บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรนั้นมีวิธีการประมาณได้หลายวิธี สำหรับวิธีการประมาณที่นำมาศึกษาวิจัยครั้งนี้ คือ วิธีการประมาณอย่างง่าย วิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง และวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน ซึ่งทั้ง 3 วิธีดังกล่าวเป็นวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรบนพื้นฐานของการประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย วิธีการประมาณแต่ละวิธี รวมทั้งนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงซึ่งมี θ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

สมมติสามารถหาตัวสถิติ $A(X_1, \ldots, X_n)$ และ $B(X_1, \ldots, X_n)$ ซึ่งสำหรับค่าจริง θ ใด ๆ

$$P(\, A(X_1, \ldots, X_n) < \theta < B(X_1, \ldots, X_n)\,) = 1-\alpha$$

โดยที่ความน่าจะเป็น $1-\alpha$ เป็นค่าคงที่ $(0 < \alpha < 1)$

จากนี้เมื่อทราบค่าของ $X_i = x_i (i=1, \ldots, n)$ และค่าของ $A(X_1, \ldots, X_n)$ และ $B(X_1, \ldots, X_n)$ สมมติให้เป็น a และ b ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ช่วง (a,b) และเรียกช่วง (a,b) ว่า " ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์สำหรับ θ " [$100(1-\alpha)\%$ confidence interval for θ] หรือกล่าวว่า ค่าจริงของ θ จะตกอยู่ในช่วง (a,b) ด้วยความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)$ เปอร์เซ็นต์ และเรียกค่า a ว่า " ขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง " (lower confidence limit) เรียกค่า b ว่า " ขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน " (upper confidence limit) และเรียกค่า $1-\alpha$ ว่า " สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น " (confidence coefficient)

2.2 การแจกแจงของค่าสัดส่วนตัวอย่าง

ในการทดลองสุ่มใด ๆ ก็ตามที่มีผลลัพธ์เป็นไปได้ 2 อย่าง คือ ความสำเร็จกับความไม่สำเร็จด้วยความน่าจะเป็น p และ q = 1-p ตามลำดับ การทดลองนี้เรียกว่า การทดลองแบบแบร์นูลลี (Bernoulli experiment) ถ้าให้ X=1 เมื่อเกิดความสำเร็จและ X=0 เมื่อเกิดความไม่สำเร็จ ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบแบร์นูลลี (Bernoulli probability distribution) ด้วยพารามิเตอร์ p และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นในรูป

$$f(x;p) = p^{x}(1-p)^{1-x} \qquad ; x = 0,\ 1$$

ค่าความน่าจะเป็น p คือสัดส่วนประชากรที่เกิดความสำเร็จ ถ้าตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่เลือกมาจากประชากรนี้ มีตัวอย่างสุ่มคือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ฟังก์ชันที่ได้จากตัวอย่างสุ่มที่เราพิจารณาจะเป็นสัดส่วนตัวอย่างที่เกิดความสำเร็จ คือ $\hat{P} = X/n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i$ เมื่อ $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้ว่า X คือจำนวนหน่วยที่เกิดความสำเร็จในตัวอย่างสุ่มขนาด n และเป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ p โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น np และความแปรปรวน npq แต่สำหรับตัวแปรสุ่ม $\hat{P}$ นี้ไม่ได้มีการแจกแจงในรูปแบบที่เรารู้จักกันดี อย่างไรก็ตาม ถ้าตัวอย่างสุ่มมีขนาดใหญ่พอ จะสามารถประยุกต์ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางกับกรณีนี้ได้ โดยจะพิจารณาว่า $\hat{P} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง และได้ว่า

$$E(\hat{P}) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} p = p$$

$$V(\hat{P}) = V(\bar{X}) = V(X)/n^2 = pq/n$$

ดังนั้นถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ โดยทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง $\hat{P}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติโดยประมาณ โดยมีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงเป็น p และค่าแปรปรวนเป็น pq/n เมื่อ q=1-p

2.3 วิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากร

จากการประมาณการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินามโดยใช้การแจกแจงแบบปกติ เราจะหาสูตรการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรของการแจกแจงทวินาม ได้ดังนี้

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม นั่นคือ $X \sim B(n,p)$ และ $\hat{P} = X/n$ เป็นสัดส่วนตัวอย่าง โดยมี p เป็นค่าสัดส่วนประชากร

เมื่อ $\hat{P}$ เป็นตัวประมาณแบบจุดของ p จาก

$$Z = \frac{\hat{P}-p}{\{ p(1-p)/n \}^{1/2}} \sim N(0,1),\ n \to \infty$$

และ
$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{P}-p}{\{ p(1-p)/n \}^{1/2}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

$$P(\hat{P}-z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} < p < \hat{P}+z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2}) = 1-\alpha \quad (2)$$

