

แง่การคำนวณของไฟไนต์เอเลเมนต์แบบผสมในการค้ำของแผ่นหนา

นาย ภาคภูมิ วานิชกมลนันท์



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2543

ISBN 974-13-1173-7

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

COMPUTATIONAL ASPECTS OF MIXED FINITE ELEMENTS IN BENDING OF THICK PLATES

Mr. PARKPOOME VANITKAMONNUNT

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2000

ISBN 974-13-1173-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์

แง่การคำนวณของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสมในการค้ำของแผ่นหนา

โดย

นายภาคภูมิ วานิชกมลนันท์

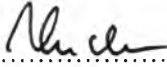
สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา


อาจารย์ที่ปรึกษา

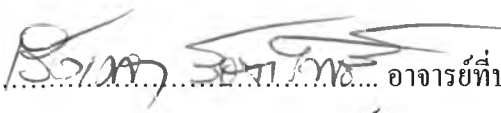
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เรืองเดชา รัชตโพธิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท



..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เรืองเดชา รัชตโพธิ์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชีรพงศ์ เสนจันทร์ชัย)


..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. ชัชชาติ สิทธิพันธ์)

ภาคภูมิ วานิชกมลนันท์ : แง่การคำนวณของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสมในการคดของแผ่นหนา.
(COMPUTATIONAL ASPECTS OF MIXED FINITE ELEMENTS IN BENDING OF THICK PLATES)
อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร. เรืองเดช ราชตโปธิ, 140 หน้า. ISBN 974-13-1173-7.

ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้กันทั่วไปโดยมีการกระจายเป็นสนามของตัวแปร และสร้างเมตริกซ์สติฟเนสจากหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดนั้น พบว่าผลเฉลยที่ได้จะให้ค่าการกระจักที่มีความถูกต้องสูง แต่ความถูกต้องด้านโมเมนต์และแรงเฉือนยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่ค่อนข้างมาก โดยเฉพาะเมื่อแบ่งชิ้นส่วนอย่างไม่ละเอียดพอ เมื่อต้องการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการความถูกต้องด้านความเค้นสูง การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีเฉพาะการกระจักเป็นตัวแปรจึงไม่เหมาะสม ดังนั้นในระยะหลังได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสมซึ่งใช้สนามของตัวแปรมากกว่าหนึ่งสนามขึ้นมา โดยปกติใช้สนามของตัวแปรเป็น สนามการกระจัก สนามความเค้น หรือสนามความเครียด แล้วสร้างเมตริกซ์สติฟเนสจากหลักการแปรผันของเฮลลิงเกอร์-โรสเนอร์เมื่อมีสนามของตัวแปรสองสนาม หรือใช้หลักการแปรผันของฮู-วาซิวเมื่อมีสนามของตัวแปรสามสนาม ในการวิเคราะห์แผ่นหนาทฤษฎีของมินต์ลิน ซึ่งรวมผลของการกระจักที่เกิดจากความเครียดเฉือนในแนวคดงเข้าไปด้วย ความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์จะมีทั้งพจน์จากแรงคดและพจน์จากแรงเฉือน ซึ่งมีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยความเค้น ดังนั้นจึงควรใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสมในการวิเคราะห์ เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยในด้านของความเค้น นอกจากนี้ในการใช้แผ่นตามทฤษฎีของมินต์ลินจะเกิดปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน เมื่อชิ้นส่วนมีความหนาลดลงมากจนเข้าใกล้แผ่นบาง ในขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์ของชิ้นส่วนจึงต้องป้องกันไม่ให้เกิดปัญหาลักษณะนี้ขึ้นด้วย

