

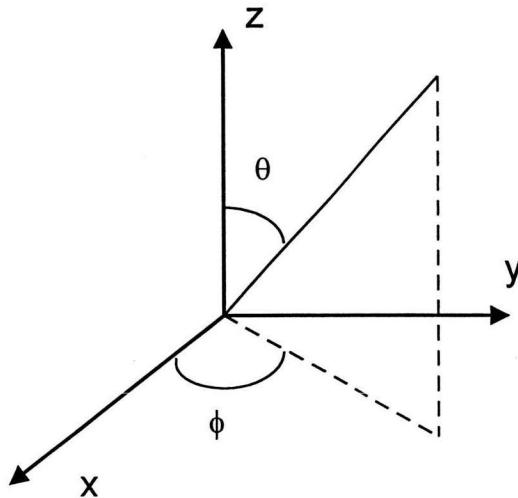
บทที่ 3

ผลกระทบเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดและ
ผลกระทบเนื่องจากความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งที่กวาดวัดค่า

ผลกระทบเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด

การวัดและทดสอบสายอากาศ โดยใช้ย่านทดสอบสายอากาศชนิดสนามใกล้เชิงระนาบ ถ้าหัววัด (probe) ที่ใช้เป็นแบบอุดมคติคือสามารถวัดค่าสนามไฟฟ้าที่อยู่บนระนาบการกวาดวัดได้อย่างถูกต้องตามที่ เป็นจริงโดยไม่ผิดเพี้ยนแล้ว แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามใกล้จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับผลการแปลงฟูริเยร์ของค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดค่าได้บนระนาบการกวาดวัด ดังสมการ (3.1)

$$\bar{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \frac{je^{-jkr}}{r} k_z \bar{A}(k_{x0}, k_{y0}) \quad (3.1)$$



รูป 3.1 นิยามของมุมในพิกัดทรงกลมที่ใช้ในที่นี้

\bar{A} ทางขวาของสมการคือสเปกตรัมคลื่นระนาบ (Plane Wave Spectrum : PWS) ของสนามไฟฟ้า \bar{E} โดยที่ A_x และ A_y จะหาได้จากการแปลงฟูริเยร์ของ E_x และ E_y บนระนาบการกวาดวัดตามลำดับ ซึ่ง ถ้าหัววัดที่ใช้เป็นแบบอุดมคติแล้วค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดค่าได้บนระนาบการกวาดวัดก็จะเป็น E_x และ E_y

นั่นเอง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเมื่อหัววัดที่ใช้เป็นแบบอุดมคติ แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับผลการแปลงฟูริเยร์ของค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดค่าได้บนระนาบการกวาดวัด ส่วน A_z นั้นสามารถหาได้จาก A_x และ A_y เนื่องจาก \bar{A} นั้นเช่นเดียวกับ \bar{E} คือมีองค์ประกอบที่เป็นอิสระกันเพียง 2 ตัวจากทั้งหมด 3 ตัว

สำหรับสมการ (3.1) ซึ่งเป็นสมการในย่านสนามไกลนั้น k_{x_0}, k_{y_0} และ k_{z_0} มีความสัมพันธ์กับมุมในพิกัดทรงกลมตามรูปที่ 3.1 ดังสมการต่อไปนี้

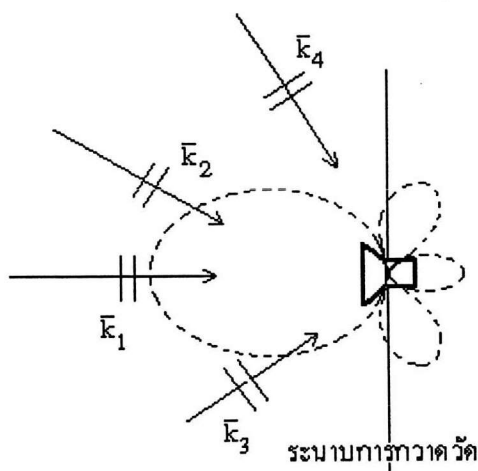
$$k_{x_0} = k \sin \theta \cos \phi \quad (3.2ก)$$

$$k_{y_0} = k \sin \theta \sin \phi \quad (3.2ข)$$

$$k_{z_0} = k \cos \theta \quad (3.2ค)$$

โดยที่ $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ เป็นค่าเลขคลื่น (wave number)

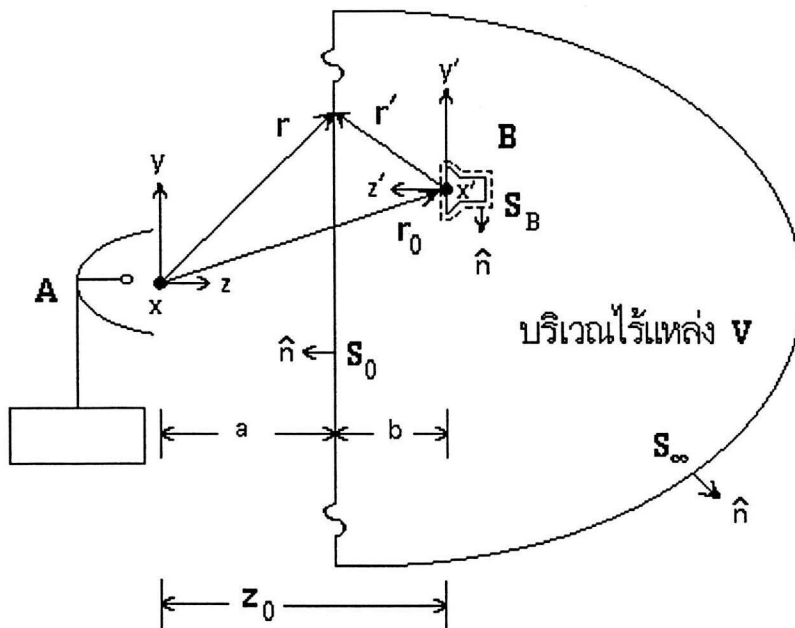
แต่ถ้าหัววัดที่ใช้ในการกวาดวัดค่าไม่เป็นอุดมคติ ค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดได้บนระนาบการกวาดวัดจะไม่ใช้ค่าสนามไฟฟ้าที่เกิดมาจากสายอากาศทดสอบและแผ่กระจายมายังตำแหน่งที่หัววัดอยู่บนระนาบการกวาดวัด แต่จะกลายเป็นค่าที่เกิดมาจากการคัปเปิล (couple) กันระหว่างสายอากาศทดสอบและหัววัด หัววัดที่เป็นอุดมคตินั้นได้แก่หัววัดที่มีแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเป็นแบบไอโซทรอปิก (isotropic) คือมีอัตราขยายเท่ากันในทุกทิศทาง หัววัดจึงตอบสนองต่อสเปกตรัมคลื่นระนาบในแต่ละทิศทางเหมือนกันหมด ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการในทางทฤษฎี แต่หัววัดจริงจะมีแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่มีอัตราขยายไม่เท่ากัน



รูป 3.2 เส้นประแสดงแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัด ตามรูปหัววัดจะตอบสนองต่อคลื่นระนาบที่มีทิศการเคลื่อนที่ \bar{k}_1 มากกว่าคลื่นระนาบที่มีทิศการเคลื่อนที่ \bar{k}_2, \bar{k}_3 และไม่ตอบสนองต่อคลื่นระนาบที่มีทิศการเคลื่อนที่ \bar{k}_4

ในทุกทิศทาง ซึ่งโดยทั่วไปจะมีทั้งพู่คลื่นหลัก (main lobe) พู่ข้าง (side lobe) และศูนย์ (null) ทำให้ห้วงวัดตอบสนองต่อคลื่นระนาบในทิศทางต่าง ๆ ไม่เท่ากันดังรูป 3.2 ค่าที่ห้วงวัดกวาดวัดได้จึงไม่มีความสัมพันธ์กับสเปกตรัมคลื่นระนาบตามสมการ (3.1) โดยตรง

อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์ระหว่างค่าวัดดังกล่าวกับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบสามารถหาได้เมื่อรู้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของห้วงวัดดังจะได้กล่าวต่อไป วิธีหนึ่งที่ใช้หาความสัมพันธ์ดังกล่าวจะใช้ทฤษฎีเมตริกซ์ของการกระเจิงคลื่นระนาบ (plane-wave scattering-matrix theory)[8] ส่วนอีกวิธีหนึ่งซึ่งเป็นวิธีที่กล่าวถึงในที่นี้ให้ใช้ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับของลอเรนตซ์ (Lorentz reciprocity theorem)[9] โดยได้ดัดแปลงการอ้างอิงมุมในพิกัดทรงกลมจากเอกสารอ้าง[9]ให้เป็นดังรูป 3.1



รูป 3.3 ตำแหน่งของสายอากาศทดสอบ ห้วงวัด ระนาบอนันต์ S_0 และพื้นผิว S_∞

จากรูปที่ 3.3 จะใช้สัญลักษณ์ A และ B แทนสายอากาศทดสอบและห้วงวัดตามลำดับ ห้วงวัดเคลื่อนที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด $z = z_0 = a + b$ บริเวณ V เป็นบริเวณไร้แหล่งกำเนิดอันได้แก่กระแสไฟฟ้าและประจุไฟฟ้า จากรูปจะเห็นว่าบริเวณ V นี้ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว S, ที่เป็นผลรวมของพื้นผิวครึ่งทรงกลมรัศมีอนันต์ S_∞ ทางขวาของระนาบ S_0 กับระนาบอนันต์ S_0 ที่ $z = a$ แต่ไม่รวมบริเวณภายในพื้นผิว S_B ที่ล้อมรอบห้วงวัด

ให้สายอากาศทั้งสองเมื่อทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่งจะกำเนิดคลื่นที่ความถี่เดียวกัน

\bar{E}_a, \bar{H}_a แทนสนามปฐมภูมิ (primary field) ที่ก่อกำเนิดโดยสายอากาศทดสอบ \bar{E}_b, \bar{H}_b แทนสนามปฐมภูมิที่ก่อกำเนิดโดยหัววัดเมื่อหัววัดทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง

$\bar{E}_{as}, \bar{H}_{as}$ แทนสนามที่ถูกกระเจิง (scattered field) โดยสายอากาศทดสอบเมื่อหัววัดทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง และ $\bar{E}_{bs}, \bar{H}_{bs}$ แทนสนามที่ถูกกระเจิงโดยหัววัดเมื่อสายอากาศทดสอบทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง

\bar{J}_a เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ A เมื่อ A ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง ส่วน \bar{J}_{bs} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ B เมื่อ A ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่ง

\bar{J}_b และ \bar{J}_{as} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ B เมื่อ B และ A ทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่งตามลำดับ

เมื่อละเลยมัลติเพล็กซ์ (multiple coupling) และใช้ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับของลอเรนตซ์กับบริเวณ V จะได้ว่า

$$\oint_{S_i} [(\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}) \times (\bar{H}_b + \bar{H}_{as}) - (\bar{E}_b + \bar{E}_{as}) \times (\bar{H}_a + \bar{H}_{bs})] \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (3.3)$$

พิจารณานิทีกรัลบนพื้นผิว S_∞ ซึ่งในกรณีนี้ $\hat{n} = \hat{r}$ ดังนั้นแทน $\bar{H} = \frac{1}{\eta} \hat{n} \times \bar{E}$ ในสมการ (3.3) จะได้ว่าอินทิกรัลในสมการ (3.3) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\eta} [(\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}) \times \{\hat{n} \times (\bar{E}_b + \bar{E}_{as})\} - (\bar{E}_b + \bar{E}_{as}) \times \{\hat{n} \times (\bar{E}_a + \bar{E}_{bs})\}] \cdot \hat{n} \quad (3.4)$$

เมื่อใช้สูตรการกระจายผลคูณเวกเตอร์ $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$ กับสมการ (3.4) จะได้ว่าโดยให้ $\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}$ แทนด้วย \bar{A} ส่วน $\hat{n} = \hat{r}$ แทนด้วย \bar{B} และ $\bar{E}_b + \bar{E}_{as}$ แทนด้วย \bar{C} แล้วนิพจน์ในวงเล็บเหลี่ยมของสมการ (3.4) จะกลายเป็น

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) - \bar{C} \times (\bar{B} \times \bar{A}) = (\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} = 0$$

ที่ค่าเป็นศูนย์เนื่องจากบนพื้นผิว S_∞ ซึ่งเป็นพื้นผิวที่ระยะอนันต์ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวรัศมี r จะมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สนามไฟฟ้าเหลือแต่องค์ประกอบในแนวตั้งฉากกับ \hat{r}

ดังนั้นอินทิกรัลตามสมการ (3.3) บนพื้นผิว S_∞ จึงตัดทิ้งไปได้ ส่วนอินทิกรัลบนพื้นผิว S_B สามารถแปลงรูปได้โดยอาศัยทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับของลอเรนตซ์ โดยที่ $-\hat{n}$ มีทิศพุ่งออกจากพื้นผิว S_B เป็น

$$\begin{aligned} & \oint_{S_B} [(\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}) \times (\bar{H}_b + \bar{H}_{as}) - (\bar{E}_b + \bar{E}_{as}) \times (\bar{H}_a + \bar{H}_{bs})] \cdot (-\hat{n}) ds \\ & = \int_{V_B} [(\bar{E}_b + \bar{E}_{as}) \cdot (\bar{J}_a + \bar{J}_{bs}) - (\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}) \cdot (\bar{J}_b + \bar{J}_{as})] dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

พิจารณาด้านขวาของสมการ โดยนิยามแล้ว \bar{E}_{bs} เป็นสนามไฟฟ้าที่กระเจิงออกจากสายอากาศ B จึงไม่มีค่าภายในบริเวณ V_B ส่วน \bar{J}_a และ \bar{J}_{as} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่สายอากาศ A จึงไม่มีค่าภายในบริเวณ V_B เช่นกัน และในทางปฏิบัติถ้าค่า VSWR ในสายป้อนสัญญาณของหัววัดเมื่อหัววัดทำหน้าที่เป็นสายอากาศส่งไม่ถูกรบกวนโดยสายอากาศทดสอบเทียบกับตอนที่ไม่มีสายอากาศทดสอบอยู่แสดงว่า $\bar{E}_{as} \ll \bar{E}_b$ จึงสามารถละเลย \bar{E}_{as} ได้ ดังนั้นจากสมการ (3.5) จะได้ว่าทางขวาของสมการจะกลายเป็น

$$\int_{V_B} [\bar{E}_b \cdot \bar{J}_{bs} - \bar{E}_a \cdot \bar{J}_b] dv \quad (3.6)$$

อินทิกรัลนี้สามารถแสดงได้ว่าแปรโดยตรงกับแรงดันรับวงจรเปิดของหัววัด [9] และจากทฤษฎีโครงข่ายจะได้ว่าแรงดันรับที่โหลดใด ๆ จะเป็นสัดส่วนกับแรงดันวงจรเปิด ดังนั้นค่าอินทิกรัลในสมการ (3.6) จึงแปรโดยตรงกับค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดได้ และจะนิยามอินทิกรัลนี้เป็น $P_B(\bar{r}_0)$ โดย \bar{r}_0 เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของหัววัดบนระนาบการกวาดวัดดังแสดงในรูปที่ 2

ดังนั้นจะได้ว่าสมการ (3.3) จะกลายเป็น

$$\int_{S_0} [(\bar{E}_a + \bar{E}_{bs}) \times (\bar{H}_b + \bar{H}_{as}) - (\bar{E}_b + \bar{E}_{as}) \times (\bar{H}_a + \bar{H}_{bs})] \cdot \hat{n} ds = P_B(\bar{r}_0) \quad (3.7)$$

