รายการอ้างอิง

นฤพนธ์ มัญมณี. ตัวควบคุมกระบวนการแบบฟัซซีลอจิก. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเคมี บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539.

Babusuka, R., and Verbruggen, H. B. An overview of fuzzy modeling for control. **Control Engineering Practice** Vol.4 No.11 (1996): 1593-1609.

Bezdek, J. C. **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function.** New York: Plenum Press, (1981).

Castellano, G., and Fanelli, A. M. An approach to structure identification of fuzzy models. **Proceeding of 6th International Fuzzy Systems Conference** 6 (1997): 531-536.

Emami, M. R., Tuksen, I. B. and Goldenberg, A. An improved fuzzy modeling algorithm , Part I :inference Mechanism. **Biennial Conference of North American Fuzzy Information Processing Society –NAFIPS** (1996): 289-298.

Graham, B. P., and Newell, R. B. Fuzzy adaptive control of a first-order process. **Fuzzy Sests and Systems** 31 (1989): 47-65.

Gustafson, D. E., and Kessel, W. C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. **In Proc. IEEE CDC,** San Diego, CA, USA, (1979): 761-766.

Huh, U. K., and Kim, J. H. MIMO fuzzy model for boiler-turbine systems. **Proceeding of the fifth IEEE International Conference on IEEE** 5 (1996): 541-547.

Johansen, T. A. Fuzzy model based control: stability, robustness and performance issues. **IEEE Transaction on Fuzzy Systems** Vol. 2. No.3 (August 1994): 221-234.

Kung, C. C., and Li, H. H. Tracking control of nonlinear systems by fuzzy model-based controller. **Proceedings of the Sixth IEEE International Fuzzy Systems Conference** Vol. 2 (1997):623-628.

Mamdani, E. H. Applications of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. **Proc. IEE** vol. 121, No.12 (1974) : 1585-1588.

Mastorocostas, P., and Theocharis, J. Orthogonal least squares fuzzy modeling of nonlinear dynamic Systems. **Proceeding of the sixth IEEE International Conference on IEEE** 6 (1997): 1147-1152.

Park, M. K, and et al. A new identification method for a fuzzy model. **Proceeding of IEEE International Conference on Fuzzy Syatems** (1995) :2159-2164.

Postlethwaite B. A model-based fuzzy controller. **Trans IchemE** 72 (January 1994): 38-46.

Seborg, D. E., Edgar T. F., and Mellichamp, D. A. **Process Dynamic and Control**. New York: John Wiley and Sons (1989)

Sing, C. H., and Postlehwaite, B. PH control: handling nonlinearity and deadtime with relational model-based control. **IEE Proc.-Control Theory Application** Vol.144, No. 3 (May 1997): 263-268.

Shah, I., and Rajamani, K. Fuzzy logic controller: Application to liquid-level system. **Minerals and Metallurgical Processing** (November 1988): 196-192.

Shah, I., and Rajamani, K. Self-organizing controller for process pH control. **Control 90 Miner Metal Process Minerals & Metalurgical Processing** (1990): 45-52.

Sugeno, M., and Yasukawa, T. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. **IEEE Transaction on Fuzzy Systems** Vol.1 No.1 (February 1993): 7-31.

Takagi, T., and Sugeno, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Trans.Systems Man and Cybernet** 15 (1985): 116-132.

Tong, R. M. The evaluation of fuzzy models derived from experimental data. **Fuzzy Sets and Systems** 4 (1980): 1-12.

Wang, L. X. **A Course in Fuzzy Systems and Control**. U.S.A: Prentice-Hall International (1997)

Wong, C. C., and Lin, N. S. Rule extraction for fuzzy modeling. **Fuzzy Sets and Systems** 88 (1997): 23-30.

Zadeh, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control** 8 (1965): 338-353.

Zhao, J., Wertz, V.and Gorez, R. A fuzzy clustering method for the identification of fuzzy model for dynamic systems. **IEEE International Symposium on Intelligent Control** (August 1994): 172-177.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟัซซีเซตและฟัซซีลอจิก

เนื้อหาในภาคผนวกนี้จะอธิบายถึงหลักการพื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับฟัซซีเซต ลักษณะและสัญลักษณ์ที่ใช้และตัวดำเนินการระหว่างฟัซซีเซต นิยามของฟังก์ชันสมาชิกที่ใช้อธิบายฟัซซีเซต หลักการยืดขยายของฟังก์ชันไปบนฟัซซีเซตเพื่อใช้ประโยชน์ในการแก้สมการฟัซซีความสัมพันธ์ระหว่างฟัซซีเซต จากนั้นกล่าวถึงพื้นฐานของฟัซซีลอจิกโดยแสดงความสัมพันธ์ของข้อความฟัซซีในรูปแบบสมการความสัมพันธ์ และกล่าวถึงการให้เหตุผลแบบฟัซซี

ก.1 ฟัซซีเซต

ทฤษฎีฟัซซีเซตถูกคิดค้นและพัฒนาโดย Lofti A. Zadeh (1965) โดยเป็นการขยายความมาจากทฤษฎีเซตปกติหรือคริพเซต ฟัซซีเซตนั้นยอมให้ค่าดีกรีของความเป็นสมาชิกของตัวแปรใดๆ ในเซต เป็นค่าจำนวนจริงได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ได้ ซึ่งก็คือหลักการนี้จะอนุญาติให้มนุษย์สามารถสังเกตและแสดงข้อสรุปหรือความชำนาญได้เข้าใกล้ความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น ฟัซซีเซตเป็นพื้นฐานสำคัญของฟัซซีลอจิก นั้นคือเป็นการนำเอาฟัซซีเซตมาใช้งาน เช่นการดำเนินการทางทฤษฎีฟัซซีเซตจะเป็นพื้นฐานให้กับการดำเนินการเชิงตรรกในฟัซซีลอจิก เช่นผลตัด ผลผนวก และคอมพลีเมนต์ ฟัซซีลอจิกเป็นฐานความรู้ในรูปแบบของกฎเงื่อนไข ซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบประมาณ

ฟัซซีเซตนั้นคือเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกต่างๆ ที่มีดีกรีของความเป็นสมาชิกหลายๆ ค่าในเซต ซึ่งแตกต่างจากเซตปกติหรือคริส์พเซต ที่สมาชิกต่างๆ ภายในเซตจะมีดีกรีความเป็น

สมาชิกได้เพียงสองค่าเท่านั้น หรือจะพูดในแง่ของลอจิกคือ จะมีค่าความเป็นสมาชิกเพียง 0 หรือ 1 เท่านั้น ในขณะที่ฟัซซีเซตจะสามารถมีค่าความเป็นสมาชิกเป็นจำนวนใดๆ ได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ฟัซซีเซตนั้นจะเขียนได้ในรูปสัญลักษณ์เซตที่มีส่วนขยาย เช่น นิยามให้เซต A คือฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ (Universe of discourse) ของ X ถ้า x เป็นสมาชิกในเอกภพ X และเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต A ค่าความเป็นสมาชิกของ x ใน A จะแสดงได้ในรูปของ

$$\mu_A(x) \in [0,1] \quad (ก.1)$$

ดังนั้นฟัซซีเซต A จะเขียนได้ในรูปของ

$$A = (x, \mu_A(x) | x \in X \quad) \quad (ก.2)$$

ในกรณีที่เซตของวาทยเอกภพเป็นดีสครีต (Discrete) และมีขอบเขต (Finite) ฟัซซีเซต A จะเขียนได้ในรูปของ

