_2(n),\, \ldots,\, q_i(n),\, \ldots,\, q_j(n),\, \ldots,\, q_M(n))^{\mathrm{T}}$,
$\vec{s}(n) = \left(\left\langle q_1^2(n)\right\rangle, \left\langle q_2^2(n)\right\rangle, \ldots, \left\langle q_i^2(n)\right\rangle, \ldots, \left\langle q_j^2(n)\right\rangle, \ldots, \left\langle q_M^2(n)\right\rangle\right)^{\mathrm{T}}$,
และ $\vec{\rho} = (\rho_1,\, \rho_2,\, \ldots,\, \rho_i,\, \ldots,\, \rho_M)^{\mathrm{T}}$

พิจารณาผลคูณ $q_i(n+1)q_j(n+1)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
q_i(n+1)q_j(n+1) &= \left(q_i(n) + \mu(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)z_i(n)\right) \\
&\quad \left(q_j(n) + \mu(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)z_j(n)\right) \\
&= q_i(n)q_j(n) + \mu(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)q_i(n)z_j(n) \\
&\quad + \mu(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)q_j(n)z_i(n) \\
&\quad + \mu^2(n)\left(e_{opt}(n) - \vec{q}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\right)^2 z_i(n)z_j(n) \\
&= q_i(n)q_j(n) + \mu(n)e_{opt}(n)q_i(n)z_j(n) + \mu(n)e_{opt}(n)q_j(n)z_i(n) \\
&\quad - \mu(n)\sum_{k=1}^{M} q_k(n)z_k(n)q_i(n)z_j(n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \mu(n) \sum_{k=1}^{M} q_k(n) z_k(n) q_j(n) z_i(n) + \mu^2(n) e_{opt}^2(n) z_i(n) z_j(n) \\
&- 2\mu^2(n) e_{opt}(n) \sum_{k=1}^{M} q_k(n) z_k(n) z_i(n) z_j(n) \\
&+ \mu^2(n) \sum_{k=1,l=1}^{k=M,l=M} q_k(n) q_l(n) z_k(n) z_l(n) z_i(n) z_j(n) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

เนื่องจากคุณสมบัติตั้งฉากระหว่าง $e_{opt}(n)$ กับ $\vec{x}(n)$, $e_{opt}(n)$ กับ $\vec{z}(n)$ และ ระหว่าง $z_i(n)$ กับ $z_j(n)$ จะได้ว่า $\langle e_{opt}(n)\vec{x}(n)\rangle = \vec{0}$, $\langle e_{opt}(n)\vec{z}(n)\rangle = \vec{0}$, และ $\langle z_i(n) z_j(n)\rangle = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $\langle z_i^2(n)\rangle = \rho_i$ และเพื่อให้การวิเคราะห์เป็นไปได้เรากำหนดให้ $\vec{p}(n)$, $\vec{q}(n)$, $\vec{x}(n)$, $\vec{z}(n)$, $e_{opt}(n)$, และ $\mu(n)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $\vec{p}(n)$ และ $\vec{x}(n)$, $\vec{q}(n)$ และ $\vec{z}(n)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน
2. $e_{opt}(n)$ และ $\vec{z}(n)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่สัมพันธ์กันแบบ joint Gaussian มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (ทั้งนี้เนื่องจาก $e_{opt}(n)$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{z}(n)$ และ $d(n)$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่สัมพันธ์กันแบบ joint Gaussian มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ตามที่สมมติไว้ข้างต้น) และจะหาค่าเฉลี่ยทางสถิติอันดับสี่ของสัญญาณสุ่มนี้โดยใช้คุณสมบัติของทฤษฎี Gaussian moment factoring ที่กล่าวว่าถ้า v_1, v_2, v_3, และ v_4 เป็นตัวแปรสุ่มที่สัมพันธ์กันแบบ joint Gaussian มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์แล้ว

$$
\langle v_1 v_2 v_3 v_4 \rangle \;=\; \langle v_1 v_2\rangle \langle v_3 v_4\rangle + \langle v_1 v_3\rangle \langle v_2 v_4\rangle + \langle v_1 v_4\rangle \langle v_2 v_3\rangle
$$

3. $\left\langle e_{opt}^2(n)\right\rangle = \left\langle e_{opt}^2\right\rangle = e_{opt}^2$ (ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดที่เป็นไปได้)
4. $\mu(n)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงช้ามาก และถือว่าเป็นค่าคงตัวในการค่าเฉลี่ยทางสถิติ

โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการที่ (3.11) และหาค่าเฉลี่ยทางสถิติ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
e^2(n) &= e_{opt}^2(n) - 2e_{opt}(n)\vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n) + \vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n)\vec{x}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{p}(n) \\
\left\langle e_{opt}(n)\vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n)\right\rangle &= \left\langle \vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\right\rangle \cdot \langle e_{opt}(n)\vec{x}(n)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ $\varepsilon(n)$ คือ ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกิน (excess mean squaed error) ที่เวลา n มีค่าตามสมการที่ (3.14)

$$
\varepsilon(n) \;=\; \left\langle \vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n)\vec{x}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{p}(n)\right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \vec{q}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{z}(n)\vec{z}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{q}(n)\right\rangle \\
&= \left\langle \vec{q}^{\,\mathrm{T}}(n)\mathbf{D}(\rho)\vec{q}(n)\right\rangle \\
&= \vec{\rho}^{\,\mathrm{T}}\cdot\vec{s}(n) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\left\langle e^2(n)\right\rangle &= \left\langle e^2_{opt}(n)\right\rangle + \left\langle \vec{p}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{x}(n)\vec{x}^{\,\mathrm{T}}(n)\cdot\vec{p}(n)\right\rangle \\
&= \left\langle e^2_{opt}(n)\right\rangle + \varepsilon(n) \\
&= \left\langle e^2_{opt}\right\rangle + \vec{\rho}^{\,\mathrm{T}}\cdot\vec{s}(n) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

จากคุณสมบัติต่าง ๆ จะได้ว่าค่าเฉลี่ยทางสถิติทางด้านขวาของสมการที่ (3.13) พจน์ที่ 2 และ พจน์ที่ 3 มีค่าเป็น

$$
\begin{aligned}
\mu(n)\left\langle e_{opt}(n)q_i(n)z_j(n)\right\rangle &= \mu(n)\left\langle q_i(n)\right\rangle\left\langle e_{opt}(n)z_j(n)\right\rangle \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่า } i \text{ และ } j
\end{aligned}
$$

พจน์ที่ 4 และ พจน์ที่ 5

$$
\begin{aligned}
\mu(n)\sum_{k=1}^{M}\left\langle q_k(n)z_k(n)q_i(n)z_j(n)\right\rangle &= \mu(n)\sum_{k=1}^{M}\left\langle q_i(n)q_k(n)\right\rangle\left\langle z_j(n)z_k(n)\right\rangle \\
&= \mu(n)\left\langle q_i(n)q_j(n)\right\rangle\left\langle z_j^2(n)\right\rangle \\
&= \mu(n)\left\langle q_i(n)q_j(n)\right\rangle\rho_j \qquad \text{สำหรับทุกค่า } i \text{ และ } j
\end{aligned}
$$

พจน์ที่ 6

$$
\begin{aligned}
\mu^2(n)\left\langle e^2_{opt}(n)z_i(n)z_j(n)\right\rangle &= \mu^2(n)\left\langle e^2_{opt}(n)\right\rangle\left\langle z_i(n)z_j(n)\right\rangle \\
&\quad + 2\mu^2(n)\left\langle e_{opt}(n)z_i(n)\right\rangle\left\langle e_{opt}(n)z_j(n)\right\rangle \\
&= 0 \qquad \text{เมื่อ } i \neq j \\
\text{และ } \mu^2(n)\left\langle e^2_{opt}(n)z_i^2(n)\right\rangle &= \mu^2(n)\left\langle e^2_{opt}\right\rangle\rho_i
\end{aligned}
$$

สำหรับพจน์ที่ 7 และ พจน์ที่ 8 ต้องพิจารณาการหาค่าเฉลี่ยทางสถิติต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_{opt}(n)z_i(n)z_j(n)z_k(n)\right\rangle &= \left\langle e_{opt}(n)z_i(n)\right\rangle\left\langle z_j(n)z_k(n)\right\rangle + \left\langle e_{opt}(n)z_j(n)\right\rangle\left\langle z_i(n)z_k(n)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle e_{opt}(n)z_k(n)\right\rangle\left\langle z_i(n)z_j(n)\right\rangle \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่า } i,\ j, \text{ และ } k \\
\left\langle z_i(n)z_j(n)z_k(n)z_l(n)\right\rangle &= \left\langle z_i(n)z_j(n)\right\rangle\left\langle z_k(n)z_l(n)\right\rangle + \left\langle z_i(n)z_k(n)\right\rangle\left\langle z_j(n)z_l(n)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle z_i(n)z_l(n)\right\rangle\left\langle z_j(n)z_k(n)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} \rho_i\rho_j & \text{เมื่อ } i = k \text{ และ } j = l \text{ หรือ } i = l \text{ และ } j = k \text{ แต่ } i \neq j \\ \rho_i\rho_k & \text{เมื่อ } i = j \text{ และ } k = l \text{ แต่ } i \neq k \\ 3\rho_i^2 & \text{เมื่อ } i = j = k = l \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle q_i(n+1)q_j(n+1)\rangle &= \left(1 - \mu(n)(\rho_i + \rho_j) + 2\mu^2(n)\rho_i\rho_j\right)\langle q_i(n)q_j(n)\rangle \qquad \text{เมื่อ } i \neq j \\ \text{และ} \quad \left\langle q_i^2(n+1)\right\rangle &= (1 - 2\mu(n)\rho_i + 3\mu^2(n)\rho_i^2)\left\langle q_i^2(n)\right\rangle \\ &\quad + \mu^2(n)\sum_{k=1,k\neq i}^{M}\rho_i\rho_k\left\langle q_k^2(n)\right\rangle + \mu^2(n)e_{opt}^2\rho_i \end{aligned} \tag{3.16}$$

