บทที่ 2

แนวคิดเหตุผลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

แนวคิดมูลฐานของกราฟ (Basic Concepts of Graphs)

<u>นิยามที่ 1</u> (2) กราฟ (Graph) คือ คู่อันดับ (V(G), E(G)) โดยที่ V(G) เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่าจุดยอด (vertex) และ E(G) เป็นเซตจำกัดของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน V(G) และเรียกสมาชิกของ E(G) ว่า ด้าน (edge)

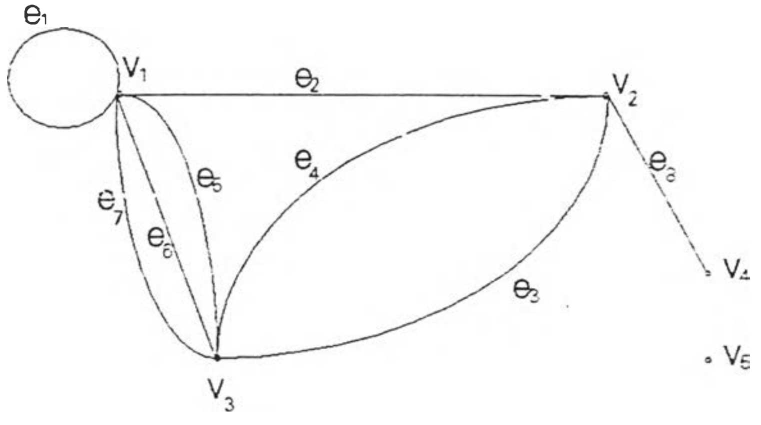
จะเรียกว่า v_1 และ v_2 ใน V(G) ว่าเป็นจุดปลาย (end vertices) ของ e ใน E(G) ก็ต่อเมื่อ e เป็นด้านที่เชื่อมจุดยอด v_1 และ v_2 และเขียนแทนด้วย $e = v_1, v_2$ หรือ $e = v_1v_2$

เรามักแทนกราฟด้วยแผนภาพ (diagram) ที่ประกอบด้วยจุดยอดและด้าน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ G = (V(G), E(G)) โดยที่ V(G) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 และ

E(G) = $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ และ $e_1 = v_1v_1$, $e_2 = v_1v_2$, $e_3 = v_2v_3$, $e_4 = v_2v_3$, $e_5 = v_3v_1$, $e_6 = v_3v_1$, $e_7 = v_3v_1$, $e_8 = v_2v_4$

จากที่กำหนดให้ จะได้ว่ากราฟ G สามารถแทนด้วยแผนภาพ ดังภาพ



ภาพที่ 1 แสดงกราฟ

<u>นิยามที่ 2</u> (2) ด้านพหุคูณ (multiple edges) หรือ ด้านขนาน (parallel edges) คือ ด้านทั้งหลายที่ต่างมีจุดปลายคู่เดียวกัน

<u>นิยามที่ 3</u> (2) รูปบ่วง (loop) คือ ด้านที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า e_3, e_4 เป็นด้านพหุคูณ และ e_5, e_6, e_7 เป็นด้านพหุคูณ และ e_1 เป็นรูปบ่วง

<u>นิยามที่ 4</u> (3) ถ้ามีด้าน e เชื่อมระหว่างจุดยอด u และ v แล้วจะเรียกจุดยอด u และ v ว่า จุดประชิด (adjacent points) และเรียกด้าน e ว่าตกกระทบ (incident) บนจุดยอด u และ v

<u>นิยามที่ 5</u> (3) ถ้าด้าน e_1 และ e_2 มีจุดปลายร่วมกัน 1 จุด แล้วจะเรียก ด้าน e_1 และ e_2 ว่า ด้านประชิด (adjacent edges)

<u>นิยามที่ 6</u> (4) ระดับชั้น (degree) ของจุดยอด v ซึ่งเขียนแทนด้วย d(v) คือ จำนวนด้านที่ตกกระทบจุดยอด v

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จากตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

ตัวอย่างของจุดประชิดได้แก่จุดยอด v_1 และ v_2

ตัวอย่างของด้านตกกระทบได้แก่ ด้าน e_2 ตกกระทบบนจุด v_1 และ v_2

ตัวอย่างของด้านประชิดได้แก่ e_2 และ e_3

ระดับขั้นของจุด v_i เมื่อ $i = 1,2,3,4,5$ เป็นดังต่อไปนี้

$d(v_1) = 6,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,\ d(v_4) = 1,\ d(v_5) = 0$

<u>นิยามที่ 7</u> (3) กราฟเชิงเดียว (simple graph) คือ กราฟที่ไม่มีด้านพหุคูณและไม่มีรูปบ่วง และ กราฟ G (p,e) คือ กราฟเชิงเดียวที่มี p จุดและมี e ด้าน

<u>นิยามที่ 8</u> (4) กราฟ H เป็นกราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G ก็ต่อเมื่อทุกจุดของกราฟ H เป็นจุดของกราฟ G และทุกด้านของกราฟ H เป็นด้านของกราฟ G

นั่นคือกราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$

<u>นิยามที่ 9</u> (5) ถ้า $G = (V(G), E(G))$ เป็นกราฟใดๆ โดยที่ $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V(G)$ และ $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,k$ และ $k \in I^+$ แล้ว ทางเดิน (walk) จาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G คือ ลำดับจำกัด (finite sequence) ของจุดและด้านของกราฟ G เรียงสลับกัน โดยเริ่มต้นด้วยจุด v_0 และสิ้นสุดด้วยจุด v_k ดังนี้ $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ และเรียกจุด v_0 และจุด v_k ว่า จุดเริ่มต้น (initial vertex) และ จุดสิ้นสุด (terminal vertex) ของทางเดินจาก v_0 ถึง v_k และเรียกจุดที่เหลือทั้งหมด $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ ว่า จุดภายใน (internal vertices) ของทางเดินจาก v_0 ถึง v_k และเรียกจำนวนด้านในทางเดินจาก v_0 ถึง v_k ว่า ความยาว (length) ของทางเดิน