ได้ว่าช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ p คือ

$$(\hat{P}-z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} ,\ \hat{P}+z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2})$$

แต่เนื่องจากไม่ทราบค่าสัดส่วนประชากร p การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรในกรณีนี้จึงทำได้หลายวิธี สำหรับการวิจัยครั้งนี้เสนอ 3 วิธีดังต่อไปนี้

1. วิธีการประมาณอย่างง่าย

จาก (2)

$$P(\hat{P}-z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} < p < \hat{P}+z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} = 1-\alpha$$

แทนค่า p ด้วย $\hat{P} = X/n$ จะได้

$$P(\hat{P}-z_{1-\alpha/2}\{ \hat{P}(1-\hat{P})/n \}^{1/2} < p < \hat{P}+z_{1-\alpha/2}\{ \hat{P}(1-\hat{P})/n \}^{1/2} = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น 100(1-α)% สำหรับ p : (PL,PU)

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง (PL) คือ $\hat{P} - z_{1-\alpha/2}\{ \hat{P}(1-\hat{P})/n \}^{1/2}$

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน (PU) คือ $\hat{P} + z_{1-\alpha/2}\{ \hat{P}(1-\hat{P})/n \}^{1/2}$

2. วิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง

จาก (1) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{|\hat{P}-p|}{\{ p(1-p)/n \}^{1/2}} \leqslant z_{1-\alpha/2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จัดรูปได้เป็น

$$H(p) = (\hat{P}-p)^2 - (z_{1-\alpha/2})^2 p(1-p)/n \leqslant 0$$

$$H(p) = (1+(z_o)^2/n)p^2 - (2\hat{P}+(z_o)^2/n)p + \hat{P}^2$$

เมื่อ $z_o = z_{1-\alpha/2}$

ให้ H(p) เท่ากับ 0

$$H(p) = (1+(z_o)^2/n)p^2 - (2\hat{P}+(z_o)^2/n)p + \hat{P}^2 = 0$$

อยู่ในรูปสมการกำลังสอง (quadratic equation)

$$ax^2+bx+c = 0$$

จะได้รากของสมการกำลังสองคือ $$x = \frac{-b \pm (b^2-4ac)^{1/2}}{2a}$$

เมื่อ $x=p$, $a = 1+(z_o)^2/n$, $b = -(2\hat{P}+(z_o)^2/n)$ และ $c = \hat{P}^2$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ p : (PL,PU)

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง (PL) คือ

$$\frac{\hat{P} + (z_o)^2/2n - z_o \{ \hat{P}(1-\hat{P})/n + (z_o)^2/4n^2 \}^{1/2}}{1+(z_o)^2/n}$$

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน (PU) คือ

$$\frac{\hat{P} + (z_o)^2/2n + z_o \{ \hat{P}(1-\hat{P})/n + (z_o)^2/4n^2 \}^{1/2}}{1+(z_o)^2/n}$$

เมื่อ $z_o = z_{1-\alpha/2}$

3. วิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน

วิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน เสนอโดย แฮนเฟง เชน (Hanfeng Chen) ในปี ค.ศ. 1990 โดยพัฒนามาจากวิธีการประมาณอย่างง่าย ทั้งนี้เนื่องจากวิธีการประมาณอย่างง่าย สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดได้ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอหรือค่าสัดส่วนตัวอย่างมีค่าเข้าใกล้ 0.5 แต่ถ้าขนาดตัวอย่างมีไม่มากพอและค่าสัดส่วนตัวอย่างมีค่าเล็กเข้าใกล้ 0 วิธีการประมาณอย่างง่ายจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ด้วยเหตุผลดังกล่าวทำให้เชน ได้นำแนวความคิดเกี่ยวกับวิธีของเบส์มาประยุกต์ใช้กับวิธีการประมาณอย่างง่าย กล่าวคือเขาได้เสนอให้ใช้วิธีของเบส์ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากร โดยการประมาณ

ค่าสัดส่วนประชากร หรือ p ด้วยตัวประมาณเบส์ ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นแรกเริ่ม (prior density function) เป็น Beta(a,b) และฟังก์ชันความสูญเสียเป็นความสูญเสียในรูปของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างตัวประมาณและตัวพารามิเตอร์ที่ถูกประมาณ หรือฟังก์ชันความสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (squared - error loss) แสดงรายละเอียดได้ดังนี้

ให้ฟังก์ชันความหนาแน่นมีเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด $\Theta=\theta$ คือ $h(\underset{\sim}{x}|\theta)$

$$h(\underset{\sim}{x}|\theta) = {}^{n}C_{x}\, \theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \quad ; x = 0,1,2,\ldots,n \text{ และ } 0 < \theta < 1$$

