บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การวิเคราะห์ความถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression Analysis)

ตัวแบบและข้อตกลงเบื้องต้นที่นำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ตัวแบบความถดถอยพหุนาม ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

(2.1) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \ldots + \beta_p x_i^p + \varepsilon_i \qquad ; \quad i = 1,\ldots,n$$

การวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาถึงตัวแบบที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีความคลาดเคลื่อน กล่าวคือ $x_i = x_i^* + \delta_i$ เมื่อ x_i^* เป็นตัวแปรแฝงในตัวแปรอิสระ(ตัวแปรอิสระที่ปราศจากความคลาดเคลื่อน) และ δ_i เป็นความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ ดังนั้นเราจะสามารถเขียนสมการที่ (2.1) ให้ถูกต้องมากขึ้นในรูปของตัวแปรแฝง (x_i^*) ดังนี้

(2.2) $$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \ldots + \beta_p x_i^{*p} + \varepsilon_i^* \qquad ; i = 1,2,\ldots,n$$

เมื่อ β_j เป็นพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของพจน์พหุนามที่ j ; $j = 1,\ldots,p$

จากสมการที่ (2.2) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\underset{\sim}{y}$ และ X เพื่อใช้ในการหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ในตัวแบบ ได้ดังนี้

ก) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรแฝงที่มีกำลังสูงสุดเป็น 6 ตัวแบบอยู่ในรูปของ

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \beta_4 x_i^{*1} + \beta_5 x_i^{*5} + \beta_6 x_i^{*o} + \varepsilon_i^*$$

หรือ
$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 (x_i - \delta_i) + \beta_2 (x_i - \delta_i)^2 + \beta_3 (x_i - \delta_i)^3 + \beta_4 (x_i - \delta_i)^4 + \beta_5 (x_i - \delta_i)^5 + \beta_6 (x_i - \delta_i)^6 + \varepsilon_i^*$$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X จะได้ตัวแบบใหม่ซึ่งอยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X ดังนี้

(2.3) $$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + \beta_{4_n} x_i^4 + \beta_{5_n} x_i^5 + \beta_{6_n} x_i^6 + \varpi_i$$

เมื่อ
$$\begin{aligned}
\beta_{0_n} &= \beta_0 \\
\beta_{1_n} &= \beta_1 - 2\beta_2\delta_i + 3\beta_3\delta_i^2 - 4\beta_4\delta_i^3 + 5\beta_5\delta_i^4 - 6\beta_6\delta_i^5 \\
\beta_{2_n} &= \beta_2 - 3\beta_3\delta_i + 6\beta_4\delta_i^2 - 10\beta_5\delta_i^3 + 15\beta_6\delta_i^4 \\
\beta_{3_n} &= \beta_3 - 4\beta_4\delta_i^2 + 6\beta_5\delta_i^2 + 4\beta_5\delta_i^3 - 16\beta_6\delta_i^3 - 4\beta_6\delta_i^4 \\
\beta_{4_n} &= \beta_4 - 4\beta_5\delta_i^2 - \beta_5\delta_i + 4\beta_6\delta_i^3 + 7\beta_6\delta_i^2 + 4\beta_6\delta_i^3 \\
\beta_{5_n} &= \beta_5 - 4\beta_6\delta_i^2 - 2\beta_6\delta_i \\
\beta_{6_n} &= \beta_6
\end{aligned}$$

และ
$$\varpi_i \;\; i.i.d. \; \mathrm{N}\left(\left(\beta_2\sigma_\delta^2 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta_3\sigma_\delta^3 + \frac{6}{4}\beta_4\sigma_\delta^4 - \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\beta_5\sigma_\delta^5 + \frac{15}{2}\beta_6\sigma_\delta^6\right), \left(\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_\delta^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\sigma_\delta^4 + \frac{(15\pi-4)}{2\pi}\beta_3^2\sigma_\delta^6 + \frac{201}{4}\beta_4^2\sigma_\delta^8 + \frac{(945\pi-64)}{2\pi}\beta_5^2\sigma_\delta^{10} + \frac{20565}{4}\beta_6^2\sigma_\delta^{12}\right)\right)$$

ข) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรแฝงที่มีกำลังสูงสุดเป็น 5 ตัวแบบอยู่ในรูปของ

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \beta_4 x_i^{*4} + \beta_5 x_i^{*5} + \varepsilon_i^*$$