<u>นิยามที่ 10</u> (5) ทางเดินที่ไม่ซ้ำด้าน (trail) จาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G คือ ทางเดินจาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G ที่ทุกด้านในทางเดินแตกต่างกัน และความยาวของทางเดินที่ไม่ซ้ำด้านจาก v_0 ถึง v_k คือ จำนวนด้านในทางเดินที่ไม่ซ้ำด้าน

<u>นิยามที่ 11</u> (5) เส้นทาง (path) จาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G คือ ทางเดินจาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G ที่ทุกจุดในทางเดินแตกต่างกัน และความยาวของเส้นทางจาก v_0 ถึง v_k คือ จำนวนด้านในเส้นทาง

<u>นิยามที่ 12</u> (6) วงจร (circuit) ของ v_0 ถึง v_k ในกราฟ G คือ ทางเดินที่ไม่ซ้ำด้านจาก v_0 ถึง v_k ในกราฟ G ที่ v_0 และ v_k เป็นจุดเดียวกันและจุดที่เหลือทุกจุดแตกต่างกัน และความยาวของวงจร คือ จำนวนด้านในวงจร

<u>นิยามที่ 13</u> (5) วัฏจักร (cycle) ในกราฟ G คือ วงจรใน G ที่ไม่เป็นรูปบ่วง

นิยามที่ 14 (4) จุด v_i และ v_j ในกราฟ G ไม่ขาดตอน (connected) ในกราฟ G ต่อเมื่อ จุดยอด v_i และ v_j เป็นจุดเดียวกัน หรือถ้าจุดยอด v_i และ v_j เป็นจุดที่แตกต่างกันแล้วจะมีเส้นทาง จาก v_i ถึง v_j ในกราฟ G

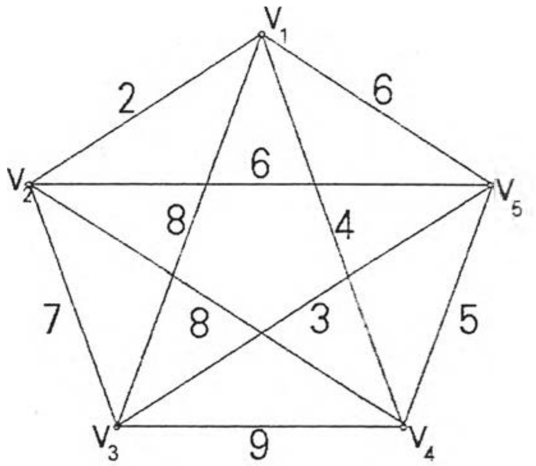
นิยามที่ 15 (4) กราฟ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (connected graph) ก็ต่อเมื่อ ทุก 2 จุดใดๆ ในกราฟ G ไม่ขาดตอน

กราฟ G เป็นกราฟขาดตอน (disconnected graph) ก็ต่อเมื่อ กราฟ G ไม่เป็นกราฟไม่ขาดตอน

นิยามที่ 16 (3) กราฟย่อยที่ไม่ขาดตอน H ของกราฟ G เป็นส่วนประกอบ (component) ของกราฟ G ก็ต่อเมื่อกราฟย่อย H ไม่บรรจุอยู่ในกราฟย่อยที่ไม่ขาดตอนของกราฟ G ที่มีจุดหรือด้านมากกว่ากราฟย่อย H

นิยามที่ 17 (6) ถ้านำจำนวนจริง w(e) เข้ามาสัมพันธ์กับแต่ละด้าน e ของกราฟ G แล้ว จะเรียกจำนวนจริง w(e) นี้ว่า น้ำหนัก (weight) ของ e และจะเรียกกราฟ G ที่ประกอบด้วยเส้นที่มีน้ำหนักกำกับอยู่ว่า กราฟที่มีน้ำหนัก (weighted graph)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> สมมุติให้ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 เป็นเมือง 5 เมืองที่กำหนดระยะทางระหว่างเมืองต่างๆ ดังภาพ



ภาพที่ 2 แสดงกราฟที่มีน้ำหนัก

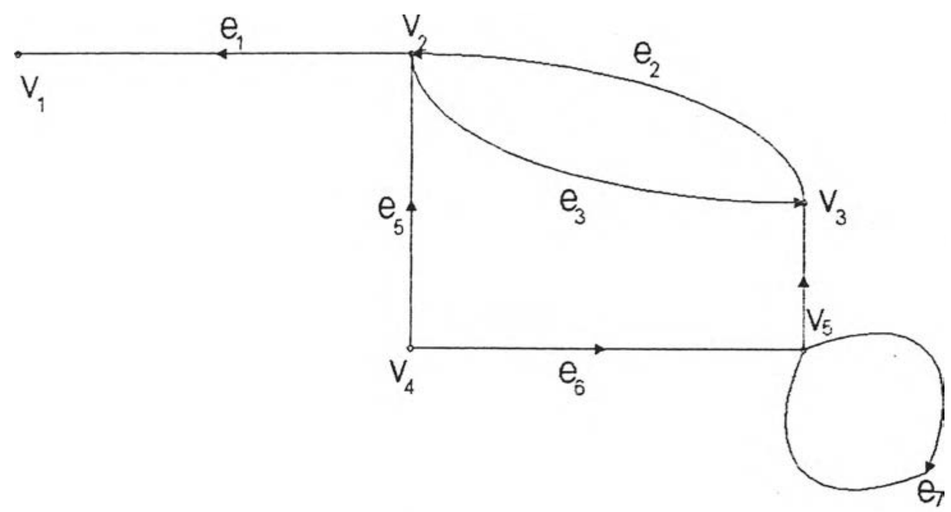
จะได้ว่า กราฟในภาพเป็นกราฟที่มีน้ำหนัก

<u>นิยามที่ 18</u> (6) กราฟที่ระบุทิศทาง G (digraph or directed graph G) จะประกอบด้วยเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง 2 เซต คือ

