บทที่ ๒

โมเมนต์ของ I และ J

๒.๑ ความสัมพันธ์บางประการระหว่าง $I(p, q, r, s)$ กับ $I(p', q', r', s')$ และ $I(p, q, r, s)$ กับ $J(p', q', r', s')$

ให้ $X(p), p = 1,2,3,\ldots, P$, $Y(q)$, $q = 1, 2, 3, \ldots, Q$, $Z(r)$, $r = 1, 2, 3, \ldots, R$, $W(s)$, $s = 1, 2, 3, \ldots, S$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ไม่ขึ้นต่อกัน (independent continuous random variables) และมีการกระจายอย่างเดียวกัน

นิยามต่อไปนี้จะช่วยให้การแสดงการหาค่าโมเมนต์ของ I,J และ Product moment ของ I กับ J สะดวกขึ้น

<u>นิยามที่ ๑</u> ถ้า $p \neq p'$, $q \neq q'$, $r \neq r'$, $s \neq s'$ เรากล่าวว่า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R4 กับ $I(p', q', r', s')$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R4 กับ $I(p', q', r', s')$ เราจะได้ว่า $I(p, q, r, s)$ และ $I(p', q', r', s')$ ไม่ขึ้นต่อกัน

<u>นิยามที่ ๒</u> ถ้า (i) $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s \neq s'$,

หรือ (ii) $p = p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s = s'$

หรือ (iii) $p = p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s = s'$

หรือ (iv) $p \neq p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$

<u>นิยามที่ ๓</u> ถ้า (i) $p = p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s \neq s'$

หรือ (ii) $p \neq p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s = s'$

หรือ (iii) $p = p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s \neq s'$

หรือ (iv) $p \neq p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $R2$ กับ $I(p', q', r', s')$

นิยามที่ ๔ ถ้า (i) $p = p', q \neq q', r \neq r', s = s'$

หรือ (ii) $p \neq p', q = q', r = r', s \neq s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $R2$ กับ $I(p', q', r', s')$

นิยามที่ ๕ ถ้า (i) $p = p', q \neq q', r \neq r', s \neq s'$

หรือ (ii) $p \neq p', q = q', r \neq r', s \neq s'$

หรือ (iii) $p \neq p', q \neq q', r = r', s \neq s'$

หรือ (iv) $p \neq p', q \neq q', r \neq r', s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $R3$ กับ $I(p', q', r', s')$

นิยามที่ ๖ ถ้า $p = p', q = q', r = r', s = s'$ เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ Ro กับ $I(p', q', r', s')$

นิยามที่ ๗ ถ้า $p \neq p', q \neq q', r \neq r', s \neq s'$ เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $r4$ กับ $J(p', q', r', s')$

ข้อสังเกต ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $r4$ กับ $J(p', q', r', s')$ เราจะได้ว่า $I(p, q, r, s)$ และ $J(p', q', r', s')$ ไม่ขึ้นต่อกัน

นิยามที่ ๘ ถ้า (i) $p = p', q = q', r = r', s \neq s'$

หรือ (ii) $p = p', q = q', r \neq r', s = s'$

หรือ (iii) $p = p', q \neq q', r = r', s = s'$

หรือ (iv) $p \neq p', q = q', r = r', s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ $r1$ กับ $J(p', q', r', s')$

นิยามที่ ๙ ถ้า (i) $p = p', q = q', r \neq r', s \neq s'$

หรือ (ii) $p \neq p', q \neq q', r = r', s = s'$

หรือ (iii) $p \neq p', q = q', r \neq r', s = s'$

หรือ (iv) $p = p', q \neq q', r = r', s \neq s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$

<u>นิยามที่ ๑๐</u> ถ้า (i) $p = p', q \neq q', r \neq r', s = s'$

หรือ (ii) $p \neq p', q = q', r = r', s \neq s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$

<u>นิยามที่ ๑๑</u> ถ้า (i) $p = p', q \neq q', r \neq r', s \neq s'$

หรือ (ii) $p \neq p', q = q', r \neq r', s \neq s'$

หรือ (iii) $p \neq p', q \neq q', r = r', s \neq s'$

หรือ (iv) $p \neq p', q \neq q', r \neq r', s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r3 กับ $J(p', q', r', s')$