หรือ
$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1(x_i - \delta_i) + \beta_2(x_i - \delta_i)^2 + \beta_3(x_i - \delta_i)^3 + \beta_4(x_i - \delta_i)^4 + \beta_5(x_i - \delta_i)^5 + \varepsilon_i^*$$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X จะได้ตัวแบบใหม่ซึ่งอยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X ดังนี้

(2.4) $$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + \beta_{4_n} x_i^4 + \beta_{5_n} x_i^5 + \varpi_i$$

เมื่อ
$$\begin{aligned}
\beta_{0_n} &= \beta_0 \\
\beta_{1_n} &= \beta_1 - 2\beta_2\delta_i + 3\beta_3\delta_i^2 - 4\beta_4\delta_i^3 + 5\beta_5\delta_i^4 \\
\beta_{2_n} &= \beta_2 - 3\beta_3\delta_i + 6\beta_4\delta_i^2 - 10\beta_5\delta_i^3 \\
\beta_{3_n} &= \beta_3 - 4\beta_4\delta_i^2 + 6\beta_5\delta_i^2 + 4\beta_5\delta_i^3
\end{aligned}$$

$$\beta_{4_n} = \beta_4 - 4\beta_5\delta_i^2 - \beta_5\delta_i$$
$$\beta_{5_n} = \beta_5$$

และ $\varpi_i \; i.i.d. \; \mathrm{N}\left(\left(\beta_2\sigma_\delta^2 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta_3\sigma_\delta^3 + \frac{6}{4}\beta_4\sigma_\delta^4 - \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\beta_5\sigma_\delta^5\right),\right.$

$$\left.\left(\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_\delta^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\sigma_\delta^4 + \frac{(15\pi - 4)}{2\pi}\beta_3^2\sigma_\delta^6 + \frac{201}{4}\beta_4^2\sigma_\delta^8 + \frac{(945\pi - 64)}{2\pi}\beta_5^2\sigma_\delta^{10}\right)\right)$$

ค) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรแฝงที่มีกำลังสูงสุดเป็น 4 ตัวแบบอยู่ในรูปของ

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \beta_4 x_i^{*4} + \varepsilon_i^*$$

หรือ $y_i^* = \beta_0 + \beta_1(x_i - \delta_i) + \beta_2(x_i - \delta_i)^2 + \beta_3(x_i - \delta_i)^3 + \beta_4(x_i - \delta_i)^4 + \varepsilon_i^*$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X จะได้ตัวแบบใหม่ซึ่งอยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X ดังนี้

(2.5) $$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + \beta_{4_n} x_i^4 + \varpi_i$$

เมื่อ $\beta_{0_n} = \beta_0$

$$\beta_{1_n} = \beta_1 - 2\beta_2\delta_i + 3\beta_3\delta_i^2 - 4\beta_4\delta_i^3$$
$$\beta_{2_n} = \beta_2 - 3\beta_3\delta_i + 6\beta_4\delta_i^2$$
$$\beta_{3_n} = \beta_3 - 4\beta_4\delta_i^2$$
$$\beta_{4_n} = \beta_4$$

และ $\varpi_i \; i.i.d. \; \mathrm{N}\left(\left(\beta_2\sigma_\delta^2 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta_3\sigma_\delta^3 + \frac{6}{4}\beta_4\sigma_\delta^4\right),\right.$

$$\left.\left(\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_\delta^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\sigma_\delta^4 + \frac{(15\pi - 4)}{2\pi}\beta_3^2\sigma_\delta^6 + \frac{201}{4}\beta_4^2\sigma_\delta^8\right)\right)$$

ง) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรแฝงที่มีกำลังสูงสุดเป็น 3 ตัวแบบอยู่ในรูปของ

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \varepsilon_i^*$$

หรือ $y_i^* = \beta_0 + \beta_1(x_i - \delta_i) + \beta_2(x_i - \delta_i)^2 + \beta_3(x_i - \delta_i)^3 + \varepsilon_i^*$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X จะได้ตัวแบบใหม่ซึ่งอยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X ดังนี้

(2.6) $$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + \varpi_i$$

เมื่อ $\beta_{0_n} = \beta_0$

$\beta_{1_n} = \beta_1 - 2\beta_2\delta_i + 3\beta_3\delta_i^2$

$\beta_{2_n} = \beta_2 - 3\beta_3\delta_i$

$\beta_{3_n} = \beta_3$

และ $\varpi_i \; i.i.d. \; \mathrm{N}\left(\left(\beta_2\sigma_\delta^2 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta_3\sigma_\delta^3\right), \left(\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_\delta^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\sigma_\delta^4 + \frac{(15\pi - 4)}{2\pi}\beta_3^2\sigma_\delta^6\right)\right)$