1. เซต V(G) มีสมาชิกเรียกว่า จุดยอด

2. เซต E(G) มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (ordered pair) ของจุดยอด ซึ่งเรียกว่า ด้าน (edge) ถ้า e เป็นด้านที่เชื่อมระหว่างจุด v กับ u เราจะเขียนแทน e ด้วย (v,u) หรือ vu และถ้าแทนกราฟ G ด้วยแผนภาพ จะใช้ลูกศรเพื่อกำกับทิศทาง

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>



ภาพที่ 3 แสดงกราฟที่ระบุทิศทาง

จากแผนภาพ

$V(G) = \{ v_1, v_2, \ldots, v_5 \}$

$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_7 \}$

$= \{ (v_2,v_1), (v_3,v_2), (v_2,v_3), (v_5,v_3), (v_4,v_2), (v_4,v_5), (v_5,v_5) \}$

<u>หมายเหตุที่ 1</u> ในกรณีของ กราฟที่ระบุทิศทาง

1. รูปบ่วง คือ ด้านที่อยู่ในรูป (v,v)

2. ด้านพหุคูณ คือ ด้านที่อยู่ในรูป (v_1,v_2) กับ (v_1,v_2)

ด้าน (v_1,v_2) กับ (v_2,v_1) ไม่เป็นด้านพหุคูณ

<u>นิยามที่ 19</u> (5) ในกรณีของกราฟที่ระบุทิศทางสำหรับจุดยอด v จำนวนของด้านที่มี v เป็นจุดเริ่มต้น (initial node) จะเรียกว่า ระดับชั้นออก (outdegree) ของจุดยอด v และจำนวนของด้านที่มี v เป็นจุดปลาย (terminal node) จะเรียกว่า ระดับชั้นเข้า (indegree) ของจุดยอด v

<u>นิยามที่ 20</u> (3) จะเรียกกราฟที่ระบุทิศทางว่าเป็นการไม่ขาดตอนแบบอ่อน (weakly connected) ถ้าเมื่อเพิกเฉยต่อทิศทาง uv ของกราฟ แล้วกราฟนั้นเป็นกราฟไม่ขาดตอน

<u>นิยามที่ 21</u> (3) สำหรับจุดยอด v และ u ซึ่งเป็นจุดยอด 2 จุดใดๆของ กราฟที่ระบุทิศทาง G ถ้ามีเส้นทางจาก v ไป u แล้วจะเรียกกราฟ G ว่า เป็นการไม่ขาดตอนแบบแข็ง (strongly connected)

การแทนกราฟ (Graph Representation)

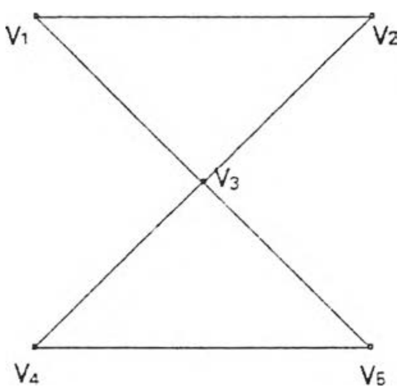
ในการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการวิเคราะห์กราฟจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปแบบของกราฟให้เหมาะสม ซึ่งกราฟที่พิจารณาจะต้องไม่มีด้านพหุคูณ โดยทั่วไปจะมี 2 รูปแบบ คือ

1. เมตริกซ์ประชิด (Adjacency Matrix)
2. รายการจุดประชิด (Adjacency lists)

เมตริกซ์ประชิด (Adjacency Matrix)

คือจะใช้รูปแบบเมตริกซ์ โดย แถว และ สดมภ์ ของ เมตริกซ์ เป็นจุดยอดของกราฟ และแต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ จะให้ค่าเป็น 1 ถ้ามีด้านเชื่อมระหว่างแถวและสดมภ์ในกราฟ และให้ค่าเป็น 0 ถ้าไม่มีด้านเชื่อมระหว่างแถวและสดมภ์ในกราฟ

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> แสดงกราฟโดยใช้เมตริกซ์ประชิด



จะได้เมตริกซ์ประชิดเป็น

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

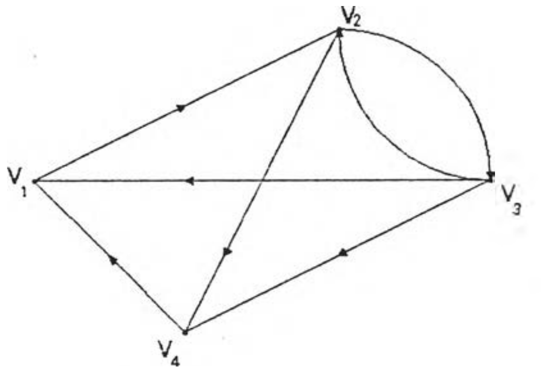
ภาพที่ 4 เมตริกซ์ประชิดของกราฟ

ในกรณี กราฟที่ระบุทิศทาง ซึ่งมี $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ จะกำหนดให้จุดยอดถืออันดับจาก v_1 ถึง v_n

matrix $A = [a_{ij}]_{n*n}$ จะที่กำหนดโดย

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> แสดงกราฟที่ระบุทิศทางโดยใช้เมตริกซ์ประชิด