โดยกำหนดให้

$$\mathbf{A}(n) = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu(n)\rho_1 + 3\mu^2(n)\rho_1^2 & \mu^2(n)\rho_1\rho_2 & \dots & \mu^2(n)\rho_1\rho_M \\ \mu^2(n)\rho_1\rho_2 & 1 - 2\mu(n)\rho_2 + 3\mu^2(n)\rho_2^2 & \dots & \mu^2(n)\rho_2\rho_M \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mu^2(n)\rho_1\rho_M & \dots & & 1 - 2\mu(n)\rho_M + 3\mu^2(n)\rho_M^2 \end{bmatrix}$$

จะเขียนสมการที่ (3.16) ในรูปเวกเตอร์ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{s}(n+1) &= \mathbf{A}(n)\vec{s}(n) + \mu^2(n)e_{opt}^2\vec{\rho} \\ &= \left(\mathbf{I} - 2\mu(n)\mathbf{D}(\rho) + 2\mu^2(n)\mathbf{D}(\rho^2) + \mu^2(n)\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\right)\vec{s}(n) + \mu^2(n)e_{opt}^2\vec{\rho} \\ &= \left(\mathbf{I} - 2\mu(n)\mathbf{D}(\rho) + 2\mu^2(n)\mathbf{D}(\rho^2)\right)\vec{s}(n) + \mu^2(n)\vec{\rho}\left(\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{s}(n) + e_{opt}^2\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - 2\mu(n)\mathbf{D}(\rho) + 2\mu^2(n)\mathbf{D}(\rho^2)\right)\vec{s}(n) + \mu^2(n)\left(\varepsilon(n) + e_{opt}^2\right)\vec{\rho} \end{aligned} \tag{3.17}$$

โดย

$$\mathbf{D}(\rho^2) = \begin{bmatrix} \rho_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \rho_M^2 \end{bmatrix}$$

คูณทางด้านซ้ายตลอดสมการที่ (3.17) ด้วย $\vec{\rho}^{\mathrm{T}}$ และ จัดรูปโดยใช้สมการที่ (3.14) จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกินที่เวลา $n+1$ กับ ขนาดช่วงก้าวที่เวลา n ดังนี้

$$\begin{aligned} \varepsilon(n+1) &= \varepsilon(n) - 2\mu(n)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho)\vec{s}(n) + 2\mu^2(n)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho^2)\vec{s}(n) \\ &\quad + \mu^2(n)\left(\varepsilon(n) + e_{opt}^2\right)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\rho} \end{aligned} \tag{3.18}$$

หาอนุพันธ์ของ $\varepsilon(n+1)$ เทียบกับ $\mu(n)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon(n+1)}{d\mu(n)} &= -2\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho)\vec{s}(n) + 4\mu(n)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho^2)\vec{s}(n) \\ &\quad + 2\mu(n)\left(\varepsilon(n) + e_{opt}^2\right)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\rho}\end{aligned}$$

ให้อนุพันธ์ของ $\varepsilon(n+1)$ เทียบกับ $\mu(n)$ มีค่าเป็น ศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่า $\mu_{opt}(n)$ ได้ดังนี้ (ทั้งนี้เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสองของ $\varepsilon(n+1)$ เทียบกับ $\mu(n)$ จะเป็นค่าบวกเสมอ ดังนั้นค่าสุดขีดของสมการนี้จึงเป็นค่าต่ำสุดด้วย นั่นคือ $\mu_{opt}(n)$ คือค่าขนาดช่วงก้าวที่ทำให้ $\varepsilon(n+1)$ มีค่าต่ำสุด)

$$\begin{aligned}\mu_{opt}(n) &= \frac{\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho)\vec{s}(n)}{2\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho^2)\vec{s}(n) + \left(\varepsilon(n) + e_{opt}^2\right)\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\rho}} \\ &= \frac{\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho)\vec{s}(n)}{2\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\rho^2)\vec{s}(n) + \langle e^2(n)\rangle\,\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\rho}}\end{aligned} \tag{3.19}$$

และต่อไปจะเรียกวิธีปรับขนาดช่วงก้าวตามสมการนี้ว่า วิธี OPT

ในกรณีที่ $\rho_i = \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, M$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mu_{opt}(n) &= \frac{\rho\,\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{s}(n)}{2\rho^2\vec{\rho}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{s}(n) + M\,\rho^2\langle e^2(n)\rangle} \\ &= \frac{\varepsilon(n)}{\rho\left(2\varepsilon(n) + M\langle e^2(n)\rangle\right)} \\ &= \frac{\langle e^2(n)\rangle - e_{opt}^2}{M\,\rho\left(\frac{2}{M}\left(\langle e^2(n)\rangle - e_{opt}^2\right) + \langle e^2(n)\rangle\right)}\end{aligned} \tag{3.20}$$