โดยที่พารามิเตอร์ θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นแรกเริ่ม (prior density function) คือ

$$g(\theta) = \text{Beta}(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \quad ,0 < \theta < 1$$

เราเรียก $g(\theta)$ ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นแรกเริ่มของ Θ และจะได้ $g(\theta|\underset{\sim}{x})$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นมีเงื่อนไขของ Θ เมื่อกำหนด X=x เราเรียก $g(\theta|\underset{\sim}{x})$ ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลัง (posterior density function) ของ Θ ดังนี้

$$g(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{g(\theta)h(\underset{\sim}{x}|\theta)}{\int_{0}^{1} g(\theta)h(\underset{\sim}{x}|\theta)\, d\theta}$$

$$\int_{0}^{1} g(\theta)h(\underset{\sim}{x}|\theta)\, d\theta = \int_{0}^{1} {}^{n}C_{x}\, \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}\, d\theta$$

$$= {}^{n}C_{x}\, \frac{\Gamma(a+b)\quad \Gamma(a')\,\Gamma(b')}{\Gamma(a)\Gamma(b)\,\Gamma(a'+b')}$$

ซึ่ง $a' = x+a$ และ $b' = n-x+b$

นั่นคือ $$g(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{\Gamma(a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} \theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1}$$

$$= \frac{\Gamma(a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} \theta^{a'-1}(1-\theta)^{b'-1}$$

ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลังของ θ คือ Beta(a',b') เมื่อ $a' = x+a$

$b' = n-x+b$

เนื่องจากฟังก์ชันความสูญเสียเป็นฟังก์ชันความสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง ให้ $L(\hat{\theta}|\theta)$ แทนฟังก์ชันความสูญเสีย จะได้

$$L(\hat{\theta}|\theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

ดังนั้น ตัวประมาณเบส์ของ θ คือ

$$\hat{\theta} = E(\theta|\underset{\sim}{x})$$

$$= \frac{x+a}{n+a+b} \quad ; x = 0,1,2,\ldots,n$$

$$= \frac{x+b}{n+2b}$$

เมื่อกำหนด $a = b$*

จากนี้นำตัวประมาณเบส์ $\hat{\theta}$ ที่ได้นี้ไปแทนที่ $\hat{p} = X/n$ ในช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ p ที่ได้จากวิธีการประมาณอย่างง่าย

---

* แฮนเฟง เชน ได้กำหนดให้ $a = b$ เนื่องจากยังคงรักษาสภาพภายใต้การแปลง (To retain invariance)

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ p : (PL,PU)

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง (PL) คือ

$$\frac{X+b}{n+2b} - (z_o/n^{1/2})\left\{\left(\frac{X+b}{n+2b}\right)\left(1-\frac{X+b}{n+2b}\right)\right\}^{1/2}$$

ขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน (PU) คือ

$$\frac{X+b}{n+2b} + (z_o/n^{1/2})\left\{\left(\frac{X+b}{n+2b}\right)\left(1-\frac{X+b}{n+2b}\right)\right\}^{1/2}$$

เมื่อ $z_o = z_{1-\alpha/2}$, b = ค่าคงที่

และ เชน ยังได้เสนอค่า b สำหรับวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์ไว้หลายค่า ในการวิจัยครั้งนี้ จะทำการศึกษาเฉพาะค่า b เท่ากับ 0.375 เท่านั้น ซึ่งค่านี้เสนอโดย จอห์นสัน และ คอทซ์ [2] (Johnson and Kotz 1969)

นอกจากนี้ สำหรับทุกค่าสัดส่วนประชากร $p \in (0,1)$ และขนาดตัวอย่าง $n \geqslant 1$ จะได้ว่า $\gamma(p,n) = \gamma(1-p,n)$ [3] เมื่อ $\gamma = 1-\alpha$ เป็นสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ด้วยเหตุนี้ จึงศึกษาค่าสัดส่วนประชากร p ถึงค่า p = 0.50

---

[2] Johnson N.L. and Kotz S. Discrete Distributions. New York: John Wiley & Son, 1969.

[3] Ghosh, B.K. A Comparison of Some Approximate Confidence Intervals for the Binomial Parameter. Journal of the American Statistical Association 74 (1979): 894-900.

