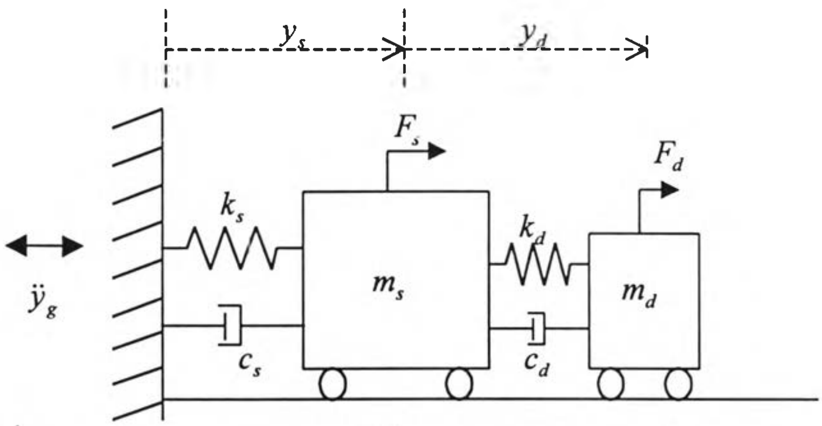
บทที่ 2
หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

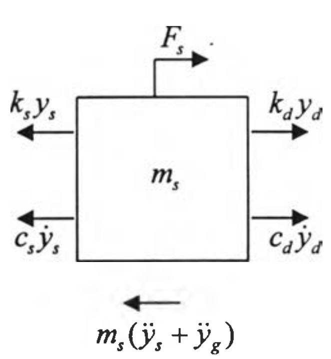
2.1 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

วิธีการของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟเป็นวิธีการที่เป็นที่ยอมรับอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน โดยวิธีการดังกล่าวจะใช้ระบบมวลย่อยหรือที่เรียกว่าระบบมวลหน่วงเป็นตัวช่วยในการสลายพลังงานของโครงสร้าง ซึ่งสามารถแสดงดังรูปที่ 2.1

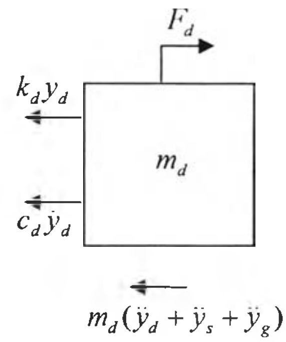


รูปที่ 2.1 ภาพแสดงแบบจำลองของวิธีการแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ

เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว พลังงานบางส่วนของโครงสร้างถูกจะถ่ายทอดสู่ระบบมวลย่อยซึ่งจะทำให้มวลย่อยสั่น ดังนั้นจึงเป็นการทำให้พลังงานการสั่นของโครงสร้างลดลง ระบบมวลหน่วงจึงถือว่าได้ช่วยลดพลังงานการสั่นของโครงสร้างทำให้โครงสร้างมีการสั่นน้อยลง ขั้นตอนการวิเคราะห์วิธีการแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟนี้สามารถทำได้โดยวิเคราะห์จากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 ภาพแสดงแผนภาพอิสระของโครงสร้าง



รูปที่ 2.3 แสดงแผนภาพอิสระของมวลหน่วง

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งโครงสร้างและมวลย่อยสามารถหาได้จากแผนภาพอิสระของโครงสร้างและมวลหน่วงซึ่งจะได้ว่า

$$m_s\ddot{y}_s + c_s\dot{y}_s + k_s y_s - c_d\dot{y}_d - k_d y_d = F_s - m_s\ddot{y}_g = P_s \tag{2.1}$$

$$m_d\ddot{y}_s + m_d\ddot{y}_d + c_d\dot{y}_d + k_d y_d = F_d - m_d\ddot{y}_g = P_d \tag{2.2}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ (2.1) และ (2.2) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการทางเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ m_d & m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_d \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \\ P_d \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

หรือ $$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{P} \; ; \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

จากสมการที่ (2.4) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในลักษณะของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อที่จะทำการแก้สมการได้ง่ายกว่าดังต่อไปนี้

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}\right] \tag{2.6}$$

โดยที่

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_s m_d}\begin{bmatrix} m_d & 0 \\ -m_d & m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_s^2 & -\mu\omega_d^2 \\ 0 & \omega_d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 & -\mu\omega_d^2 \\ -\omega_s^2 & (1+\mu)\omega_d^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_s & -c_d \\ 0 & c_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\xi_s\omega_s & -2\mu\xi_d\omega_d \\ 0 & 2\xi_d\omega_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_s\omega_s & -2\mu\xi_d\omega_d \\ -2\xi_s\omega_s & 2(1+\mu)\xi_d\omega_d \end{bmatrix}$$

สำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวเท่านั้นจะได้ว่า

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_s \\ P_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_s \\ -m_d \end{bmatrix} \ddot{y}_g \tag{2.7}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/m_s & 0 \\ 0 & 1/m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_s \\ -m_d \end{bmatrix} \ddot{y}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{y}_g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{y}_g$$

เมื่อแทนค่าข้างต้นไปในสมการที่ (6) จะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

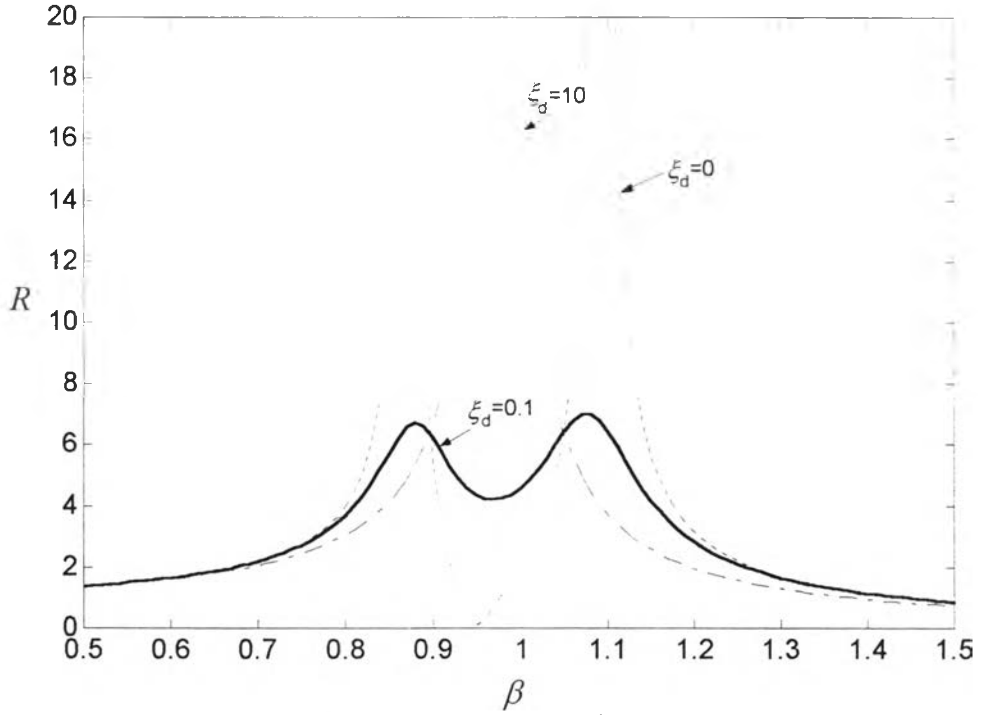
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \\ \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_s^2 & \mu\omega_d^2 & -2\xi_s\omega_s & 2\mu\xi_d\omega_d \\ \omega_s^2 & -(1+\mu)\omega_d^2 & 2\xi_s\omega_s & -2(1+\mu)\xi_d\omega_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \\ \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{y}_g \tag{2.8}$$

หรือ

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B_f} \cdot \ddot{y}_g \,; \qquad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \\ \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

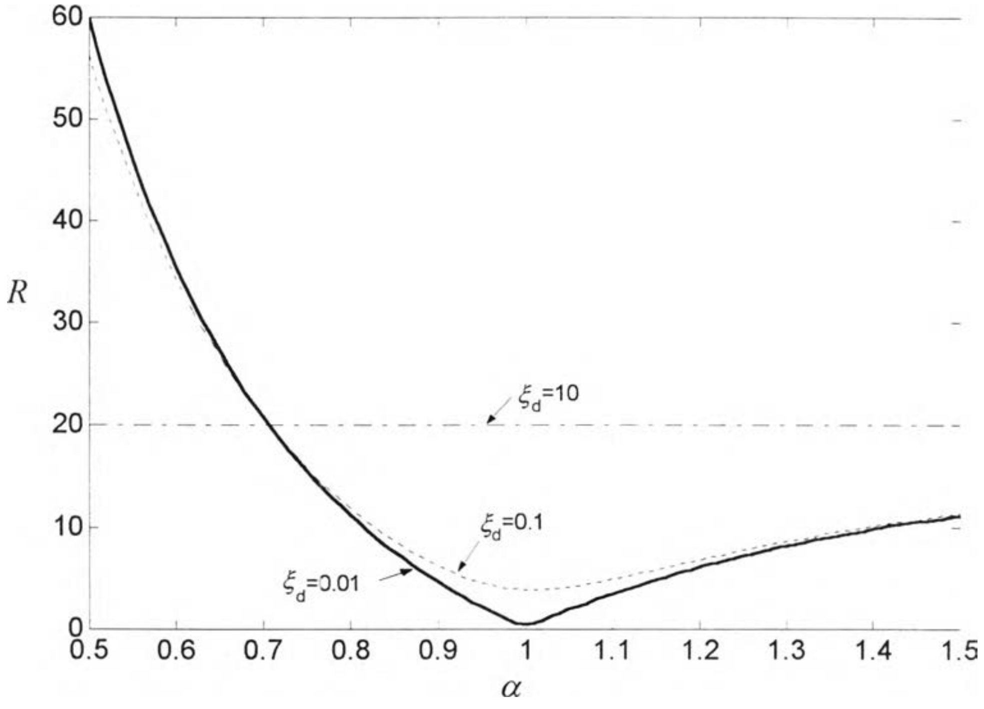
สมการที่ (2.9) เป็นสมการหลักที่ใช้ในการวิเคราะห์การสั่นไหวโดยวิธีการลดการสั่นไหวแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ โดยผลจากการวิเคราะห์พบว่าเมื่อใช้ค่ามวลของมวลหน่วงประมาณ 3 เปอร์เซ็นต์ของมวลของโครงสร้างและกำหนดพารามิเตอร์ระบบมวลหน่วงปรับค่าอย่างเหมาะสม (Den Hartog, 1956) จะทำให้การสั่นไหวของโครงสร้างมีขนาดลดลง

ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 2.4 และ รูปที่ 2.5 โดยในรูปที่ 2.4 เป็นกราฟแสดงขนาดของการสั่นไหวของโครงสร้างเทียบกับระยะการเคลื่อนตัวสถิตย์หรือค่าสัมประสิทธิ์การขยายพลศาสตร์ (Dynamic amplification factor, $R = \frac{y_{ss}}{y_{st}}$) ที่ค่า ξ_d ต่างๆ ค่า β แสดงถึงอัตราส่วนของความถี่ของแผ่นดินไหวแบบฮาร์โมนิกต่อความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ($\beta = \frac{\omega}{\omega_s}$)



รูปที่ 2.4 แสดงค่าสัมประสิทธิ์การขยายพลศาสตร์ , R , ที่อัตราส่วนความถี่ของแรงต่อโครงสร้าง, β ,มีค่าต่างๆ โดยที่กำหนดความถี่ของมวลหน่วงไว้อย่างเหมาะสม

รูปที่ 2.5 เป็นรูปที่แสดงให้เห็นถึงผลของความถี่ของมวลหน่วงต่อค่าสัมประสิทธิ์การขยายพลศาสตร์ โดยที่ค่า α เป็นค่าอัตราส่วนของความถี่ของมวลหน่วงต่อความถี่โครงสร้าง ($\alpha = \frac{\omega_d}{\omega_s}$) ซึ่งจะพบว่าเมื่อค่า β มีค่าประมาณ 1 จะทำให้มีการสั่นไหวของโครงสร้างมีค่าน้อยกว่าที่ค่าอื่นๆ



รูปที่ 2.5 แสดงค่าสัมประสิทธิ์การขยายพลศาสตร์, R ,ที่อัตราส่วนความถี่ของมวลหน่วงต่อโครงสร้าง, β ,มีค่าต่างๆ