พิจารณาตัวหารของสมการที่ (3.20) พบว่าถ้า M มีค่ามากกว่า 2 มาก เช่น $M = 32$

$$\begin{aligned}\frac{2}{M}\left(\left\langle e^2(n)\right\rangle - e_{opt}^2\right) &= \frac{2}{32}\left(\left\langle e^2(n)\right\rangle - e_{opt}^2\right) \\ &\leq 0.0625\left\langle e^2(n)\right\rangle\end{aligned}$$

กล่าวคือ $\frac{2}{32}\left(\langle e^2(n)\rangle - e_{opt}^2\right)$ มีค่ามากที่สุดเพียง 6.25 % ของค่า $\langle e^2(n)\rangle$ เท่านั้น และสามารถประมาณได้ว่า $\frac{2}{M}\left(\langle e^2(n)\rangle - e_{opt}^2\right) + \langle e^2(n)\rangle \approx \langle e^2(n)\rangle$ ดังนั้นในกรณีที่ M มีค่ามากกว่า 2 มากจะได้ว่า

$$\mu_{opt}(n) \approx \frac{\langle e^2(n)\rangle - e_{opt}^2}{M\,\rho\,\langle e^2(n)\rangle} \tag{3.21}$$

นอกจากนี้ในกรณีขนาดช่วงก้าวมีค่าคงตัว และ $\rho_i = \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, M$ เราสามารถวิเคราะห์คุณสมบัติการลู่เข้าของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกินได้ดังนี้

จากสมการที่ (3.18) แทนค่า $\mu(n)$ (ขนาดช่วงก้าวแปรค่าได้) ด้วย μ (ขนาดช่วงก้าวค่าคงตัว) และเนื่องจาก $\rho_i = \rho$ ดังนั้น $\vec{\rho} = \rho(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)^{\mathrm{T}} = \rho\vec{1}$, $\mathbf{D}(\rho) = \rho\mathbf{I}$, และ $\mathbf{D}(\rho^2) = \rho^2\mathbf{I}$ และจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \varepsilon(n+1) &= \left(1 - 2\rho\mu + (2+M)\,\rho^2\mu^2\right)\varepsilon(n) \\ &\quad + M\rho^2\mu^2 e_{opt}^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

จากสมการที่ (3.22) และกำหนดให้ $C = (1 - 2\rho\mu + (2+M)\,\rho^2\mu^2)$ และ $\varepsilon(0)$ คือค่าเริ่มต้นของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกิน เราจะได้สมการแสดงคุณสมบัติการลู่เข้าของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกินดังนี้

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= C^n\varepsilon(0) + \left(\sum_{i=1}^{M} C^i\right) M\rho^2\mu^2 e_{opt}^2 \\ &= C^n\left(\varepsilon(0) - \frac{M\rho^2\mu^2 e_{opt}^2}{1-C}\right) + \frac{M\rho^2\mu^2 e_{opt}^2}{1-C} \end{aligned} \tag{3.23}$$

และจากสมการที่ (3.23) สามารถสรุปได้ว่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกินจะลู่เข้าเมื่อ $0 \leq C < 1$ และถ้าเรากำหนดให้ $C = exp\left(\frac{-1}{\tau}\right)$ โดยเรียก $\tau = \frac{-1}{ln(C)}$ ว่าค่าคงตัวเวลา (time constant) และกำหนดให้ $\varepsilon_{min} = \frac{M\rho^2\mu^2 e_{opt}^2}{1-C}$ เราจะสรุปได้ว่า ในกรณีขนาดช่วงก้าวคงตัวและค่าเจาะจงของเมตริกซ์อัตสหสัมพันธ์ของสัญญาณขาเข้าของวงจรกรองปรับตัวมีค่าเท่ากัน ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกินจะลู่เข้าแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (exponential) ค่าลบ ตามสมการที่ (3.24)

$$\varepsilon(n) = exp\left(\frac{-n}{\tau}\right)(\varepsilon(0) - \varepsilon_{min}) + \varepsilon_{min} \tag{3.24}$$

3.4 วิธีปรับขนาดช่วงก้าววิธีใหม่

จากสมการที่ (3.21) พบว่าถ้าเราสามารถหาค่าเฉลี่ยทางสถิติของความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่ขณะใด ๆ $\langle e^2(n)\rangle$ ได้ และรู้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่ต่ำที่สุดที่เป็นไปได้ e_{opt}^2 ก็สามารถประมาณค่าขนาดช่วงก้าวที่ดีที่สุดขณะใด ๆ ได้ แต่ตามความเป็นจริงไม่สามารถหาได้ ดังนั้นเราจึงใช้ค่าเฉลี่ยทางเวลาแทนค่าเฉลี่ยทางสถิติ โดยใช้ค่าเฉลี่ยทางเวลาของความคลาดเคลื่อนกำลังสองในช่วงเวลาสั้น ๆ $\sigma_S(n)$ แทนค่าเฉลี่ยทางสถิติของความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่ขณะใด ๆ และใช้ค่าเฉลี่ยทางเวลาของความคลาดเคลื่อนกำลังสองในช่วง