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (ก.3)$$

และในกรณีที่เซตวาทยเอกภพ X เป็นเซตต่อเนื่องและมีขอบเขตฟัซซีเซต A เขียนได้ในรูปของ

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (ก.4)$$

โดยที่ '+','$\sum$' และ '$\int$ ' จะหมายถึงการรวมของเซต และ '----' จะหมายถึงตัวเชื่อมของสมาชิกกับค่าความเป็นสมาชิกของตัวมันเอง มิใช่ความหมายทางพีชคณิตแต่อย่างใด ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีที่วาทยเอกภพเป็นดีสครีต

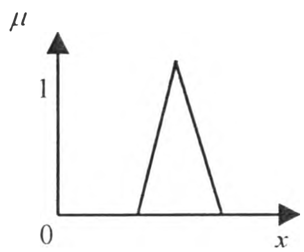
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (ก.3)$$

ฟัซซีเซต A ของ X เขียนได้ดังนี้

$$A = \{0.1/x_1, 0.3/x_2, 1/x_3, 0/x_4\} \qquad (ก.5)$$

จากสมการ ก.5 มีความหมายว่า x_1, x_2, x_3, x_4 มีค่าความเป็นสมาชิก ($\mu_A(x)$) เท่ากับ 0.1, 0.3, 1 และ 0.4 ตามลำดับ

ในกรณีที่วาทยเอกภพเป็นเซตต่อเนื่องค่าความเป็นสมาชิกสามารถแสดงได้ดังตัวอย่างใน รูป ก.1



รูปที่ ก.1 ค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต

ก.2 การดำเนินของฟัซซีเซต (Fuzzy set operations)

คอมพลีเมนต์ ยูเนียน และอินเตอร์เซ็คชันที่เป็นตัวดำเนินการพื้นฐานในฟัซซีเซต

1) คอมพลีเมนต์ (Complement)

ให้ A เป็นฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ X คอมพลีเมนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\overline{A}$ ซึ่งมีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $x \in X$ เป็น

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (ก.6)$$

2) ยูเนียน (Union)

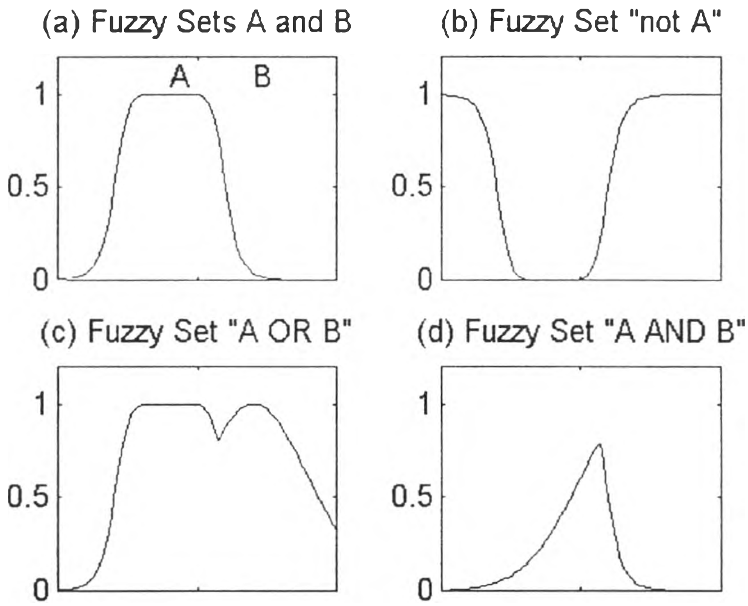
กำหนดให้ A เป็นฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ X ยูเนียนของ $A \cup B$ ของ A และ B คือฟัซซีเซตใน X ซึ่งกำหนดค่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $x \in X$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \qquad (ก.7)$$

3) อินเตอร์เซ็คชัน (Intersection)

ให้ A เป็นฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ X ยูเนียนของ $A \cap B$ ของ A และ B คือฟัซซีเซตใน X ซึ่งกำหนดค่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $x \in X$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (ก.8)$$



รูปที่ ก.2 การดำเนินการของฟัซซีเซต

(a) ฟัซซีเซต A และ B (b) คอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซต A

(c) การยูเนียนของ A (d) การอินเตอร์เซ็คชันของ A และ B

ในปัจจุบันได้มีการพัฒนาและศึกษาวิจัยตัวดำเนินการชนิดอื่นเพิ่มขึ้น เช่นตัวดำเนินการในกลุ่มของ T-norm (Triangular norm) และ T-conorm (S-norm) เพื่อใช้เป็นตัวดำเนินการแบบอินเตอร์เซ็คชัน และการยูเนียนตามลำดับ

4) T-norm

อินเตอร์เซ็คชันแบบฟัซซีของฟัซซีเซต A และ B ในวาทยเอกภพของ X เขียนได้โดยใช้ฟังก์ชัน $T:[0,1]X[0,1] \to [0,1]$ ดังสมการที่ (ก.9)

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{*} \mu_B(x) \quad (ก.9)$$

โดยที่ $\tilde{*}$ เป็นตัวดำเนินการแบบไบนารี (Binary operator) ของฟังก์ชัน T ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

ก. $T(0,0) = 0,\ T(a,1) = T(1,a) = a$

ข. $T(a,b) \le T(c,d) \quad if\ a \le c\ and\ b \le d$

ค. $T(a,b) = T(b,a)$

ง. $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$

ตัวอย่างของตัวดำเนินการ *T-norm*

Minimum : $T_{\min}(a,b) = \min(a,b) = a \wedge b$

Algebraic product : $T_{ap}(a,b) = ab$

Bounded product : $T_{bp}(a,b) = 0 \vee (a+b-1)$

Drastic product : $T_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & if\ b = 1 \\ b, & if\ a = 1 \\ 0, & if\ a,b < 1 \end{cases}$

5) T-conorm หรือ S-norm

ยูเนียนแบบฟัซซีของฟัซซีเซต A และ B ในวาทยเอกภพของ X เขียนได้โดยใช้ฟังก์ชัน $S:[0,1]X[0,1] \to [0,1]$ ดังสมการที่ (ก.10)

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{+} \mu_B(x) \quad (ก.10)$$

โดยที่ $\tilde{+}$ เป็นตัวดำเนินการแบบไบนารี (Binary operator) ของฟังก์ชัน S ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

ก. $S(1,1)=1,\ S(0,a)=S(a,0)=a$

ข. $S(a,b)\le S(c,d)\quad if\ a\le c\ and\ b\le d$

ค. $S(a,b)=S(b,a)$

ง. $S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c)$

ตัวอย่างของตัวดำเนินการ S-norm

Maximum : $S(a,b)=\max(a,b)=a\vee b$

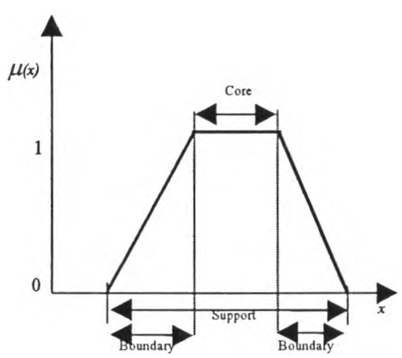
Algebraic sum : $S(a,b)=a+b-ab$

Bounded sum : $S(a,b)=1\wedge(a+b)$

Drastic sum : $S(a,b)=\begin{cases} a, & if\ b=0 \\ b, & if\ a=0 \\ 1, & if\ a,b>0 \end{cases}$

ก.3 ฟังก์ชันสมาชิก

ข้อมูลเกี่ยวกับฟัซซีเซตนั้นจะสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันสมาชิก ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทราบนิยามของส่วนประกอบต่างๆ ของฟังก์ชันสมาชิกดังนี้