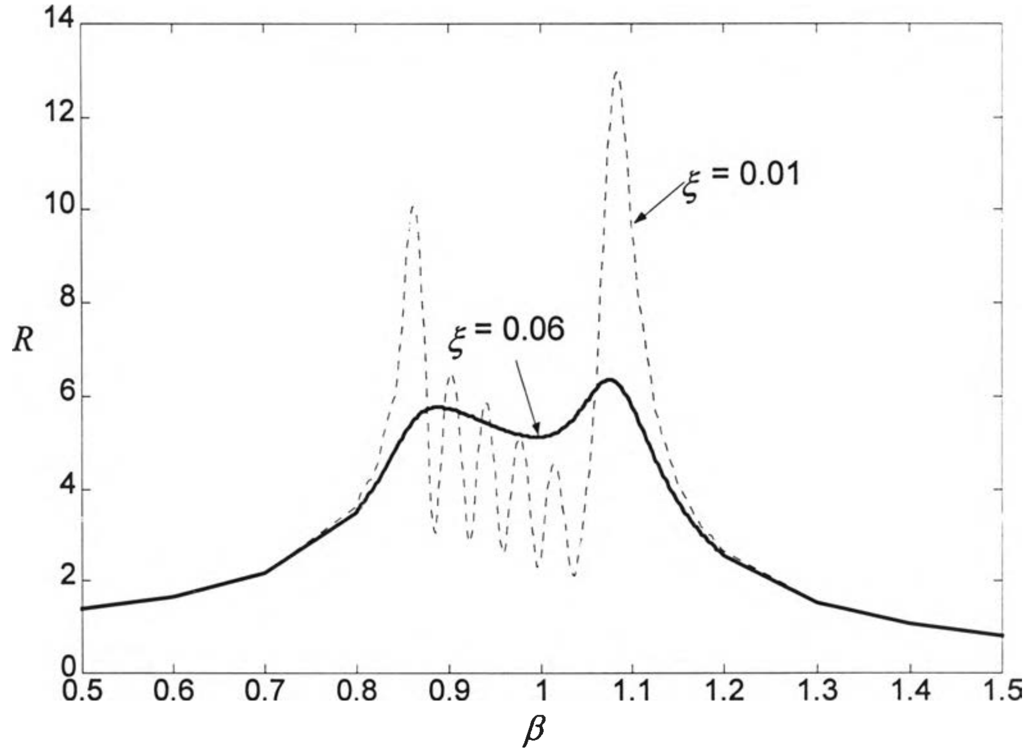
จากตัวอย่างที่แสดงในรูปข้างต้นจะพบว่าการติดตั้งค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจะทำให้การสั่นไหวของโครงสร้างมีค่าลดลงได้ แต่เนื่องจากว่าค่าพารามิเตอร์ของระบบมวลหน่วงในวิธีแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟนี้มีค่าคงที่ดังนั้นในบางกรณีที่แรงที่กระทำมีความถี่เปลี่ยนไปจากที่คาดการณ์ไว้, ลักษณะของแรงไม่เป็นแบบฮาร์โมนิก หรือการหาค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างมีความคลาดเคลื่อนจะพบว่าประสิทธิภาพของมวลหน่วงในการลดการสั่นของโครงสร้างจะลดลงอย่างมากเมื่อเทียบกับวิธีการแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟและระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ

2.2 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟหลายหน่วย

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟหลายหน่วยเป็นระบบที่ใช้มวลหน่วงมากกว่าหนึ่งหน่วยในการติดเข้ากับโครงสร้าง โดยที่มวลหน่วงแต่ละหน่วยจะมีค่าพารามิเตอร์แตกต่างกันเพื่อที่จะทำให้มีประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างสูงขึ้น และครอบคลุมช่วงความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำมากขึ้น

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสิฟหลายหน่วยมีค่าพารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องกำหนดในการออกแบบหลายค่าอันได้แก่ ค่าความถี่และอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงแต่ละ

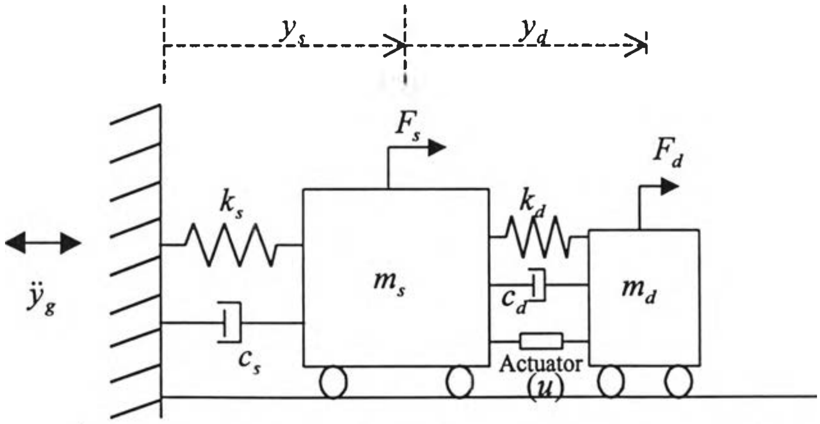
หน่วย ในการออกแบบระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟหลายหน่วยให้มีค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงค่าพารามิเตอร์ทุกๆอย่างนั้นทำได้ยากเพราะว่ามีค่าพารามิเตอร์เป็นจำนวนมาก จากการศึกษาในอดีตพบว่าค่าพารามิเตอร์บางค่ามีผลกระทบต่อประสิทธิภาพของระบบค่อนข้างมากแต่ค่าพารามิเตอร์บางค่ามีผลน้อย ดังนั้นการออกแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟหลายหน่วยจึงมักจะกำหนดค่าพารามิเตอร์บางค่าไว้ก่อนและทำการหาค่าที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ที่มีผลอย่างมากต่อประสิทธิภาพของระบบ ค่าพารามิเตอร์ที่มักจะกำหนดไว้ล่วงหน้าได้แก่ กำหนดให้มวลหน่วงแต่ละหน่วยมีค่ามวลและอัตราส่วนความหน่วงเท่ากัน, ระยะห่างของความถี่ของมวลหน่วงแต่ละหน่วยมีค่าเท่ากัน ส่วนค่าพารามิเตอร์หลักที่จะต้องคำนวณเพื่อให้ระบบมีประสิทธิภาพดีได้แก่ จำนวนหน่วยของมวลหน่วง, ช่วงความถี่ควบคุมของระบบมวลหน่วง, ค่าอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วง และระยะห่างระหว่างความถี่กลางของระบบมวลหน่วงกับค่าความถี่ของโครงสร้าง การเลือกใช้จำนวนมวลหน่วงที่น้อยควรจะใช้ค่าอัตราส่วนความหน่วงที่มีค่าสูง ทั้งนี้เพราะความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การขยายพลศาสตร์และค่าอัตราส่วนของความถี่ของแรงที่กระทำต่อความถี่ของโครงสร้างจะมีการคาบเกี่ยวกันที่ต่ำการใช้อัตราส่วนความหน่วงที่มีค่าสูงจะช่วยลดผลของค่าการสั่นสูงสุดสัมพัทธ์ย่อยได้ ในทางกลับกันการใช้มวลหน่วงที่มีจำนวนหน่วยมากจึงควรจะใช้ค่าอัตราส่วนความหน่วงที่มีค่าต่ำเพราะการคาบเกี่ยวกันของมวลหน่วงแต่ละหน่วยจะทำให้ผลของค่าการสั่นสูงสุดสัมพัทธ์ย่อยลดลง รูปที่ 2.6 แสดงให้เห็นประสิทธิภาพของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟที่ใช้จำนวนมวลหน่วง 5 หน่วยและมีค่าอัตราส่วนความหน่วงเป็น 1 และ 6 เปอร์เซ็นต์ของค่าอัตราส่วนความหน่วงวิกฤติ ซึ่งในรูปได้แสดงให้เห็นผลของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ย่อยที่เกิดขึ้นเมื่อใช้ค่าอัตราส่วนความหน่วงที่ต่ำ