เวลาที่ยาวขึ้น $\sigma_L(n)$ แทนค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่ต่ำที่สุดที่เป็นไปได้ (ทั้งนี้มีสมมติฐานว่าช่วงเวลาที่หาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง ความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีคุณสมบัติสเตชันนารี ดังนั้นการหาค่าเฉลี่ยในช่วงเวลาที่ยาวนานขึ้นน่าจะเป็นค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทางสถิติที่ถูกต้องกว่าการหาค่าเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ) โดยจะได้สมการในการหาขนาดช่วงก้าวที่เวลา n ตามสมการที่ (3.25) และจะเรียกวิธีปรับขนาดช่วงก้าวตามสมการนี้ว่า วิธี DSE (Difference of Averaged Squared Errors)

$$\begin{aligned} \mu(n) &= \mu_{max} abs\left(\frac{\sigma_S(n-1) - \sigma_L(n-1)}{\sigma_S(n-1)}\right) \\ \sigma_S(n) &= \alpha\sigma_S(n-1) + (1-\alpha)e^2(n) \\ \sigma_L(n) &= \beta\sigma_L(n-1) + (1-\beta)e^2(n) \end{aligned} \tag{3.25}$$

โดย $0 < \alpha < \beta < 1$ (เพราะว่ายิ่งค่า α หรือ β มีค่าเข้าใกล้ 1 มากขึ้น ก็เท่ากับเป็นการหาค่าเฉลี่ยทางเวลาที่ยาวนานยิ่งขึ้น) μ_{max} เป็นค่าคงตัวค่าบวก และ $abs(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันการหาค่าสมบูรณ์ซึ่งการหาค่าสมบูรณ์ทำเพื่อให้แน่ใจว่าค่าขนาดช่วงก้าวจะไม่ติดลบ

จากสมการที่ (3.25) ยังอาจตีความในอีกลักษณะหนึ่งได้ว่า ค่าขนาดช่วงก้าวจะมีค่าใหญ่เมื่อผลต่างของค่าเฉลี่ยทางเวลาของความคลาดเคลื่อนกำลังสองในช่วงเวลาสั้น ๆ กับค่าเฉลี่ยในช่วงเวลายาวนานขึ้นมีค่ามาก (ช่วงที่วงจรกรองเริ่มปรับตัว) และ ค่าขนาดช่วงก้าวจะมีค่าเล็กเมื่อผลต่างนี้มีค่าน้อย (ช่วงที่วงจรกรองปรับตัวเข้าสู่สภาวะอยู่ตัว)

3.5 การเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณของวิธีปรับขนาดช่วงก้าว

เมื่อรู้ว่าวิธีปรับขนาดช่วงก้าวแบบต่าง ๆ ทั้ง 6 วิธีปรับขนาดช่วงก้าวอย่างไรแล้ว จะสามารถหาความซับซ้อนในการคำนวณในการปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละครั้งได้ โดยความซับซ้อนในการคำนวณจะพิจารณาจากจำนวนตัวกระทำการทางคณิตศาสตร์เช่น บวก ลบ คูณ หาร และฟังก์ชันอื่น ๆ ซึ่งจะสะท้อนถึงเวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละครั้ง ทั้งนี้ในการหาความซับซ้อนในการคำนวณ หรือการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละครั้งจะขึ้นอยู่กับโครงสร้างในการคำนวณซึ่งแบ่งได้เป็น 2 โครงสร้างได้แก่ โครงสร้างการคำนวณแบบอนุกรมคือจะทำการคำนวณทีละคำสั่งต่อเนื่องกันไป และโครงสร้างการคำนวณแบบขนานคือจะทำการคำนวณหลาย ๆ คำสั่งพร้อมกัน ซึ่งโครงสร้างการคำนวณแบบขนานจะมีความรวดเร็วในการคำนวณสูง แต่ในการสร้างให้มีการคำนวณแบบขนานจะต้องใช้วงจรขนาดใหญ่ และราคาแพงกว่าการสร้างให้มีการคำนวณแบบอนุกรม

เนื่องจากมีข้อจำกัดว่าเครื่องช่วยฟังควรมีขนาดเล็ก ดังนั้นการเลือกใช้วงจรที่มีโครงสร้างการคำนวณแบบขนานซึ่งมีวงจรขนาดใหญ่จึงไม่เหมาะสม ด้วยเหตุนี้เราจึงหาความซับซ้อนในการคำนวณ และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละครั้ง โดยสมมติให้วิธีปรับขนาดช่วงก้าวทุกวิธีมีโครงสร้างการคำนวณแบบอนุกรมดังนี้

วิธี Normalized step-size

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\sigma^2(n) = \alpha\sigma^2(n-1) + (1-\alpha)x^2(n)$
มีการบวก 1 ครั้ง ลบ 1 ครั้ง และคูณ 3 ครั้ง