<u>นิยามที่ ๑๒</u> ถ้า $p = p', q = q', r = r', s = s'$

เรากล่าวว่า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r0 กับ $J(p', q', r', s')$

๒.๒ <u>โมเมนต์และ Product Moment ของ $I(p, q, r, s)$ กับ $J(p', q', r', s')$</u>

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑</u>

(๒.๒.๑) $$E(I(p, q, r, s)) = \frac{1}{6}$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $I(p, q, r, s)$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เพราะฉะนั้นเราได้

$$\begin{aligned} E(I(p, q, r, s)) &= 0.P(I(p, q, r, s) = 0) + 1.P(I(p,q,r,s) = 1) \\ &= P(I(p, q, r, s) = 1) \end{aligned}$$

โดยอาศัยการแจงนับ* เราพบว่า

---

* ดูภาคผนวก ก.

$$P(I(p,q,r,s) = 1) = \frac{1}{6}$$

ดังนั้น

$$E(I(p,q,r,s)) = \frac{1}{6}$$

Lemma ๑

(๒.๒.๒) $$E(I(p,q,r,s)\, I(p',q',r',s')) = P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q',r',s') = 1)$$

(๒.๒.๓) $$E(I(p,q,r,s)\, J(p',q',r',s')) = P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s') = 1)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $I(p,q,r,s)$ และ $I(p',q',r',s')$ ต่างมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 เพราะฉะนั้น เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
&E(I(p,q,r,s)\, I(p',q',r',s')) \\
&= 0.0\, P(I(p,q,r,s) = 0, I(p',q',r',s') = 0) \\
&\quad + 1.0.P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q',r',s') = 0) \\
&\quad + 0.1.P(I(p,q,r,s) = 0, I(p',q',r',s') = 1) \\
&\quad + 1.1.P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q',r',s') = 1) \\
&= P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q',r',s') = 1)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $I(p,q,r,s)$ และ $J(p',q',r',s')$ ต่างมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 เพราะฉะนั้น เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
&E(I(p,q,r,s)\, J(p',q',r',s')) \\
&= 0.0\, P(I(p,q,r,s) = 0, J(p',q',r',s') = 0) \\
&\quad + 1.0\, P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s') = 0) \\
&\quad + 0.1\, P(I(p,q,r,s) = 0, J(p',q',r',s') = 1) \\
&\quad + 1.1\, P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s') = 1) \\
&= P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s') = 1)
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ ๒

(๒.๒.๔) $E\,(I(p, q, r, s)\quad I\,(p', q', r', s'))$

$$= \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R4 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{10} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R1 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{20} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R2 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{15} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R2' กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{35} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R3 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{6} & \text{เมื่อ } I(p, q, r, s) \text{ มีความสัมพันธ์ R0 กับ } I(p', q', r', s') \end{cases}$$

เราแบ่งการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๒ นี้เป็น lemma ย่อย ๆ ดังนี้

Lemma ๒ ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R4 กับ $I(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๕) $E(I(p, q, r, s)\quad I(p', q', r', s')) = \frac{1}{36}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R4 กับ $I(p', q', r', s')$ ดังนั้น เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\; I(p', q', r', s')) = E(I(p,q,r,s)).\; E(I(p', q', r', s'))$$

จาก (๒.๒.๑) เราได้

$$E(I(p, q, r, s)\quad I(p', q', r', s')) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Lemma ๓ ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๖) $E(I(p, q, r, s)\quad I(p', q', r', s')) = \frac{1}{10}$

พิสูจน์ จาก (๒.๒.๒) เราได้

$$E(I(p, q, r, s)\quad I(p', q', r', s'))$$

$$= P(I(p, q, r, s) = 1\,,\quad I(p', q', r', s') = 1)$$

โดยอาศัยการแจงนับ[๒] เราพบว่า

$$P(I(p, q, r, s) = 1 , I(p', q', r', s') = 1) = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น $$E(I(p, q, r, s) \cdot I(p', q', r', s')) = \frac{1}{10}$$