จะได้เมตริกซ์ประชิดเป็น

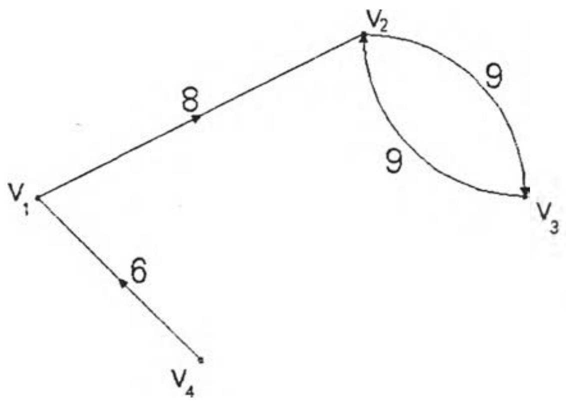
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ภาพที่ 5 เมตริกซ์ประชิดของกราฟที่ระบุทิศทาง

ในกรณีกราฟที่มีน้ำหนัก ซึ่งเป็นกราฟเชิงเดียว จะให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n*n}$ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{น้ำหนัก ของ } (v_i, v_j) & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \in E(G) \\ \infty & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \notin E(G) \\ 0 & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> แสดงกราฟที่มีน้ำหนักโดยใช้เมตริกซ์ประชิด



จะได้เมตริกซ์ประชิดเป็น

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 9 & \infty \\ \infty & 9 & 0 & \infty \\ 6 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

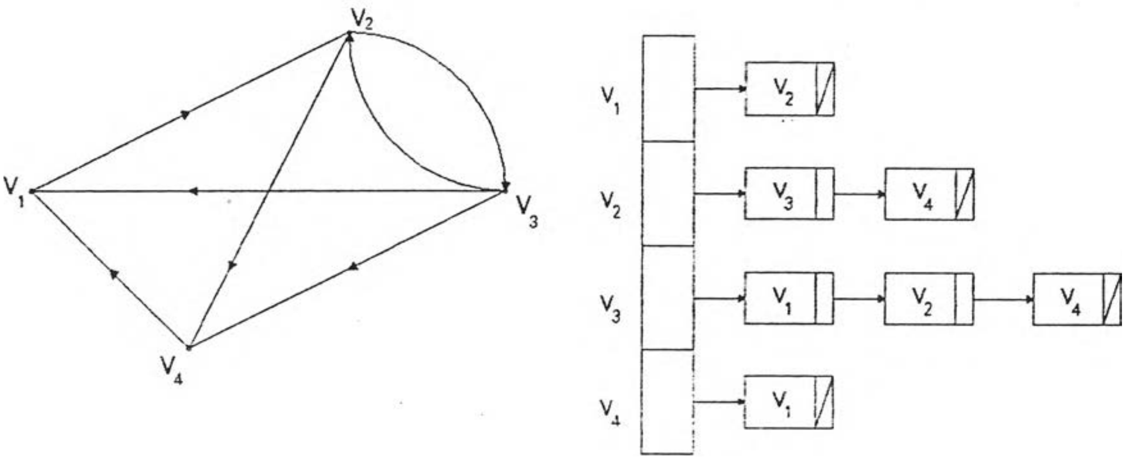
ภาพที่ 6 เมตริกซ์ประชิดของกราฟที่มีน้ำหนัก

รายการจุดประชิด (Adjacency lists)

คือ จะใช้รูปแบบเป็นรายการเชื่อมโยง (linked list) ถ้ากราฟมี n จุดยอดจะมีรายการเชื่อมโยง n ชุด แต่ละชุดจะแทนแต่ละจุดในกราฟ G โดยค่าในจุดแตกกิ่ง (node) ของ รายการเชื่อมโยง ชุดที่ i จะแสดงถึงมีด้านจากจุด i ไปยังจุดที่เก็บค่าในจุดแตกกิ่งนั้น และจะมีตัวชี้ (pointer) ชี้ไปยัง จุดแตกกิ่งต่อไป ตัวชี้ของจุดแตกกิ่งสุดท้าย จะมีค่า เป็นว่าง (NULL)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> แสดงการแทนกราฟด้วยรายการจุดประชิด

จะได้รายการจุดประชิดเป็น



ภาพที่ 7 รายการจุดประชิด

การใช้รูปแบบเมตริกซ์ประชิด จะสะดวกกับการใช้งานมากกว่า รายการจุดประชิด แต่ถ้ากราฟ G มีจำนวนจุดยอด n จุด เมตริกซ์ประชิดจะต้องใช้เนื้อที่ถึง n^2 หน่วย เมตริกซ์ประชิดจึงไม่เหมาะกับกราฟที่มีจำนวนจุดยอดมากๆ

การหาเส้นทางที่สั้นที่สุด

การหาเส้นทางที่สั้นที่สุดที่จะเดินทางจากสถานที่หนึ่งไปยังอีกสถานหนึ่งจะแปลงแผนที่เป็นกราฟเชิงเดียวที่ระบุทิศทาง แล้วใช้ขั้นตอนวิธี (Algorithm) เพื่อหาเส้นทางที่สั้นที่สุด

ขั้นตอนวิธีที่ใช้หาเส้นทางที่สั้นที่สุด มีหลายขั้นตอนวิธี ดังนี้

1. ขั้นตอนวิธี Bellman-Ford (The Bellman-Ford algoritnm)
2. ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra (Dijkstra's algorithm)

ขั้นตอนวิธี Bellman-Ford (The Bellman-Ford algorithm) (7)

จะใช้กับกราฟเชิงเดียวไม่ขาดตอนที่ระบุทิศทาง ซึ่งน้ำหนักของด้านอาจจะมีค่าเป็นลบ แต่ไม่มีวัฏจักรที่มีน้ำหนักเป็นลบได้ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