รูปที่ ก.3 รายละเอียดของฟังก์ชันสมาชิก

<u>คอร์</u> (Core) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต A นิยามโดย ช่วงภายในวาทยเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกที่สูงที่สุด (Full degree) นั่นคือ จะประกอบด้วยสมาชิก x ในวาทยเอกภพซึ่ง $\mu_A(x_i) = 1$

<u>ซัพพอร์ท</u> (Support) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต A นิยามโดย ช่วงภายในวาทยเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์นั่นคือ จะประกอบด้วยสมาชิก x ในวาทยเอกภพซึ่ง $\mu_A(x_i) \neq 0$

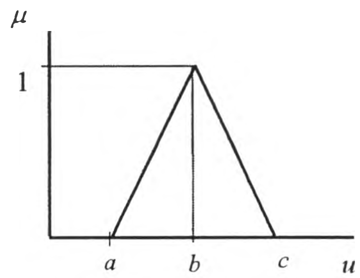
<u>ขอบเขต</u> (Boundary) ของฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต A นิยามโดย ช่วงภายในวาทยเอกภพซึ่งสมาชิกทุกตัวมีดีกรีความเป็นสมาชิกไม่เท่ากับศูนย์แต่น้อยกว่าดีกรีสูงสุด นั่นคือจะประกอบด้วยสมาชิก x ในวาทยเอกภพซึ่ง $0 < \mu_A(x_i) < 1$

รูปแบบของฟังก์ชันสมาชิกสำหรับฟัซซีเซตจะสามารถนิยามได้สองวิธี คือ นิยามด้วยตัวเลข (Numerical definition) และนิยามด้วยฟังก์ชัน (Function definition) วิธีการนิยามด้วยตัวเลขจะแสดงค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตเป็นค่าเวคเตอร์ (Vector value) ซึ่งจะมีมิติที่ขึ้นอยู่กับระดับของการดีสกรีตของวาทยเอกภพนั้น และวิธีการนิยามด้วยฟังก์ชันซึ่งการนิยามวิธีนี้จะใช้กับวาทยเอกภพแบบต่อเนื่อง การแสดงค่าความเป็นสมาชิกจะทำได้ในลักษณะของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างฟังก์ชันที่ใช้เป็นมาตรฐานได้แก่ ฟังก์ชัน T หรือฟังก์ชันสามเหลี่ยม ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid membership function) และฟังก์ชัน S

<u>ฟังก์ชันสามเหลี่ยม</u> นิยามได้ด้วยสมการ (ก.11)

$$T(u;a,b,c) = \begin{cases} 0 & for \quad u < a \\ (u-a)/(b-a) & for \quad a \le u \le b \\ (c-u)/(c-b) & for \quad b \le u \le c \\ 0 & for \quad u > c \end{cases} \tag{ก.11}$$

แสดงได้ในรูปที่ ก.4

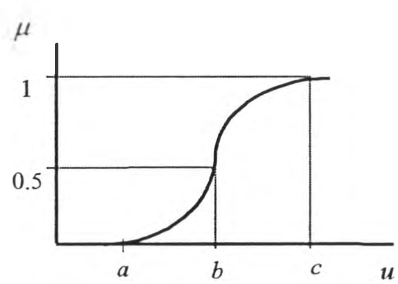


รูปที่ ก.4 ฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยม

ฟังก์ชัน S นิยามได้ด้วยสมการ (ก.12)

$$S(u;a,b,c)=\begin{cases} 0 & for \quad u<a \\ 2[(u-a)/(c-a)]^2 & for \ a\le u\le b \\ 1-2[(u-c)/(c-a)]^2 & for \ b\le u\le c \\ 1 & for \quad u>c \end{cases} \qquad (ก.12)$$

แสดงได้ในรูปที่ ก.5



รูปที่ ก.5 ฟังก์ชัน S

ก.4 หลักการยืดขยายและความสัมพันธ์แบบฟัซซี

(Extension principle and fuzzy relations)

หลักการยืดขยายและความสัมพันธ์แบบฟัซซี เป็นการขยายและการประยุกต์ใช้ฟัซซีเซต ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในกฎฟัซซี โดยจะใช้เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสำหรับการสร้างแบบ

จำลองเชิงปริมาณของคำหรือประโยคเชิงภาษาที่เป็นธรรมชาติหรือภาษาทางปัญญาประดิษฐ์ (Artificial language)

ก.4.1 หลักการยืดขยาย (Extension principle)

หลักการยืดขยายเป็นหลักการพื้นฐานของทฤษฎีฟัซซีเซต ซึ่งเป็นการขยายจากคริพส์โดเมน (Crisp domains) ของการแสดงทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Expressions) ไปเป็นฟัซซีโดเมน (Fuzzy Domain) หลักการยืดขยายมีประโยชน์ในขั้นตอนของการหาสมการความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการแก้สมการคำตอบของความสัมพันธ์ฟัซซี

ในที่นี้เป็นการแสดงการส่งจากจุดไปยังจุดของฟังก์ชัน $f(.)$ ไปยังการส่งระหว่างฟัซซีเซต สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง Y และ A เป็นฟัซซีเซตบน X ที่นิยามดังนี้

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \qquad (ก.13)$$

จากหลักการยืดแสดงให้เห็นว่า เขียนฟัซซีเซต A ภายใต้การส่ง ฟังก์ชัน $f(.)$ สามารถเขียนได้เป็นฟัซซีเซต B ดังนี้

$$B = f(A) = \frac{\mu_A(x_1)}{y_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{y_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{y_n} \qquad (ก.14)$$

โดยที่ $y_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n$ ซึ่งมีความหมายว่าฟัซซีเซต B สามารถนิยามผ่านค่าของฟังก์ชัน $f(.)$ ได้ ถ้า $f(.)$ เป็นการส่งจากหลายจุดไปยังหนึ่งจุดแล้ว $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$

ดังนั้น $f(x_1) = f(x_2) = y^*,\ y^* \in Y$ ในกรณีนี้ ค่าระดับความเป็นสมาชิกของ B ที่ $y = y^*$ เป็นค่าสูงสุดของค่าระดับความเป็นสมาชิกของ A ที่ $x = x_1$ และ $x = x_2$ เพราะว่า $f(x) = y^*$ อาจจะเป็นผลมาจาก $x = x_1$ หรือ $x = x_2$ สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\mu_B(y) = \max_{x = f^{-1}(y)} \mu_A(x) \qquad (ก.15)$$

ก.4.2 ความสัมพันธ์แบบฟัซซี (Fuzzy relation)

ความสัมพันธ์ฟัซซี R คือการส่งจากปริภูมิคาร์ทีเซียน (Cartesian space) $X \times Y$ ไปในช่วง [0,1] โดยค่าความแรง (Strength) ของการส่ง แสดงโดยฟังก์ชันสมาชิกของความสัมพันธ์สำหรับคู่ลำดับจากทั้งสองวาทยเอกภพหรือ $\mu_R(x,y)$

การดำเนินการของความสัมพันธ์ฟัซซี

กำหนดให้ R, S และ T เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบนปริภูมิคาร์ทีเซียน $X \times Y$ ตามการดำเนินการดังนี้

ยูเนียน: $\mu_{R \cup S}(x,y) = \max(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y))$ (ก.16)

อินเตอร์เซ็คชัน: $\mu_{R \cap S}(x,y) = \min(\mu_R(x,y)\ \mu_S(x,y))$ (ก.17)