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาชิ้นส่วนที่ได้พัฒนาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ผสมคือ ชิ้นส่วน 8 จุดต่อ PLAT8 และ PLAT8H ชิ้นส่วน 5 จุดต่อ HMPL5 ชิ้นส่วน 4 จุดต่อ BUBBLE4 และ MiSP4 และชิ้นส่วน 9 จุดต่อ BUBBLE9 และสรุปวิธีการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน จากนั้นนำแต่ละชิ้นส่วนมาทดสอบประสิทธิภาพในการใช้งานด้านต่างๆ เทียบกับชิ้นส่วน 8 จุดต่อของโปรแกรม GTSTRUDL โดยใช้ตัวอย่างแผ่นพื้นที่มีขอบรองรับแบบต่างๆ หัวข้อที่ทดสอบคือ ความถูกต้องของผลเฉลยด้านการกระจัก ความถูกต้องของผลเฉลยด้านโมเมนต์และแรงเฉือน ผลกระทบจากการเปลี่ยนจำนวนชิ้นส่วนและความหนาของแผ่นพื้น ผลของการเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความยาวของชิ้นส่วน ผลของการใช้ชิ้นส่วนที่มีความบิดเบี้ยว ทดสอบความยืดหยุ่นของชิ้นส่วน ทดสอบประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์ และทดสอบแบบห้อย ซึ่งพบว่าชิ้นส่วนที่สร้างจากไฟไนต์เอลิเมนต์ผสมให้ผลเฉลยด้านการกระจักได้ถูกต้องเหมือนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ ส่วนผลเฉลยด้านโมเมนต์และแรงคดมีความถูกต้องสูงกว่า และจากการทดสอบ แต่ละชิ้นส่วนจะมีประสิทธิภาพในแต่ละด้านที่ต่างกันไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของที่รองรับ โดยที่รองรับที่มีการยึดครั้งมาก เช่น แผ่นพื้นที่มีที่รองรับแบบยึดแน่น โดยรอบจะได้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่า นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ลองปรับปรุงชิ้นส่วน HMPL5 และ BUBBLE4 แล้วนำไปทดสอบ พบว่าผลเฉลยด้านการกระจักถูกต้องมากขึ้น แต่ผลเฉลยด้านโมเมนต์และแรงเฉือนมีความถูกต้องลดลงบ้าง เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพในทุกด้านแล้วพบว่าชิ้นส่วน HMPL5 ให้ผลเฉลยด้านการกระจัก โมเมนต์และแรงเฉือนที่มีความถูกต้องสูง จึงเหมาะสมที่สุดสำหรับใช้วิเคราะห์แผ่นหนา

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่อนิสิต.....ภาคภูมิ วานิชกมลนันท์
สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา 2543

4070371421 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

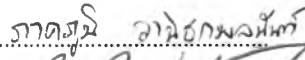

KEY WORD: MIXED FINITE ELEMENTS / THICK PLATES / MINDLIN PLATES

PARKPOOME VANITKAMONNUNT : COMPUTATIONAL ASPECTS OF MIXED FINITE ELEMENTS
IN BENDING OF THICK PLATES. THESIS ADVISOR : ROENGDEJA RAJATABHOTHI, Ph.D., 140 pp.
ISBN 974-13-1173-7.

By using the conventional finite element method in which the displacement fields are assumed and the stiffness matrices formulated from the principle of minimum potential energy, the obtained displacement solutions are generally found to be accurate but the stress solutions contain significant errors, especially when a coarse mesh is used. As a result, a mixed finite element method employing multifield variables has been developed wherein the displacement fields and stress or strain fields are generally assumed. The stiffness matrix is formulated from Hellinger-Reissner principle with two fields of variables or Hu-Washizu principle when three variable fields are used.

In thick plate analysis using Mindlin plate theory taking the effects of transverse shear strains into account, the stress results contain terms in bending and shear which, in turn, affect the accuracy of the stress results significantly. Therefore mixed finite elements can be used to improve the accuracy of the stress solutions. However, shear locking problems may arise when using Mindlin plate theory, particularly when plate thickness becomes very small. Consequently these problems must be addressed in formulating the element stiffness matrices.