ให้ d[v] เป็นค่าของระยะทางจากจุดเริ่มต้นถึงจุดยอด v

ตรวจสอบทุกด้านจาก u ไปถึงจุด v ว่า ถ้า d[v] > d[u] + w(u,v) แล้วจะต้องเปลี่ยน d[v] = d[u] + w(u,v) และแก้ตัวชี้ว่าจุดยอด v ต้องมาจากจุด u

วนทำซ้ำจำนวนเท่ากับจำนวนจุด - 1 รอบ

วนซ้ำทุกด้าน เพื่อตรวจสอบว่ายังมีด้าน (u,v) ที่ d[v] > d[u] + w(u,v) อยู่อีกหรือไม่

ถ้ามี แสดงว่า กราฟนั้นมีวัฏจักรที่มีน้ำหนักเป็นลบอยู่ ขั้นตอนวิธีจะให้ค่าผิด (FALSE) ออกมา

ถ้าไม่มี แสดงว่า กราฟนั้นไม่มีวัฏจักรที่มีน้ำหนักเป็นลบอยู่ ขั้นตอนวิธีจะให้ค่าถูก (TRUE) ออกมา ผลลัพธ์คือ d[v] เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้นถึงจุดยอด v และเมื่อนำผลจากตัวชี้มาต่อกันจะได้เส้นทางที่สั้นที่สุด

ขั้นตอนวิธี Bellman-Ford เขียนในลักษณะของรหัสเทียม (Pseudo code) ได้ดังนี้

```
BELLMAN-FORD (G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
for i ← 1 to |V[G]-1|
        do for each edge (u,v) ∈ E[G]
                do RELAX (u, v, w)
for each edge (u, v)   E[G]
        do if d[v] > d[u] ÷ w(u ,v)
                then return FALSE
return TRUE
```

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
for each vertex v ∈ V[G]
        do d[v] ← ∞
           ¶[v] ← NULL
d[e] ← 0
```

```
RELAX (u, v, w)
if d[v] > d[u] + w(u, v)
        then d[v] ← d[u] ÷ w(u, v)
             ¶[v] ← u
```

ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra (Dijkstra's algorithm) (7)

จะใช้กับกราฟเชิงเดียวไม่ขาดตอนที่ระบุทิศทาง ซึ่งน้ำหนักของทุกเส้นจะต้องไม่น้อยกว่า 0 นั่นคือ w(u,v) > 0 ทุกๆ (u,v) $\in$ E(G) ดังขั้นตอนต่อไปนี้

ให้ S เป็นเซตของจุดยอดโดยมีค่าเริ่มต้นเป็นเซตว่าง

ให้ d[v] เป็นค่าของระยะทางจากจุดเริ่มต้นถึงจุดยอด v

ให้ Q เป็นเซตของจุดยอดที่ยังไม่เข้าวนซ้ำ (loop) โดยมีค่าเริ่มต้นเป็น V(G)

การเลือกจุด u ที่จะเข้าวนซ้ำ จะเลือกจากจุดที่อยู่ใน Q ซึ่งมีค่า d[u] ต่ำที่สุด และเมื่อเลือกแล้วจะลบจุดนี้ออกจาก Q นำไปใส่ S แทน

ตรวจสอบทุกจุด v ที่มีเส้นจาก u ไปถึงจุด v ว่า ถ้า d[v] > d[u] + w(u,v) แล้วจะต้องเปลี่ยน d[v] = d[u] + w(u,v) และแก้ตัวชี้ว่าจุดยอด v ต้องมาจากจุด u

วนซ้ำจนกระทั่ง Q เป็นเซตว่าง

จะได้เส้นทางที่สั้นที่สุด ตามต้องการ

ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra เขียนในลักษณะของรหัสเทียมได้ดังนี้

```
DIJKSTRA (G, w, s)
INITIALIZE-GRAPH (G, s)
S ← φ
Q ← V[G]
while Q ≠ φ
      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
         S ← S U u
            for each vertex v ∈ Adj[u]
                   do RELAX (u, v, w)
```

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
for each vertex v ∈ V[G]
        do d[v] ← ∞
        ¶[v] ← NULL
d[e] ← 0
```

```
RELAX (u, v, w)
if d[v] > d[u] + w(u, v)
        then d[v] ← d[u] + w(u, v)
             ¶[v] ← u
```

เนื่องจากประสิทธิภาพในการทำงานของขั้นตอนวิธีของ Dijkstra จะเร็วกว่า ขั้นตอนวิธี Bellman-Ford อีกทั้งกราฟเชิงเดียวที่ระบุทิศทางที่แปลงมาจากแผนที่จะไม่มีน้ำหนักของด้านที่มีค่าเป็นลบอยู่แล้ววิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra

ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

ระบบพิกัดฉาก คือ การใช้ระนาบเรขาคณิตที่เกิดจากแกนตั้งฉากกันคู่หนึ่ง เพื่อเขียนรูปของความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันลงในระนาบนี้ สำหรับทำการวิเคราะห์อื่นๆต่อไป

แกน X (X-axis) คือ เส้นตรงในแนวนอนที่ใช้เป็นแกนอ้างอิงแกนที่หนึ่งมีคุณสมบัติเหมือนเส้นจำนวนจริงทุกประการ