คอมพลีเมนต์: $\mu_{R^-}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$ (ก.18)

เพราะว่าโดยปกติแล้วความสัมพันธ์ฟัซซีจะอยู่ในรูปของฟัซซีเซต เราสามารถนิยามผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างฟัซซีเซตได้ ถ้าให้ A เป็นฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ X และ B เป็นฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ Y ดังนั้นผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างฟัซซีเซต A และ B จะให้ผลลัพท์ในความสัมพันธ์ฟัซซี R ดังนี้

$$A \times B = R \subset X \times Y \qquad (ก.19)$$

ซึ่งแสดงด้วยฟังก์ชันสมาชิกได้ดังนี้

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A \times B}(x\ y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \qquad (ก.20)$$

สมมติให้ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีในปริภูมิคาร์ทีเซียน $X \times Y$, S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $Y \times Z$ และ T เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $X \times Z$ ดังนั้นการประกอบการฟัซซี (Fuzzy composition) *Max-Min* นิยามโดยให้

$$T = R \cdot S \tag{ก.21}$$

$$\mu_T(x,y) = \vee_{y \in Y}(\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)) \tag{ก.22}$$

และการประกอบการ *Max-Product* นิยามโดย

$$\mu_T(x,z) = \vee_{y \in Y}(\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)) \tag{ก.23}$$

การประกอบความสัมพันธ์ของทั้งสองแบบนี้ จะใช้ประโยชน์ในกระบวนการอนุมานสำหรับการหาคำตอบของระบบสมการฟัซซีลอจิกในหัวข้อถัดไป

ก.5 ฟัซซีลอจิก

ฟัซซีลอจิกเป็นการแสดงข้อความที่แสดงด้วยฟัซซี ที่แสดงความรู้สึกหรือความคิดเห็นของมนุษย์ ซึ่งแสดงด้วยเทอมทางภาษา และเป็นการแก้ปัญหาด้วยการอนุมานโดยผ่านข้อความรู้ในรูปแบบของกฎเงื่อนไข ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลโดยประมาณ (approximate reasoning) ในกฎเงื่อนไขประกอบกันขึ้นเป็นฐานความรู้ที่เป็นส่วนสำคัญในระบบฟัซซี

ก.5.1 ตัวแปรทางภาษา (Linguistic Variables)

โดยปกติเราใช้คำในการอธิบายถึงตัวแปร ยกตัวอย่างเช่น เราพูดว่า ‘วันนี้อากาศร้อน’ หรือ ‘วันนี้อุณหภูมิสูง’ สังเกตว่าเราใช้คำว่า ‘สูง’ เพื่ออธิบายถึงตัวแปรคือ‘อุณหภูมิของวันนี้’ นั้นหมายถึงว่า ตัวแปรอุณหภูมิถือว่าคำว่า ‘สูง’ เป็นค่าๆ หนึ่ง ซึ่งอาจจะเป็น 25 °C, หรือ 19 °C เมื่อตัวแปรใช้จำนวนเพื่อการแสดงค่านั้น จะสามารถใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ในการสร้างค่านั้นได้ แต่ถ้าตัวแปรใช้คำเหมือนเป็นการแสดงค่าแล้ว จะไม่มีหลักการเหมือนทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ในการบอกค่า ดังนั้นจึงใช้ตัวแปรทางภาษา (Linguistic variables) ในการบอกคำพูดโดยทั่วๆ ไปแล้วก็คือถ้าตัวแปรสามารถมีค่าของตัวแปรเป็นคำในภาษาหนึ่งๆ ที่มีความหมายก็ให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรเชิงภาษา

ซึ่งคำนั้นถูกแสดงลักษณะโดยใช้ฟัซซีเซตที่นิยามในวาทยเอกภพนั้นๆ โดยปกติในบางครั้งเทอมทางภาษามักมีการเพิ่มคำขยายเชิงภาษา (Linguistic hedge) ซึ่งเป็นการเพิ่มการบ่งบอกถึงลักษณะเทอมภาษาให้มากขึ้นหรือน้อยลง

ยกตัวอย่างเช่น อุณหภูมิค่อนข้างร้อน ในที่นี้ คำว่า 'อุณหภูมิ' เป็นตัวแปรเชิงภาษา โดยมีค่าเชิงภาษาเป็น 'ร้อน' และ'ค่อนข้าง' เป็นตัวขยายเชิงภาษา ในที่นี้เทอมทางภาษาในวาทยเอกภพจะแสดงเอกลักษณ์ในรูปของฟัซซีเซต โดยกำหนดค่าอยู่ในช่วง 10 °C, ถึง 40 °C

ก.5.2 ประพจน์ฟัซซี (Fuzzy Proposition)

ประพจน์ของฟัซซีลอจิก P เป็นประพจน์ที่เกี่ยวข้องกับหลักการที่ไม่สามารถนิยามขอบเขตได้อย่างแจ่มชัด ข้อความทางภาษาซึ่งแสดงความคิดเห็น หรือความรู้สึกจะมีลักษณะของประพจน์ฟัซซี ตัวอย่างของประพจน์ที่เป็นลักษณะฟัซซีคือ ข้อความที่อธิบายความสูงของคน หรือน้ำหนัก หรือการประเมินความพึงพอใจกับสิ่งต่างๆ เป็นต้น ค่าความเป็นจริงของ P สามารถเป็นค่าใดๆ ก็ได้ในช่วง [0,1] ดังนั้นค่าความเป็นจริงของการส่งในช่วง [0,1] ในวาทยเอกภพ U ของ T เขียนได้ดังนี้

$$T : U \to [0,1] \qquad \text{(ก.24)}$$

ในลอจิกธรรมดานั้นเราจะทำการกำหนดให้การเสนอข้อความลอจิกเป็นไปในรูปแบบของเซตในวาทยเอกภพใดๆ สำหรับในข้อความทางฟัซซีลอจิกนั้นจะเป็นไปในรูปแบบของฟัซซีเซต สมมติให้ข้อความ P ถูกกำหนดบนฟัซซีเซต A ค่าความเป็นจริงของข้อความแทนด้วย $T(P)$ เขียนได้ดังนี้

$$T(P) = \mu_A(x) \qquad \text{โดย } 0 \le \mu_A \le 1 \qquad \text{(ก.25)}$$

ดีกรีความเป็นจริงของข้อความ $P: x \in A$ จะเท่ากับค่าฟังก์ชันสมาชิกของ x ใน A ตัวเชื่อมทางลอจิกต่างๆ นิเสธ (Negation) ตัวเชื่อมร่วม (Conjunction) และการแจกแจงเหตุสู่ผล (Implication) จะสามารถใช้กับฟัซซีลอจิกได้เช่นกัน ตัวเชื่อมต่างๆ สำหรับข้อความ P ซึ่งนิยามบนฟัซซีเซต A และ Q นิยามบนฟัซซีเซต B แสดงได้ดังนี้

นิเสธ: $$T(P) = 1 - T(P) \qquad (ก.26)$$

ตัวเชื่อมการเลือก : $P \vee Q \Rightarrow x \text{ is } A \text{ or } B$

$$T(P \vee Q) = \max(T(P), T(Q)) \qquad (ก.27)$$

ตัวเชื่อมร่วม : $P \wedge Q \Rightarrow x \text{ is } A \text{ and } B$

$$T(P \wedge Q) = \min(T(P), T(Q)) \qquad (ก.28)$$

การแจกแจงเหตุสู่ผล : $P \rightarrow Q \Rightarrow x \text{ is } A, \text{ then } x \text{ is } B$

$$T(P \longrightarrow Q) = T(P \vee Q) = \max(T(P), T(Q)) \qquad (ก.29)$$

เช่นเดียวกับลอจิกธรรมดา ตัวเชื่อมสำหรับการแจกแจงเหตุสู่ผลก็สามารถสร้างได้ในรูปแบบของกฎ

$$P \longrightarrow Q \text{ is : If } x \text{ is } A \text{ Then } y \text{ is } B \qquad (ก.30)$$