<u>Lemma ๔</u> ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R2 กับ $I(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๗) $$E(I(p,q,r,s) \cdot I(p', q', r', s')) = \frac{1}{20}$$

<u>พิสูจน์</u> จาก (๒.๒.๒) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s) \; I(p', q', r', s')) = P(I(p,q,r,s) = 1, I(p', q', r', s')=1) = \frac{1}{20}$$

<u>Lemma ๕</u> ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R2' กับ $I(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๘) $$E(I(p,q,r,s) \; I(p', q', r', s')) = \frac{1}{15}$$

<u>พิสูจน์</u> จาก (๒.๒.๒) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s) \; I(p', q', r', s')) = P(I(p,q,r,s)= 1, I(p', q', r', s')= 1) = \frac{1}{15}$$

---

[๒] การคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1 , I(p',q',r',s') = 1)$ ซึ่งใช้ใน Lemma ๓ ถึง Lemma ๗ และการคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s') = 1)$ ซึ่งใช้ใน Lemma ๘ ถึง Lemma ๑๓ นั้น ทำได้โดยการแจงนับ ภาคผนวก ข. แสดงตัวอย่างการแจงนับและคำนวณค่า $P(I(p,q,r,s)= 1, I(p', q',r', s')= 1)$ ภาคผนวก ค. แสดงตัวอย่างการแจงนับและคำนวณค่า $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r', s') = 1)$

Lemma ๖ ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R3 กับ $I(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๙) $$E(I(p,q,r,s)\ I(p', q', r', s')) = \frac{1}{35}$$

พิสูจน์ จาก (๒.๒.๒) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ I(p', q', r', s')) = P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q',r',s') = 1)$$
$$= \frac{1}{35}$$

Lemma ๗ ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R0 กัย $I(p',q,r',s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๐) $$E(I(p,q,r,s)\ I(p', q', r', s')) = \frac{1}{6}$$

พิสูจน์ จากสูตร (๒.๒.๖) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ I(p', q', r', s')) = E(I(p,q,r,s))^2$$
$$= 1^2 .\ P(I(p,q,r,s) = 1)$$
$$= P(I(p,q,r,s) = 1)$$
$$= \frac{1}{6}$$

ทฤษฎีบทที่ ๓

(๒.๒.๑๑) $E(I(p,q,r,s)\ J(p', q', r', s'))$

$$= \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r4 \text{ กับ } J(p', q', r', s') \\ 0 & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r1 \text{ กับ } J(p', q', r', s') \\ 0 & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r2 \text{ กับ } J(p', q', r', s') \\ \frac{1}{90} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r2' \text{ กับ } J(p', q', r', s') \\ \frac{1}{70} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r3 \text{ กับ } J(p', q', r', s') \\ 0 & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r0 \text{ กับ } J(p', q', r', s') \end{cases}$$

เราแบ่งการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๓ นี้เป็น lemma ย่อย ๆ ดังนี้

Lemma ๘ ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r4 กับ $J(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๒) $$E(I(p,q,r,s)\ J(p, q, r, s)) = \frac{1}{36}$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r0 กับ $J(p',q',r',s')$ เพราะฉะนั้นเราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = E(I(p,q,r,s)).E(J(p',q',r',s'))$$

จาก (๒.๒.๑) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

<u>Lemma ๙</u> ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r1 กับ $J(p',q',r',s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๓) $$E(I(p,q,r,s)\ .\ J(p',q',r',s')) = 0$$

<u>พิสูจน์</u> จาก (๒.๒.๓) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = P(I(p,q,r,s)=1, J(p',q',r',s')=1) = 0$$

<u>Lemma ๑๐</u> ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p',q',r',s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๔) $$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = 0$$

<u>พิสูจน์</u> จาก (๒.๒.๓) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = P(I(p,q,r,s) = 1, J(p',q',r',s')=1) = 0$$

<u>Lemma ๑๑</u> ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r2′ กับ $J(p',q',r',s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๕) $$E(I(p,q,r,s)\ J(p',q',r',s')) = \frac{1}{90}$$