รูปที่ 2.6 แสดงประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟหลายหน่วยที่ใช้จำนวนมวลหน่วง 5 หน่วย โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมีค่า 1 และ 6 เปอร์เซ็นต์ของค่าอัตราส่วนความหน่วงวิกฤติ

2.3 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟเป็นระบบที่ใช้ควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างโดยการให้แรงภายนอกที่เหมาะสมกระทำต่อโครงสร้างโดยตัวออกแรงดังแบบจำลองที่ได้แสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ

การวิเคราะห์การสั่นไหวของระบบที่ใช้ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟนี้คล้ายคลึงกับขั้นตอนที่ได้แสดงไว้แล้วในส่วนที่เป็นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟ โดยแรงที่กระทำต่อโครงสร้างและมวลหน่วงนอกจากผลของแผ่นดินไหวแล้วยังมีแรงที่กระทำโดยตัวออกแรง, u ดังนั้นเมตริกซ์ของแรงที่กระทำจะทำได้โดยการแทนค่า F_s และ F_d ในสมการที่ (2.1) และ (2.2) ด้วย u และ $-u$ ตามลำดับซึ่งจะได้ว่า

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}P_s\\P_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-m_s\\-m_d\end{bmatrix}\ddot{y}_g+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}u \tag{2.10}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ddot{y}_g+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/m_s&0\\0&1/m_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ddot{y}_g+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/m_s\\-1/m_d\end{bmatrix}u$$
$$=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ddot{y}_g+\begin{bmatrix}1\\-(1+\mu)/\mu\end{bmatrix}u/m_s$$