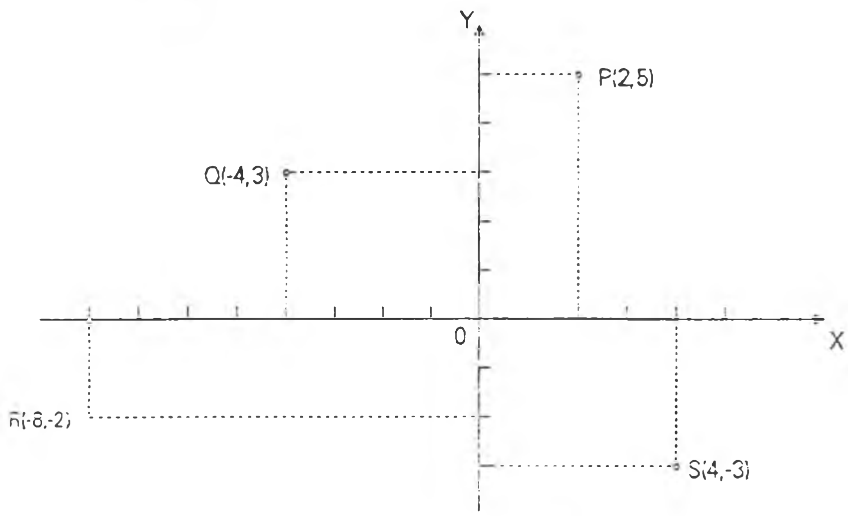
แกน Y (Y-axis) คือ เส้นตรงในแนวตั้งที่ตั้งฉากกับแกน X และใช้เป็นแกนอ้างอิงแกนที่สอง

จุดกำเนิด (Origin) คือ จุดตัดระหว่างแกน X และแกน Y

ระนาบที่เกิดจากแกน X และแกน Y นี้เรียกชื่อว่าระนาบคาร์ทีเซียน (Cartesian Plane)

พิกัดของจุด (Co-ordinate) ในระบบพิกัดฉาก

จุดใด ในระนาบคาร์ทีเซียนสามารถแทนได้ด้วยคู่อันดับเสมอ เช่น



ภาพที่ 8 แสดงระบบพิกัดฉาก

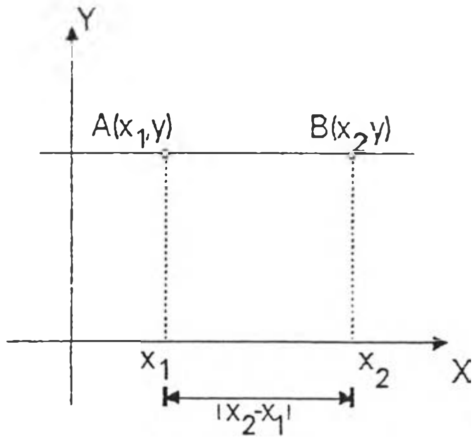
ในภาพ จุด P, Q, R และ S มีพิกัด (2, 5), (-4, 3), (-8, -2) และ (4, -3) ตามลำดับ

ระยะระหว่างจุดสองจุด

1. ระยะระหว่างจุดสองจุดในแนวนอน

ให้ A และ B เป็นจุดสองจุดที่อยู่ในระดับเดียวกัน มีพิกัดเป็น $A(x_1, y)$ และ $B(x_2, y)$

ระยะระหว่างจุด A และ B คือ ผลต่างของโคออร์ดิเนต x โดยไม่คิดเครื่องหมาย $d = |x_2 - x_1|$

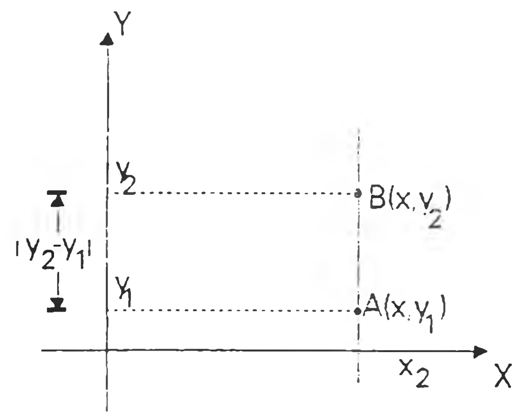


ภาพที่ 9 แสดงระยะระหว่างจุดสองจุดในแนวนอน

2. ระยะระหว่างจุดสองจุดในแนวตั้ง

ให้ $A(x, y_1)$ และ $B(x, y_2)$ เป็นจุดสองจุดที่อยู่ในแนวตั้งเดียวกัน

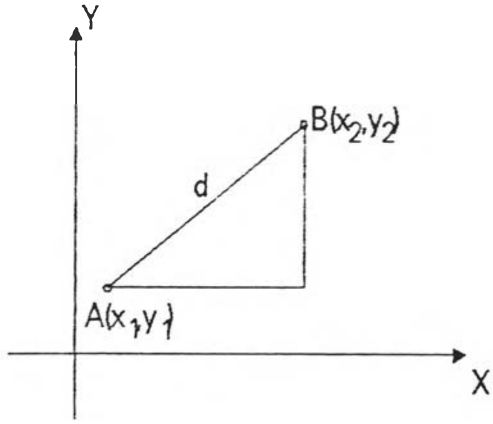
ระยะระหว่างจุด A และ B คือ ผลต่างของโคออร์ดิเนต y โดยไม่คิดเครื่องหมาย $d = |y_2 - y_1|$



ภาพที่ 10 แสดงระยะระหว่างจุดสองจุดในแนวตั้ง

3. ระยะระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในระนาบ XY

ให้ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใดๆในระนาบสามารถหาระยะระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในระนาบได้จาก $d = SQRT((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)$



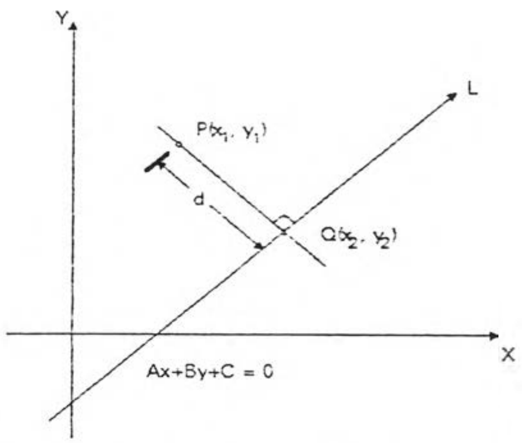
ภาพที่ 11 แสดงระยะระหว่างจุดสองจุดใดๆในระนาบ XY