จ) เมื่อตัวแบบประกอบด้วยตัวแปรแฝงที่มีกำลังสูงสุดเป็น 2 ตัวแบบอยู่ในรูปของ

$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \varepsilon_i^*$

หรือ $y_i^* = \beta_0 + \beta_1(x_i - \delta_i) + \beta_2(x_i - \delta_i)^2 + \varepsilon_i^*$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X จะได้ตัวแบบใหม่ซึ่งอยู่ในรูป $\underset{\sim}{y}$ และ X ดังนี้

(2.7) $$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \varpi_i$$

เมื่อ $\beta_{0_n} = \beta_0$

$\beta_{1_n} = \beta_1 - 2\beta_2\delta_i$

$\beta_{2_n} = \beta_2$

และ $\varpi_i \;\; i.i.d. \; \mathrm{N}\left(\beta_2\sigma_\delta^2 \,, \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_\delta^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\sigma_\delta^4 \right)$

ตัวแบบความถดถอยพหุนามในกรณีนี้เป็นตัวแบบเชิงเส้นในพารามิเตอร์ หมายความว่าในแต่ละเทอมของตัวแบบมีพารามิเตอร์เพียง 1 ตัว คูณด้วยค่าคงที่ของตัวแปรอิสระและเนื่องจากตัวแบบที่ใช้ในการพิจารณาเป็นตัวแบบเชิงเส้นในพารามิเตอร์ ดังนั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์เราสามารถใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ดังที่จะได้กล่าวต่อไป

2.2 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุคูณโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (Ordinary Least Squares Method (OLS))

วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุคูณนี้มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้นที่คิดขึ้นโดย คาร์ล เฟรดริก เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ในปี ค.ศ.1777-1855 และ อังเดร แอนดรีวิช มาร์คอฟ (Andrei Andreevich Markov) ในปี ค.ศ.1855-1922 โดยมีหลักในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์คือ ทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum of Squares Error(SSE)) มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งแสดงรายละเอียดดังนี้

<u>นิยามที่ 1</u>

จากสมการ $\underset{\sim}{y}^{*} = X^{*}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{*}$ ซึ่งเมทริกซ์ X^{*} ประกอบด้วย $\underset{\sim i}{x}^{*'} = (1, x_{i}^{*}, \ldots, x_{i}^{*^{p}})$ เมื่อ $x_i = x_i^* + \delta_i$ หรือ $x_i^* = x_i - \delta_i$ จะได้ว่าตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดของ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ที่ทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด

จากนิยามที่ 1 เราจะทำการหาตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดสามัญได้ดังนี้

เพราะว่า $\underset{\sim}{y}^{*} = X^{*}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{*}$ ดังนั้นเมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ กล่าวคือ $x_i = x_i^* + \delta_i$ เราสามารถเขียนสมการถดถอยพหุนามดังกล่าวได้ใหม่เป็น $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim n}{\beta} + \underset{\sim}{\varpi}$ และกำหนดให้ $\underset{\sim n}{\hat{\beta}} = (\hat{\beta}_{0_n}, \hat{\beta}_{1_n}, \ldots, \hat{\beta}_{p_n})'$ จะได้ว่า $\underset{\sim}{\hat{y}} = X\underset{\sim n}{\hat{\beta}}$ โดย $\underset{\sim n}{\hat{\beta}}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดของ $\underset{\sim n}{\beta}$ ที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น $\underset{\sim}{\varpi}$ เป็นเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ซึ่งผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน คือ

$$
\begin{aligned}
\text{SSE} &= (\underset{\sim}{\hat{\varpi}}'\underset{\sim}{\hat{\varpi}}) \\
&= (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim n}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim n}{\hat{\beta}}) \\
&= (\underset{\sim}{y}' - \underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X')(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim n}{\hat{\beta}}) \\
&= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\underset{\sim n}{\hat{\beta}} - \underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim n}{\hat{\beta}} \\
&= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim n}{\beta}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim n}{\hat{\beta}}
\end{aligned}
$$