This research explores several computational aspects of the following mixed finite elements: the 8-node PLAT8 and PLAT8H elements, the 5-node HMPL5 element, the 4-node BUBBLE4 and MiSP4 elements and the 9-node BUBBLE9 element. Each element formulation is summarized and the efficiency tested in plates with various types of supports. An 8-node plate bending element in GTSTRUDL was used as a benchmark and all of the elements examined with regard to accuracy of displacement, moment and shear stress solutions. Also included in the investigation are the effects of mesh refinement and variation of span length-to-thickness and element aspect ratios, the effects of element distortion, invariance, computational efficiency and, lastly, the patch test. It was found that the mixed elements yield displacement solutions as accurate as conventional elements, whereas moment and shear stress solutions are closer to the exact solutions. The tests also showed that plates with more restraint tend to produce better results. Attempts to improve the HMPL5 and BUBBLE4 elements led to an increase in accuracy of displacements but at the expense of reduced accuracy in moments and shears. All things considered, the HMPL5 element is the most suitable element for analyzing thick plates in bending.

Department..... วิศวกรรมโยธา Student's signature..... 
Field of study..... วิศวกรรมโยธา Advisor's signature..... 

Academic year 2000



กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เรืองเดช รัชตโพธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้โอกาส คำแนะนำ และข้อคิดเห็นต่างๆ ในการวิจัย มาด้วยดีตลอด รวมทั้งสละเวลาทั้งในและนอกเวลาราชการ นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สุธรรม สุริยะมงคล ประธานคณะกรรมการ ที่ได้สละเวลาให้คำปรึกษา รวมทั้ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์พิไชย และ อาจารย์ ดร. ชัชชาติ สิทธิพันธุ์ ที่ได้ให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และบริษัท อรุณชัยเสรี คอนซัลติ้งเอนจิเนียรส์ จำกัด ที่อนุญาตให้ใช้โปรแกรม GTSTRUDL

ท้ายนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณทางมหาวิทยาลัยที่ให้โอกาส อาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้แก่ ข้าพเจ้า ทุกคนในครอบครัวและเพื่อนๆ สำหรับคำแนะนำและกำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ฉ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความนำ.....	1
1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา.....	3
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	7
1.4 ขอบข่ายของการทำงาน.....	7

บทที่ 2 ทฤษฎี

2.1 แผ่นพื้นรับแรงภายนอก.....	8
2.2 การวิเคราะห์การคดของแผ่นพื้น โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบการกระจัดสอดคล้อง.....	9
2.3 การสร้างเมตริกซ์สติฟเนส โดยหลักของการแปรผัน.....	21
2.4 การสร้างเมตริกซ์สติฟเนส โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	25

บทที่ 3 ชิ้นส่วนไฟไนต์เอลิเมนต์ผสม

3.1 ชิ้นส่วน PLAT8.....	32
3.2 ชิ้นส่วนฟังก์ชันฟองสบู่ (BUBBLE).....	40
3.3 ชิ้นส่วน HMPL5.....	53
3.4 ชิ้นส่วน MiSP4.....	62

สารบัญ

หน้า

บทที่ 4 การทดสอบชิ้นส่วน	
4.1 การรู้เข้าของค่าตอบของการกระจัด.....	71
4.2 การรู้เข้าของค่าตอบของโมเมนต์และแรงเฉือน.....	92
4.3 ผลเนื่องจากการลดความหนาของแผ่นพื้น.....	94
4.4 ผลเนื่องจากการเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความยาวของชิ้นส่วน.....	95
4.5 ผลเนื่องจากชิ้นส่วนมีลักษณะบิดเบี้ยว.....	96
4.6 ความยื่นยงของชิ้นส่วน.....	99
4.7 การทดสอบประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์.....	99
4.8 การทดสอบแบบห้อย.....	102
บทที่ 5 สรุป.....	104
รายการอ้างอิง.....	106
ภาคผนวก	
ก.รายละเอียดผังงานการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนต่าง ๆ.....	108
ประวัติผู้วิจัย.....	141

สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 4.1.1 เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนของคำตอบของการกระจัดของแต่ละชั้นส่วน จากการแบ่ง 100 ชั้นส่วน	82
ตารางที่ 4.2.1 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของคำตอบของโมเมนต์ค้ำค้ำและแรงเฉือนของแต่ละชั้นส่วน.....	92
ตารางที่ 4.4.1 อัตราส่วนระหว่างผลเฉลยของการกระจัด โมเมนต์ และแรงเฉือน กับผลเฉลยตามทฤษฎีของมินต์ลีน เมื่อเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความยาวเท่ากับ 1 และ 2.....	95
ตารางที่ 4.5.1 อัตราส่วนระหว่างผลเฉลยของการกระจัดที่คำนวณ ได้กับผลเฉลยตามทฤษฎีของมินต์ลีน.....	97
ตารางที่ 4.5.2 อัตราส่วนระหว่างผลเฉลยของโมเมนต์และแรงเฉือนที่คำนวณ ได้กับผลเฉลยตามทฤษฎีของมินต์ลีน.....	98
ตารางที่ 4.7.1 อัตราส่วนระหว่างจำนวนครั้งในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสกับระดับชั้นความเสีรรวมของชั้นส่วนและเวลาที่ใช้.....	100
ตารางที่ 4.7.2 อัตราส่วนระหว่างจำนวนครั้งในการปฏิบัติการคำนวณกับระดับชั้นความเสีรรวมของชั้นส่วนและเวลาที่ใช้.....	100
ตารางที่ 4.8.1 ผลการทดสอบแบบห่ออมของแต่ละชั้นส่วน.....	103

สารบัญญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 1.2.1(ก) PLAT8 ในพิกัดธรรมชาติ ξ และ η	3
รูปที่ 1.2.1(ข) PLAT8H ในพิกัดธรรมชาติ ξ และ η	3
รูปที่ 1.2.2 สามเหลี่ยมของปาสคาล	5
รูปที่ 1.2.3 ชิ้นส่วน HMPL5.....	5
รูปที่ 1.2.4 ชิ้นส่วน ฟังก์ชันพองสบู่ 4 จุดต่อ และ 9 จุดต่อ.....	6
รูปที่ 2.2.1 ส่วนประกอบของแรงภายในเมื่อแผ่นบางรับแรง.....	9
รูปที่ 2.2.2 รูปแสดงการเคลื่อนตัวของจุดใดๆบนแผ่นบางตามสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์.....	10
รูปที่ 2.2.3 รูปแสดงการเคลื่อนตัวของจุดใดๆบนแผ่นบางตามสมมติฐานของมินด์ลิน.....	15
รูปที่ 2.3.1 วัตถุใดๆปริมาตร V มีขอบรับแรงที่กำหนด S_C และขอบที่กำหนดการกระจัด S_u	21
รูปที่ 2.3.2 แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของหลักของการแปรผันต่างๆ.....	24
รูปที่ 3.1.1 ลักษณะและระดับขั้นความเสรีที่ขั้วของชิ้นส่วน PLAT8 และ PLAT8H.....	32
รูปที่ 3.2.1(ก) กรณีชิ้นส่วน 4 จุดต่อ เมื่อเพิ่มชิ้นส่วนใหม่จะมีหนึ่งจุดต่อที่ไม่ถูกยึดครั้ง $n_u=3$	48
รูปที่ 3.2.1(ข) กรณีชิ้นส่วน 9 จุดต่อ เมื่อเพิ่มชิ้นส่วนใหม่จะมีสี่จุดต่อที่ไม่ถูกยึดครั้ง $n_u=12$	48
รูปที่ 3.2.2 การเรียงลำดับของพารามิเตอร์ของการกระจัดที่จุดต่อในชิ้นส่วน.....	51
รูปที่ 3.3.1 ลักษณะของแผ่นพื้นและทิศทางที่เป็นบวกของการกระจัด.....	54
รูปที่ 3.3.2 ทิศทางที่เป็นบวกของความเค้นและแรงเฉือน.....	54
รูปที่ 3.3.3(ก) แสดงชิ้นส่วน 4 จุดต่อที่เพิ่มเข้าไปในแผ่นพื้น โดยหนึ่งจุดต่อมี 3 DOF.....	58
รูปที่ 3.3.3(ข) แสดงการหาค่า NK และ NC.....	58
รูปที่ 3.4.1 ทิศทางที่เป็นบวกของโมเมนต์คัตและแรงเฉือน.....	63
รูปที่ 3.4.2 แสดงความเครียดเฉือนที่ขอบของชิ้นส่วน MiSP4.....	67
รูปที่ 4.1 ลักษณะของชิ้นส่วนที่นำมาทดสอบ.....	70
รูปที่ 4.1.1 สามเหลี่ยมของปาสคาล.....	71
รูปที่ 4.1.2(ก) ลักษณะการแบ่งแผ่นพื้นกลุ่มที่หนึ่งด้วยชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 4 16 36 64 และ 100 ชิ้น.....	72
รูปที่ 4.1.2(ข) ลักษณะการแบ่งแผ่นพื้นกลุ่มที่สองด้วยชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน 8 32 และ 72 ชิ้น.....	72
รูปที่ 4.1.3 ลักษณะที่รองรับแบบยึดหมุน โคจรอบในแผ่นพื้นชิ้นส่วน 4 จุดต่อและ 8 จุดต่อ.....	73
รูปที่ 4.1.4 ลักษณะที่รองรับแบบยึดแน่น โคจรอบในแผ่นพื้นชิ้นส่วน 4 จุดต่อและ 8 จุดต่อ.....	73
รูปที่ 4.1.5 แผ่นพื้นที่ใช้ทดสอบ.....	74
รูปที่ 4.1.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของการลู่เข้าของค่าตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนในแผ่นพื้นแบบ SS-UL.....	76
รูปที่ 4.1.7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของการลู่เข้าของค่าตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนในแผ่นพื้นแบบ CS-UL.....	77