ในสมการนี้ผลคูณระหว่างสนามปฐมภูมิกับสนามที่ถูกกระเจิงจะมีค่าเป็นศูนย์ดังแสดงต่อไปข้างล่าง โดยอาศัยทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับของลอเรนตซ์

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} [(\bar{E}_a \times \bar{H}_{as}) - (\bar{E}_{as} \times \bar{H}_a)] \cdot \hat{n} ds \\ & = \int_{S_0 + S_\infty} [(\bar{E}_a \times \bar{H}_{as}) - (\bar{E}_{as} \times \bar{H}_a)] \cdot \hat{n} ds \\ & = \int_{V + V_B} (\bar{E}_{as} \cdot \bar{J}_a - \bar{E}_a \cdot \bar{J}_{as}) dv \end{aligned}$$

การขยายพื้นผิวจาก S_0 เป็น $S_0 + S_\infty$ สามารถทำได้เพราะดังได้แสดงแล้วว่าอินทิกรัลบนพื้นผิว S_∞ เป็นศูนย์ พิจารณาบรรทัดสุดท้ายของสมการข้างบน \bar{J}_a และ \bar{J}_{as} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่สาย

อากาศ A ซึ่งอยู่นอกบริเวณ $V+V_B$ และไม่มีค่าภายในบริเวณ $V+V_B$ ดังนั้นสมการบรรทัดสุดท้ายข้างบนจึงมีค่าเป็นศูนย์

ในทำนองเดียวกัน เราจะพิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} [(\bar{E}_{bs} \times \bar{H}_b) - (\bar{E}_b \times \bar{H}_{bs})] \cdot \hat{n} ds \\ &= \oint_{S_0+S'_0} [(\bar{E}_{bs} \times \bar{H}_b) - (\bar{E}_b \times \bar{H}_{bs})] \cdot \hat{n} ds \\ &= \int_{V'+V_A} (\bar{E}_b \cdot \bar{J}_{bs} - \bar{E}_{bs} \cdot \bar{J}_b) dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

โดยที่บริเวณ V' เป็นบริเวณไร้แหล่งกำเนิดซึ่งถูกปิดล้อมโดยพื้นผิวที่เป็นผลรวมของพื้นผิวครึ่งทรงกลมรัศมีอนันต์ S'_0 ทางขวาของระนาบ S_0 กับระนาบ S_0 แต่ไม่รวมบริเวณ V_A ภายในพื้นผิว S_A ที่ล้อมรอบสายอากาศทดสอบ ดังนั้นโดยนิยามแล้วความหนาแน่นกระแส \bar{J}_b และ \bar{J}_{bs} จึงมีค่าเป็นศูนย์ภายในบริเวณ $V'+V_A$

ส่วนผลคูณระหว่างสนามที่ถูกกระเจิงกับสนามที่ถูกกระเจิงด้วยกันเองสามารถละเลยได้เนื่องจากมีค่าน้อยเทียบกับผลคูณระหว่างสนามปฐมภูมิกับสนามปฐมภูมิ

ดังนั้นสมการ (3.7) จะกลายเป็น

$$\int_{S_0} (\bar{E}_a \times \bar{H}_b - \bar{E}_b \times \bar{H}_a) \cdot \hat{n} ds = P_B(\bar{r}_0) \quad (3.8)$$

ต่อไปจะแทน \bar{E}_a, \bar{H}_a และ \bar{E}_b, \bar{H}_b ในรูปของสเปกตรัมคลื่นระนาบของมันดังสมการต่อไปนี้

$$\bar{E}_a(x, y, a) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(k_x, k_y) e^{-jk \cdot \bar{r}} dk_x dk_y \quad (3.9a)$$

นำสมการ (3.9a) ข้างบน แทนลงในสมการแมกซ์เวลล์ $\bar{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \bar{E}$ จะได้ว่า

$$\bar{H}_a = -\frac{1}{j\omega\mu} \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \times (\bar{F} e^{-jk \cdot \bar{r}}) dk_x dk_y$$

เนื่องจากสเปกตรัมคลื่นระนาบ \bar{F} เป็นฟังก์ชันในตัวแปรของ k_x และ k_y ไม่ใช่ในตัวแปรตำแหน่ง ดังนั้นใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\nabla \times (\psi \bar{A}) = \nabla \psi \times \bar{A}$ เมื่อ \bar{A} เป็นเวกเตอร์คงที่ในตัวแปรตำแหน่ง จะได้ว่า

$$\bar{H}_a(x, y, a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{1}{\omega\mu} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{k} \times \bar{F}(k_x, k_y) e^{-jk \cdot \bar{r}} dk_x dk_y \quad (3.9ข)$$

เมื่อหาไดเวอร์เจนซ์ของสมการ (3.9ก) โดยใช้ความรู้ที่ว่า $\nabla \cdot \bar{E}_a = 0$ ในบริเวณไร้แหล่งกำเนิดกับ สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\nabla \cdot (\psi \bar{A}) = \nabla \psi \cdot \bar{A}$ เมื่อ \bar{A} เป็นเวกเตอร์คงที่ในตัวแปรตำแหน่ง จะได้สมการต่อไปนี้

$$\bar{k} \cdot \bar{F}(k_x, k_y) = 0 \quad (3.9ค)$$

สมการนี้หมายความว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบ \bar{F} มีองค์ประกอบที่เป็นอิสระกัน 2 ตัวจากทั้งหมด 3 ตัว ในทำนองเดียวกัน สำหรับ \bar{E}_b, \bar{H}_b จะใช้ระบบพิกัดที่ใส่เครื่องหมายไพรม์ดังแสดงในรูปที่ 3.3 และให้สเปกตรัมคลื่นระนาบแทนด้วยฟังก์ชัน \bar{G} ดังนี้

$$\bar{E}_b(x', y', b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(k'_x, k'_y) e^{-jk' \cdot \bar{r}'} dk'_x dk'_y \quad (3.10ก)$$

$$\bar{H}_b(x', y', b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{1}{\omega\mu} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{k}' \times \bar{G}(k'_x, k'_y) e^{-jk' \cdot \bar{r}'} dk'_x dk'_y \quad (3.10ข)$$

$$\bar{k}' \cdot \bar{G}(k'_x, k'_y) = 0 \quad (3.10ค)$$

แทน (3.9ก), (3.9ข) และ (3.10ก), (3.10ข) ลงในสมการ (3.8) จะได้อินทิกรัล 6 ชั้น โดยจากรูปที่ 3.3 เวกเตอร์ตั้งฉากระนาบ S_0 ก็คือ $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\omega\mu} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} [\bar{F}(k_x, k_y) \times \{\bar{k}' \times \bar{G}(k'_x, k'_y)\} \\ & \quad - \bar{G}(k'_x, k'_y) \times \{\bar{k} \times \bar{F}(k_x, k_y)\}] \\ & \quad \cdot (-\hat{z}) e^{-jk \cdot \bar{r} - jk' \cdot \bar{r}'} dk'_x dk'_y dk_x dk_y dx dy \\ & = P_B(\bar{r}_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

การลดรูปสมการ (3.11) สามารถทำได้โดยพิจารณาอินทิกรัล 2 ชั้นในส่วนของตัวแปรทางตำแหน่ง x, y ซึ่งก็คือ

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}-jk'\cdot\bar{r}'} dx dy$$

โดยพิจารณาจากรูปที่ 3.3 : $\bar{r}_0 = \bar{r} - \bar{r}'$ เป็นเวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของหัววัด B เทียบกับสายอากาศทดสอบ A แทน $\bar{r}_0 = \bar{r} - \bar{r}'$ ในอินทิกรัลข้างบน จะได้ว่าตัวชี้กำลังของอินทิเกรนดจะกลายเป็น

$$-j(\bar{k}\cdot\bar{r} + \bar{k}'\cdot\bar{r}') = j\bar{k}'\cdot\bar{r}_0 - j(\bar{k}' + \bar{k})\cdot\bar{r}$$

ต่อไปสังเกตจากรูปที่ 3.3 ว่า $\hat{x}' = -\hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$, $\hat{z}' = -\hat{z}$ ดังนั้นจะได้ว่าบนระนาบ $S_0(z = a)$ นั้น

$$(\bar{k}' + \bar{k})\cdot\bar{r} = (k_x - k'_x)x + (k_y + k'_y)y + (k_z - k'_z)a$$

ดังนั้นอินทิกรัลที่กำลังพิจารณาจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}-jk'\cdot\bar{r}'} dx dy &= e^{j\bar{k}'\cdot\bar{r}_0 - ja(k_z - k'_z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_x - k'_x)x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_y + k'_y)y} dy \\ &= e^{j\bar{k}'\cdot\bar{r}_0} e^{-ja(k_z - k'_z)} (2\pi)^2 \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \end{aligned} \quad (3.12)$$

โดยอาศัยนิยามของฟังก์ชันเดลตา

เมื่อแทนสมการ (3.12) กลับลงในสมการ (3.11) โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาจะบังคับให้ $k'_x = k_x$, $k'_y = -k_y$ ในอินทิกรัลส่วนที่เหลือ และเนื่องจากขนาดของ \bar{k}' เท่ากับค่าเลขคลื่น k ดังนั้น k'_z จะหาได้จากสมการ

$$k'_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k_z$$

ดังนั้น \bar{k}' จะหาได้เป็น

$$\bar{k}' = k'_x \hat{x}' + k'_y \hat{y}' + k'_z \hat{z}' = k_x(-\hat{x}) - k_y \hat{y} + k_z(-\hat{z}) = -\bar{k} \quad (3.13)$$

จาก (3.12), (3.13) และ $\bar{r}_0 = \bar{r} - \bar{r}'$ จะทำให้สมการ (3.11) เปลี่ยนไปเป็น

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega\mu} \iiint_{-\infty-\infty}^{\infty} [F(k_x, k_y) \times \{\bar{k} \times \bar{G}(k_x, -k_y)\} \\ & \quad + \bar{G}(k_x, -k_y) \times \{\bar{k} \times F(k_x, k_y)\}] \\ & \quad \cdot (\hat{z}) e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}_0} dk_x dk_y \\ & = P_B(\bar{r}_0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

พิจารณาสมการข้างบนนี้ โดยใช้สมการ (3.9ค), (3.10ค) และจากสูตรการกระจายผลคูณเวกเตอร์ที่ว่า เมื่อ $\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$ และ $\bar{C} \cdot \bar{B} = 0$ แล้ว $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) + \bar{C} \times (\bar{B} \times \bar{A}) = 2(\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B}$ ดังนั้นนิพจน์ในวงเล็บเหลี่ยมของสมการ (3.14) จะกลายเป็น

$$2(\bar{F}(k_x, k_y) \cdot \bar{G}(k_x, -k_y))\bar{k}$$

ดังนั้นสมการ (3.14) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{2}{\omega\mu} \iiint_{-\infty-\infty}^{\infty} k_z \bar{F}(k_x, k_y) \cdot \bar{G}(k_x, -k_y) e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}_0} dk_x dk_y = P_B(\bar{r}_0) \quad (3.15)$$

พิจารณาสมการ (3.15) โดยที่ $\bar{k} \cdot \bar{r}_0 = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0$ จะเห็นได้ว่า อินทิกรัล 2 ชั้นทางซ้ายของสมการนั้นเป็นการแปลงฟูรีเยร์ 2 ชั้นของ

$$2\pi k_z \bar{F}(k_x, k_y) \cdot \bar{G}(k_x, -k_y) e^{-jk_z z_0}$$

จากโดเมน (k_x, k_y) ไปยังพิสัย (x_0, y_0) บนระนาบ $z = z_0$ นั่นเอง ดังนั้นเมื่อแปลงกลับฟูรีเยร์จะได้สมการต่อไปนี้

$$k_z \bar{F}(k_x, k_y) \cdot \bar{G}(k_x, -k_y) = \frac{\omega\mu}{4\pi} \iiint_{-\infty-\infty}^{\infty} P_B(\bar{r}_0) e^{j\bar{k} \cdot \bar{r}_0} dx_0 dy_0 \quad (3.16)$$

นิพจน์ทางขวาของสมการ (3.16) นี้แปรผันโดยตรงกับผลการแปลงฟูริเยร์ของค่าที่ห้วงกวาดวัดได้บนระนาบการกวาดวัด ส่วนทางซ้ายของสมการเกี่ยวเนื่องกับผลคูณสเกลาร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบของสายอากาศทดสอบ A และสเปกตรัมคลื่นระนาบของห้วงวัด B และเนื่องจากสเปกตรัมคลื่นระนาบและแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศมีความสัมพันธ์กันตามสมการ (3.1) ดังนั้นเมื่อคูณ k_z เข้าทั้งสองข้างของสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$\bar{E}(k_x, k_y) \cdot \bar{E}'(k_x, -k_y) = ck_z e^{jk_z z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} P_B(\bar{r}_0) e^{j(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (3.17)$$

โดยที่ \bar{E} และ \bar{E}' แทนแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบ และของห้วงวัดตามลำดับ ส่วน c เป็นค่าคงที่ที่กำหนดโดย ω , μ และ r ระยะทางจากจุดกำเนิดถึงจุดสังเกตในระนาบสนามไกล

สมการ (3.17) นี้แสดงว่าผลกระทบจากความไม่เป็นอุดมคติของห้วงวัด ต่อการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบจากผลการแปลงฟูริเยร์ของค่าที่ห้วงวัดกวาดวัดได้บนระนาบการกวาดวัด จะอยู่ในลักษณะของการคับเปิดในรูปของผลคูณสเกลาร์ทางด้านซ้ายของสมการ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อรู้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของห้วงวัด \bar{E}' จะสามารถแก้สมการเพื่อหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบ \bar{E} ได้

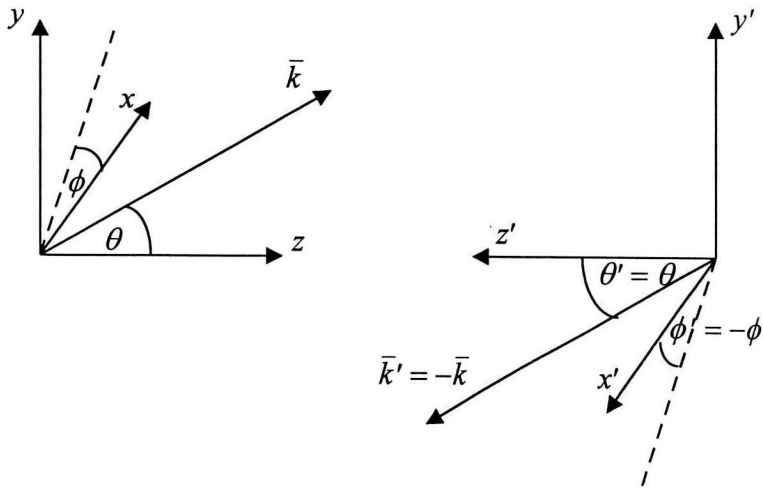
อย่างไรก็ตามผลคูณสเกลาร์ทางซ้ายของสมการ (3.17) ไม่เหมาะที่จะกระจายออกในพิกัดคาร์ทีเซียน เพราะในพิกัดคาร์ทีเซียนสนามไฟฟ้าทั้ง 3 องค์ประกอบนั้นเป็นอิสระกันเพียง 2 องค์ประกอบเนื่องจากถูกกำหนดโดยสมการ $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ พิกัดที่เหมาะสมคือพิกัดทรงกลมเนื่องจากสนามไฟฟ้าในองค์ประกอบแนวรัศมี $E_r \rightarrow 0$ ในระนาบสนามไกล ทำให้เหลือแต่องค์ประกอบ E_θ และ E_ϕ ที่เป็นอิสระกัน