การหาค่าน้อยที่สุดของผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทำได้โดยการหาอนุพันธ์ (differentiate) เทียบกับ β_{n_h} เมื่อ $h = 0,1,\ldots,p$ (p เป็นจำนวนพจน์พหุนาม) แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0

$$\frac{\partial(\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon})}{\partial\beta_{n_h}} = \frac{\partial}{\partial\beta_{n_h}}\left(\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim n}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim n}{\hat{\beta}}\right) = 0 \quad ; h = 0,\ldots,p$$

จะได้ว่า $\quad -2X'\underset{\sim}{y} + 2X'X\underset{\sim n}{\hat{\beta}} = 0$

$$(X'X)\underset{\sim n}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

(2.8) ดังนั้น

$$\underset{\sim n_{OLS}}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underset{\sim}{y})$$

2.3 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุคูณโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (Adjusted Least Squares Method (ALS))

วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุคูณโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุงเป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (OLS) ที่คิดขึ้นโดย แชง และ ชนิวไวส์ (Chang and Schneewiess) ในปี ค.ศ.1998 ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ได้พิจารณาถึงความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นใน ตัวแปรอิสระด้วย

จากฟังก์ชันพหุนาม $\quad y_i^{\bullet} = \underset{\sim i}{x}^{\bullet\prime}\underset{\sim}{\beta} + \varepsilon_i^{\bullet} = \eta_i + \varepsilon_i^{\bullet}$

เมื่อ $\eta_i = \underset{\sim i}{x}^{\bullet\prime}\underset{\sim}{\beta}$

และ $\underset{\sim i}{x}^{\bullet\prime} = (1, x_i^{\bullet}, x_i^{\bullet 2}, \ldots, x_i^{\bullet p})$

ถ้าทราบค่า $x_i^{\bullet}$; $i = 1,\ldots,n$ เราสามารถใช้หลักการเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ ทำให้ได้สมการการประมาณ สำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ดังนี้

(2.9)

$$\underset{\sim OLS}{\hat{\beta}} = (X^{\bullet\prime}X^{\bullet})^{-1}(X^{\bullet\prime}\underset{\sim}{y}^{\bullet})$$

เมื่อ $\quad X^{\bullet\prime}X^{\bullet} = \sum \underset{\sim i}{x}^{\bullet\prime}\underset{\sim i}{x}^{\bullet}$

และ $\quad X^{\bullet\prime}\underset{\sim}{y}^{\bullet} = \sum \underset{\sim i}{x}^{\bullet\prime} y_j^{\bullet}$

ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเป็นการยากที่จะทราบค่าที่แท้จริงของ $(X^{*'}X^{*})$ และ $(X^{*'}\underset{\sim}{y}^{*})$ ในปี ค.ศ.1985 แชน และ แมค (Chan and Mak) จึงได้เสนอไว้ว่าสามารถแทน เมทริกซ์ $X^{*'}X^{*}$ ขนาด $(p+1)\times(p+1)$ และ $X^{*'}\underset{\sim}{y}^{*}$ ขนาด $(p+1)$ ซึ่งถือว่าไม่ทราบค่า ด้วยเมทริกซ์การประมาณค่า H และเวกเตอร์การประมาณค่า $\underset{\sim}{h}$ ตามลำดับ โดยที่ H และ $\underset{\sim}{h}$ มีคุณสมบัติ $E(H)=X^{*'}X^{*}$ และ $E(\underset{\sim}{h})=E(X^{*'}\underset{\sim}{y}^{*})$ ซึ่งในเมทริกซ์การประมาณค่า H และเวกเตอร์การประมาณค่า $\underset{\sim}{h}$ จะประกอบ 2 องค์ประกอบหลักได้แก่ตัวแปรแฝง (ตัวแปรอิสระที่ปราศจากความคลาดเคลื่อน) x_i^{*} และความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ δ_i

<u>การหาเมทริกซ์การประมาณค่า H</u>

เนื่องจาก H เป็นเมทริกซ์ค่าประมาณของ $X^{*'}X^{*}$ ดังนั้นหากเมทริกซ์ $X^{*'}X^{*}$ มีขนาด $(p+1)\times(p+1)$ โดยที่ X^{*} มีสมาชิก ประกอบด้วย $\underset{\sim i}{x}^{*'}=(1,x_i^{*},x_i^{*2},\dots,x_i^{*p})$ จะทำให้เมทริกซ์การประมาณค่า H มีขนาด $(p+1)\times(p+1)$ และประกอบด้วยสมาชิกซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับสมาชิกในเมทริกซ์ $X^{*'}X^{*}$