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $\mu(n) = \dfrac{a}{\sigma^2(n) + b}$
มีการบวก 1 ครั้ง และหาร 1 ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก 2 ครั้ง ลบ 1 ครั้ง คูณ 3 ครั้ง และหาร 1 ครั้ง
ค่าคงตัวมี 3 ตัวคือ α, a, และ b
ตัวแปรมี 1 ตัวคือ $\sigma^2(n)$

วิธี Delta-Bar-Delta

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\delta_i(n) = e(n)x_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, M$
มีการคูณ M ครั้ง

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $\bar{\delta}_i(n) = \alpha\bar{\delta}_i(n-1) + (1-\alpha)\delta_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, M$
มีการบวก M ครั้ง ลบ 1 ครั้ง และคูณ $2M$ ครั้ง

ขั้นที่ 3 เปรียบเทียบค่า $\bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n)$ กับ 0, $\quad i = 1, 2, \ldots, M$
มีการเปรียบเทียบ M ครั้ง และคูณ M ครั้ง

ขั้นที่ 4 คำนวณค่า $\mu(n)$ ซึ่งมี 3 กรณีคือ

1. ถ้า $\bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n) > 0$ ให้ $\mu_i(n) + k, \quad i = 1, 2, \ldots, M$ มีการบวก M ครั้ง
2. ถ้า $\bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n) < 0$ ให้ $\mu_i(n) - \phi\mu_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, M$ มีการลบ M ครั้ง และคูณ M ครั้ง
3. ถ้า $\bar{\delta}_i(n-1)\delta_i(n) = 0$ ไม่มีการคำนวณใด ๆ

ถ้าสมมติให้ทุกกรณีมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันจะประมาณได้ว่าขั้นตอนนี้มีการบวก $\frac{M}{3}$ ครั้ง ลบ $\frac{M}{3}$ ครั้ง และคูณ $\frac{M}{3}$ ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก $M + \frac{M}{3}$ ครั้ง ลบ $1 + \frac{M}{3}$ ครั้ง เปรียบเทียบ M ครั้ง และคูณ $4M + \frac{M}{3}$ ครั้ง
ค่าคงตัวมี 3 ตัวคือ α, ϕ, และ k
ตัวแปรมี M ตัวคือ $\bar{\delta}_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, M$

วิธี Squared Error

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\mu'(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma e^2(n)$
มีการบวก 1 ครั้ง และคูณ 3 ครั้ง

ขั้นที่ 2 เปรียบเทียบค่า $\mu'(n+1)$ กับ μ_{max} และ μ_{min}
มีการเปรียบเทียบ 2 ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก 1 ครั้ง เปรียบเทียบ 2 ครั้ง และคูณ 3 ครั้ง
ค่าคงตัวมี 4 ตัวคือ α, γ, μ_{max}, และ μ_{min}
และไม่มีตัวแปร

วิธี Cross Correlation

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\|e(n)\vec{x}(n)\|^2$
มีการบวก $M - 1$ ครั้ง และคูณ $M + 2$ ครั้ง

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $\mu(n+1) = \mu_{max}(1 - \exp(-\alpha C))$
มีการลบ 1 ครั้ง คูณ 2 ครั้ง และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล 1 ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก $M - 1$ ครั้ง ลบ 1 ครั้ง คูณ $M + 4$ ครั้ง และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล 1 ครั้ง
ค่าคงตัวมี 2 ตัวคือ α และ μ_{max}
และไม่มีตัวแปร

วิธี Uniform Variance

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\overline{w}_i(n+1) = \alpha\overline{w}_i(n) + (1-\alpha)w_i(n+1)$
มีการบวก M ครั้ง ลบ 1 ครั้ง และคูณ $2M$ ครั้ง

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $v_i(n+1) = \alpha v_i(n) + (1-\alpha)\left(w_i(n+1) - \overline{w}_i(n+1)\right)^2$
มีการบวก M ครั้ง ลบ M ครั้ง และคูณ $3M$ ครั้ง

ขั้นที่ 3 คำนวณค่า $v_{i,norm}(n) = \dfrac{v_i(n)}{\sum_{j=1}^{M} v_j(n)}$
มีการบวก $M-1$ ครั้ง และหาร M ครั้ง

ขั้นที่ 4 คำนวณค่า $H_{(v_1,\ldots,v_M)}(n) = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{M} -v_{j,norm}(n)\ln\left(v_{j,norm}(n)\right)}{\ln M}$
มีการบวก $M-1$ ครั้ง คูณ M ครั้ง หาร 1 ครั้ง และฟังก์ชันลอการิทึม (logarithm) M ครั้ง

ขั้นที่ 5 คำนวณค่า $\mu(n+1) = \mu_{max}(1 - H_{(v_1,\ldots,v_M)}(n))$
มีการลบ 1 ครั้ง และคูณ 1 ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก $4M-2$ ครั้ง ลบ $M+2$ ครั้ง คูณ $6M+1$ ครั้ง หาร $M+1$ ครั้ง และฟังก์ชันลอการิทึม M ครั้ง
ค่าคงตัวมี 2 ตัวคือ α และ μ_{max}
ตัวแปรมี $2M$ ตัวคือ $\overline{w}_i(n)$ และ $v_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, M$