การหาสมการในพิกัดทรงกลมทำได้โดย แดกสนามไฟฟ้าในระนาบสนามไกลของทั้งสายอากาศทดสอบและห้วงวัดออกเป็นผลรวมขององค์ประกอบทั้ง 2 ในแนวของเวกเตอร์หน่วย $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ และ $\hat{\theta}'$, $\hat{\phi}'$ ตามลำดับ

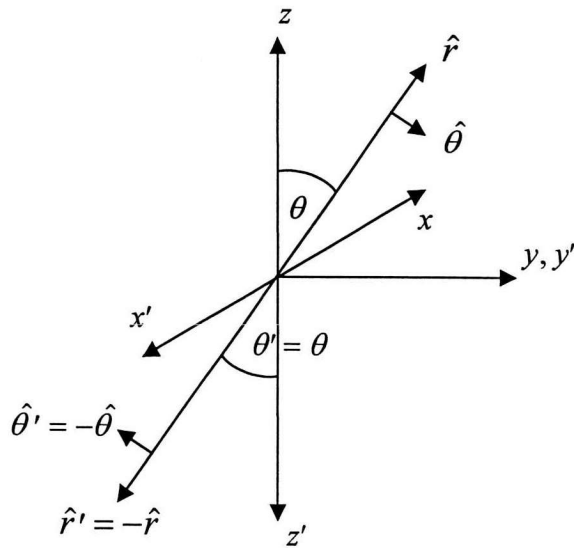
$$\bar{E}(k_x, k_y) = \bar{E}(\theta, \phi) = E_\theta(\theta, \phi)\hat{\theta} + E_\phi(\theta, \phi)\hat{\phi} \quad (3.18ก)$$

$$\bar{E}'(k'_x, k'_y) = \bar{E}'(\theta', \phi') = E'_\theta(\theta', \phi')\hat{\theta}' + E'_\phi(\theta', \phi')\hat{\phi}' \quad (3.18ข)$$

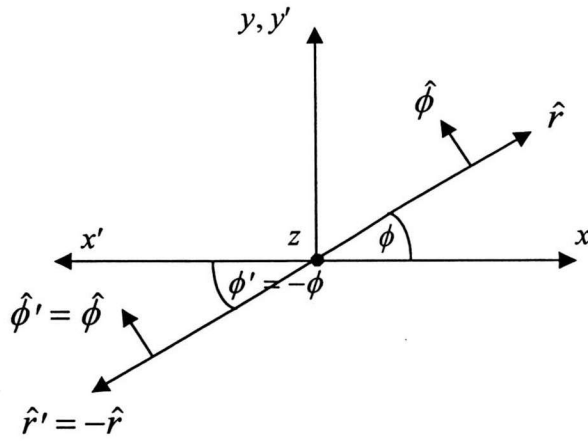
เพื่อที่จะกระจายผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $\bar{E}(\theta, \phi)$ และ $\bar{E}'(\theta', \phi')$ นั้นจำเป็นจะต้องเขียนเวกเตอร์หน่วย $\hat{\theta}'$, $\hat{\phi}'$ ในรูปของ $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ ซึ่งอาจทำได้โดยการพิจารณาจากรูปที่ 3.4 และ 3.5 โดยสังเกตว่าสำหรับระนาบสนามไกล $\bar{k} = k\hat{r}$ หรือโดยการพิจารณาจากสมการต่อไปนี้



รูป 3.4 เมื่อรู้ว่าเวกเตอร์ $\bar{k}' = -\bar{k}$ จะเห็นได้ว่ามุม $\theta' = \theta$ และมุม $\phi' = -\phi$ โดยที่เส้นประเป็นภาพฉายของ \bar{k} และ \bar{k}' บนระนาบ xy



รูป 3.5(ก) เมื่อรู้ว่า $\hat{r}' = -\hat{r}$ และมุม $\phi' = -\phi$ จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์หน่วย $\hat{\phi}' = -\hat{\phi}$



รูป 3.5(ข) เมื่อรู้ว่า $\hat{r}' = -\hat{r}$ และมุม $\theta' = \theta$ จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์หน่วย $\hat{\theta}' = \hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z} \quad (3.19ก)$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y} \quad (3.19ข)$$

$$\hat{\theta}' = \cos\theta' \cos\phi' \hat{x}' + \cos\theta' \sin\phi' \hat{y}' - \sin\theta' \hat{z}' \quad (3.19ค)$$

$$\hat{\phi}' = -\sin\phi' \hat{x}' + \cos\phi' \hat{y}' \quad (3.19ง)$$

ซึ่งต้องหาค่ามุม θ', ϕ' ในรูปของ θ, ϕ ให้ได้เสียก่อนโดยการพิจารณาสมการ (3.2) ข้างบนกับสมการ (3.2) ต่อไปนี้

$$k'_x = k \sin\theta' \cos\phi' \quad (3.2'ก)$$

$$k'_y = k \sin\theta' \sin\phi' \quad (3.2'ข)$$

$$k'_z = k \cos\theta' \quad (3.2'ค)$$

เนื่องจาก $k'_z = k_z$ ดังนั้นจาก (3.2ค) และ (3.2'ค) จะได้ว่า $\theta' = \theta$ ส่วนมุม ϕ' นั้นโดยใช้สมการ (3.2ก),(3.2ข) กับ (3.2'ก),(3.2'ข) และเนื่องจากรู้แล้วว่า $k'_x = k_x, k'_y = -k_y$ ทำให้ได้ว่า $\phi' = -\phi$ ดังนั้นโดยแทนค่า θ' และ ϕ' ลงในสมการ (3.19ค) และ (3.19ง) จะได้ว่า

$$\hat{\theta}' = \cos\theta \cos\phi(-\hat{x}) + \cos\theta(-\sin\phi)\hat{y} - \sin\theta(-\hat{z}) = -\hat{\theta}$$

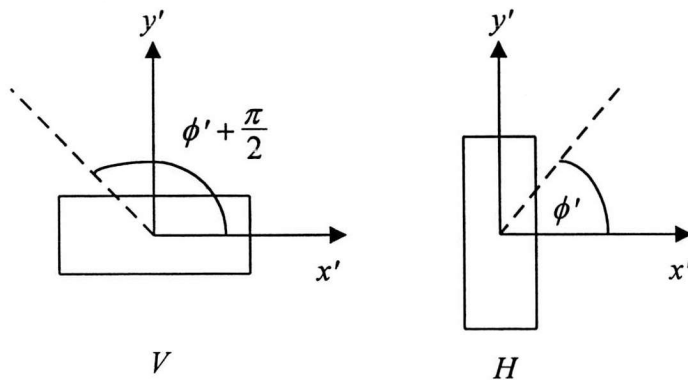
$$\hat{\phi}' = \sin\phi(-\hat{x}) + \cos\phi\hat{y} = \hat{\phi}$$

แทนค่า θ' , ϕ' และ $\hat{\theta}'$, $\hat{\phi}'$ ลงในสมการ (3.18ข) เสร็จแล้วแทนสมการ (3.18) ลงในสมการ (3.17) รวมทั้งเขียน k_x, k_y และ k_z เป็นฟังก์ชันของมุม θ, ϕ จะได้สมการที่มีตัวแปรอยู่ในพิกัดทรงกลมทั้งหมดดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{E}(\theta, \phi) \cdot \bar{E}'(\theta', \phi') &= -E_\theta(\theta, \phi)E'_\theta(\theta, -\phi) + E_\phi(\theta, \phi)E'_\phi(\theta, -\phi) \\ &= C \cos\theta e^{jkz_0 \cos\theta} \iint_{-\infty-\infty} P_B(\bar{r}_0) e^{jk(x_0 \sin\theta \cos\phi + y_0 \sin\theta \sin\phi)} dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่ที่กำหนดโดย ω, μ และ r

ในสมการ (3.20) นี่สิ่งที่เราต้องการรู้ก็คือองค์ประกอบทั้ง 2 ของแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบ E_θ และ E_ϕ ดังนั้นเมื่อถือว่า E'_θ และ E'_ϕ เป็นค่าที่เราารู้แล้ว ทางขวาของสมการก็เป็นค่าที่เราสามารถคำนวณได้จากข้อมูลของค่าที่หัววัดกวาดวัดได้บนระนาบการกวาดวัดในย่านทดสอบชนิดสนามไกล ดังนั้นสมการ (3.20) จึงมีตัวแปรที่เราต้องการทราบ 2 ตัว ในขณะที่ตอนนี้มีเพียงสมการเดียว วิธีที่จะทำให้ได้สมการ 2 สมการสำหรับ E_θ และ E_ϕ วิธีหนึ่งก็คือการใช้หัววัดที่มีแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่ต่างไปจากหัววัดอันเดิม คือเป็น E'_θ และ E'_ϕ เพิ่มอีกชุดหนึ่ง ทำการกวาดวัดบนระนาบการกวาดวัดเดิมซ้ำอีกครั้งเพื่อให้ได้ข้อมูลของค่าวัดที่หัววัดกวาดวัดค่าได้ชุดใหม่สำหรับการคำนวณทางด้านขวาของสมการ (3.20) อย่างไรก็ตามการใช้หัววัดเพียงตัวเดียวโดยใช้การหมุนหัววัดในแนวมุม ϕ ไป 90° แทนการใช้หัววัดอันที่ 2 ในการกวาดวัดครั้งที่ 2 เป็นวิธีที่นิยมกันมากกว่าเนื่องจากสะดวกและรวดเร็วกว่า ในที่นี่จะใช้วิธีหลังดังกล่าว



รูป 3.6 การวางตัวของหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวตั้ง V กับแบบโพลาไรเซชันแนวระดับ H

ลักษณะการวางตัวของหัววัดในทั้ง 2 ลักษณะสำหรับการกวาดวัดทั้ง 2 ครั้งจะเรียกว่าเป็นการวางตัวแบบโพลาไรเซชันแนวตั้ง (vertical polarization) และการวางตัวแบบโพลาไรเซชันแนวระดับ (horizontal polarization) ตามลำดับดังแสดงไว้ในรูป 3.6 ดังนั้นตอนนี้จากสมการ (3.20) เราจะได้สมการ 2 สมการสำหรับ 2 ตัวแปร E_θ และ E_ϕ เป็น

$$-E_\theta(\theta, \phi)E_\theta'^H(\theta, -\phi) + E_\phi(\theta, \phi)E_\phi'^H(\theta, -\phi) = I_H \cos \theta \quad (3.21ก)$$

$$-E_\theta(\theta, \phi)E_\theta'^V(\theta, -\phi) + E_\phi(\theta, \phi)E_\phi'^V(\theta, -\phi) = I_V \cos \theta \quad (3.21ข)$$

สมการ (3.21ก) ที่ได้จากการวางหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวระดับนั้นใส่ตัวยก (superscript) H กับแบบรูปการแผ่พลังงานของหัววัด คือเป็น $E_\theta'^H$ และ $E_\phi'^H$ ในทำนองเดียวกันสมการ (3.21ข) ที่ได้จากการวางหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวตั้งนั้นใส่ตัวยก V กับแบบรูปการแผ่พลังงานของหัววัดคือเป็น $E_\theta'^V$ และ $E_\phi'^V$ ส่วน I_H และ I_V นั้นเป็นอินทิกรัลที่แปรกับผลการแปลงฟูรีเยร์ของค่าที่หัววัดกวาดวัดได้เมื่อวางหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวระดับและในแนวตั้งตามลำดับ ดังสมการต่อไปนี้

$$I_H(\theta, \phi) = Ce^{jk_z z_0} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} P_B^H(x_0, y_0, z_0) e^{j(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (3.22ก)$$

$$I_V(\theta, \phi) = Ce^{jk_z z_0} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} P_B^V(x_0, y_0, z_0) e^{j(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (3.22ข)$$

จากสมการ (3.21) เราแก้สมการหา E_θ และ E_ϕ ของสายอากาศทดสอบได้โดยอาศัยกฎของเครเมอร์ (Cramer's rule) ได้เป็น[10]

$$E_\theta(\theta, \phi) = \frac{\begin{vmatrix} I_H & E_\phi'^H(\theta, -\phi) \\ I_V & E_\phi'^V(\theta, -\phi) \end{vmatrix}}{\Delta} \cos \theta \quad \text{และ} \quad E_\phi(\theta, \phi) = \frac{\begin{vmatrix} -E_\theta'^H(\theta, -\phi) & I_H \\ -E_\theta'^V(\theta, -\phi) & I_V \end{vmatrix}}{\Delta} \cos \theta$$

$$\text{โดยที่ } \Delta = \begin{vmatrix} -E_\theta'^H(\theta, -\phi) & E_\phi'^H(\theta, -\phi) \\ -E_\theta'^V(\theta, -\phi) & E_\phi'^V(\theta, -\phi) \end{vmatrix}$$

เมื่อกระจายดีเทอร์มิแนนต์ออกจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$E_\theta(\theta, \phi) = \frac{\cos\theta[I_H E_\phi^V(\theta, -\phi) - I_V E_\phi^H(\theta, -\phi)]}{E_\theta^V(\theta, -\phi)E_\phi^H(\theta, -\phi) - E_\theta^H(\theta, -\phi)E_\phi^V(\theta, -\phi)} \quad (3.23ก)$$

$$E_\phi(\theta, \phi) = \frac{\cos\theta[I_H E_\theta^V(\theta, -\phi) - I_V E_\theta^H(\theta, -\phi)]}{E_\theta^V(\theta, -\phi)E_\phi^H(\theta, -\phi) - E_\theta^H(\theta, -\phi)E_\phi^V(\theta, -\phi)} \quad (3.23ข)$$

แต่เนื่องจากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัดเมื่อหัววัดวางตัวแบบโพลาริเซชันแนวระดับสามารถทำได้จากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัดเมื่อหัววัดวางตัวแบบโพลาริเซชันแนวตั้งโดยพิจารณาจากรูป 3.6 ดังสมการต่อไปนี้[11]

$$E_\theta^H(\theta', \phi') = E_\theta^V(\theta', \phi' + \frac{\pi}{2}) \quad (3.24ก)$$

$$E_\phi^H(\theta', \phi') = E_\phi^V(\theta', \phi' + \frac{\pi}{2}) \quad (3.24ข)$$

ดังนั้นโดยแทนค่า E_θ^H และ E_ϕ^H จากสมการ (3.24) ลงในสมการ (3.23) จะได้ว่า

$$E_\theta(\theta, \phi) = \frac{\cos\theta[I_H E_\phi^V(\theta, -\phi) - I_V E_\phi^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi)]}{E_\theta^V(\theta, -\phi)E_\phi^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi) - E_\theta^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi)E_\phi^V(\theta, -\phi)} \quad (3.25ก)$$

$$E_\phi(\theta, \phi) = \frac{\cos\theta[I_H E_\theta^V(\theta, -\phi) - I_V E_\theta^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi)]}{E_\theta^V(\theta, -\phi)E_\phi^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi) - E_\theta^V(\theta, \frac{\pi}{2} - \phi)E_\phi^V(\theta, -\phi)} \quad (3.25ข)$$

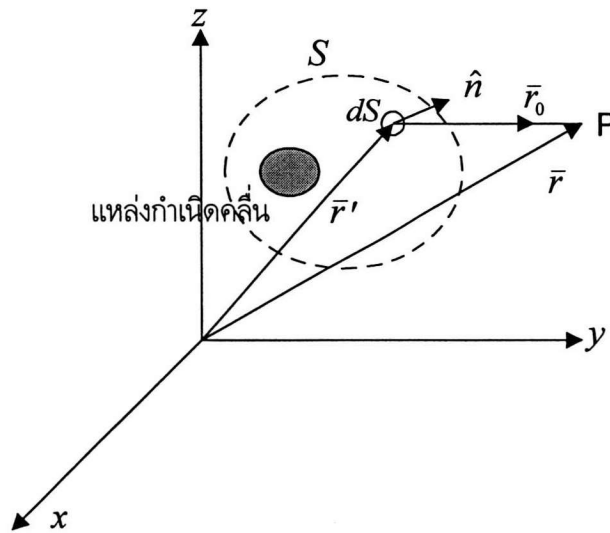
สมการ (3.25) เป็นสมการที่ต้องการสำหรับการชดเชยผลเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด เมื่อรู้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัด ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัดเมื่อหัววัดเป็นสายอากาศชนิดที่นำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิด

การหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัด

ในขั้นต้นจะหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัดซึ่งเป็นสายอากาศชนิดที่นำคลื่นปลายเปิด (open ended waveguide) โดยใช้วิธีการอินทิเกรตสนามที่ช่องเปิด (aperture field integration)

ตามหลักการของฮอยเกน (Huygen's principle) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้กันทั่วไป หลังจากนั้นจะปรับปรุงแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก (H-plane) โดยใช้วิธีการอินทิเกรตเฉพาะสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิด ตามหลักการที่เหมือนกับการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลโดยใช้แนวคิดสเปกตรัมคลื่นระนาบ

1. หลักการของฮอยเกน (Huygen's principle)



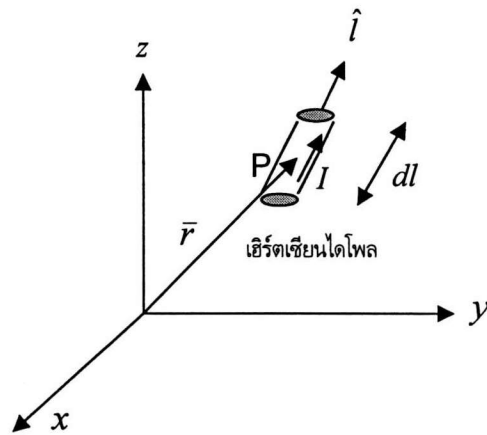
รูป 3.7 ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดคลื่น จุด P และอิลิเมนต์ dS บนพื้นผิวปิด S

พิจารณารูปที่ 3.7 แหล่งกำเนิดคลื่นในรูปของความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า \vec{J} และความหนาแน่นประจุไฟฟ้า ρ อยู่ในบริเวณที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวปิด S และสมมติให้ไม่มีแหล่งกำเนิดอื่นใดภายนอกพื้นผิวปิดนี้ สนามไฟฟ้า \vec{E}_S และสนามแม่เหล็ก \vec{H}_S บนพื้นผิว S ตามรูปจะมาจากแหล่งกำเนิดคลื่นดังกล่าวภายในพื้นผิว S เวกเตอร์หน่วย \hat{n} เป็นเวกเตอร์แนวตั้งฉากกับอิลิเมนต์ dS ใดๆ ของพื้นผิว S โดยมีทิศพุ่งออกตามรูป จุด P เป็นจุดใดๆที่อยู่บริเวณภายนอกพื้นผิวปิด S \vec{r} เป็นเวกเตอร์ชี้จากจุดกำเนิดถึงจุด P \vec{r}' เป็นเวกเตอร์ชี้จากจุดกำเนิดถึงอิลิเมนต์ dS \vec{r}_0 เป็นเวกเตอร์ชี้จากอิลิเมนต์ dS ถึงจุด P

หลักการของฮอยเกนกล่าวว่าสนามไฟฟ้าที่จุด P สามารถหาได้จากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสกับพื้นผิว S ซึ่งก็คือ \vec{E}_{Sv} และ \vec{H}_{Sv} โดยยกเอาแหล่งกำเนิดจริงภายในพื้นผิว S ออกไป ซึ่งสำหรับในกรณีนี้ $kr_0 \gg 1$ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้[12]

$$\vec{E} = \frac{jk}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-jk r_0}}{r_0} \left\{ (\hat{n} \times \vec{E}_{Sv}) \times \hat{r}_0 + \eta [(\hat{n} \times \vec{H}_{Sv}) \times \hat{r}_0] \times \hat{r}_0 \right\} dS \quad (3.26)$$

การพิสูจน์สมการ (3.26) อาจทำได้โดยใช้ทฤษฎีสมามูลเชิงพื้นผิว (surface equivalence theorem) ซึ่งแทนการมีอยู่ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนพื้นผิว S ด้วยความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าสมมูล $\bar{J}_S = \hat{n} \times \bar{H}_S$ และความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กสมมูล $\bar{M}_S = -\hat{n} \times \bar{E}_S$ บนพื้นผิว S และใช้ \bar{J}_S, \bar{M}_S เป็นแหล่งกำเนิดคลื่นต่อไป แต่ในที่นี้จะใช้ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับในการพิสูจน์[12] โดยจะให้แหล่งกำเนิดคลื่นที่อยู่ภายในพื้นผิว S เป็นสายอากาศ A ส่วนสายอากาศอากาศ B กำหนดให้เป็นสายอากาศเฮิร์ตเซียนไดโพล (Hertzian dipole) $I d\bar{l}$ วางไว้ที่จุด P ตามรูปที่ 3.8 โดยที่



รูป 3.8 การวางตัวของเฮิร์ตเซียนไดโพลยาว $d\bar{l}$ ที่จุด P โดยที่ \hat{i} เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางขนานกับผิวด้านข้างของไดโพลดังรูป

$d\bar{l} = \hat{i} dl$ มีทิศทางใดๆ ดังนั้นจากทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับ เมื่อละเลยสนามที่ถูกกระเจิงซึ่งโดยปกตินั้นมีค่าน้อยมากเทียบกับสนามปฐมภูมิเมื่อ $kr_0 \gg 1$ จะได้ว่า

$$\nabla \cdot (\bar{E}_A \times \bar{H}_B) - \nabla \cdot (\bar{E}_B \times \bar{H}_A) = \bar{E}_B \cdot \bar{J}_A - \bar{E}_A \cdot \bar{J}_B \quad (3.27)$$

โดยที่ \bar{E}_A, \bar{H}_A เป็นสนามปฐมภูมิที่เกิดจากสายอากาศ A และ \bar{E}_B, \bar{H}_B เป็นสนามปฐมภูมิที่เกิดจากสายอากาศ B ส่วน \bar{J}_A และ \bar{J}_B เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าบนสายอากาศ A และสายอากาศ B ตามลำดับ ซึ่ง \bar{J}_B มีความสัมพันธ์กับค่ากระแสไฟฟ้า I ดังสมการต่อไปนี้

$$\iint_{\sigma} \bar{J}_B d\sigma = I \hat{i} \quad (3.28)$$

โดยที่ $d\sigma$ เป็นอีลิเมนต์ของพื้นผิวไดโพลซึ่งเวกเตอร์แนวตั้งฉากของมันตั้งฉากกับเวกเตอร์หน่วย \hat{i} ที่แสดงทิศทางการวางตัวของไดโพล

โดยให้ v แทนบริเวณนอกพื้นผิวปิด S ซึ่งหมายความว่า v จะถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวทรงกลมรัศมีอนันต์ S_∞ กับพื้นผิว S อินทิเกรตสมการ (3.27) ตลอดทั้งบริเวณ v และสังเกตว่า \vec{J}_A อยู่ภายในพื้นผิวปิด S จึงอยู่นอกบริเวณ B เราจะได้ว่า

$$\iiint \nabla \cdot (\vec{E}_A \times \vec{H}_B - \vec{E}_B \times \vec{H}_A) dv = - \iiint \vec{E}_A \cdot \vec{J}_B dv \quad (3.29)$$

พิจารณาพจน์ทางขวาของสมการข้างบนนี้ เนื่องจากไดโพลมีขนาดเล็กมาก ดังนั้น \vec{E}_A จึงคงที่ตลอดบนพื้นผิว ของไดโพล และมีค่าเท่ากับสนามไฟฟ้า \vec{E} ที่จุด P ดังนั้น

$$\begin{aligned} \iiint \vec{E}_A \cdot \vec{J}_B dv &= dl \iint \vec{E}_A \cdot \vec{J}_B d\sigma \\ &= dl \vec{E} \cdot \iint \vec{J}_B d\sigma \\ &= Idl \vec{E} \cdot \hat{i} \end{aligned}$$

ส่วนอินทิกรัลบนบริเวณ v ทางซ้ายของสมการ (3.29) เมื่อแปลงโดยใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์จะกลายเป็นอินทิกรัลบนพื้นผิว $S + S_\infty$ แต่เนื่องจากสนามเนื่องจากแหล่งกำเนิดที่มีขนาดจำกัดมีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะอนันต์ ดังนั้นอินทิกรัลบนพื้นผิว S_∞ จึงมีค่าเป็นศูนย์ เหลือแต่อินทิกรัลบนพื้นผิว S ซึ่ง $\vec{E}_A = \vec{E}_S$ และ $\vec{H}_A = \vec{H}_S$ โดยที่ $-\hat{n}$ มีทิศพุ่งออกจากบริเวณ v ดังนั้นสมการ (3.29) จะกลายเป็น

$$\iint (\vec{E}_S \times \vec{H}_B - \vec{E}_B \times \vec{H}_S) \cdot (-\hat{n} d\sigma) = -Idl \vec{E} \cdot \hat{i} \quad (3.30)$$

สมการ (3.30) เขียนให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียลได้ดังนี้

$$(\vec{E}_S \times \vec{H}_B - \vec{E}_B \times \vec{H}_S) \cdot \hat{n} d\sigma = Idl d\vec{E} \cdot \hat{i} \quad (3.31)$$

สนามไฟฟ้า \vec{E}_B และสนามแม่เหล็ก \vec{H}_B ที่ปรากฏในสมการ (3.31) เป็นสนามที่อีลิเมนต์ dS ต่างๆ บนพื้นผิว S เนื่องจากไดโพลที่ตำแหน่ง P ดังนั้นถ้าระยะทาง r_0 มีค่ามากพอ คือเป็นไปตามเงื่อนไข $kr_0 \gg 1$ จะได้ว่า[12]

$$\bar{H}_B = -\frac{jk}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} Id\bar{l} \times \hat{r} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_B &= -\eta \bar{H}_B \times \hat{r}_0 \\ &= -\frac{jk\eta}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} \hat{r}_0 \times (Id\bar{l} \times \hat{r}_0) \end{aligned} \quad (3.33)$$

พิจารณาพจน์ $\hat{r}_0 \times (\hat{l} \times \hat{r}_0)$ เมื่อกระจายออกโดยใช้เอกลักษณ์การกระจายผลคูณเวกเตอร์ในภาคผนวก ก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{r}_0 \times (\hat{l} \times \hat{r}_0) &= \hat{l} - (\hat{r}_0 \cdot \hat{l})\hat{r}_0 \\ &= \hat{l} - \hat{l}_{//} = \hat{l}_{\perp} \end{aligned} \quad (3.34)$$

โดยที่ตัวห้อย \perp บ่งบอกถึงองค์ประกอบของเวกเตอร์ส่วนที่ตั้งฉากกับ \hat{r}_0

และตัวห้อย $//$ บ่งบอกถึงองค์ประกอบของเวกเตอร์ส่วนที่ขนานกับ \hat{r}_0

แทนค่า \bar{E}_B และ \bar{H}_B จากสมการ (3.32) และ (3.33) ลงในสมการ (3.31) แล้วหารตลอดด้วย $Id\bar{l}$ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นดังสมการต่อไปนี้

$$d\bar{E} \cdot \hat{l} = \frac{jk}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} [-\bar{E}_S \times (\hat{l} \times \hat{r}_0) + \eta(\hat{l}_{\perp} \times \bar{H}_S)] \cdot \hat{n} dS \quad (3.35)$$

สมการ (3.35) สามารถจัดรูปใหม่โดยใช้สมการ (ก.2) ได้เป็น

$$d\bar{E} \cdot \hat{l} = \frac{jk}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} [(\hat{n} \times \bar{E}_S) \times \hat{r}_0 + \eta(\bar{H}_S \times \hat{n})_{\perp}] \cdot \hat{l} dS$$

เนื่องจาก \hat{l} สามารถมีทิศทางในแนวใดก็ได้ เช่นเป็น \hat{x}, \hat{y} หรือ \hat{z} ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า

$$d\bar{E} = \frac{jk}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} [(\hat{n} \times \bar{E}_S) \times \hat{r}_0 + \eta(\bar{H}_S \times \hat{n})_{\perp}] dS \quad (3.36)$$

โดยที่ $(\bar{H}_S \times \hat{n})_{\perp}$ สามารถเขียนได้ในรูปของผลคูณเวกเตอร์ทำนองเดียวกับทางซ้ายของสมการ (3.34) ได้ดังต่อไปนี้

$$(\bar{H}_S \times \hat{n})_{\perp} = \hat{r}_0 \times ((\bar{H}_S \times \hat{n}) \times \hat{r}_0) = ((\hat{n} \times \bar{H}_S) \times \hat{r}_0) \times \hat{r}_0$$

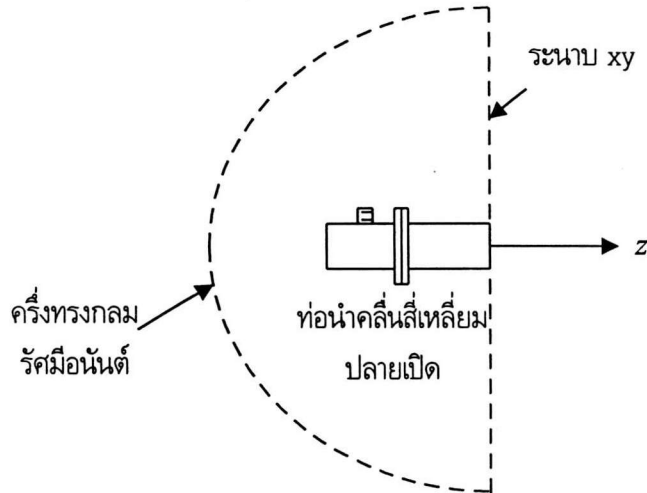
เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.36) จะได้สมการที่แสดงถึงสนามไฟฟ้าที่ P เนื่องมาจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อีลิเมนต์ dS บนพื้นผิว S ดังต่อไปนี้

$$d\bar{E} = \frac{jk}{4\pi r_0} e^{-jk r_0} \{ (\hat{n} \times \bar{E}_S) \times \hat{r}_0 + \eta [(\hat{n} \times \bar{H}_S) \times \hat{r}_0] \times \hat{r}_0 \} dS \quad (3.37)$$

โดยการอินทิเกรตสมการ (3.37) นี้ตลอดทั้งพื้นผิว S และสังเกตว่า $\hat{n} \times \bar{E}_S = \hat{n} \times \bar{E}_S$, $\hat{n} \times \bar{H}_S = \hat{n} \times \bar{H}_S$ เราจะได้ผลลัพธ์เป็นสมการ (3.26) ซึ่งถ้า $r' \ll r_0$ ตลอดทั่วทั้งพื้นผิว S ในส่วนที่สนามไฟฟ้า \bar{E}_S และสนามแม่เหล็ก \bar{H}_S มีนัยสำคัญและไม่สามารถละเลยได้ในการอินทิเกรต แล้วจะได้ว่า $\hat{r}_0 \cong \hat{r}$ และ $r_0 \cong r - \bar{r}' \cdot \hat{r}$ สำหรับบริเวณดังกล่าวบนพื้นผิว S ดังนั้นเมื่อแทนค่า \hat{r}_0 และ r_0 ลงในสมการ (3.26) จะได้สมการต่อไปนี้

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \hat{r} \times \iint_S [\hat{n} \times \bar{E}_S - \eta \hat{r} \times (\hat{n} \times \bar{H}_S)] e^{jk\bar{r}' \cdot \hat{r}} dS \quad (3.38)$$

2. แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของหัววัดชนิดท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิด



รูป 3.9 การวางตัวของสายอากาศท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิด พื้นผิวปิด S ที่ล้อมรอบ

ประกอบด้วยระนาบ xy ซึ่งเป็นระนาบช่องเปิดและเครื่องทรงกลมรัศมีอนันต์

ให้ความกว้างตามแนวแกน x และตามแนวแกน y ของท่อนำคลื่นเป็น a และ b ตามลำดับโดยที่ $a > b$ และโดยทั่วไปเนื่องจากท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมถูกออกแบบมาให้ปฏิบัติงานที่ความถี่ที่มีโหมดคลื่นแพร่กระจาย (propagating mode) เพียงโหมดเดียวคือโหมด TE_{10} เงื่อนไขของค่าของ a และ b ที่บังคับให้คลื่นโหมด TE_{10} เป็นโหมดคลื่นแพร่กระจายเพียงโหมดเดียวในท่อนำคลื่น ณ ความถี่ปฏิบัติการคือ

$$a < \lambda < 2a, \quad b < \lambda/2$$

จากรูป 3.9 จะได้ว่าสมการ (3.38) จะกลายเป็นสมการต่อไปนี้ โดยที่สนามบนเครื่องทรงกลมรัศมีอนันต์เป็นศูนย์เนื่องจากสนามจากแหล่งกำเนิดที่มีขนาดจำกัดต้องเป็นศูนย์ที่ระยะอนันต์ และละลายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนระนาบช่องเปิดที่นอกเหนือไปจากบริเวณช่องเปิด การละลายเช่นนี้จะทำให้ผลลัพธ์

ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนไปจากค่าจริงดังจะได้อีกกล่าวต่อไป และสังเกตว่าทิศทางของเวกเตอร์หน่วย \hat{n} ของพื้นผิว S ส่วนที่เป็นระนาบช่องเปิดนั้นเป็น \hat{z}

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \hat{r} \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\hat{z} \times \bar{E}_t - \eta \hat{r} \times (\hat{z} \times \bar{H}_t)] e^{jkr' \cdot \bar{r}} dx' dy' \quad (3.39)$$

โดยที่ $dS = dx' dy'$ และ \bar{E}_t และ \bar{H}_t เป็นองค์ประกอบในแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนช่องเปิดของท่อนำคลื่นซึ่งก็คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวตามขวาง (transverse) ของคลื่นโหมด TE_{10} ที่ปากของท่อนำคลื่นตามสมการต่อไปนี้

$$E_t = E_0 \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \hat{y} \quad (3.40ก)$$

$$H_t = -\frac{E_0}{Z_1} \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) \hat{x} \quad (3.40ข)$$

โดยที่

$$Z_1 = Z_{10} \left(\frac{1 + \Gamma_{10}}{1 - \Gamma_{10}} \right) \quad (3.41)$$

Z_{10} และ Γ_{10} เป็นอิมพีแดนซ์และสัมประสิทธิ์การสะท้อนของคลื่นโหมด TE_{10} ในท่อนำคลื่นตามลำดับ Z_{10} มีค่าดังนี้

$$Z_{10} = \eta \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

เมื่อแทน \bar{E}_t และ \bar{H}_t จากสมการ (3.40) ลงใน (3.39) และพิจารณาว่า

$$\hat{r} \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (\hat{z} \times \bar{E}_1) e^{jk\hat{r}' \cdot \hat{r}} dx' dy' = -(\hat{r} \times \hat{x}) E_0 F \quad (3.43\text{ก})$$

$$\hat{r} \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [-\eta \hat{r}' \times (\hat{z} \times \bar{H}_1)] e^{jk\hat{r}' \cdot \hat{r}} dx' dy' = \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{y}) \frac{\eta}{Z_1} E_0 F \quad (3.43\text{ข})$$

โดยที่

$$\begin{aligned} F &= \int_{-a/2}^{a/2} \cos \frac{\pi x'}{a} \exp(jkx' \sin \theta \cos \phi) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp(jky' \sin \theta \sin \phi) dy' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} [e^{j\pi x'/a} + e^{-j\pi x'/a}] \exp(jkx' \sin \theta \cos \phi) dx' \left[b \frac{\sin(\frac{1}{2} kb \sin \theta \sin \phi)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta \sin \phi} \right] \\ &= \frac{(2a/\pi) \cos(\frac{1}{2} ka \sin \theta \cos \phi)}{1 - (ka \sin \theta \cos \phi / \pi)^2} \left[b \frac{\sin(\frac{1}{2} kb \sin \theta \sin \phi)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta \sin \phi} \right] \\ &= 2ab\pi \frac{\cos(k_x a / 2) \sin(k_y b / 2)}{\pi^2 - (k_x a)^2} \frac{1}{k_y b / 2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

และ k_x, k_y มีค่าตามสมการ (3.2ก) และ (3.2ข) ตามลำดับ

โดยการแทนค่าเวกเตอร์หน่วย \hat{x}, \hat{y} ในรูปของเวกเตอร์หน่วยในพิกัดทรงกลมจากภาคผนวก ก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \hat{x} &= (\hat{r} \times \hat{\theta}) \cos \theta \cos \phi - (\hat{r} \times \hat{\phi}) \sin \phi \\ &= \hat{\phi} \cos \theta \cos \phi + \hat{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad (3.45\text{ก})$$

$$\begin{aligned} \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{y}) &= \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{\theta}) \cos \theta \sin \phi + \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{\phi}) \cos \phi \\ &= -(\hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi) \end{aligned} \quad (3.45\text{ข})$$

โดยการแทนสมการ (3.45) ลงในสมการ (3.43) เราจะได้ว่า (3.39) กลายเป็น

$$\bar{E}(r) = \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} E_0 F[\hat{\theta} \sin \phi (1 + \cos \theta \frac{\eta}{Z_1}) + \hat{\phi} \cos \phi (\cos \theta + \frac{\eta}{Z_1})] \quad (3.46)$$

แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก จะหาได้จากการแทน $\phi = 90^\circ$ และ $\phi = 0^\circ$ ในสมการ (3.46) ตามลำดับ ดังนี้

$$\bar{E}_E(\theta) = \frac{jke^{-jkr}}{2\pi^2 r} E_0 ab \frac{\sin[(\pi b / \lambda) \sin \theta]}{(\pi b / \lambda) \sin \theta} (1 + \cos \theta \frac{\eta}{Z_1}) \hat{\theta} \quad (3.47ก)$$

$$\bar{E}_H(\theta) = \frac{jke^{-jkr}}{2\pi^2 r} E_0 ab \frac{\cos[(\pi a / \lambda) \sin \theta]}{1 - (2a \sin \theta / \lambda)^2} (\cos \theta + \frac{\eta}{Z_1}) \hat{\phi} \quad (3.47ข)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปนอร์มอลไลซ์ได้เป็น

$$E_E(\theta) = \frac{\sin[(\pi b / \lambda) \sin \theta] [1 + \cos \theta (\eta / Z_1)]}{(\pi b / \lambda) \sin \theta \quad 1 + \eta / Z_1} \quad (3.48ก)$$

$$E_H(\theta) = \frac{\cos[(\pi a / \lambda) \sin \theta] (\cos \theta + \eta / Z_1)}{1 - (2a \sin \theta / \lambda)^2 \quad 1 + \eta / Z_1} \quad (3.48ข)$$

Yaghjian[13]กล่าวว่า $E_E(\theta)$ จาก (3.48ก) สามารถใช้ได้ทั้งในช่วงครึ่งทรงกลมซีกหน้า ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) และช่วงครึ่งทรงกลมซีกหลัง ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) เพราะผลลัพธ์ที่ได้ตามสมการ (3.46)

นั้นสมมูลกับผลลัพธ์ที่ได้จากการอินทิเกรตกระแสภายในท่อนำคลื่นเนื่องจากโหมด TE_{10} แม้ว่าบริเวณในครึ่งทรงกลมซีกหลังจะเป็นบริเวณภายในพื้นผิวปิด S ตามรูป 3.9 แต่เมื่อให้ค่า Γ_{10} เป็นศูนย์ซึ่งจากสมการ (3.41) จะทำให้ Z_1 กลายเป็น Z_{10} ตามสมการ (3.42) แล้วจะได้ว่า $E_E(\theta)$ จาก (3.48ก) ตรงกับผลการวัดในช่วงครึ่งทรงกลมซีกหน้ามากกว่าเมื่อใช้ค่า Γ_{10} ตามที่เป็นจริง แต่ในช่วงครึ่งทรงกลมซีกหลังผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ค่า Γ_{10} ตามที่เป็นจริงจะดีกว่า

ส่วนแบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบสนามแม่เหล็ก $E_H(\theta)$ ตามสมการ (3.48ข) นั้นจะแตกต่างจากค่าจริงมากกว่ากรณีของแบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบสนามไฟฟ้า $E_E(\theta)$ ตามสมการ (3.48ก) เพราะ $E_H(\theta)$ แคมกว่า $E_E(\theta)$ มากเพราะว่า a มีค่ามากกว่า b มาก ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว $a = 2b$ $E_H(\theta)$ จึงได้รับผลกระทบจากการละลายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนระนาบช่องเปิดที่นอกเหนือไปจากบริเวณช่องเปิดมากกว่า $E_E(\theta)$ โดยที่ Yaghjian[13]กล่าวว่า $E_H(\theta)$ จากสมการ (3.48ข) ให้แบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบสนามแม่เหล็กที่กว้างกว่าของจริงมากไม่ว่าจะให้ค่า Γ_{10} เป็นศูนย์หรือว่าใช้ค่าตามที่เป็นจริง อย่างไรก็ตามการอินทิเกรตทั้งองค์ประกอบในแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนช่องเปิด \bar{E} , และ \bar{H} , เพื่อหาสนามไฟฟ้าในย่านสนามไกลไม่ใช่วิธีเดียวที่เป็นไปได้ อีกวิธีหนึ่งเป็นการอินทิเกรตเฉพาะ \bar{E} , บนช่องเปิดซึ่งสามารถทำได้ตามทฤษฎีสมมูลเชิงพื้นผิว (surface equivalence theorem) โดยใช้ $2(\hat{z} \times \bar{E}_i)$ แทนพจน์ในวงเล็บเหลี่ยมของสมการ (3.39) ดังสมการต่อไปนี้ โดยที่สมการจะใช้ได้เฉพาะในช่วงครึ่งทรงกลมซีกหน้า ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) เท่านั้น

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \hat{r} \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} 2(\hat{z} \times \bar{E}_i) e^{jk\bar{r}' \cdot \bar{r}} dx' dy' \quad (3.49)$$

ดังนั้นจากสมการ (3.43ก) และ (3.45ก) จะได้ว่า (3.49) กลายเป็น

$$\bar{E}(r) = \frac{jke^{-jkr}}{2\pi r} E_0 F(\hat{\theta} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \theta \cos \phi) \quad (3.50)$$

ดังนั้นแบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบสนามแม่เหล็กจะหาได้จากสมการ (3.50) โดยแทน $\phi = 0^\circ$ ใน (3.50) ซึ่งหลังจากนอร์มอลไลซ์แล้วจะได้ว่า

$$E_H(\theta) = \cos\theta \left(\frac{\cos[(\pi a / \lambda) \sin \theta]}{1 - (2a \sin \theta / \lambda)^2} \right) \quad (3.51)$$

อย่างไรก็ตาม $E_E(\theta)$ ที่ได้จาก (3.51) โดยแทน $\phi = 90^\circ$ จะต่างจากค่าจริงมากกว่า $E_E(\theta)$ จากสมการ (3.48ก) ที่ใช้ทั้ง \bar{E} , และ \bar{H} , บนช่องเปิดในการคำนวณ หลังจากได้ $E_E(\theta)$ และ $E_H(\theta)$ แล้ว แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในทุกทิศทาง $\bar{E}(r, \theta, \phi)$ ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิดจะหาได้โดยสมการต่อไปนี้

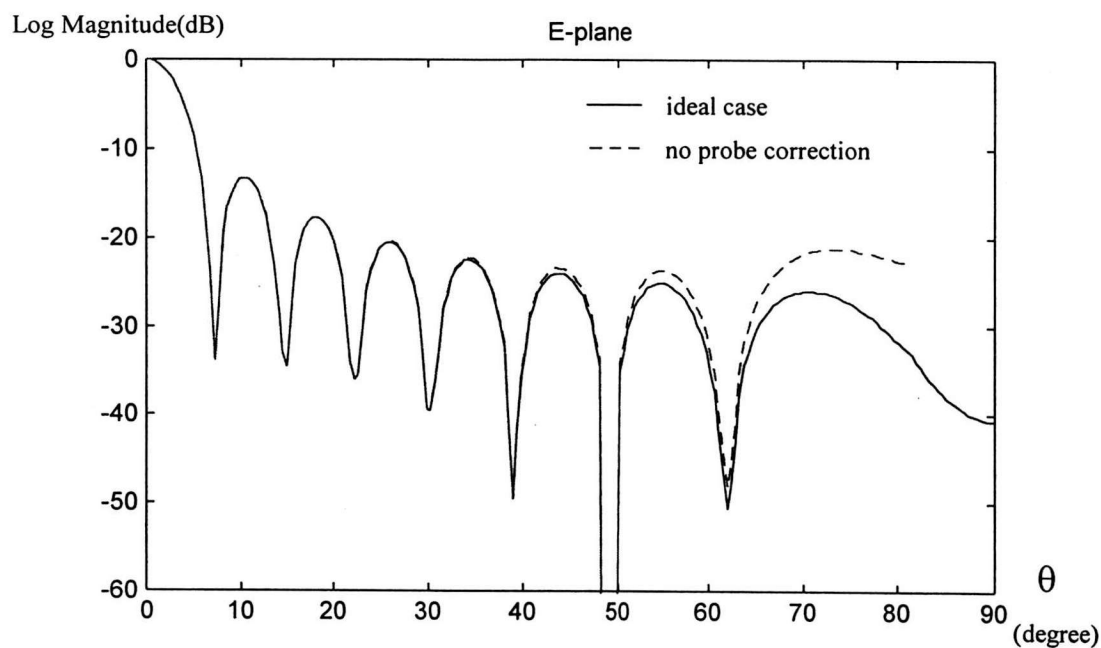
$$\bar{E}(r, \theta, \phi) = E_E(\theta) \sin \phi \hat{\theta} + E_H(\theta) \cos \phi \hat{\phi} \quad (3.52)$$

ซึ่งแม้ว่าจะเป็นสมการโดยประมาณแต่ Yaghjian[13] กล่าวว่ามันให้ค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองที่มุม ϕ ค่าต่าง ๆ มากกว่าแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในทุกทิศทางที่ได้จากวิธีอินทิเกรตสนามที่ช่องเปิด

การคำนวณจำลองสถานการณ์เพื่อดูผลกระทบเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด

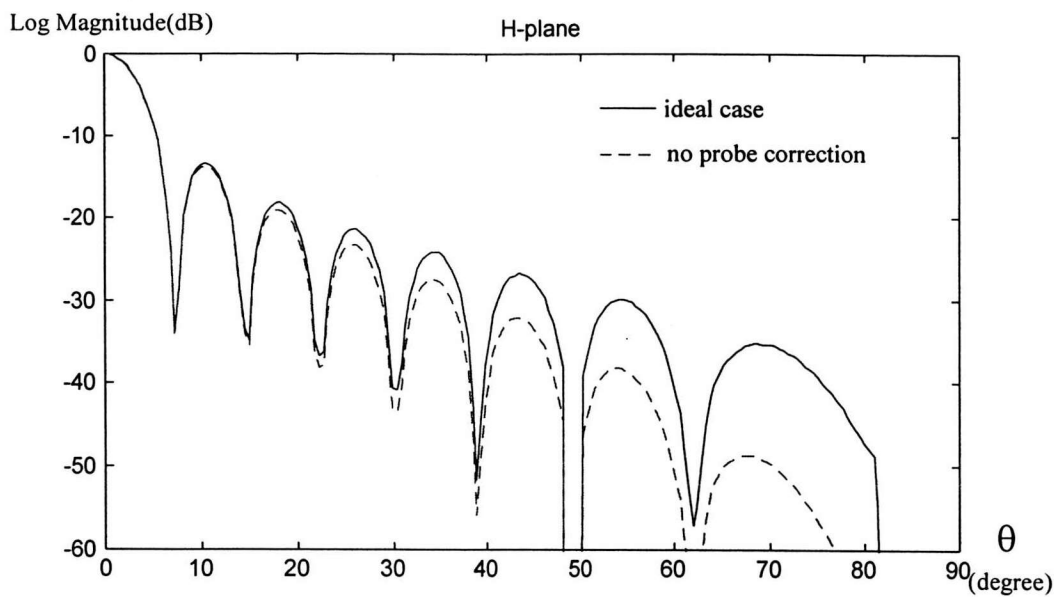
สำหรับการคำนวณจำลองสถานการณ์เพื่อดูผลกระทบเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดนั้น ในกรณีที่มีการชดเชยผลเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด จะคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากการกระจายของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดโดยถือว่าหัววัดเป็นแบบอุดมคติเลยเนื่องจากได้ทำการชดเชยไปแล้ว ส่วนในกรณีที่ไม่มีผลกระทบเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด จะคำนวณโดยเลียนแบบสถานการณ์จริง คือในสถานการณ์จริงถ้าการกระจายของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดของสายอากาศทดสอบมีโพลาริเซชันเฉพาะในแนวแกน y เมื่อไม่มีความต้องการที่จะชดเชยผลเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดก็จะทำการกวาดวัดโดยวางหัววัดบนระนาบการกวาดวัดแบบโพลาริเซชันแนวตั้งแล้วนำข้อมูลสนามไฟฟ้าที่กวาดวัดได้นี้ไปคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบ ทำให้มีข้อมูลจากการกวาดวัดเฉพาะ P_B^V แต่ไม่มี P_B^H ซึ่งเป็นข้อมูลจากการกวาดวัดเมื่อวางหัววัดแบบโพลาริเซชันแนวระดับ ผลก็คือมี I_V ตามสมการ (3.22ข) แต่ไม่มี I_H ตามสมการ (3.22ก) ดังนั้นในการคำนวณจำลองสถานการณ์ในกรณีที่ไม่มีผลกระทบจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดนี้จะคำนวณหา I_V โดยใช้สมการ (3.21ข) แล้วจึงนำ I_V ไปใช้ในการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบต่อไป ผลที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับกรณีแรกซึ่งมีการชดเชยผลเนื่องจากความไม่เป็นอุดมคติของหัววัด

ในการคำนวณจำลองสถานการณ์ เราจะให้ขนาดของช่องเปิดบนระนาบช่องเปิดเป็น 7.66λ โดยที่การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.5 รูป 2.8 และรูป 2.11 ตามลำดับ และเมทริกซ์ที่ใช้มีขนาด 260×260 และกำหนดให้หัววัดเป็นท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิดที่มีความกว้างในแนวแกน x และแนวแกน y เป็น 0.8λ และ 0.4λ ตามลำดับ



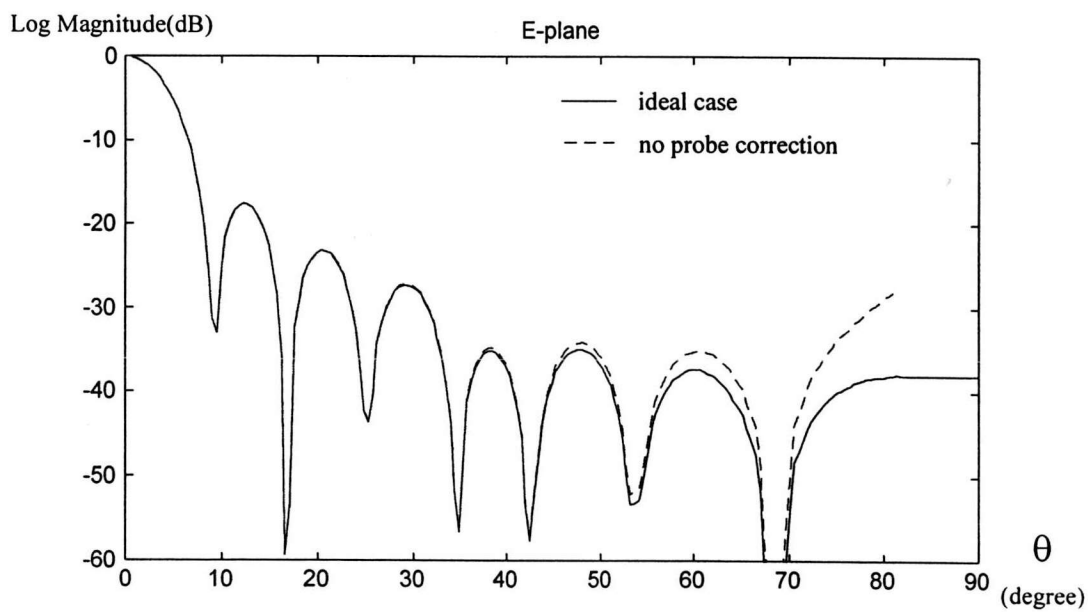
รูป 3.10 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน

ระนาบสนามไฟฟ้าเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.5



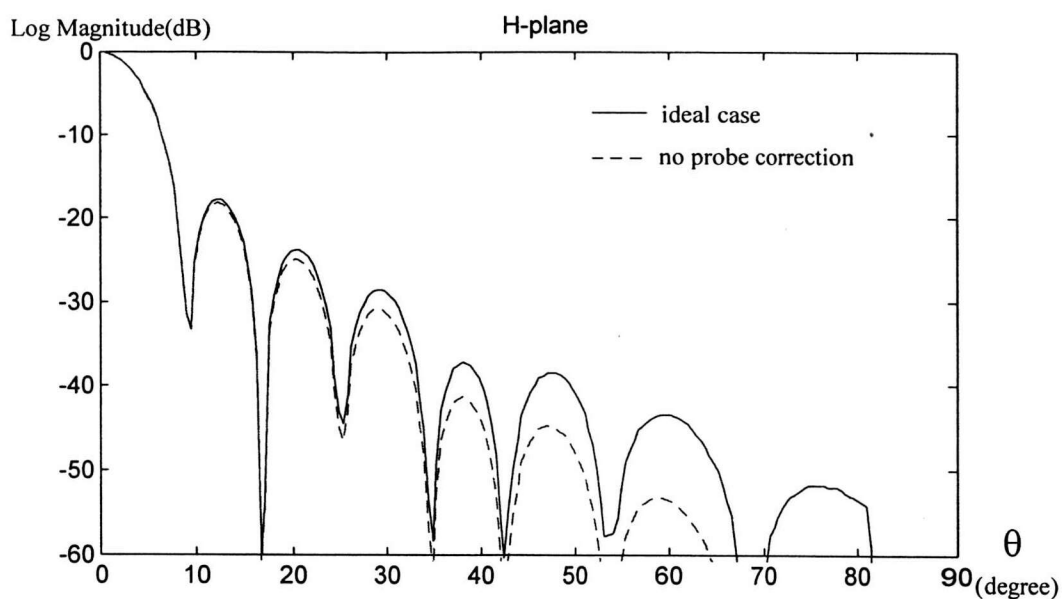
รูป 3.11 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน

ระนาบสนามแม่เหล็กเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.5

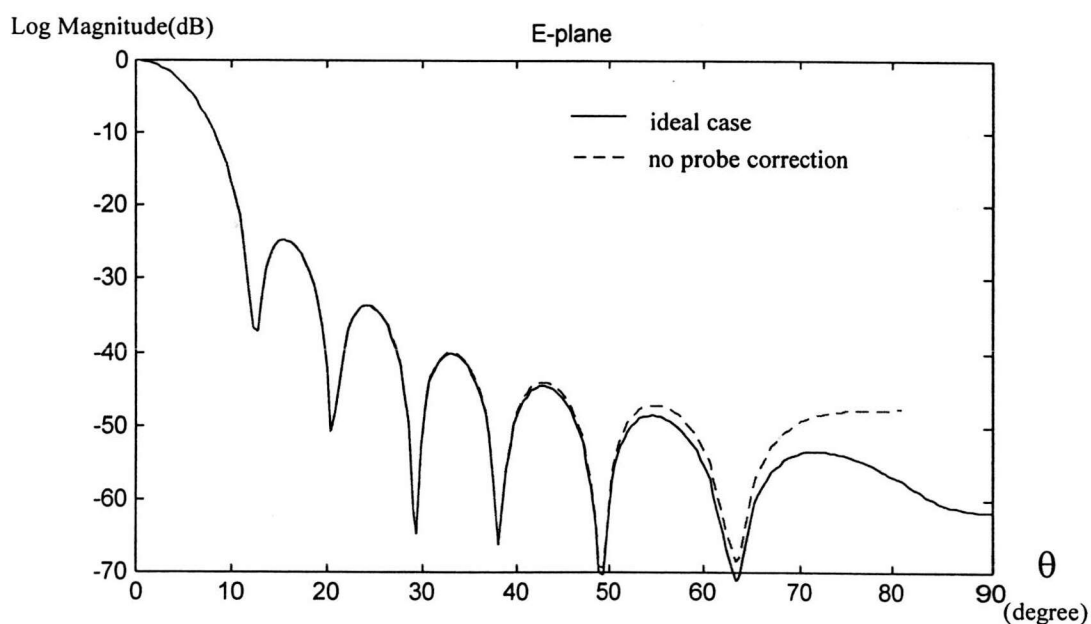


รูป 3.12 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน

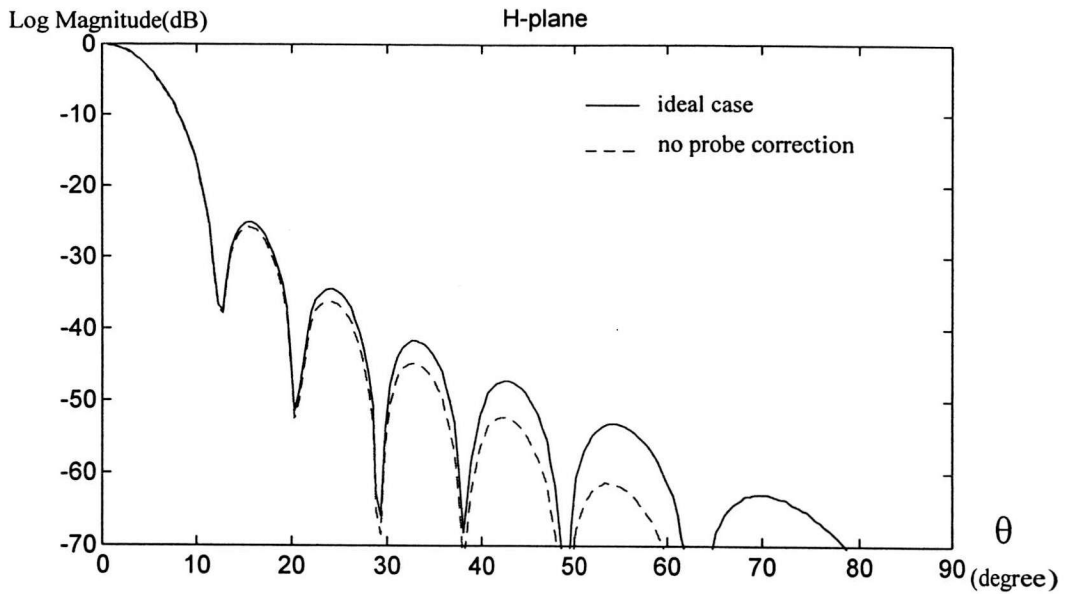
ระนาบสนามไฟฟ้าเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.8



รูป 3.13 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน
ระนาบสนามแม่เหล็กเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.8



รูป 3.14 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน
ระนาบสนามไฟฟ้าเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.11



รูป 3.15 ผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใน

ระนาบสนามแม่เหล็กเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.11

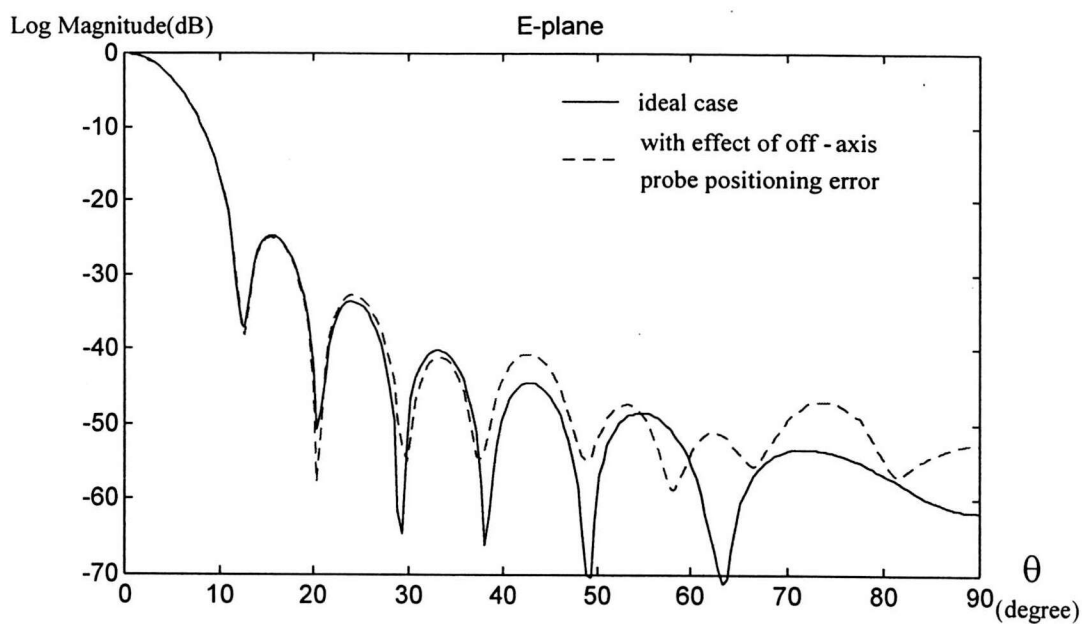
จากรูป 3.10 ถึงรูป 3.15 จะเห็นได้ว่าผลกระทบของความไม่เป็นอุดมคติของหัววัดมีผลทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในช่วงมุม θ ค่าขนาดใหญ่มีค่ามากขึ้นในระนาบสนามไฟฟ้าและน้อยลงในระนาบสนามแม่เหล็ก โดยผลกระทบที่เกิดขึ้นในช่วงมุม θ ค่าขนาดเล็กมีน้อย สาเหตุหนึ่งเนื่องจากในกรณีนี้หัววัดที่ใช้เป็น ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิดซึ่งมีแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใกล้เคียงไอโซทรอปิกในช่วงที่ θ มีค่าขนาดเล็ก ส่วนอีกสาเหตุหนึ่งเนื่องจากในกรณีนี้การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดมีโพลาไรเซชันในแนวแกน y เพียงอย่างเดียวทำให้ P_B^H ซึ่งเป็นข้อมูลจากการกวาดวัดเมื่อวางหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวระดับมีค่าน้อยกว่า P_B^V ซึ่งเป็นข้อมูลจากการกวาดวัดเมื่อวางหัววัดแบบโพลาไรเซชันแนวตั้งมาก ดังนั้นการละเลย P_B^H จึงไม่ทำให้เกิดผลกระทบมากนัก