กำหนดให้ t_r , $r = 0,\dots,p$ เป็นสมาชิกในเมทริกซ์การประมาณค่า H โดยที่ t_r คือพหุนามระดับ r ของ x และ t_r มีคุณสมบัติคือ $E(t_r)=x^{*r}$ ซึ่งทำให้ H มีค่าเข้าใกล้ $X^{*'}X^{*}$ เราสามารถหา $E(t_r)$ ได้จากการพิจารณาที่สมการดังนี้

$$E(x^r)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x_j^{*}\,E(\delta^{r-j})=\sum_{j=0}^{r}c_{rj}x^{*j} \quad ; \; r = 0,\dots,p$$

เมื่อ $c_{rj}=\binom{r}{j}E(\delta^{r-j})$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์พหุนาม x^{*}

ถ้าแทนค่า $E(x^r)$ ด้วย x^r และ x^{*j} ด้วยตัวแปร t_j ซึ่งเป็นสมาชิกในเมทริกซ์ H จะได้สมการใหม่เป็นดังสมการ (2.10)

$$x^r=\sum_{j=0}^{r}c_{rj}t_j \quad ; \; r = 0,\dots,p \tag{2.10}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ t_j ดังนี้

$$(2.11)\qquad t_r = \sum_{j=0}^{r} a_{rj}x^j = r!\sum_{j,k;2j+k=r} \frac{(-\frac{1}{2}\sigma_\delta^2)^j x^k}{j!k!}\ ;\ r = 0,\ldots,p$$

ดังนั้นจะได้เมทริกซ์ H ซึ่งเป็นค่าประมาณของ $X^{*'}X^*$ เป็นดังนี้

$$H = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_p \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_p & t_{p+1} & \cdots & t_{2p} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก a_{rj} ในสมการที่ (2.11) เป็นฟังก์ชันของ $E(\delta^l)$, $l = 0,\ldots,r$ จะได้ว่า $E(t_r) = x^{*j}$ กำหนดให้เมทริกซ์ $H = H(x)$ ขนาด $(p+1)\times(p+1)$ มีสมาชิกประกอบด้วย t_{m+q} ; $m,q = 0,\ldots,p$ ดังนั้นเมทริกซ์ H จะมีคุณสมบัติของตัวประมาณที่ดีคือ $E(H) = X^{*'}X^*$ ดังที่กล่าวข้างต้น

<u>การหาเวกเตอร์การประมาณค่า $\underset{\sim}{h}$</u>

เนื่องจาก $\underset{\sim}{h}$ เป็นเวกเตอร์ค่าประมาณของ $X^{*'}\underset{\sim}{y}^*$ ดังนั้นหากเวกเตอร์ $X^{*'}\underset{\sim}{y}^*$ มีขนาด $(p+1)\times 1$ โดยที่ X^* มีสมาชิกประกอบด้วย $\underset{\sim}{x}_i^{*'} = (1, x_i^*, x_i^{*2}, \ldots, x_i^{*p})$ จะทำให้เวกเตอร์การประมาณค่า $\underset{\sim}{h}$ มีขนาด $(p+1)\times 1$ และประกอบด้วยสมาชิกคือ $\underset{\sim}{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_p)'$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับสมาชิกในเวกเตอร์ $X^{*'}\underset{\sim}{y}^*$

พิจารณาเวกเตอร์ $X^{*'}\underset{\sim}{\eta}$ ขนาด $(p+1)$ ซึ่งมีสมาชิกเป็น $x^{*r}\underset{\sim}{\eta}$, $r = 0,\ldots,p$

(2.12) เมื่อ $$x^{*r}\eta = E(t_r\underset{\sim}{\eta}) = E(t_r\underset{\sim}{y}) - E(t_r\underset{\sim}{\varepsilon}^*)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{\eta} = X^{*'}\underset{\sim}{\beta}$

และจาก (2.11) จะได้ว่า

$$(2.13)\qquad E(t_r\underset{\sim}{\varepsilon}^*) = E\{\sum_{j=0}^{r} a_{rj}(x^* + \delta)^j \underset{\sim}{\varepsilon}^*\} = \sum_{j=0}^{r} b_{rj}x^{*j}$$

เมื่อ b_{rj} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์พหุนามของ x^* เขียนได้เป็น