วิธีปรับขนาดช่วงก้าววิธีใหม่

ขั้นที่ 1 คำนวณค่า $\sigma_S(n) = \alpha\sigma_S(n-1) + (1-\alpha)e^2(n)$
มีการบวก 1 ครั้ง ลบ 1 ครั้ง และคูณ 3 ครั้ง

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $\sigma_L(n) = \beta\sigma_L(n-1) + (1-\beta)e^2(n)$
มีการบวก 1 ครั้ง ลบ 1 ครั้ง และคูณ 3 ครั้ง

ขั้นที่ 3 คำนวณค่า $\mu(n) = \mu_{max} abs\left(\dfrac{\sigma_S(n-1) - \sigma_L(n-1)}{\sigma_S(n-1)}\right)$
มีการลบ 1 ครั้ง คูณ 1 ครั้ง หาร 1 ครั้ง และฟังก์ชันหาค่าสมบูรณ์ 1 ครั้ง

รวมแล้วมีการบวก 2 ครั้ง ลบ 3 ครั้ง คูณ 7 ครั้ง หาร 1 ครั้ง และฟังก์ชันหาค่าสมบูรณ์ 1 ครั้ง
ค่าคงตัวมี 3 ตัวคือ α, β, และ μ_{max}
ตัวแปรมี 2 ตัวคือ $\sigma_S(n)$ และ $\sigma_L(n)$

เราสามารถสรุปความซับซ้อนในการคำนวณ และจำนวนพารามิเตอร์ที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละครั้งได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1: ตารางเปรียบเทียบความซับซ้อนในการคำนวณในการปรับขนาดช่วงก้าวด้วยวิธีต่าง ๆ

วิธีปรับขนาดช่วงก้าว	SE	NMS	DSE	CC	DBD	UNI
จำนวนค่าคงตัว	4	3	3	2	3	2
จำนวนตัวแปร	0	1	2	0	M	$2M$
จำนวนฟังก์ชันพิเศษ	0	0	0	1 (exp)	0	M (ln)
จำนวนการคูณ	3	3	7	$M+4$	$4M+\frac{M}{3}$	$6M+1$
จำนวนการหาร	0	1	1	0	0	$M+1$
จำนวนการบวก-ลบ	3	3	6	M	$2M+\frac{2M}{3}+1$	$5M$

โดยในที่นี้ถือว่า การเปรียบเทียบ และ การหาค่าสมบูรณ์ มีค่าเท่ากับการบวก-ลบ จากตารางจะสรุปได้ว่า ถ้าแบ่งกลุ่มตามระดับความซับซ้อนในการคำนวณ จะได้ 2 กลุ่มดังนี้

1. กลุ่มที่มีความซับซ้อนในการคำนวณต่ำ คือ ความซับซ้อนในการคำนวณไม่ขึ้นกับจำนวนพารามิเตอร์ของวงจรกรอง M ได้แก่ วิธี NMS, วิธี SE, และ วิธี DSE
2. กลุ่มที่มีความซับซ้อนในการคำนวณสูง คือ ความซับซ้อนในการคำนวณขึ้นกับจำนวนพารามิเตอร์ของวงจรกรอง M ได้แก่ วิธี CC, วิธี DBD, และ วิธี UNI

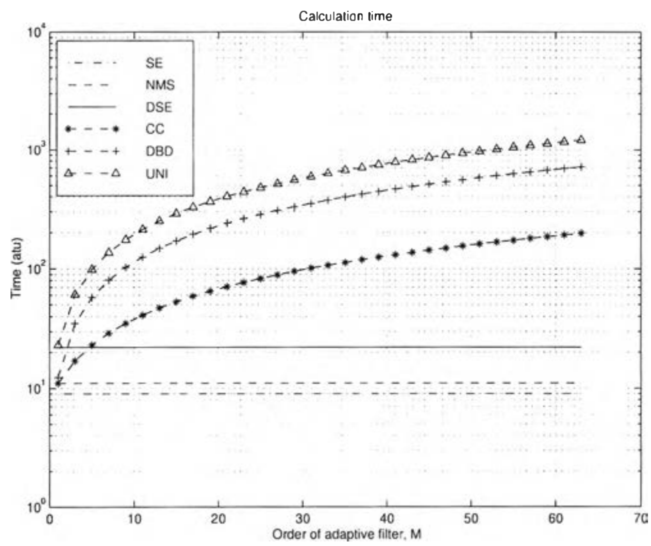
เนื่องจากวงจรกรองปรับตัวจะรับสัญญาณใหม่เข้ามาทุก ๆ คาบของการสุ่มตัวอย่าง (ส่วนกลับของอัตราการสุ่มตัวอย่าง) ดังนั้นการคำนวณต่าง ๆ ของวงจรกรองต้องทำเสร็จก่อนสัญญาณใหม่เข้ามา และเวลาที่วงจรกรองปรับตัวใช้เพื่อปรับค่าพารามิเตอร์ของวงจรกรองให้เข้าสู่สภาวะอยู่ตัวจึงขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งในการปรับค่าเท่านั้นไม่ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนในการคำนวณ หรือเวลาที่ใช้ในการคำนวณค่าขนาดช่วงก้าวของวิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธี กล่าวคือเวลาที่วงจรกรองปรับตัวใช้เพื่อเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวจึงขึ้นอยู่กับผลคูณระหว่าง จำนวนครั้งในการปรับตัวของวงจรกรองกับคาบเวลาของการสุ่มตัวอย่าง