<u>พิสูจน์</u> จาก (๒.๒.๓) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s).\ J(p',q',r',s')) = P(I(p,q,r,s)=1, J(p',q',r',s')=1) = \frac{1}{90}$$

Lemma ๑๒ ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r_3 กับ $J(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๖) $$E(I(p,q,r,s).\ J(p', q', r', s')) = \frac{1}{70}$$

พิสูจน์ จาก (๒.๒.๓) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p', q', r', s')) = P(I(p,q,r,s)=1,\ J(p', q', r', s')=1)$$
$$= \frac{1}{70}$$

Lemma ๑๓ ถ้า $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r_0 กับ $J(p', q', r', s')$ แล้ว

(๒.๒.๑๗) $$E(I(p,q,r,s).\ J(p', q', r', s')) = 0$$

พิสูจน์ จาก (๒.๒.๓) เราได้ว่า

$$E(I(p,q,r,s)\ J(p', q', r', s')) = P(I(p,q,r,s)=1,\ J(p', q', r', s')=1)$$
$$= 0$$

๒.๓ มัชฌิมเลขคณิต และ ความแปรปรวนของ I และ J

ทฤษฎีบทที่ ๔

(๒.๓.๑) $$E(I) = \frac{1}{6}\ PQRS$$

พิสูจน์ จาก (๑.๑๒) เรามี

$$I = \Sigma\ I(p,q,r,s)$$

โดยที่ผลบวกข้างบนนี้เป็นผลบวกของ $I(p, q, r, s)$ สำหรับทุก ๆ ค่า ของ p,q,r,s ซึ่งรวมทั้งสิ้น PQRS เทอม

เพราะฉะนั้น

$$E(I) = E(\Sigma\ I(p,q,r,s))$$
$$= \Sigma\ (E(I(p,q,r,s)))$$
$$= PQRS \times E(I(p,q,r,s))$$

โดย (๒.๒.๑) เราได้ว่า

$$E(I) = PQRS \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} PQRS$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๕</u>

(๒.๓.๒) $$E(I^2) = \frac{1}{1260} PQRS \Big[17 - 11 (P+Q+R+S) + 47 (PS + QR) + 26 (PQ + RS + PR + QS) + (PQR + QRS + PRS + PQS) + 35\, PQRS \Big]$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า

$$I = \Sigma\, I(p, q, r, s)$$

เราได้ $I^2 = (\Sigma\; I(p, q, r, s))^2$

$$= \sum_{k=1}^{16} (\Sigma^{(k)}\; I(p,q,r,s)\, I(p', q', r', s'))$$

โดยที่ $\Sigma^{(k)}\; I(p,q,r,s)\, I(p', q', r', s')$ เป็นผลบวกของเทอม $I(p,q,r,s)\, I(p', q', r', s')$ ภายใต้เงื่อนไข (k) ต่อไปนี้