(2.14) $$b_{rj} = \sum_{s=j}^{r} a_{rs} \binom{s}{j} E(\delta^{s-j} \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$$

ซึ่งในสมการที่ (2.13) และ (2.14) พบว่าค่าของ b_{rj} ขึ้นอยู่กับ a_{rs} ที่เป็นฟังก์ชันของ $E(\delta^{l})$ และ $E(\delta^{l} \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$ เมื่อ $l = 0,\ldots,r$ เท่านั้น เมื่อตัวประมาณของ $E(t_r \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$ คือ $\hat{E}(t_r \underset{\sim}{\varepsilon}^{*}) = \sum b_{rj} t_j$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.12) ให้อยู่ในรูปของตัวประมาณเป็นดังนี้

(2.15) $$h_r = \underset{\sim r}{t}' \underset{\sim}{y} - \hat{E}(\underset{\sim r}{t}' \underset{\sim}{\varepsilon}^{*}) \quad ; \quad r = 0,\ldots,p$$

เนื่องจาก $\hat{E}(\underset{\sim r}{t}' \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$ เป็นฟังก์ชันของ $E(\delta^{l} \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$ และจากคุณสมบัติการเป็นอิสระซึ่งกันและกันของ δ และ ε^{*} จะทำให้ $\hat{E}(t_r' \underset{\sim}{\varepsilon}^{*})$ เป็น 0 ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.15) ได้ใหม่เป็นดังนี้

(2.16) $$h_r = \underset{\sim r}{t}' \underset{\sim}{y} = T' \underset{\sim}{y}$$

เมื่อ $$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_p \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_p \end{bmatrix}_{n\times(p+1)}$$

จากสมการที่ (2.16) เห็นได้ชัดเจนว่า $E(h_r) = x^{*r}\eta$ และเมื่อกำหนดให้ $\underset{\sim}{h} = h(x,y) = (h_0, h_1, \ldots, h_p)'$ จะได้ว่า $E(\underset{\sim}{h}) = X^{*'} \underset{\sim}{\eta}$

ดังนั้นสมการสำหรับใช้ในการหาตัวประมาณแบบ ALS ได้จากการแทนค่า $X^{*'} X^{*}$ และ $X^{*'} \underset{\sim}{y}^{*}$ ใน (2.9) ด้วยเมทริกซ์ H และเวกเตอร์ $\underset{\sim}{h}$ ตามลำดับ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$H \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{ALS}} = \underset{\sim}{h}$$

(2.17) หรือ $$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{ALS}} = H^{-1} \underset{\sim}{h}$$

2.4 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุคูณโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Squares Method (WLS))

วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุนามโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักเป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญเช่นเดียวกับวิธี ALS ซึ่งคิดขึ้นโดย ฮวง และ ฮูวาง (Huang and Huwang) ในปี ค.ศ.2001 โดยมีการพิจารณาถึงความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในตัวแปรอิสระร่วมด้วย และได้นำความรู้เกี่ยวกับความแปรปรวนมาใช้ในการถ่วงน้ำหนักกับสัมประสิทธิ์การถดถอย

จากนิยามที่ 1 เราจะทำการหาตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักได้ดังนี้

เพราะว่า $\underset{\sim}{y}^* = X^* \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^*$ ดังนั้นเมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ กล่าวคือ $x_i = x_i^* + \delta_i$ เราสามารถเขียนสมการถดถอยพหุนามดังกล่าวได้ใหม่เป็น $\underset{\sim}{y} = X \underset{\sim n}{\beta} + \underset{\sim}{\varpi}$ และกำหนดให้ $\underset{\sim n}{\hat{\beta}} = (\hat{\beta}_{0_n}, \hat{\beta}_{1_n}, \ldots, \hat{\beta}_{p_n})'$ จะได้ว่าสมการการประมาณค่าของ $\underset{\sim}{y}$ คือ $\underset{\sim}{\hat{y}} = X \underset{\sim n}{\hat{\beta}}$ โดย $\underset{\sim n}{\hat{\beta}}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนักของ $\underset{\sim n}{\beta}$ ที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นหากต้องการหา $\underset{\sim w}{\hat{\beta}}$ ที่เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักจะหาได้จากฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนักดังนี้

$$S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i - \ldots - \beta_p x_i^p)^2$$

โดยหลักการเดียวกับวิธี OLS จะทำให้ได้สมการปกติ (normal equations) จำนวน $p+1$ สมการเป็นดังนี้