และจะเทียบเท่ากับความสัมพันธ์ฟัซซี R

$$R = (\bar{A} \times B) \cup (A \times Y) \qquad (ก.31)$$

แสดงได้ในรูปของค่าฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_R(x,y) = max[(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)), (1-\mu_A(x))] \qquad (ก.32)$$

ก.6 การให้เหตุผลแบบฟัซซี (Fuzzy Reasoning)

จุดประสงค์สูงสุดของฟัซซีลอจิกคือ การสร้างรากฐานทฤษฎีสำหรับการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับข้อความใดๆ ที่มีความไม่ชัดเจน หรือข้อความแบบฟัซซี การให้เหตุผลดังกล่าวเป็นการให้เหตุผลโดยประมาณ การให้เหตุผลแบบนี้จะคล้ายคลึงกับการให้เหตุผลแบบลอจิกธรรมดา ซึ่งเป็นข้อความที่ชัดเจน แต่จะมีการยืดขยายการคำนวณออกไป ซึ่งเกี่ยวกับการหาค่าความเป็นจริงที่อาจจะมีเพียงบางส่วนเท่านั้น

ในฟัซซีลอจิกและการให้เหตุผลแบบประมาณ จะมีกฎการอนุมาน (Inference rule) สำหรับฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผลที่สำคัญคือ วิธีจีเอ็มพี (Generalized Modus Ponens) และวิธีการจีเอ็มที (Generalized Modus Tollens)

ก. วิธีการให้เหตุผลแบบจีเอ็มพี

Premise 1 (knowledge) : *If* x is A *Then* y is B

Premise 2 (knowledge) : x is A'

Consequent (conclusion) : y is B'

กรณีนี้ Consequent B' จะเขียนได้เป็น $B' = A' \text{o} R$

ข.วิธีการให้เหตุผลแบบจีเอ็มที

Premise 1 (knowledge) : *If* x is A *Then* y is B

Premise 2 (knowledge) : y is B'

Consequent (conclusion) : x is A'

กรณีนี้ Consequent A' จะเขียนได้เป็น $A' = R \text{ o } B'$

โดยที่ R คือความสัมพันธ์ฟัซซีจากฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผล "*If A Then B*", o คือตัวดำเนินการการประกอบ (Compositional operator) และ A' คือฟัซซีเซตซึ่งอาจเป็น: *A, very A, more or less A, not A*

การอนุมานของฟัซซีการแจกแจงเหตุสู่ผลจะอิงกับกฎการประกอบของการอนุมานสำหรับการให้เหตุผลโดยประมาณ ซึ่งเสนอโดย Zadeh ในที่นี้เรากำหนดฟัซซีเซต A, A', B, B' เป็นตัวแปรภาษา และ x, y เป็นคริสพ์เซตในลอจิกปกติ วิธีจีเอ็มพีจะลดรูปเป็นเอ็มพี (Modus Ponens) เมื่อ $A=A'$ และ $B=B'$ ซึ่งจะเป็นลักษณะของการอนุมานแบบไปข้างหน้า (Forward data-driven inference) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการอนุมานสำหรับตัวควบคุมฟัซซีลอจิก วิธีจีเอ็มทีจะลดรูปเป็น เอ็มที (modus tollen) เมื่อ $B'=not\ B$ และ $A'=not\ A$ ซึ่งจะเป็นลักษณะของการอนุมานแบบย้อนกลับ (Backward goal-driven inference) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการอนุมานในระบบผู้เชี่ยวชาญต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวงการแพทย์

ก.7 กฎฟัซซี (Fuzzy rule)

ระบบฟัซซีเป็น ฐานความรู้ (Knowledge-based) หรือระบบฐานกฎ (rule-based system) ซึ่งหัวใจสำคัญของระบบฟัซซีก็คือ ฐานความรู้ ซึ่งประกอบขึ้นด้วย กฎฟัซซีแบบมีเงื่อนไขถ้า-แล้ว ซึ่งความรู้ของมนุษย์ถูกแสดงในเทอมของกฎฟัซซีแบบมีเงื่อนไข

If (ส่วนเงื่อนไข) *Then* (ส่วนผล) (ก.33)

โดยที่ส่วนเงื่อนไขและส่วนผลสรุปของกฎเป็นประพจน์แบบฟัซซี โดยส่วนเงื่อนไขอาจประกอบด้วยประพจน์ฟัซซีหลายๆ ประพจน์เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมเชิงตรรก นอกจากนี้ประพจน์แบบฟัซซีอาจประกอบด้วยนิเสธหรือคำขยายได้อีกด้วย แต่เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจจะทำการพิจารณากฎนี้

$$if\ x_1\ is\ A_1\ and\ x_2\ is\ A_2\ \ then\ y\ is\ B \tag{ก.34}$$

โดยที่ A_1, A_2 และB เป็นฟัซซีเซต ซึ่งกำหนดคุณลักษณะด้วยฟังก์ชันสมาชิก $\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)$ และ $\mu_B(y)$ ตามลำดับ ตัวแปรระบบจะถูกแบ่งออกไปเป็นช่วงของฟัซซีซึ่งนิยามบนช่วงของวาทยเอกภพ (Universe of discourse) โดยใช้ฟังก์ชันสมาชิก จากสมการที่ (ก.34) ตัวแปรที่ปรากฏในส่วนของเงื่อนไขของกฎฟัซซีเรียกว่าตัวแปรส่วนเงื่อนไข (Antecedent variable) เช่นอินพุท x_1 และ x_2 ส่วนตัวแปรที่ปรากฏในส่วนผลของกฎเรียกว่าตัวแปรส่วนผลสรุป (Consequent variable) เช่นเอาท์พุท y กฎแต่ละข้อจะแสดงการส่งช่วงฟัซซี (Fuzzy region) จากปริภูมิของส่วนเงื่อนไขไปยังปริภูมิของส่วนผล สมการ (ก.34) สามารถเขียนในรูปความสัมพันธ์ฟัซซีได้ดังนี้

$$R = (A_1 * A_2) \rightarrow B \tag{ก.35}$$

โดยที่ * เป็นตัวเชื่อมประพจน์ฟัซซี t-norm ส่วน $\rightarrow$ เป็นฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี ซึ่งเป็นการเชื่อมแบบมีเงื่อนไข ส่วนฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของ R กำหนดโดย

$$\mu_R = (\mu_{A_1}(x_1) * \mu_{A_2}(x_2) \rightarrow \mu_B(y) \tag{ก.36}$$

ก.8 การรวมกันของกฎ (Agregation of rules)

เอาท์พุทของกฎฟัซซี y^k จากการอนุมานทุกกฎจะถูกนำมารวมกันด้วยการรวมของกสองวิธี คือ การรวมแบบร่วม (Conjunctive systems of rules) และการรวมแบบเลือก (Disjunctive systems of rules)

