บทที่ 3
โปรแกรมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

การประมวลผลสัญญาณดิจิตัลนั้นนิยมใช้อัลกอริทึมแบบฟาสต์ ดังนั้นโปรแกรมดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มที่จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณค่าจริง จะใช้อัลกอริทึม DIT radix-2 โดยใช้ภาษา C เพื่อใช้งานบนเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ และจากบทที่ 2 การเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จะเป็นการเปรียบเทียบเฉพาะจำนวนการบวกและคูณจากอัลกอริทึมเท่านั้น ดังนั้นจึงได้ทำการนำ DIT radix-2 ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มและฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มมาเขียนโปรแกรมทดสอบความเร็วรวมทั้งค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยข้อมูลที่ทำการทดสอบจะเป็นข้อมูล random ผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่าฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มประมาณครึ่งหนึ่ง ในขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มจะสูงกว่าแต่ก็ไม่เกินค่า 10^{-7}

3.1 โปรแกรม ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

โปรแกรมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มนั้น ได้ทำการเขียนขึ้นจากโครงสร้างดังรูปที่ 2.3.1 ซึ่งเป็นอัลกอริทึม DIT radix-2 โดยใช้ภาษา C เพื่อใช้งานบนเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ IBM PC/XT/AT หรือเทียบเท่า การทำงานของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ การบวก, ลบ, คูณ, และหารใช้เวลาไม่เท่ากัน การบวกและลบจะใช้เวลาน้อยกว่าการคูณและหาร การเขียนโปรแกรมจึงพยายามหลีกเลี่ยงการคูณและการหาร โดยใช้การบวกและลบหรือเลื่อนบิทแทน ในการนำข้อมูลมาคำนวณจะเรียกใช้ในลักษณะของพอยน์เตอร์แทนอาร์เรย์ เพราะพอยน์เตอร์ทำงานเร็วกว่าอาร์เรย์ เนื่องจากไม่ต้องทำการคำนวณหาตำแหน่งของอาร์เรย์ที่ต้องการ

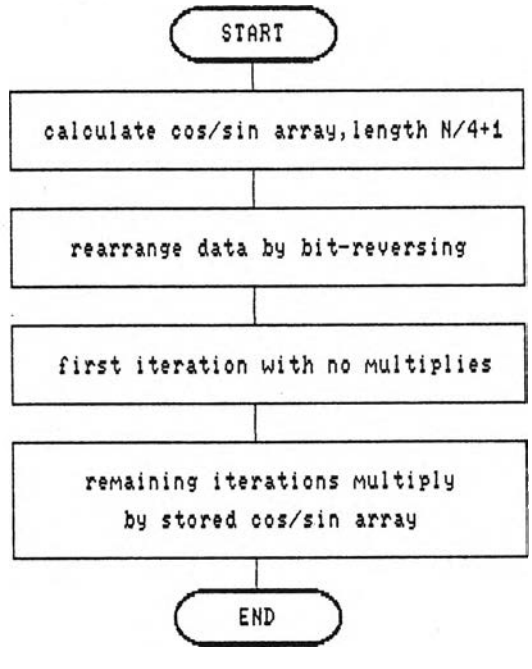
โปรแกรมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม ที่ได้ทำการเขียนขึ้นจากโครงสร้างรูป

2.3.1 จะแสดงขั้นตอนการเขียนโปรแกรมดังโฟลว์ชาร์ตรูป 3.1.1 ก่อนการคำนวณจะจัดลำดับของข้อมูลใหม่(permutation หรือ bit reverse) ส่วนนี้จะเหมือนกับฟาสต์ฟูเรียร์-ทรานส์ฟอร์มซึ่งได้ทำการเขียนขึ้นจาก[16] พิจารณารูป 2.3.1 การคำนวณแต่ละตำแหน่งใช้ค่า c_n และ s_n เป็นตัวคูณ ค่า c_n และ s_n จะซ้ำกันในแต่ละสเตทของการคำนวณ ในตอนต้นของโปรแกรมจึงสร้างเป็นอาร์เรย์ของ $c_n = \cos(2\pi n/N)$ และ $s_n = \sin(2\pi n/N)$ เก็บไว้ทำให้ไม่ต้องคำนวณค่า cos และ sin ซ้ำหลายครั้ง สำหรับค่า $\cos(2\pi n/N)$ และ $\sin(2\pi n/N)$ มีบางค่าของ n ที่ให้ค่า cos และ sin เท่ากัน

$$\sin\left(\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad (3.1.1a)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad (3.1.1b)$$

สมการ(3.1.1) ทำให้การคำนวณค่า cos และ sin เพื่อเก็บไว้ในอาร์เรย์ทำการคำนวณเพียง N/4+1 เท่านั้นก็เพียงพอ (N เป็นจำนวนข้อมูลที่จะทำการทรานส์ฟอร์ม)



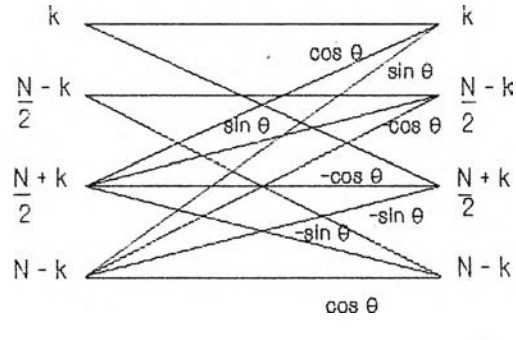
รูปที่ 3.1.1 แสดงขั้นตอนการเขียนโปรแกรม ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