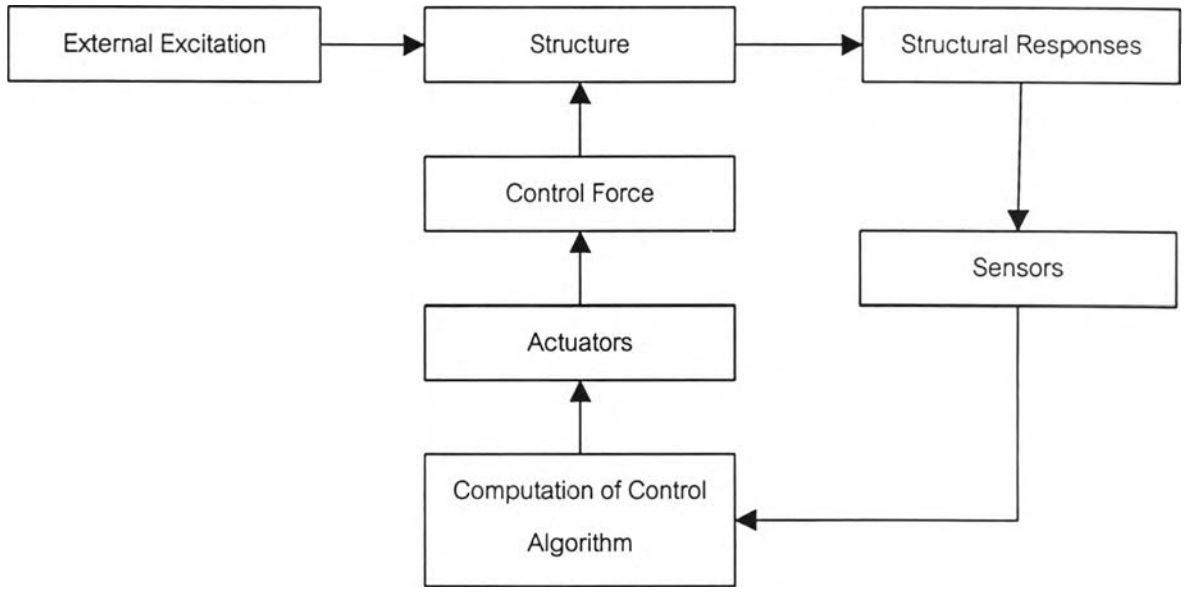
ซึ่งจะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งตามสมการที่ (2.11)

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_s\\\dot{y}_d\\\ddot{y}_s\\\ddot{y}_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\omega_s^2&\mu\omega_d^2&-2\xi_s\omega_s&2\mu\xi_d\omega_d\\\omega_s^2&-(1+\mu)\omega_d^2&2\xi_s\omega_s&-2(1+\mu)\xi_d\omega_d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_s\\y_d\\\dot{y}_s\\\dot{y}_d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\ddot{y}_g+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-(1+\mu)/\mu\end{bmatrix}u/m_s \tag{2.11}$$

หรือ

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B_f}\cdot\ddot{y}_g+\mathbf{B_u}\cdot u \tag{2.12}$$

แรงที่กระทำต่อโครงสร้างเมื่อพิจารณาจากสมการที่ (2.12) จะพบว่าค่าแรงที่กระทำนี้มีผลต่อการสั่นของโครงสร้างโดยตรง ทั้งนี้การให้แรงดังกล่าวสามารถทำให้โครงมีค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนไปได้ทั้งด้านความถี่และความหน่วง การให้แรงที่เหมาะสมจะทำให้โครงสร้างมีการสั่นที่น้อยลงได้ โดยค่าแรงที่เหมาะสมนี้จะคำนวณจากสภาพการสั่นไหวของโครงสร้างในขณะนั้นๆด้วยอัลกอรึทึมที่มีการติดตั้งไว้ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แผนผังขั้นตอนการทำงานในระบบควบคุมแบบแอกทีฟ

อุปกรณ์และขั้นตอนที่เป็นพื้นฐานของวิธีการควบคุมแบบแอกทีฟนี้ได้แก่

1. ตัววัดสัญญาณ (Sensor) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดการสั่นไหว (Response) ของโครงสร้าง

2. เครื่องมือที่รับสัญญาณการสั่นไหวมาจากตัววัดสัญญาณแล้วคำนวณค่าของแรงที่เหมาะสมตามอัลกอรีทึมควบคุมที่ได้ติดตั้งไว้

3. ตัวออกแรง (Actuator) เป็นตัวที่ใช้สร้างแรงให้กระทำต่อโครงสร้างตามแรงที่คำนวณได้

อัลกอรีทึมที่ใช้ในระบบควบคุมแบบแอกทีฟนี้มีหลายวิธีการแต่ในการศึกษานี้จะใช้วิธีการควบคุมแบบควอดราติกเชิงเส้น (Linear quadratic Control) (Soong T.T., 1990) ซึ่งการวิเคราะห์สร้างอัลกอริทึมควบคุมจะเลือกดัชนีคุณภาพ (Performance index, J) ซึ่งเป็นพลังงานที่ถ่ายเทเข้าสู่โครงสร้างเนื่องจากการเกิดการสั่นไหว และพลังงานที่ต้องให้เพื่อควบคุมการสั่นไหวที่เกิดขึ้นนับตั้งแต่เวลาที่เริ่มพิจารณา นั่นคือจะพยายามให้มีพลังงานการสั่นไหวของโครงสร้างน้อยที่สุดพร้อมๆกับใช้ที่พลังงานน้อยที่สุดในการควบคุมการสั่นไหว ดังนั้นค่าดัชนีคุณภาพสามารถเขียนได้เป็น

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}(t) + u(t) \cdot \mathbf{R} \cdot u(t)] \; dt \qquad (2.13)$$

โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็นเมตริกซ์น้ำหนัก (weight matrix) สำหรับการตอบสนองของโครงสร้าง

$\mathbf{R}$ เป็นเมตริกซ์น้ำหนัก(weight matrix)สำหรับพลังงานที่ใช้ในควบคุมการสั่นไหว

t_0, t_f เป็นเวลาเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุดการควบคุมการสั่นไหว

จากหลักการของวิธี Linear Optimal Control สามารถหาค่าคำตอบของแรงควบคุม, $u(t)$, ได้จากผลคูณของค่าการตอบสนองของระบบ, $\mathbf{X(t)}$, กับเมตริกซ์ผล (Gain matrix, $\mathbf{G}$) ดังสมการที่ 2.10 ดังนี้

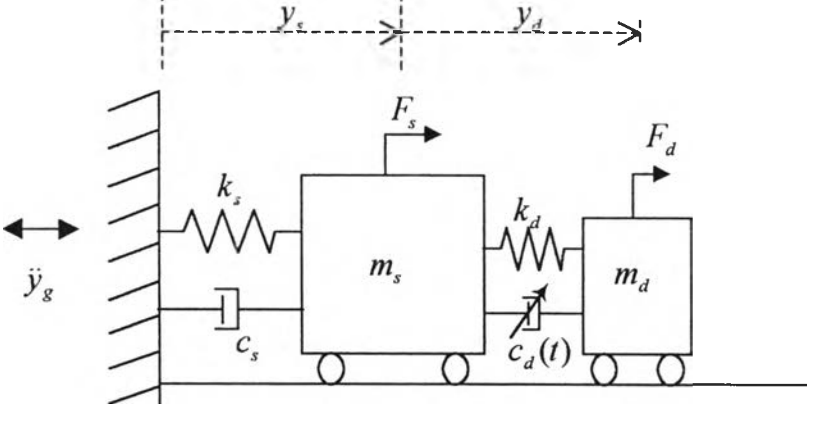
$$u(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X(t)} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{X(t)} \qquad (2.14)$$

โดยที่เมตริกซ์ $\mathbf{P}$ เป็นเมตริกซ์คำตอบที่ได้จากสมการที่มีรูปแบบของสมการริกกาติ (Riccati equation) ดังนี้

$$\mathbf{PA} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P} + \mathbf{A}^{T}\mathbf{P} + \mathbf{2Q} = \mathbf{0} \qquad (2.15)$$

2.4 ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ

ระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟเป็นระบบที่ค่าพารามิเตอร์ของตัวหน่วงสามารถปรับค่าได้ดังแสดงในรูปที่ 2.9



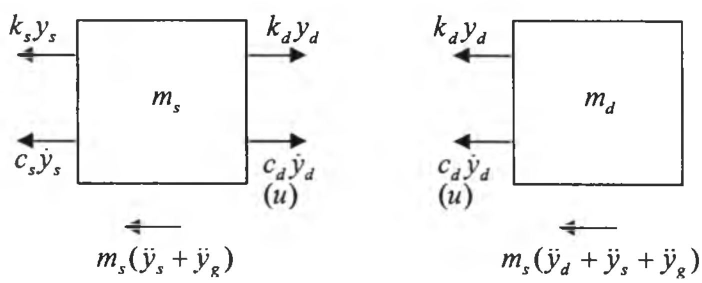
รูปที่ 2.9 แสดงแบบจำลองของระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ

ตัวหน่วงที่มีความสามารถในการปรับค่าความหน่วงของตัวเองจะทำหน้าที่ปรับเปลี่ยนสภาพของตัวเองให้มีความหน่วงที่เหมาะสมซึ่งค่าดังกล่าวมีสภาพเป็นเหมือนการให้แรง

กระทำต่อโครงสร้างเพราะค่าความหน่วงในส่วนนี้เมื่อคูณกับความเร็วสัมพัทธ์ของระบบย่อยเทียบกับระบบโครงสร้างก็จะกลายเป็นแรงที่กระทำทั้งต่อระบบโครงสร้างและระบบย่อยซึ่งเป็นหลักการของวิธีการแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ เพียงแต่ว่าค่าแรงดังกล่าวนี้มีข้อจำกัดคือ ทิศทางของแรงที่กระทำขึ้นอยู่กับทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์นั้นๆทั้งนี้เพราะแรงนี้เป็นผลเนื่องมาจากผลคูณระหว่างค่าความหน่วงของตัวหน่วงปรับค่ากับค่าความเร็วสัมพัทธ์ ดังนั้นข้อจำกัดของวิธีการแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟในการวิเคราะห์คือ $u \cdot \dot{y}_2 \leq 0$ นอกจากนี้อุปกรณ์ที่ใช้เป็นตัวหน่วงแม้จะสามารถปรับค่าความหน่วงได้แต่ก็มีขอบเขตในการปรับค่าคือสามารถปรับได้อยู่ในช่วง [$c_{d,\min}$ - $c_{d,\max}$] ดังนั้นแรงควบคุม,$u(t)$ จึงมีค่าอยู่ในช่วงจำกัดคือ

$$c_{d,\min} \cdot \dot{y}_d(t) \leq u(t) \leq c_{d,\max} \cdot \dot{y}_d(t) \qquad (2.16)$$