(1) $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s = s'$

(2) $p \neq p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s = s'$

(3) $p = p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s = s'$

(4) $p = p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s = s'$

(5) $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s \neq s'$

(6) $p \neq p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s = s'$

(7) $p = p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s \neq s'$

(8) $p \neq p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s = s'$

(9) $p = p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s \neq s'$

(10) $p \neq p', \quad q = q', \quad r = r', \quad s \neq s'$

(11) $p = p', \quad q \neq q', \quad r \neq r', \quad s = s'$

(12) $p \neq p', \quad q \neq q', \quad r \neq r', \quad s = s'$

(13) $p \neq p', \quad q \neq q', \quad r = r', \quad s \neq s'$

(14) $p \neq p', \quad q = q', \quad r \neq r', \quad s \neq s'$

(15) $p = p', \quad q \neq q', \quad r \neq r', \quad s \neq s'$

(16) $p \neq p', \quad q \neq q', \quad r \neq r', \quad s \neq s'$

จากการนับจำนวนเทอมในแต่ละ $\Sigma^{(k)} I(p,q,r,s)\, I(p',q',r',s')$ และใช้ผลลัพธ์จากทฤษฎีบทที่ ๒ เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E(I^2) \\
= \quad & PQRS \cdot \frac{1}{6} \\
& + \left[(P-1)\,PQRS + (Q-1)\,PQRS + (R-1)\,PQRS + (S-1)PQRS \right] \frac{1}{10} \\
& + \left[(P-1)(Q-1)\,PQRS + (R-1)(S-1)\,PQRS + (P-1)(R-1)\,PQRS \right. \\
& \left. + (Q-1)(S-1)\,PQRS \right] \frac{1}{20} \\
& + \left[(P-1)(S-1)\,PQRS + (Q-1)(R-1)\,PQRS \right] \frac{1}{15} \\
& + \left[(P-1)(Q-1)(R-1)\,PQRS + (Q-1)(R-1)(S-1)\,PQRS \right. \\
& \left. + (P-1)(Q-1)(S-1)\,PQRS + (P-1)(R-1)(S-1)\,PQRS \right] \frac{1}{35} \\
& + (P-1)(Q-1)(R-1)(S-1)\,PQRS \cdot \frac{1}{36} \\
= \quad & \frac{1}{1260}\, PQRS \left[17 - 11\,(P+Q+R+S) + 47\,(PS+QR) \right. \\
& \left. + 26\,(PQ+RS+PR+QS) + (PQR+QRS+PRS+PQS) + 35\,PQRS \right]
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบทที่ ๖

(๒.๓.๓) $E(IJ)$

$$= \frac{1}{1260} PQRS \Big[-9 + 5(P+Q+R+S) + 13(PS+QR) - (PQ+RS+PR+QS) - 17(PQR+QRS+PRS+PQS) + 35\,PQRS \Big]$$

พิสูจน์

$$IJ = \Sigma I(p,q,r,s) \cdot \Sigma J(p', q', r', s')$$

$$= \sum_{k=1}^{16} \Big(\Sigma^{(k)} I(p,q,r,s)\, J(p', q', r', s') \Big)$$

โดยที่ $\Sigma^{(k)} I(p,q,r,s)\, J(p', q', r', s')$ เป็นผลบวกของเทอม $I(p,q,r,s)\, J(p', q', r', s')$ ภายใต้เงื่อนไข (k) เช่นเดียวกันกับในการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ ๕

จากการนับจำนวนเทอมในแต่ละ $\Sigma^{(k)} I(p,q,r,s)\, J(p', q', r', s')$ และใช้ผลลัพธ์จากทฤษฎีบทที่ ๓ เราได้ว่า

$$E(I\,J)$$

$$= PQRS \Big[0 + 0 + 0 + \frac{1}{90}\{(Q-1)(R-1) + (P-1)(S-1)\} + \frac{1}{70}\{(P-1)(Q-1)(R-1) + (Q-1)(R-1)(S-1) + (P-1)(R-1)(S-1) + (P-1)(Q-1)(S-1)\} + \frac{1}{36}(P-1)(Q-1)(R-1)(S-1) \Big]$$

$$= \frac{1}{1260} PQRS \Big[-9 + 5(P+Q+R+S) + 13(PS+QR) - (PQ+RS+PR+QS) - 17(PQR+QRS+PRS+PQS) + 35\,PQRS \Big]$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๗</u>

(๒.๓.๔) $$\mathrm{Var}\ (I) = \frac{1}{1260}\ PQRS \Big[17 - 11(P+Q+R+S) + 47(PS+QR) + 26(PQ + RS + PR + QS) + (PQR + QRS + PRS + PQS) \Big]$$