ก) การรวมแบบร่วม การรวมแบบนี้จะเป็นการรวมกฎที่ถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “AND” กรณีนี้เอาท์พุทที่ได้จะมาจากการอินเตอร์เซ็คชันของเอาท์พุทจากกฎต่างๆ ทั้งหมด

$$y = (y^1) \text{ AND } (y^2) \text{ AND } \dots \text{ AND } (y^r)$$

หรือ $$y = y^1 \cap y^2 \cap \dots \cap y^r \qquad (ก.37)$$

สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

$$\mu_y(y) = \min [\mu_{y1}(y), \mu_{y2}(y), \dots, \mu_{yr}(y)], \quad \text{สำหรับ } y \in Y \qquad (ก.38)$$

ข) การรวมแบบเลือก การรวมแบบนี้เป็นการรวมกฎที่ถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “OR” กรณีนี้เอาท์พุทที่ได้จะมาจากยูเนียนของเอาท์พุทจากกฎต่างๆ ทั้งหมด

$$y = (y^1) \text{ OR } (y^2) \text{ OR } \dots \text{ OR } (y^r)$$

หรือ $$y = y^1 \cup y^2 \cup \dots \cup y^r \qquad (ก.39)$$

สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันสมาชิก

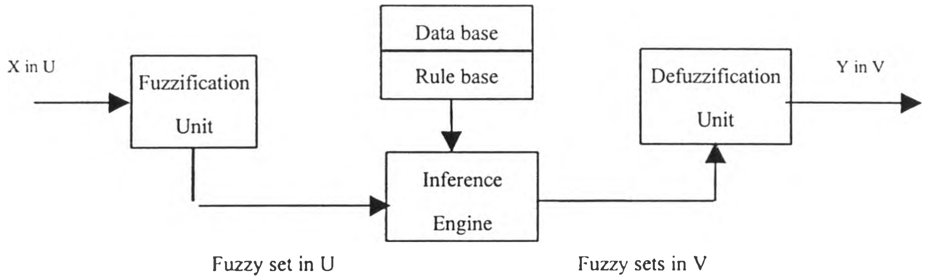
$$\mu_y(y) = \max[\mu_{y1}(y), \mu_{y2}(y), \dots, \mu_{yr}(y)], \quad \text{สำหรับ } y \in Y \qquad (ก.40)$$

ก.10 โครงสร้างของระบบฟัซซีลอจิก

ระบบฟัซซีลอจิกที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองและการควบคุม ปกติจะประกอบด้วยโครงสร้างพื้นฐานหลักดังรูปที่ ก.6 ซึ่งประกอบด้วย กระบวนการฟัซซิฟิเคชัน (Fuzzification) ฐานความรู้ (Knowledge based) กระบวนการอนุมาน กระบวนการดีฟัซซิฟิเคชัน โครงสร้างหลักของระบบฟัซซีลอจิกแสดงดังรูปที่ ก.6

1) กระบวนการฟัซซิฟิเคชัน

ฟัซซิฟิเคชันเป็นการะบวนการส่งค่าอินพุทแบบคริพส์ในเอกภพสัมพัทธ์ U ไปยังฟัซซีเซตในวาทยเอกภพ U โดยการส่งนี้จะถูกแปลงให้อยู่ในรูปของเทอมทางภาษาที่เหมาะสม ซึ่งเป็นฟัซซีเซตที่แสดงด้วยฟังก์ชันสมาชิก



รูปที่ ก.6 แสดงโครงสร้างของระบบฟัซซีลอจิก

2) ฐานความรู้ (Knowledge Base)

ฐานความรู้ประกอบด้วยฐานข้อมูล (data base) และฐานกฎ (Rule base) ฐานข้อมูลจะทำหน้าเก็บข้อมูลจากการนิยามฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซตในวาทยเอกภพนั้น ๆ ฐานกฎ จะประกอบด้วยกฎฟัซซี โดยอยู่ในรูปแบบของกฎฟัซซีแบบมีเงื่อนไขดังที่ได้กล่าวไปในหัวข้อที่ ฐานความรู้จะเป็นตัวการสำคัญที่ทำให้ระบบดำเนินไปได้อย่างที่ต้องการ

3) กระบวนการอนุมาน

การอนุมานระบบฟัซซีลอจิกเป็นการใช้เหตุผลแบบฟัซซี ซึ่งวิธีการอนุมานจะอาศัยตัวประกอบการในการอนุมาน วิธีการอนุมานที่นิยมใช้มีสองแบบคือ วิธีการอนุมานแบบ *Max-Min* และวิธีการอนุมานแบบ *Max-Prod* ดังนี้

โดยสมมติให้ระบบมีกฎการควบคุมเพียงสองกฎ

Rule 1 : IF x_1 is A_{11} AND x_2 is A_{12} THEN y is B_1

Rule 2 : IF x_1 is A_{21} AND x_2 is A_{22} THEN y is B_2 (ก.46)

กำหนดให้ความแรงที่ได้จากการอนุมานในแต่ละกฎเป็น α สำหรับอินพุท x_2 ควมแรง α_1, α_2 ของกฎสามารถเขียนได้เป็น

$$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_{11}}(x_1), \mu_{A_{12}}(x_2)\} \quad (ก.47)$$

$$\alpha_2 = \min\{\mu_{A_{21}}(x_1), \mu_{A_{22}}(x_2)\} \quad (ก.48)$$

ก. การอนุมานแบบ *Max-Min*

วิธีการให้เหตุผลแบบนี้เป็นการแสดงการตัดสินใจในกฎที่ i ซึ่งแสดงในรูปของ $\alpha_i \wedge \mu_{B_i}(y)$ ดีกรีความเป็นสมาชิกของข้อสรุป B แสดงได้ดังนี้

$$\mu_{\mathrm{B}}(\mathrm{y}) = \max\ \{\min[(\alpha_1, \mu_{\mathrm{B1}}(\mathrm{y}))], \min[(\alpha_2, \mu_{\mathrm{B2}}(\mathrm{y}))]\} \quad (ก.49)$$

รูปที่ ก.7 จะแสดงกระบวนการอนุมานแบบ *Max-Min* สำหรับอินพุทคริพส์ x_1 และ x_2

ข. การอนุมานแบบ *Max-Prod*

วิธีการให้เหตุผลแบบนี้ การตัดสินใจในกฎที่ i จะแสดงในรูปของ $\alpha_i \wedge \mu_{B_i}(y)$ ดีกรีความเป็นสมาชิกของข้อสรุป B แสดงดังสมการที่ (ก.50)

$$\mu_{\mathrm{B}}(\mathrm{y}) = \max\ \{(\alpha_1, \mu_{\mathrm{B1}}(\mathrm{y})), (\alpha_2, \mu_{\mathrm{B2}}(\mathrm{y}))\} \quad (ก.50)$$

รูปที่ ก.8 จะแสดงกระบวนการอนุมานแบบ *Max-Prod* สำหรับอินพุทคริพส์ x_1 และ x_2

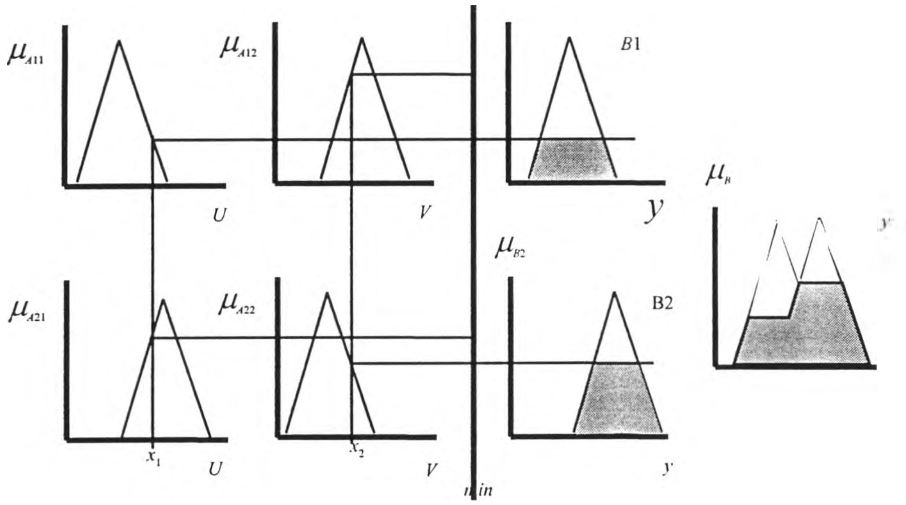
4) กระบวนการดีฟัซซิฟิเคชัน

กระบวนการดีฟัซซิฟิเคชันเป็น การส่งฟัซซีเซตใน วาทยเอกภพ V ไปยังเอาท์พุทแบบคริพส์ในเอกภพสัมพัทธ์ V วิธีการดีฟัซซิฟิเคชัน