ผลกระทบเนื่องจากความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งที่กวาดวัดค่า

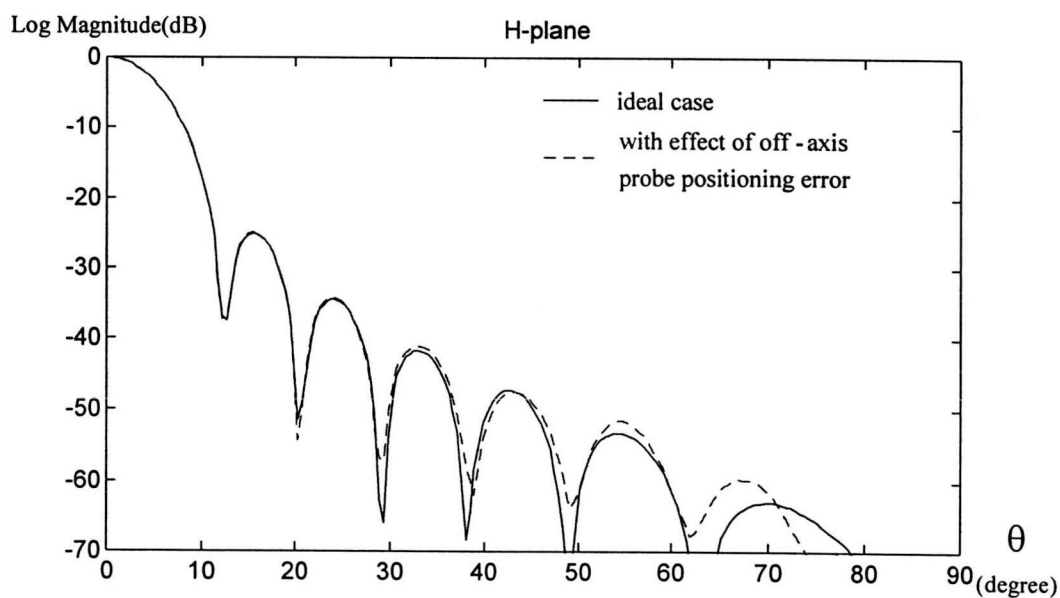
ในการกวาดวัดค่าสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดเพื่อนำไปคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลนั้น ต้องการค่าชักรัดตัวอย่างของสนามไฟฟ้าที่ระยะห่างเท่า ๆ กันเป็น Δr ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 แต่ในการกวาดวัดจริงนั้นตำแหน่งของหัววัดขณะที่อ่านและเก็บค่าของสนามไฟฟ้าอาจคลาดเคลื่อนไปจากตำแหน่งซึ่งต้องการในการชักรัดตัวอย่างค่าสนามไฟฟ้า ซึ่งเป็นตำแหน่งจุดตัดของโครงตาข่ายบนระนาบการกวาดวัดดังแสดงในรูปที่ 2.2 ทำให้ค่าสนามไฟฟ้าที่ชักรัดตัวอย่างมานั้นไม่ใช่ค่า ณ ตำแหน่งที่ต้องการในทางทฤษฎีแต่เป็นค่า ณ ตำแหน่งอื่นที่ใกล้เคียงกัน ความคลาดเคลื่อนทางตำแหน่งนี้อาจแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ ความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด (off axis error) และความคลาดเคลื่อนในแนวแกน (on axis error) ซึ่งเป็นความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด คืออยู่ในแนวแกน Z ความคลาดเคลื่อนในแบบแรกจะทำให้ระยะห่างในการชักรัดตัวอย่างระหว่างค่าชักรัดตัวอย่าง 2 จุดใด ๆ มีค่าผิดไปจาก Δr ซึ่งจะเป็นการทำลายความเป็นเอกรูปของระยะห่างของค่าชักรัดตัวอย่างที่เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการแปลงฟูริเยร์เพื่อหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากข้อมูลชักรัดตัวอย่างของสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด ส่วนความคลาดเคลื่อนในแบบที่สองนั้นมีผลกระทบที่สำคัญเมื่อระยะคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยคือทำให้เฟสของสนามไฟฟ้าที่กวาดวัดค่ามาที่แต่ละจุดมีความผิดเพี้ยนไป $-k\delta_{mn}$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่เลขคลื่นและ δ_{mn} เป็นระยะคลาดเคลื่อนในแนวแกน Z ของหัววัด ณ ตำแหน่งที่ทำการวัดค่าชักรัดตัวอย่างของสนามไฟฟ้าค่าที่ระบุด้วยดัชนี m, n [14]

การหาข้อมูลชักรัดตัวอย่างสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดที่ต้องการโดยกำจัดผลจากความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งที่กวาดวัดค่าสามารถทำได้ ถ้ารู้ตำแหน่งที่แท้จริงของหัววัดในการกวาดวัดค่าที่แต่ละจุด การหาตำแหน่งที่แท้จริงของหัววัดเมื่อทำการกวาดวัดค่าที่แต่ละจุดนั้นต้องใช้อุปกรณ์ซึ่งสามารถตรวจวัดตำแหน่งได้ติดตั้งเพิ่มเข้าไป[14] ซึ่งถ้าไม่สามารถรู้ตำแหน่งที่แท้จริงของหัววัดในการกวาดวัดค่าที่แต่ละจุดแล้วผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งที่กวาดวัดค่าจะไม่สามารถแก้ไขได้

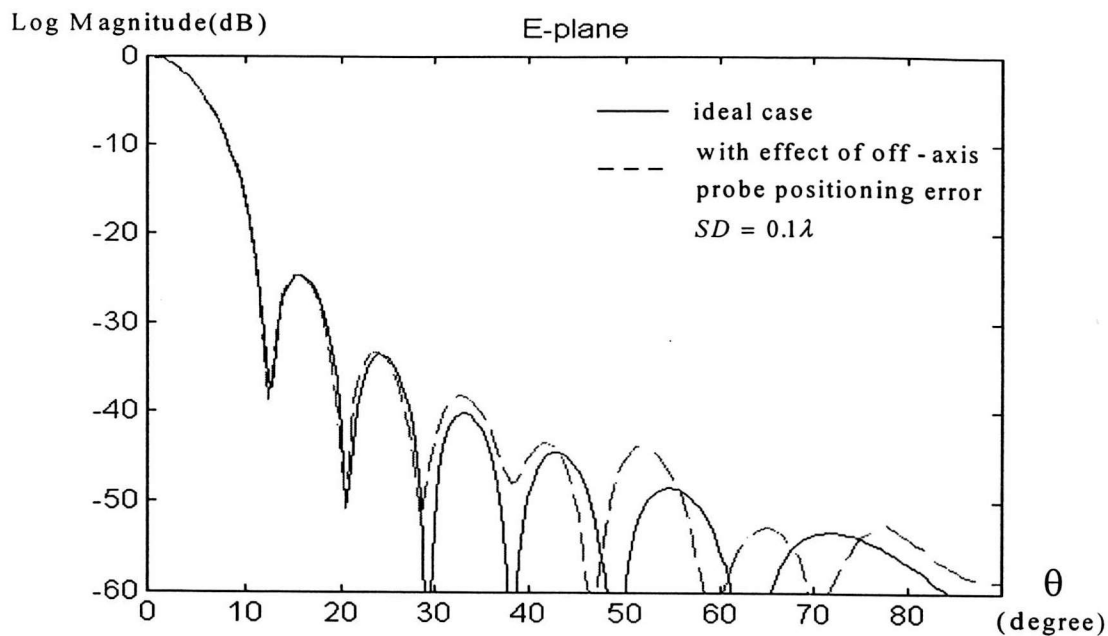
ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะทำการคำนวณจำลองผลกระทบเนื่องจากความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งที่กวาดวัดค่าต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบโดยให้การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบวงกลมความเร็วพาราโบลิกดังแสดงในรูป 2.11 และกำหนดให้ระยะคลาดเคลื่อนของตำแหน่งที่แท้จริงของหัววัดจากตำแหน่งที่ต้องการในการกวาดวัดค่าที่แต่ละจุดเป็นค่าสุ่มที่มีการกระจายเป็นแบบปกติ (normal distribution) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจะหาจากระยะคลาดเคลื่อนสูงสุดที่ระบุโดยอาศัยความแม่นยำของระบบควบคุมตำแหน่งของหัววัด การคำนวณจำลองผลกระทบจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัดกับผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกน โดยในที่นี้จะใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน SD เป็น $0.05\lambda, 0.1\lambda$ และ 0.2λ ผลที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับกรณีอุดมคติ



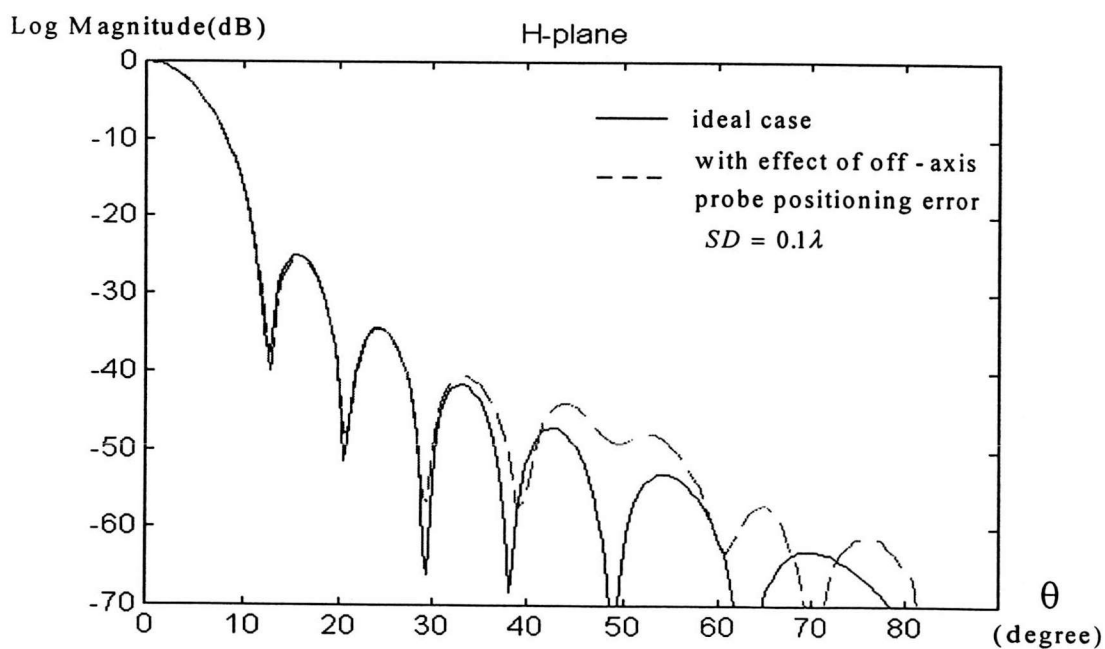
รูป 3.16 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.05\lambda$



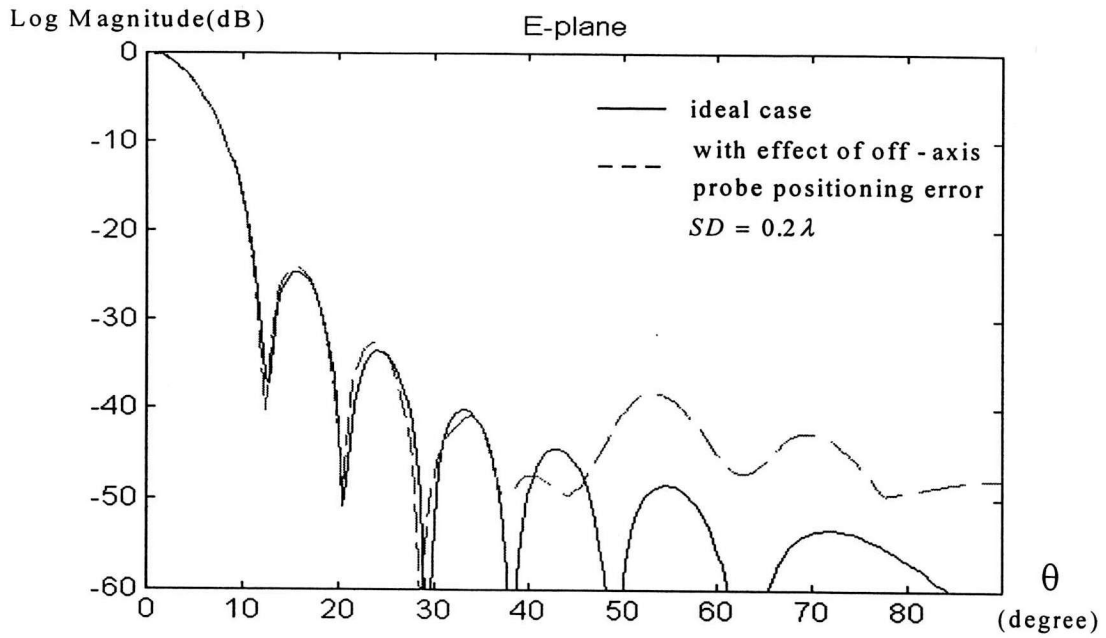
รูป 3.17 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.05\lambda$



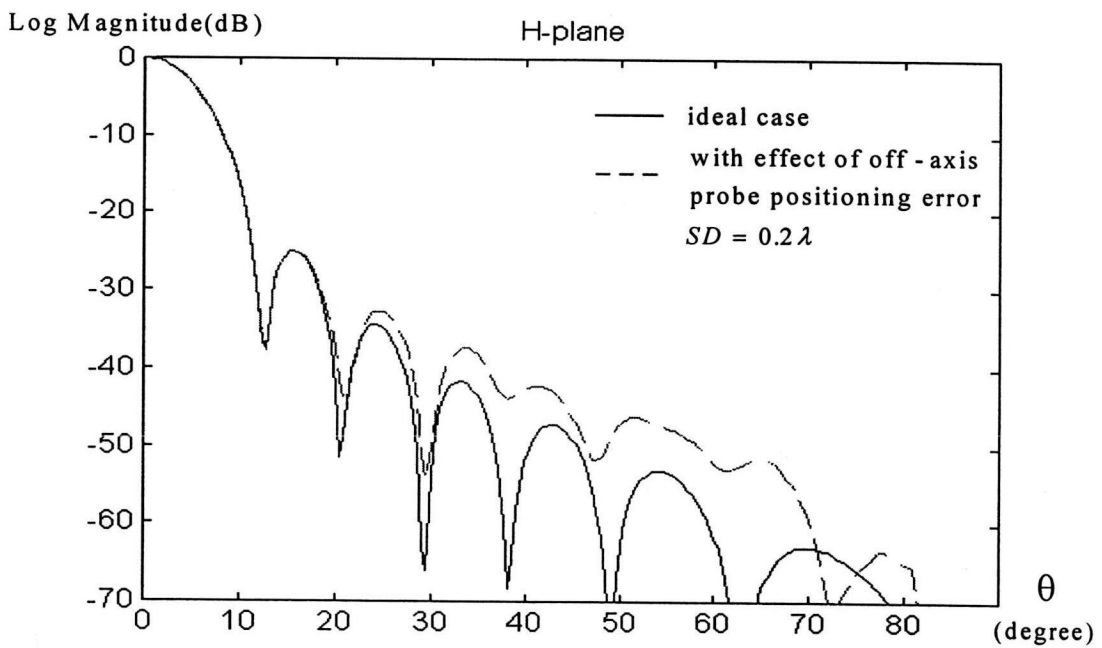
รูป 3.18 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.1\lambda$