(๒.๓.๕) $$\mathrm{Cov}\ (IJ) = \frac{1}{1260}\ PQRS \Big[-9 + 5\ (P+Q+R+S) + 13\ (PS+QR) - (PQ+RS+PR+QS) - 17(PQR+QRS+PRS+PQS) \Big]$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า

$$\mathrm{Var}\ (I) = E\ (I^2) - \{E\ (I)\}^2$$

เพราะฉะนั้น โดย (๒.๓.๑) และ (๒.๓.๒) จะได้

$$\mathrm{Var}(I) = \frac{1}{1260}\ PQRS \Big[17 - 11\ (P+Q+R+S) + 47(PS + QR) + 26\ (PQ + RS + PR + QS) + (PQR + QRS + PRS + PQS) + 35\ PQRS \Big] - \frac{1}{36}\ (PQRS)^2$$

$$= \frac{1}{1260}\ PQRS \Big[17 - 11\ (P + Q + R + S) + 47\ (PS + QR) + 26\ (PQ + RS + PR + QS) + (PQR + QRS + PRS + PQS) \Big]$$

เพราะว่า $\mathrm{Cov}\ (IJ) = E(IJ) - E\ (I) \cdot E\ (J)$

เพราะฉะนั้น โดย (๒.๓.๑) และ (๒.๓.๓) เราจะได้ว่า

$$\mathrm{Cov}\ (IJ) = \frac{1}{1260}\ PQRS \Big[-9 + 5\ (P + Q + R + S) + 13\ (PS + QR) (PQ + RS + PR + QS) - 17\ (PQR + QRS + PRS + PQS) + 35\ PQRS \Big] - \frac{1}{36}\ (PQRS)^2$$

$$= \frac{1}{1260} PQRS \left[-9 + 5(P+Q+R+S) + 13(PS+QR) - (PQ+RS+PR+QS) - 17(PQR+QRS+PRS+PQS) \right]$$

๒.๔ Central Moment ของ I และ J

ให้

(๒.๔.๑) $\bar{I}(p, q, r, s) = I(p,q,r,s) - E(I(p,q,r,s))$

และ

(๒.๔.๒) $\bar{J}(p,q,r,s) = J(p,q,r,s) - E(J(p,q,r,s))$

ทฤษฎีบทที่ ๘

(๒.๔.๓) $E(\bar{I}(p,q,r,s)\ \bar{I}(p', q', r', s'))$

$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R4 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{13}{180} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R1 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{45} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R2 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{7}{180} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R2' กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{1}{1260} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R3 กับ } I(p', q', r', s') \\ \frac{5}{36} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ R0 กับ } I(p', q', r', s') \end{cases}$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$E(\bar{I}(p,q,r,s)\ \bar{I}(p', q', r', s')) = E(I(p,q,r,s)I(p', q', r', s')) - E(I(p,q,r,s)).\ E(I(p', q', r', s'))$$

และจาก (๒.๒.๑) เราได้ว่า

$$E(\bar{I}(p,q,r,s)\ \bar{I}(p', q', r', s')) = E(I(p,q,r,s)\ I(p', q', r', s')) - \frac{1}{36}$$

โดยใช้ (๒.๒.๔) ดังนั้นเราได้ (๒.๔.๓)

ทฤษฎีบทที่ ๔

(๒.๔.๔) $E(\bar{I}(p,q,r,s)\,\bar{J}(p',q',r',s'))$

$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r4 \text{ กับ } J(p',q',r',s') \\ -\frac{1}{36} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r1 \text{ กับ } J(p',q',r',s') \\ -\frac{1}{36} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r2 \text{ กับ } J(p',q',r',s') \\ -\frac{1}{60} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r2' \text{ กับ } J(p',q',r',s') \\ -\frac{17}{1260} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r3 \text{ กับ } J(p',q',r',s') \\ -\frac{1}{36} & \text{เมื่อ } I(p,q,r,s) \text{ มีความสัมพันธ์ } r0 \text{ กับ } J(p',q',r',s') \end{cases}$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$E(\bar{I}(p,q,r,s)\,\bar{J}(p',q',r',s')) = E(I(p,q,r,s)\,J(p',q',r',s')) - E(I(p,q,r,s)).E(J(p',q',r',s'))$$

และโดย (๒.๒.๑) เราได้

$$E(\bar{I}(p,q,r,s)\,\bar{J}(p',q',r',s')) = E(I(p,q,r,s)\,J(p',q',r',s')) - \frac{1}{36}$$

โดยใช้ (๒.๒.๑๐) ดังนั้นเราได้ (๒.๔.๔)