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i + \ldots + \hat{\beta}_p \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} y_i$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^2 + \ldots + \hat{\beta}_p \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{p+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i y_i$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^p + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{p+1} + \ldots + \hat{\beta}_p \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{2p} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^p y_i$$

จากสมการปกติทั้ง $p+1$ สมการ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์และเวกเตอร์ของค่าประมาณสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้เป็น

$$\underset{\sim w}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{p} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{p} & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{p+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{2p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i y_y \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{p} y_i \end{bmatrix}$$

(2.18) หรือ $$\underset{\sim\, n_{WLS}}{\hat{\beta}} = (X'W^{-1}X)^{-1}(X'W^{-1}\underset{\sim}{y})$$

ในงานวิจัยครั้งนี้ค่าที่ใช้ถ่วงน้ำหนักคือ $Var(y_i \mid x_i)$ ดังนั้นจะได้กล่าวรายละเอียดการหาค่าถ่วงน้ำหนักดังต่อไปนี้

<u>การคำนวณค่าถ่วงน้ำหนัก</u>

(2.19) จาก $$Var(y_i \mid x_i) = E(y_i^2 \mid x_i) - [E(y_i \mid x_i)]^2$$

เมื่อ $$E(y_i \mid x_i) = \overset{*}{\beta}_o + \overset{*}{\beta}_1 x_i + \ldots + \overset{*}{\beta}_p x_i^p$$

และ $$E(y_i^2 \mid x_i) = \overset{**}{\beta}_o + \overset{**}{\beta}_1 x_i + \overset{**}{\beta}_2 x_i^2 + \ldots + \overset{**}{\beta}_{2p} x_i^{2p}$$

1) กำหนดให้ $\underset{\sim}{\overset{**'}{\beta}} = (\overset{**}{\beta}_0 - \sigma_{\varepsilon}^2, \overset{**}{\beta}_1, \ldots, \overset{**}{\beta}_{2p})$ ซึ่ง $\underset{\sim}{\overset{**}{\beta}}$ เราสามารถคำนวณได้จากผลคูณของเวกเตอร์และเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\overset{**'}{\beta}} = (\overset{**}{\beta}_0 - \sigma_{\varepsilon}^2, \overset{**}{\beta}_1, \ldots, \overset{**}{\beta}_{2p})$$

$$= (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2p}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2p2p}\sigma^{2p} & c_{2p2p}\sigma^{2p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r^{2p} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\alpha_m = \sum_{\{0\le i,j\le p, i+j=m\}} \beta_i\beta_j \ , 0 \le m \le 2p$

$\sigma = \sqrt{r(1-r)\sigma_x^2}$

$c_{ij} = \binom{i}{j} a_j \ ; 1 \le i \le 2p, 1 \le j \le i$

โดยที่ $a_j = \dfrac{j!}{(2^{j/2}(j/2)!)}$; j เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ $a_j = 0$; j เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

และ $r^j = \left[\dfrac{\sigma_{x^*}^2}{(\sigma_{x^*}^2 + \sigma_\delta^2)}\right]^j$; $j = 1,...,2p$

2) กำหนดให้ $\underset{\sim}{\beta}^{*\prime} = (\beta_0^*, \beta_1^*, ..., \beta_p^*)$ ซึ่ง $\underset{\sim}{\beta}^{**}$ เราสามารถคำนวณได้ดังนี้

$\underset{\sim}{\beta}^{*\prime} = (\beta_0^*, \beta_1^*, ..., \beta_p^*)$

$$= (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{22}\sigma^p & c_{22}\sigma^{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sigma = \sqrt{r(1-r)\sigma_x^2}$

$c_{ij} = \binom{i}{j} a_j \ ; 1 \le i \le p, 1 \le j \le i$

โดยที่ $a_j = \dfrac{j!}{(2^{j/2}(j/2)!)}$; j เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ $a_j = 0$; j เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

และ $r^j = \left[\dfrac{\sigma_{x^*}^2}{(\sigma_{x^*}^2 + \sigma_\delta^2)}\right]^j$, $j = 1,...,p$

นำค่าที่คำนวณได้ทั้งหมดแทนในสมการที่ (2.19) จะได้ค่า $w_i = Var(y_i \mid x_i)$ ซึ่งเป็นค่าถ่วงน้ำหนัก จากนั้นแทนค่า $\hat{w}_i$ ที่ได้ ใน (2.18) จะทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์แบบ WLS