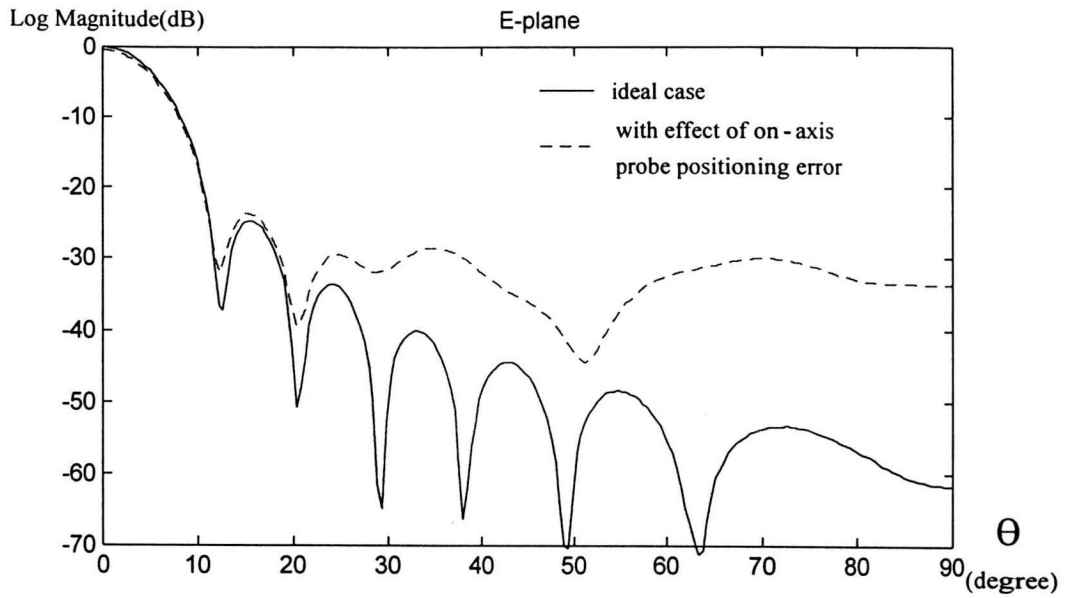
รูป 3.19 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.1\lambda$



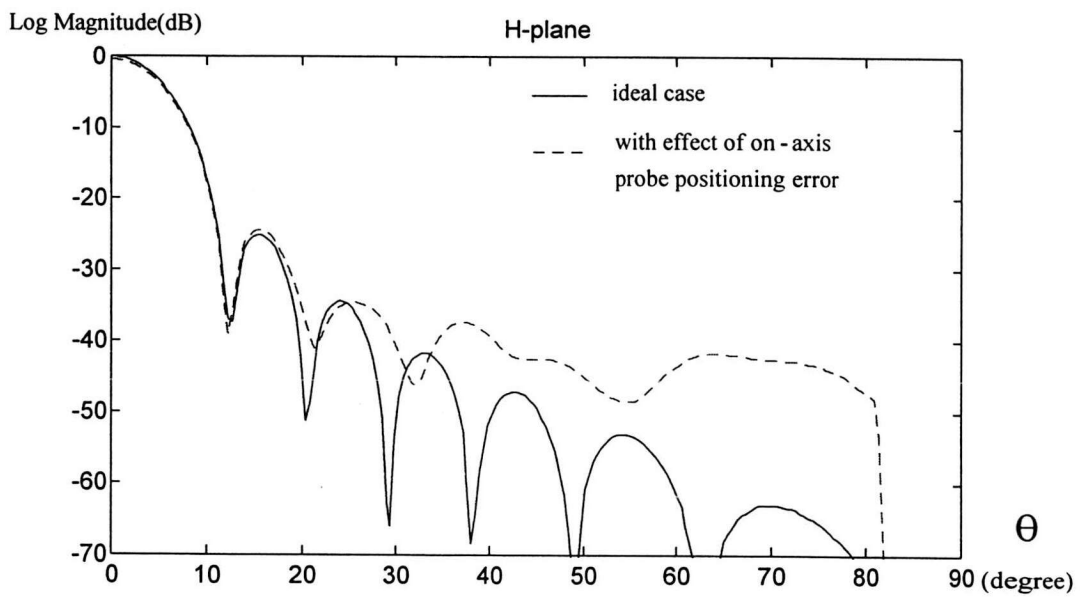
รูป 3.20 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.2\lambda$



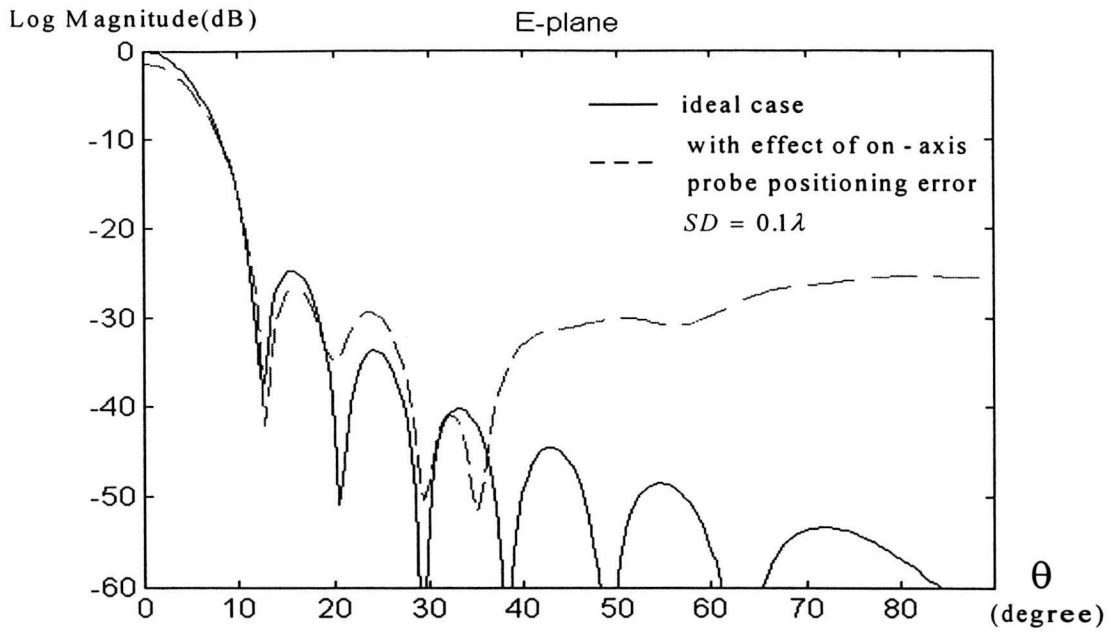
รูป 3.21 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด
ต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.2\lambda$



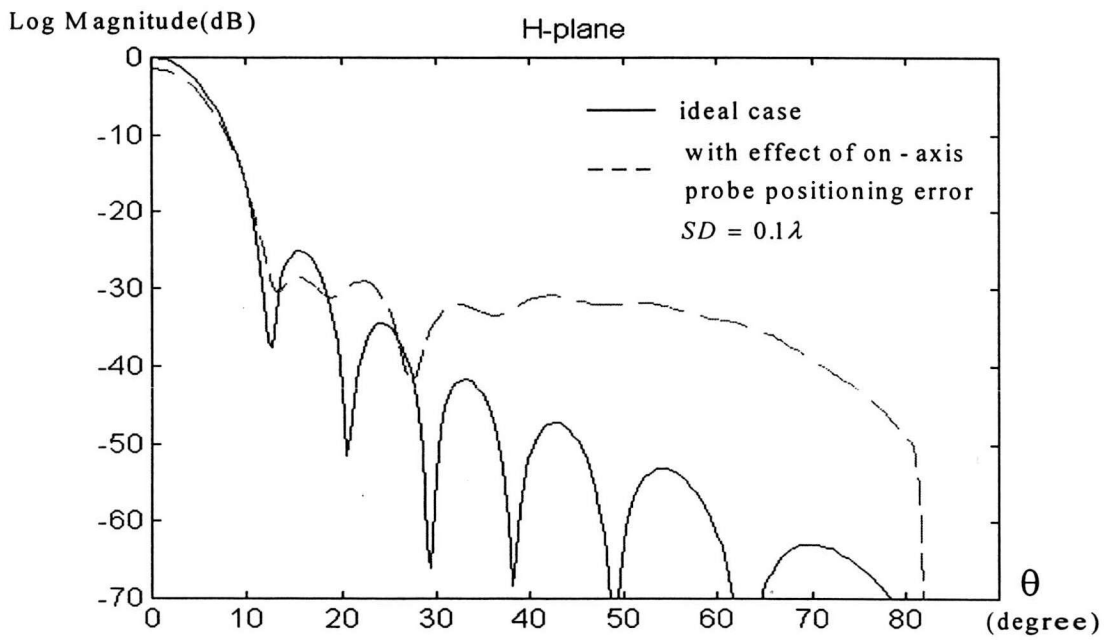
รูป 3.22 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.05\lambda$



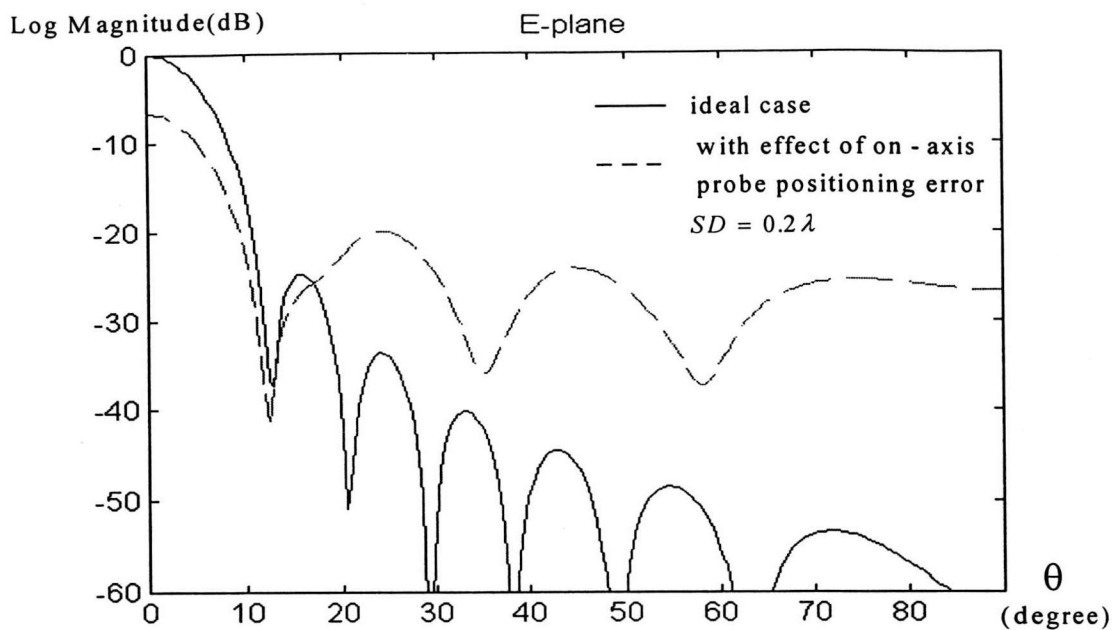
รูป 3.23 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.05\lambda$



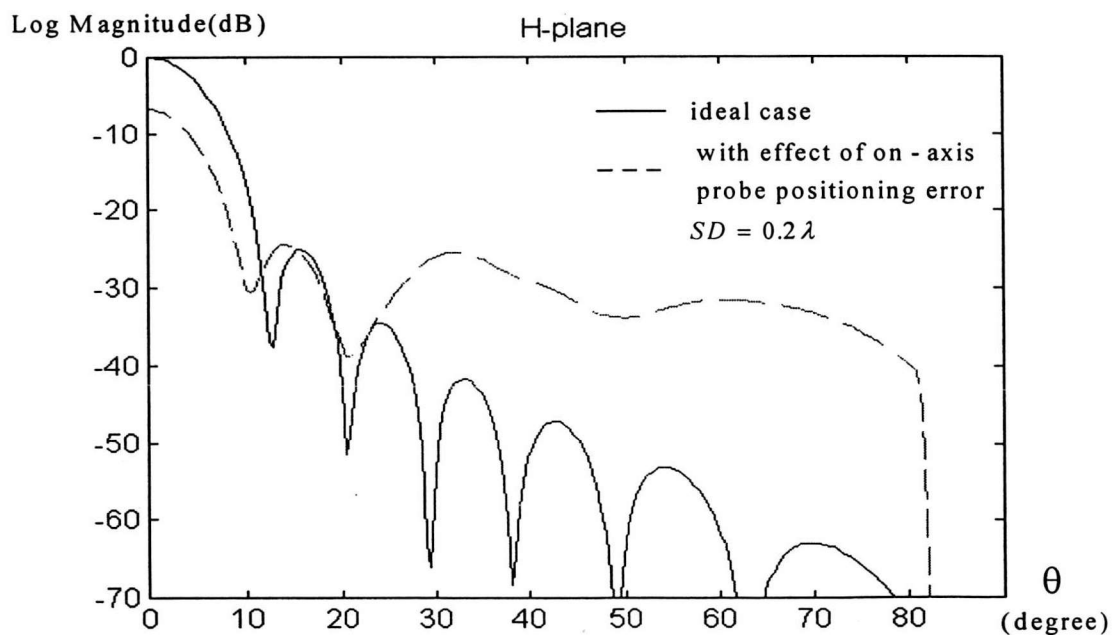
รูป 3.24 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.1\lambda$



รูป 3.25 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.1\lambda$



รูป 3.26 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อ $SD = 0.2\lambda$



รูป 3.27 ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนต่อแบบรูปการแผ่พลังงาน
ย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $SD = 0.2\lambda$

จากรูป 3.16 ถึงรูป 3.21 จะได้ว่าผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งหัววัดในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัดจะมีผลต่อพู่ซ้างที่อยู่ห่างออกไป แต่ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนจะมีผลมากกว่าเมื่อใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากันโดยดูได้จากรูป 3.22 ถึง 3.27 ซึ่งสำหรับค่า $SD = 0.05\lambda$ จะมีผลกระทบเล็กน้อยต่อพู่คลื่นหลักและจะเริ่มมีผลมากขึ้นในพู่ซ้างแรก โดยผลกระทบจะรุนแรงตั้งแต่พู่ซ้างที่ 2 หรือประมาณมุม θ ตั้งแต่ 20 องศาเป็นต้นไปทั้งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก สำหรับค่า SD เท่ากับ 0.1λ และ 0.2λ ผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนจะทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใช้ไม่ได้แม้แต่ในพู่คลื่นหลัก

ที่เป็นเช่นนี้เพราะความคลาดเคลื่อนในแนวแกนมีผลทำให้เฟสของสนามไฟฟ้า ที่กวาดวัดค่ามาที่แต่ละจุดมีความผิดเพี้ยนไปเท่ากับ $-k\delta_{mn} = -2\pi\delta_{mn}/\lambda$ เมื่อ δ_{mn} มีค่าน้อย โดยที่ δ_{mn} เป็นระยะคลาดเคลื่อนในแนวแกน z ของหัววัดเมื่อทำการวัดค่าซีกตัวอย่างของสนามไฟฟ้าค่าที่ระบุด้วยดัชนี m, n [14] จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนค่าเฟสเนื่องจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกน z เป็นการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วกว่าการแปรค่าสนามไฟฟ้าในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัดในย่านสนามใกล้มาก ดังนั้นผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวแกนจึงมีมากกว่าผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนในแนวที่อยู่บนระนาบการกวาดวัด