อย่างไรก็ตามความซับซ้อนในการคำนวณ หรือเวลาที่ใช้ในการคำนวณค่าขนาดช่วงก้าวของวิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธี มีผลต่อการกำหนดความเร็วต่ำสุดของวงจรประมวลผลสัญญาณที่สามารถนำมาใช้งานได้ เช่นกำหนดให้เครื่องช่วยฟังมีอัตราการสุ่มตัวอย่างเท่ากับ 16 kHz คือคาบเวลาของการสุ่มตัวอย่างเท่ากับ 62.5 μsec หมายความว่าการคำนวณต่าง ๆ เช่นการคำนวณค่าขนาดช่วงก้าวจะต้องคำนวณเสร็จภายในเวลา 62.5 μsec และถ้าสมมติให้การคูณ หาร และการคำนวณค่าฟังก์ชันพิเศษใช้เวลาเท่ากับ 2 เท่าของเวลาที่ใช้ในการบวก 1 ครั้งเราสามารถหาเวลาในการคำนวณค่าขนาดช่วงก้าวในหน่วยของเวลาที่ใช้ในการบวก 1 ครั้ง (1 addition time unit : atu) ได้ดังแสดงค่าในสดมภ์แรกของตารางที่ 3.2 ส่วนในสดมภ์ที่สองแสดงค่าความเร็วต่ำที่สุดของวงจรประมวลผลที่วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธีต้องการเพื่อให้การคำนวณทำได้ทันภายในเวลา 62.5 μsec โดยสมมติว่าวงจรประมวลผลใช้เวลาในการบวก 1 ครั้ง (1 atu) เท่ากับ 1 คาบสัญญาณนาฬิกาของวงจรประมวลผล

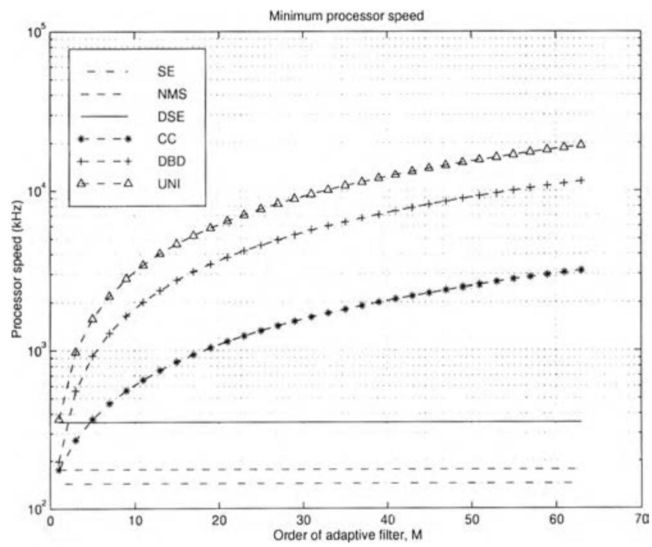
ตารางที่ 3.2: ตารางเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าว และความเร็วต่ำที่สุดของวงจรประมวลผลที่วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธีต้องการ

วิธีปรับขนาดช่วงก้าว	เวลาที่ใช้ในการปรับ ขนาดช่วงก้าว (atu)	ความเร็วต่ำที่สุดของ วงจรประมวลผล (kHz)
SE	9	144
NMS	11	176
DSE	22	352
CC	$3M + 8$	$48M + 128$
DBD	$11M + \frac{M}{3} + 1$	$181M + \frac{M}{3} + 16$
UNI	$19M + 4$	$304M + 64$

จากตารางที่ 3.2 เราสามารถแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าว และความเร็วต่ำที่สุดของวงจรประมวลผลที่วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธีต้องการเป็นฟังก์ชันของอันดับของวงจรกรองปรับตัว M ด้วยกราฟในรูปที่ 3.4 และรูปที่ 3.5 ตามลำดับ



รูปที่ 3.4: เวลาที่ใช้ในการปรับขนาดช่วงก้าวของวิธีปรับขนาดช่วงก้าวแบบต่าง ๆ



รูปที่ 3.5: ความเร็วต่ำที่สุดของวงจรประมวลผลที่วิธีปรับขนาดช่วงก้าวแต่ละวิธีต้องการ