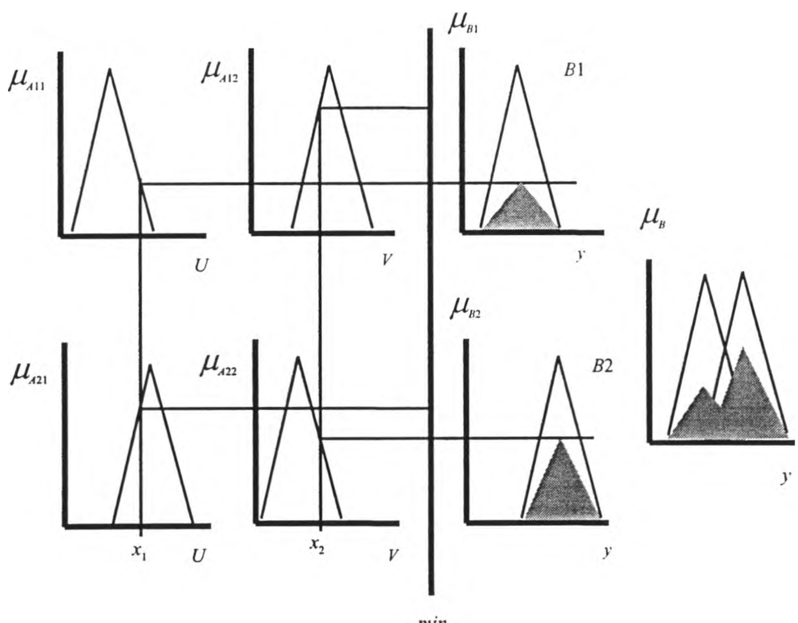
การดีฟัซซีนิยามโดยการเปลี่ยนรูปของปริมาณทางฟัซซีซึ่งเป็นรูปแบบของฟังก์ชันสมาชิกให้อยู่ในรูปแบบของคริส์พ วิธีการที่ใช้กันโดยทั่วไปมี 3 วิธีดังต่อไปนี้

ก) วิธีค่าสูงสุด (Maximum method)

วิธีนี้จะใช้ค่าของคริส์พที่สอดคล้องกับค่าฟังก์ชันสมาชิกที่มากที่สุด (peak point) เป็นคำตอบของระบบ แสดงได้ดังนี้



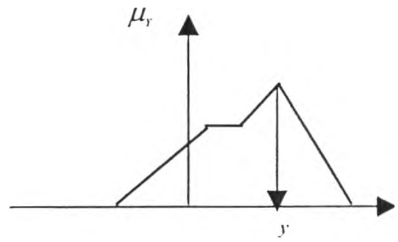
รูปที่ ก.7 แสดงการอนุมานฟัซซีแบบ *Max-Min*



รูปที่ ก.8 การอนุมานฟัซซีแบบ *Max-Prod*

$$y = DEFUZZ[\mu_Y(y)] \tag{ก.51}$$

โดย $$\max_{y \in Y}[\mu_Y(y)] = \mu_Y(y) \tag{ก.52}$$

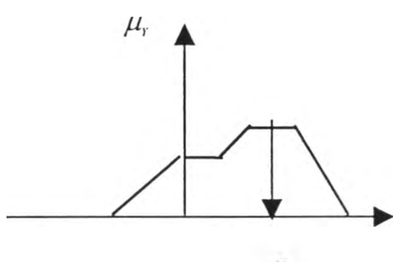


รูปที่ ก.9 การดีฟัซซีแบบค่าสูงสุด

ก) วิธีจุดศูนย์ถ่วง (Centroid method)

การดีฟัซซีวิธีนี้จะใช้น้ำหนักเฉลี่ยของฟังก์ชันสมาชิกหรือจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ในฟังก์ชันสมาชิก เป็นคำตอบของระบบฟัซซีแสดงได้ดังนี้

$$\bar{y} = \frac{\int \mu_Y(y).ydy}{\int \mu_Y(y)dy} \tag{ก.53}$$



รูปที่ ก.10 การดีฟัซซีแบบจุดศูนย์ถ่วง

ข) วิธีดีฟัซซีแบบค่าเฉลี่ยความสูง(Mean of maxima)

วิธีนี้จะใช้ได้ในกรณีที่ฟังก์ชันสมาชิกของแต่ละเอาท์พุทจากกฎฟัซซี เป็นแบบที่สมมาตร (Symetrical functions) สมมติให้

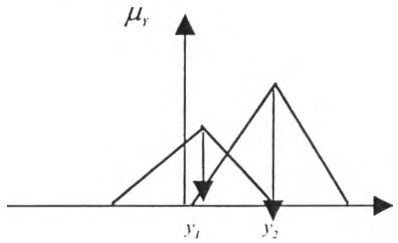
$$\mu_Y(y) = \max\left[\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \ldots, \mu_{y^r}(y)\right] \quad (ก.54)$$

และ

$$\mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right) = \max\left[\mu_{y^k}(y)\right] \quad (ก.55)$$

เอาท์พุทจากการดีฟัซซีแสดงได้ดังนี้

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{k=r} \mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right)\overline{y^k}}{\sum_{k=1}^{k=r} \mu_{y^k}\left(\overline{y^k}\right)} \quad (ก.56)$$



รูปที่ ก.11 การดีฟัซซีแบบความสูง

ภาคผนวก ข

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของกระบวนการศึกษา

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการสามารถหาได้โดยใช้หลักการอนุรักษ์ (Principle of conservation) ซึ่งสรุปความได้ว่า "การเปลี่ยนแปลงของปริมาณ คือ มวลสาร พลังงาน และโมเมนตัม ในกระบวนการ เท่ากับผลรวมทางพีชคณิตของปริมาณนั้นที่เข้าสู่กระบวนการและออกจากกระบวนการ" โดยปริมาณที่เข้าสู่กระบวนการหมายถึง ปริมาณที่เกิดใหม่ภายในกระบวนการ และปริมาณที่ออกจากกระบวนการ หมายถึงปริมาณที่สูญหายหรือถูกทำลาย หรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นปริมาณอื่น การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้หลักการอนุรักษ์สรุปผลได้ดังนี้

[อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในกระบวนการ] = [อัตราการเข้าสู่กระบวนการของปริมาณ] - [อัตราการออกจากกระบวนการของปริมาณ] + [อัตราการเกิดขึ้นของปริมาณในกระบวนการ] - [อัตราการสูญหายของปริมาณในกระบวนการ] (ข.1)