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 4.1.8 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ CS-PL.....	78
รูปที่ 4.1.9 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 4S-UL.....	79
รูปที่ 4.1.10 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 2S2F-LL.....	80
รูปที่ 4.1.11 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของการกระจัดกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 1C3F-LL.....	81
รูปที่ 4.1.12 ตัวอย่างรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัด.....	83
รูปที่ 4.2.1 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของโมเมนต์กับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ SS-UL.....	84
รูปที่ 4.2.2 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของแรงเฉือนกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ SS-UL.....	85
รูปที่ 4.2.3 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของโมเมนต์กับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ CS-UL.....	86
รูปที่ 4.2.4 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของแรงเฉือนกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ CS-UL.....	87
รูปที่ 4.2.5 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของโมเมนต์กับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 2S2F-LL.....	88
รูปที่ 4.2.6 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของแรงเฉือนกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 2S2F-LL.....	89
รูปที่ 4.2.7 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของโมเมนต์กับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 1C3F-LL.....	90
รูปที่ 4.2.8 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของแรงเฉือนกับการเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนใน แผ่นพื้นแบบ 1C3F-LL.....	91
รูปที่ 4.3.1 กราฟความสัมพันธ์ของการรู้เข้าของคำตอบของการกระจัดกับการเปลี่ยนความหนา.....	93
รูปที่ 4.4.1 การแบ่งแผ่นพื้นด้วยชิ้นส่วนที่มีอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความยาว 1 และ 2.....	95
รูปที่ 4.5.1(ก) ชิ้นส่วนบิดเบี้ยวเป็นรูปสามเหลี่ยม.....	96
รูปที่ 4.5.1(ข) ชิ้นส่วน 8 และ 9 จุดค่อมมีจุดต่อระหว่างมุมของชิ้นส่วนที่ไม่อยู่กึ่งกลางขอบ.....	96
รูปที่ 4.6.1 แสดงลักษณะการวางแผ่นพื้นเพื่อทดสอบความยืดหยุ่นของชิ้นส่วน.....	99
รูปที่ 4.8.1 แสดงลักษณะการแบ่งชิ้นส่วนในแผ่นพื้นเพื่อทดสอบแบบห่ออม.....	102
รูปที่ 4.8.2(ก) ทดสอบ โมเมนต์คัลคองที่ (ข) ทดสอบแรงเฉือนคองที่ (ค) ทดสอบ โมเมนต์บิดคองที่.....	102