ดังนั้นจะสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่เพื่อใช้วิเคราะห์ในระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟดังนี้



รูปที่ 2.10 แสดงแผนภาพอิสระของโครงสร้างและมวลหน่วงในวิธีการควบคุมแบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ

จากแผนภาพอิสระที่แสดงในรูป 2.10 สามารถเขียนสมการสมดุลได้ดังสมการที่ 2.17 และ 2.18 ดังนี้

$$m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s - u - k_d y_d = -m_s \ddot{y}_g \qquad (2.17)$$

$$m_d \ddot{y}_s + m_d \ddot{y}_d + u + k_d y_d = -m_d \ddot{y}_g \qquad (2.18)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ (2.17) และ (2.18) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการทางเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ m_d & m_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_s \\ -m_d \end{bmatrix} \ddot{y}_g + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (2.19)$$

หรือ $$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}}\ddot{y}_g + \mathbf{C}_{\mathbf{u}}u \ ; \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

จากสมการที่ (2.20) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในลักษณะของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อที่จะทำการแก้สมการได้ง่ายกว่าทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}\right] \quad (2.21)$$

หรือ $$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_{\mathbf{r}}\ddot{y}_g + \mathbf{B}_{\mathbf{u}}u \ ; \qquad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} y_s \\ y_d \\ \dot{y}_s \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

โดยที่ เมตริกซ์ $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{\mathbf{r}}, \mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ เป็นเมตริกซ์ค่าคงที่

จากสมการที่ 2.22 ซึ่งเป็นสมการต่อเนื่องในโดเมนของเวลาสามารถแปลงเป็นสมการระดับขั้นของเวลา [Meirovitch,L.1990] ได้เป็น

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_{\mathbf{d}}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{dr}}\ddot{y}_g(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{du}}u(t) \quad (2.23)$$

สมการที่ 2.23 เป็นสมการที่ใช้ในการวิเคราะห์การสั่นไหว โดยแรงควบคุม, u ,ที่ระดับขั้นเวลา t ,คำนวณจากผลการตอบสนองของระบบที่เวลาก่อนหน้าดังแสดงในสมการที่ 2.24

$$u(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}(t - \Delta t) \quad (2.24)$$

โดยที่เมตริกซ์ $\mathbf{G}$ เป็นเมตริกซ์ค่าคงที่ที่ได้จากวิธีการควบคุมแบบควอดราติกเชิงเส้นซึ่งคำนวณได้จากพารามิเตอร์ $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{\mathbf{u}}, \mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ ดังแสดงรายละเอียดในวิธีมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟ

จากหลักการดังกล่าวจะพบได้ว่าการใช้ตัวหน่วงที่ปรับค่าได้นี้มิได้เป็นการใช้แรงกระทำต่อโครงสร้างโดยตรงแต่สามารถสร้างแรงที่เหมาะสมกระทำต่อโครงสร้างได้จากผลตอบสนองของโครงสร้างเอง ซึ่งโดยปกติแล้วถ้าหากว่าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่ามากจำเป็นจะต้องใช้แรงจำนวนมากในระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแอกทีฟ แต่สำหรับระบบมวลหน่วงปรับ

ค่าแบบกึ่งแอกทีฟแล้วถ้าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่ามากค่าแรงที่เกิดจากตัวหน่วงปรับค่าก็จะมีค่ามากตามไปด้วยและถ้าการตอบสนองของโครงสร้างมีค่าน้อยแรงที่ตัวหน่วงปรับค่าก็จะมีค่าน้อยเหมาะสมกันพอดี ดังนั้นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบกึ่งแอกทีฟจึงมีเสถียรภาพมากกว่าระบบมวลหน่วงแบบแอกทีฟ นอกจากนั้นหลักการนี้ยังแสดงให้เห็นด้วยว่าแม้ว่าระบบควบคุมการทำงานของตัวหน่วงปรับค่าไม่ทำงานแต่สภาพโดยรวมของระบบก็จะมีสภาพเป็นระบบมวลหน่วงปรับค่าแบบแพสสีฟระบบหนึ่งทั้งนี้เพราะตัวหน่วงปรับค่าจะมีสภาพเป็นตัวหน่วงคงที่ตัวหนึ่งเท่านั้น