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

กำหนดให้ L เป็นเส้นทางที่มีสมการเป็น $Ax+By+C = 0$ และ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆ ที่มีอยู่นอกเส้นทาง

ระยะห่างระหว่างจุด P กับเส้นตรง L คือ d

$d = |Ax_1+By_1+C| / SQRT(A^2+B^2)$



ภาพที่ 12 แสดงระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับแผนที่ (Introduction to Map)

ความหมายของแผนที่

แผนที่ (Map) (8) คือ การนำเอารูปภาพของสิ่งต่างๆบนพื้นผิวของโลก (earth's surface) มาย่อส่วนให้เล็กลงแล้วนำมาเขียนบนกระดาษหรือวัตถุที่แบนราบ สิ่งต่างๆ บนพื้นผิวโลก ประกอบด้วยสิ่งที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ (natural) และสิ่งที่มนุษย์ทำขึ้น (manmade) สิ่งเหล่านี้ แสดงบนแผนที่โดยใช้สี เส้น หรือรูปต่างๆ เป็นสัญลักษณ์แทน

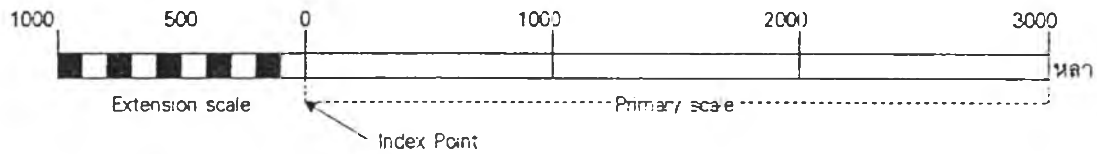
มาตราส่วน

มาตราส่วน (scale) คือ อัตราส่วนของระยะทางบนแผนที่ (map distance หรือ M.D.) กับระยะทางบนภูมิประเทศ (ground distance หรือ G.D)

นั่นคือ มาตราส่วน = M.D. / G.D.

มาตราส่วน มี 3 ชนิด คือ

ก) มาตราส่วนแบบกราฟพิก (graphic scale) หรือ มาตราส่วนแบบบรรทัด (bar scale) แสดงด้วยรูปภาพ มักจะมีไว้ข้างล่างของแผนที่ทุกระวาง มีเส้นบรรทัดไว้ให้หาระยะทางได้เลย



ภาพที่ 13 มาตราส่วนแบบกราฟพิก

ข) มาตราส่วนคำพูด (verbal scale) แสดงไว้เป็นคำพูดง่ายๆ เช่น 1 นิ้ว ต่อ 5ไมล์, 1 เซนติเมตร ต่อ 10 กิโลเมตร, 1/2 เซนติเมตร ต่อ 5 กิโลเมตร เป็นต้นข้อควรจำ คือ ตัวเลขทั้งสองข้างของคำว่า ต่อ จะต้องอยู่ในระบบเดียวกันเสมอ คือ ถ้าใช้ระบบอังกฤษก็ต่อระบบอังกฤษ ถ้าระบบเมตริกก็ต้องเป็นเมตริกเหมือนกัน

ค) มาตราส่วนเศษส่วน (fractional scale หรือ rational scale) แสดง ไว้เป็นอัตราส่วนกัน เช่น 1 : 50,000 หรือ 1/50,000 อ่านว่าหนึ่งต่อห้าหมื่น

1 : 100,000 หรือ 1/100,000 อ่านว่าหนึ่งต่อหนึ่งแสน

มาตราส่วนนี้นิยมใช้กันมาก จะเขียนไว้ตามขอบแผนที่ ถ้าแยกแผนที่ตามมาตราส่วนเศษส่วนจะได้ 3 ชนิด คือ

1. มาตราส่วนใหญ่ (large scale) คือ แผนที่ที่มีมาตราส่วน 1 : 75,000 ขึ้นไป จะเป็นแผนที่ที่คลุมพื้นที่น้อย แต่รายละเอียดในแผนที่จะปรากฏเห็นเด่นชัด

2. มาตราส่วนกลาง (medium scale) คือ แผนที่ที่มีมาตราส่วนเล็กกว่า 1 : 75,000 แต่ใหญ่กว่า 1 : 600,000 คลุมเนื้อที่ได้มากขึ้น แต่รายละเอียดต่างๆ ในแผนที่เห็นได้ไม่เด่นชัด

3. มาตราส่วนเล็ก (small scale) คือ แผนที่ที่มีมาตราส่วน 1 : 600,000 หรือเล็กกว่า คลุมพื้นที่ได้มากยิ่งขึ้น แต่รายละเอียดต่างๆ ในแผนที่ยิ่งเห็นไม่เด่นชัด

ระยะ

ระยะในภูมิประเทศจริงนั้นมีอยู่ 3 ชนิดคือ

ก) **ระยะตามแนวนอน** (Horizontal Distance) **ได้แก่ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดที่วัดไปตามแนวนอน** (Horizontal Line) **จะมีวิธีดังนี้**

1. หาระยะตามแนวนอนโดยอาศัยมาตราส่วนแบบบรรทัด

วิธีหาระยะตามแนวนอนในภูมิประเทศจากแผนที่โดยอาศัยมาตราส่วนแบบบรรทัด ให้กระทำด้วยการนำขอบบรรทัดหรือขอบกระดาษเรียบๆ วางทาบให้ผ่านจุดสองจุดในแผนที่ที่จะทำการวัดระยะแล้วทำเครื่องหมายไว้ที่ขอบกระดาษแสดงตำแหน่งของจุดสองจุดนั้น จากนั้นนำขอบกระดาษไปวางทาบที่มาตราส่วนแบบบรรทัด อันที่มีหน่วยวัดระยะตามต้องการ