กำหนดให้

m = มวลสะสมในระบบ

h = ความสูงของน้ำในถัง

q_i = อัตราการไหลของน้ำเข้า

q_o = อัตราการไหลของน้ำออก

ρ = ความหนาแน่นของน้ำ

R = รัศมีของถัง

D = เส้นผ่านศูนย์กลางของถัง

V = ปริมาตรของน้ำในถัง

จากสมการอนุรักษ์มวลรอบถังทรงกลม ให้อัตราการเกิดขึ้นและอัตราการถูกทำลายของปริมาณเป็นศูนย์ สมการสุทธิจะเป็น

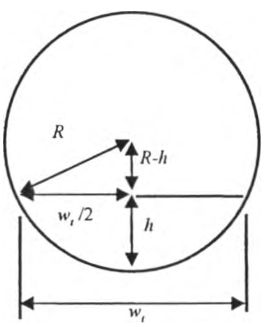
$$\frac{dm}{dt} = \rho q_i - \rho q_o \qquad (ข.2)$$

เมื่อ ρ คงที่

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho q_i - \rho q_o \qquad (ข.3)$$

$$\frac{dV}{dt} = q_i - q_o \qquad (ข.4)$$

และจากโครงสร้างเรขาคณิตของถังทรงกลม



รูปที่ ข.1 แสดงโครงสร้างเรขาคณิตของถังทรงกลม

จากรูปที่ ข.1

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{w_t/2} w\,dw\,d\theta\,dh \; = \int_0^h [\frac{\pi w_t^2}{4}]dh \qquad (ข.5)$$

$$w_t = 2\sqrt{R^2 - (R-h)^2} \qquad (ข.6)$$

$$V = \int_0^h \left[\pi\left(R^2 - (R-h)^2\right)\right]dh \qquad (ข.7)$$

$$dV = \pi\left(R^2 - (R-h)^2\right)dh \qquad (ข.8)$$

$$dV = \pi\left(Dh - h^2\right)dh \qquad (ข.9)$$

แทนสมการที่ (ข.9) ในสมการที่ (ข.4) จะได้

$$\pi\left(Dh - h^2\right)\frac{dh}{dt} = q_i - q_o \qquad (ข.10)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q_i}{\pi\left(Dh - h^2\right)} - \frac{q_o}{\pi\left(Dh - h^2\right)} \qquad (ข.11)$$

เมื่อ $q_o = C_v\sqrt{h} : C_v$ = ค่าคงที่ของวาล์วขาออก

แทนค่าในสมการที่ (ข.10) จะได้เป็น

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q_i}{\pi\left(Dh - h^2\right)} - \frac{C_v\sqrt{h}}{\pi\left(Dh - h^2\right)} \qquad (ข.12)$$

เมื่อ dt =ช่วงเวลาการเก็บข้อมูลซึ่งคงที่ = Δt; พิจารณา h ที่ขณะใดๆ

$$h_t - h_{t-1} = \left[\frac{q_i}{\pi\left(Dh_{t-1} - h_{t-1}^2\right)} - \frac{C_V\sqrt{h_{t-1}}}{\pi\left(Dh_{t-1} - h_{t-1}^2\right)}\right]\Delta t \qquad (ข.13)$$

ดังนั้นจะได้สมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการทดลองในรูปของระดับของเหลวที่ขณะใดๆ เป็น

$$h_t = \left[\frac{q_i}{\pi\left(Dh_{t-1} - h_{t-1}^2\right)} - \frac{C_V\sqrt{h_{t-1}}}{\pi\left(Dh_{t-1} - h_{t-1}^2\right)}\right]\Delta t + h_{t-1} \qquad (ข.14)$$

จากสมการที่ (ข.14) พอจะสรุปได้ว่ากระบวนการทดลองนี้เป็นกระบวนการแบบไม่เชิงเส้น โดยตัวแปรตามคือ h_t จะเป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นของ q_i และ h_{t-1} สมการที่ (ข.14) เป็นการวิเคราะห์คุณลักษณ์ของกระบวนการในแบบของโดเมนเวลาซึ่งอาจยังแสดงได้ยังไม่ชัดเจนนัก วิธีการวิเคราะห์กระบวนการที่ใช้กันโดยทั่วไปคือการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคการแปลงลาปลาซ เพื่อสามารถจัดให้สมการอยู่ในรูปแบบที่วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น ทำได้โดยการประมาณความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นสมการที่ (ข.12) โดยให้

$$\frac{dh}{dt}=\frac{q_i}{\pi\left(Dh-h^2\right)}-\frac{C_v\sqrt{h}}{\pi\left(Dh-h^2\right)}=f\left(h,q_i\right) \qquad (ข.15)$$

จากนั้นทำการกระจาย f โดยการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor-series expansion) รอบจุดอ้างอิงที่สภาวะคงตัวและจัดให้อยู่ในรูปของตัวแปรเบี่ยงเบน สมการที่ (ข.1) จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{dh'}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_s q_i'+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_s h' \qquad (ข.16)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_s=\frac{1}{\pi\left(Dh_s-h_s^2\right)} \qquad (ข.17)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right)_s=\left[\left(-\frac{q_{is}}{\pi}\right)\frac{\left(D-2h_s\right)}{\left(Dh_s-h_s^2\right)^2}\right]-\frac{C_v}{\pi}\left[\frac{1}{2\sqrt{h}_s\left(Dh_s-h_s^2\right)}-\frac{\sqrt{h_s}\left(D-2h_s\right)}{\left(Dh_s-h_s^2\right)^2}\right] \qquad ข.18)$$

ให้ A แทน $\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right)_s$ แล้วแทนเทอมของอนุพันธ์ทั้งหมดในสมการที่ (ข.16) ได้เป็น

$$\frac{dh'}{dt}=\frac{q'_i}{\pi\left(Dh_s-h_s^2\right)}+Ah' \qquad (ข.19)$$

แปลงสมการที่ (ข.19) ให้อยู่ในรูปของลาปลาซ (Laplace transform)

$$H'(s)=\frac{Q'(s)}{\pi\left(Dh_s-h_s^2\right)(s-A)} \qquad (ข.20)$$

จัดรูปสมการที่ (ข.20) ใหม่ จะได้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน (Transfer function) ของกระบวนการเป็น

$$\frac{H'(s)}{Q'(s)}=\frac{-1}{\pi A\left(Dh_s-h_s^2\right)\left(-\frac{s}{A}+1\right)}=\frac{K_P}{\tau_P s+1} \qquad (ข.21)$$

$$K_P=\frac{-1}{\pi A\left(Dh_s-h_s^2\right)} \quad ,\tau_P=-1/A \qquad (ข.22)$$

จากทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันในสมการที่ (ข.21) พบว่าเทอมสำคัญที่แสดงคุณลักษณ์ของกระบวนการ คือ เทอม K_p และ τ_p เป็นฟังก์ชันกับระดับความสูงอ้างอิง h_s แบบไม่เชิงเส้น จึงสรุปได้อย่างชัดเจนว่า กระบวนการทดลองนี้เป็นกระบวนการที่มีเกนและค่าคงที่เวลาไม่คงที่ โดยมีค่าเปลี่ยนไปตามระดับความสูงอ้างอิงใดๆ

ประวัติผู้เขียน

นางสาวรุ่งจิตร์ กาญจนวัฒน์ เกิดเมื่อวันที่ 29 ธันวาคม พ.ศ. 2514 ที่จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาเคมีอุตสาหกรรม คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในปีพ.ศ.2537 แล้วเข้าทำงานที่บริษัทสยามเคมีคอลอินดัสตรีจำกัดเมื่อปี พ.ศ.2537 และที่บริษัทไทยแดลิมในปี พ.ศ.2538 แล้วเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2539