2.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากรทั้ง 3 วิธีนี้ จะทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากแต่ละวิธี ที่ระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับคือ 90%, 95% และ 99% ในแต่ละสถานการณ์ของการทดลอง ทำการทดลองซ้ำ 2,000 ครั้ง การเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น จะทำการเปรียบเทียบระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากแต่ละวิธีการประมาณกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในการตรวจสอบว่าวิธีการประมาณใด ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดได้หรือไม่นั้น ผู้วิจัยจะอาศัยการทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติ z ดังนี้

$$-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{P}-p}{\{ p(1-p)/n \}^{1/2}} < z_{1-\alpha/2}$$

$$p-z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} < \hat{P} < p+z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2})$$

จะได้ $(p-z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2} , p+z_{1-\alpha/2}\{ p(1-p)/n \}^{1/2})$

1. ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

H_o : $p = 0.90$

H_1 : $p \neq 0.90$

จะได้

$(0.90-1.645\{ 0.90(0.10)/2000 \}^{1/2} , 0.90+1.645\{ 0.90(0.10)/2000 \}^{1/2})$

$(0.8890 , 0.9110)$

2. ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

H_o : $p = 0.95$

H_1 : $p \neq 0.95$

จะได้

$(0.95-1.96\{0.95(0.05)/2000\}^{1/2}, 0.95+1.96\{0.95(0.05)/2000\}^{1/2})$

$(0.9405, 0.9596)$

3. ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

$H_0 : p = 0.99$

$H_1 : p \neq 0.99$

จะได้

$(0.99-2.576\{0.99(0.01)/2000\}^{1/2}, 0.99+2.576\{0.99(0.01)/2000\}^{1/2})$

$(0.9843, 0.9957)$

นั่นคือ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่า 0.8890, 0.9405 และ 0.9843 ตามลำดับ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในสถานการณ์นั้น ๆ จากนั้นจึงมาพิจารณาเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด จะถือเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมที่สุด ทั้งนี้ ในการเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะเปรียบเทียบเฉพาะในกรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการทดลองไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น

2.5 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงผลงานวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากร ซึ่งจะนำเสนอเฉพาะผลงานวิจัยที่สำคัญพอเป็นสังเขป ดังนี้

ในปี ค.ศ. 1934 ซี.เจ. คลอปเปอร์ และ อี.เอส. เพียร์สัน (C.J. Clopper and E.S. Pearson) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับการแจกแจงแบบทวินาม ในกรณีขนาดตัวอย่างเล็ก ซึ่งช่วงของคลอปเปอร์และเพียร์สันสามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ต่อมาช่วงของคลอปเปอร์และเพียร์สัน ได้

ถูกยึดเป็นแนวทางมีการปรับปรุงแก้ไขช่วงดังกล่าวโดยผู้วิจัยหลาย ๆ ท่าน ในปี ค.ศ. 1967 แอนเดอร์สัน และเบอร์สทีน (Anderson and Burstein) ได้ศึกษาช่วงของคลอปเปอร์และเพียร์สัน พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น การปรับปรุงช่วงของคลอปเปอร์และเพียร์สันจะมีความยุ่งยากในการคำนวณมากขึ้น ในปี ค.ศ. 1979 บี.เค.โกช (B.K. Ghosh) ได้ศึกษาและนำเอาการแจกแจงแบบปกติมาใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินาม และทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินามโดยใช้การแจกแจงแบบปกติ ระหว่างวิธีการประมาณอย่างง่าย และวิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% ขนาดตัวอย่างเป็น 15, 20, 30, 50, 100 และ 200 และค่า p = 0.01, 0.05, 0.10 (0.10)0.90, 0.95 และ 0.99 จากการศึกษาสรุปได้ว่าวิธีการประมาณด้วยรากของสมการกำลังสอง สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อ $0.01 \leqslant p \leqslant 0.99$ และขนาดตัวอย่างไม่น้อยกว่า 30 ในทางตรงกันข้าม วิธีการประมาณอย่างง่าย จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับ $p < 0.2$ หรือ > 0.8 แม้ว่าจะใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 แล้วก็ตาม

ต่อมาในปี ค.ศ. 1990 แฮินเฟง เชน (Hanfeng Chen) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินาม โดยนำวิธีของเบส์มาใช้ในการประมาณค่า p ในที่นี้ขอเรียกวิธีนี้ว่า วิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน และทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงแบบทวินาม 3 วิธีคือ วิธีการประมาณอย่างง่าย วิธีการประมาณด้วยการแปลงแบบอาร์คไซน์ และวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชน เมื่อ $b = (z_{1-\alpha/2})^2/2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ขนาดตัวอย่างเป็น 50, 100 และ 1000 ค่า p 8 ค่าคือ 0.10, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005,0.001, 0.0005 และ 0.0001 จากการศึกษาสรุปได้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากวิธีการประมาณด้วยตัวประมาณเบส์โดยเชนมีค่าสูงกว่า หรือเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่คำนวณได้จากวิธีการประมาณอย่างง่ายทุกระดับขนาดตัวอย่าง และทุกระดับค่าสัดส่วนประชากรที่ศึกษา (n = 50, 100, 1000 และ p = 0.10 , 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005 และ 0.0001)