วิธีทาบให้เอาขีดที่หมายไว้บนขอบกระดาษด้านขวามือทาบตรงขีดส่วนแบ่งช่วงเต็มหน่วยของมาตราส่วนแบบบรรทัดซึ่งอยู่ทางขวามือ (Primary Scale) โดยให้ขีดที่หมายไว้บนขอบกระดาษด้านซ้ายมือตกอยู่ในช่วงขีดส่วนแบ่งย่อยของมาตราส่วนแบบบรรทัด (Extension Scale) เสร็จแล้วอ่านระยะบนมาตราส่วนแบบบรรทัด ระยะที่ได้จะเป็นระยะห่างตามแนวนอนในภูมิประเทศของจุดทั้งสองนั้น

2. หาระยะตามแนวนอนโดยอาศัยมาตราส่วนแบบคำพูด สามารถกระทำได้ด้วยการวัดระยะระหว่างจุดที่ต้องการทราบระยะบนแผนที่ด้วยบรรทัด ได้ระยะเท่าไรแล้วนำไปเทียบกับมาตราส่วนแผนที่

3. หาระยะตามแนวนอนโดยอาศัยมาตราส่วนแบบเศษส่วน สามารถกระทำได้ด้วยการวัดระยะระหว่างจุดที่ต้องการทราบระยะบนแผนที่ด้วยบรรทัด ได้ระยะเท่าไรแล้วนำไปคูณกับตัวเลขที่เป็นส่วนของมาตราส่วนแผนที่

ข) ระยะตามแนวตั้ง (Vertical Distance) ได้แก่ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดที่วัดไปตามแนวตั้ง (Vertical Line) นั่นคือ การหาค่าความต่างระดับระหว่างจุดนั้นๆ นั่นเอง

ค) ระยะตามลาด (Slope Distance) ได้แก่ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดที่วัดไปตามลาด (Slope) โดยการหาระยะตามแนวนอนและระยะตามแนวตั้งระหว่างจุด 2จุด เมื่อได้ระยะตามแนวนอนและระยะตามแนวตั้งแล้ว ให้ใช้สูตรเรขาคณิตคำนวณหาระยะตามลาด ดังนี้

(ระยะตามลาด)^2 = (ระยะตามแนวแนวนอน)^2 + (ระยะตามแนวตั้ง)^2

การย่อและการขยายแผนที่

การย่อและการขยายแผนที่ (9) คือ การเปลี่ยนขนาดของแผนที่ให้ใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงเพื่อให้เหมาะสมกับการการใช้งาน

ก) การย่อและการขยายแผนที่โดยคำนึงถึงมาตราส่วนเป็นหลัก

การย่อมาตราส่วน ได้แก่ การทำให้แผนที่นั้นมีมาตราส่วนเล็กลง วิธีทำคือ นำจำนวนเท่า ที่ต้องการย่อไปคูณ ส่วน ของมาตราส่วนเดิม

การขยายมาตราส่วนได้แก่ การทำให้แผนที่นั้นมีมาตราส่วนใหญ่ขึ้น วิธีทำคือ นำจำนวนเท่า ที่ต้องการขยายไปหาร ส่วน ของมาตราส่วนเดิม

การเปลี่ยนแปลงของระยะทาง(ขนาดของแผนที่)มาตราส่วนกับระยะทางเป็นสิ่งเดียวกัน เมื่อย่อ-ขยายมาตราส่วน ระยะทางก็ย่อ-ขยาย ไปด้วย วิธีทำคือ เมื่อเราย่อมาตราส่วนเราต้องการทราบระยะทางใหม่ก็นำจำนวนเท่าไปหารระยะทางเดิมของแผนที่ เมื่อขยายมาตราส่วนก็นำจำนวนเท่าไปคูณระยะทางเดิม

การเปลี่ยนแปลงพื้นที่ของแผนที่เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงมาตราส่วน พื้นที่ก็เปลี่ยนไปด้วย แต่พื้นที่เป็นสิ่งที่มี 2 มิติ (กว้าง * ยาว) เพราะฉะนั้น การเพิ่มขึ้นหรือลดลงจึงเป็นไปทั้งด้านกว้างและด้านยาว

ให้สังเกตภาพต่อไปนี้

สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาด 1 ซม. * 1 ซม. หรือมีพื้นที่ 1 ตร.ซม.

เมื่อขยายมาตราส่วนขึ้น 2 เท่า นั่นคือ มีความยาว ของด้านเพิ่มเป็นด้านละ 2 ซม. พื้นที่จะเป็น 2 ซม. * 2 ซม. หรือ พื้นที่ 1 ตร.ซม. * $(2)^2$ = 4 ตร.ซม.

ภาพที่ 14 แสดงการขยาย

การย่อมาตราส่วน ก็มีนัยตรงข้ามกับการขยาย กล่าวคือ พื้นที่จะลดลงจากพื้นที่เดิมเป็น (จำนวนเท่าของมาตราส่วนที่ย่อ)^2

ข) การย่อและการขยายแผนที่โดยคำนึงถึงพื้นที่ของแผนที่เป็นหลัก

การย่อ ความยาวของด้านกว้างและด้านยาวจะลดลงตามส่วนของรากที่ 2 ของจำนวนเท่าที่ย่อ

การขยาย ความยาวของด้านกว้างและด้านยาวจะเพิ่มขึ้นตามส่วนของรากที่ 2 ของจำนวนเท่าที่ขยาย