โครงสร้างดังรูป 2.3.1 สเตทที่ 1 และ 2 ไม่มีการคูณค่า cos และ sin เนื่องจากค่า cos และ sin เป็น 0,1,-1 หมด จึงมีเพียงการบวกและการลบเท่านั้น การคำนวณสเตทแรกจะแยกมาคำนวณก่อน สเตทที่ 2 ซึ่งไม่มีการคูณค่า cos และ sin เช่นกัน แต่เพื่อความสะดวกในการเขียนโปรแกรมจึงไม่มีการแยกมาคำนวณ จากสมการ(2.3.1) ซึ่งเป็นการคำนวณในแต่ละสเตท

$$H[k] = H_{2n}[k] + H_{2n+1}[k]\cos(2\pi k/N) + H_{2n+1}[N-k]\sin(2\pi k/N)$$

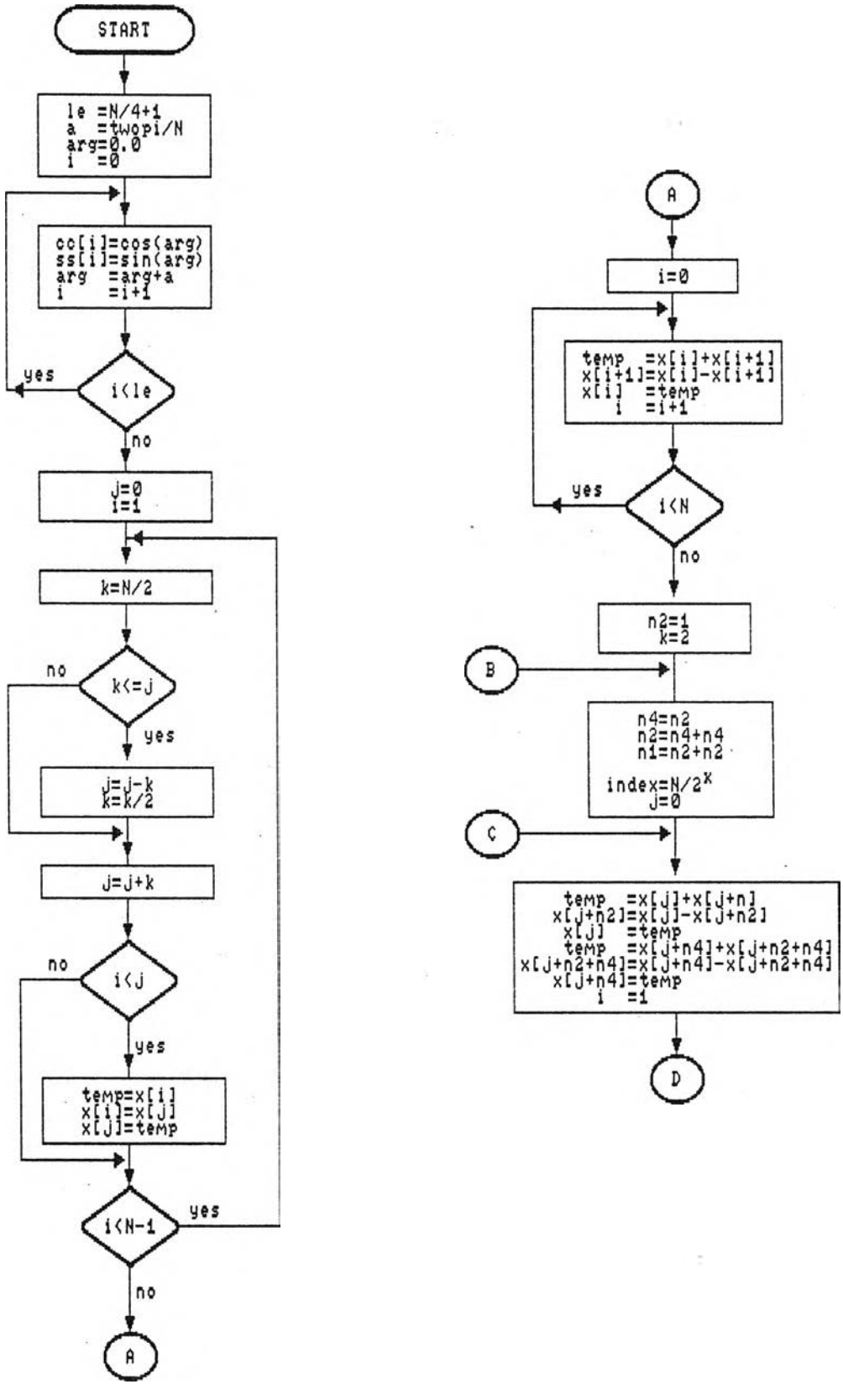
$$0 \leq k \leq N-1 \qquad (3.1.2)$$

H[k] มีจำนวนข้อมูล N ส่วน $H_{2n}[k]$ และ $H_{2n+1}[k]$ จะเป็น H[k] ที่ค่า k เป็นเลขคู่และเลขคี่ตามลำดับ มีความยาวของข้อมูล N/2 การคำนวณค่า H[k] ใด ๆ จะมาจากการคำนวณค่าตัวที่ k ของทั้ง $H_{2n}[k]$ และ $H_{2n+1}[k]$ รวมทั้ง $H_{2n+1}[N-k]$ ตัวที่ N-k อีกทั้งจากสมการ(3.1.1) ถ้าทำการคำนวณครั้งละ 4 ตัว จะเป็นการลดจำนวนการคูณ ดังรูป 3.1.2 สำหรับรายละเอียดของโปรแกรม ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม แสดงดังรูป 3.1.3

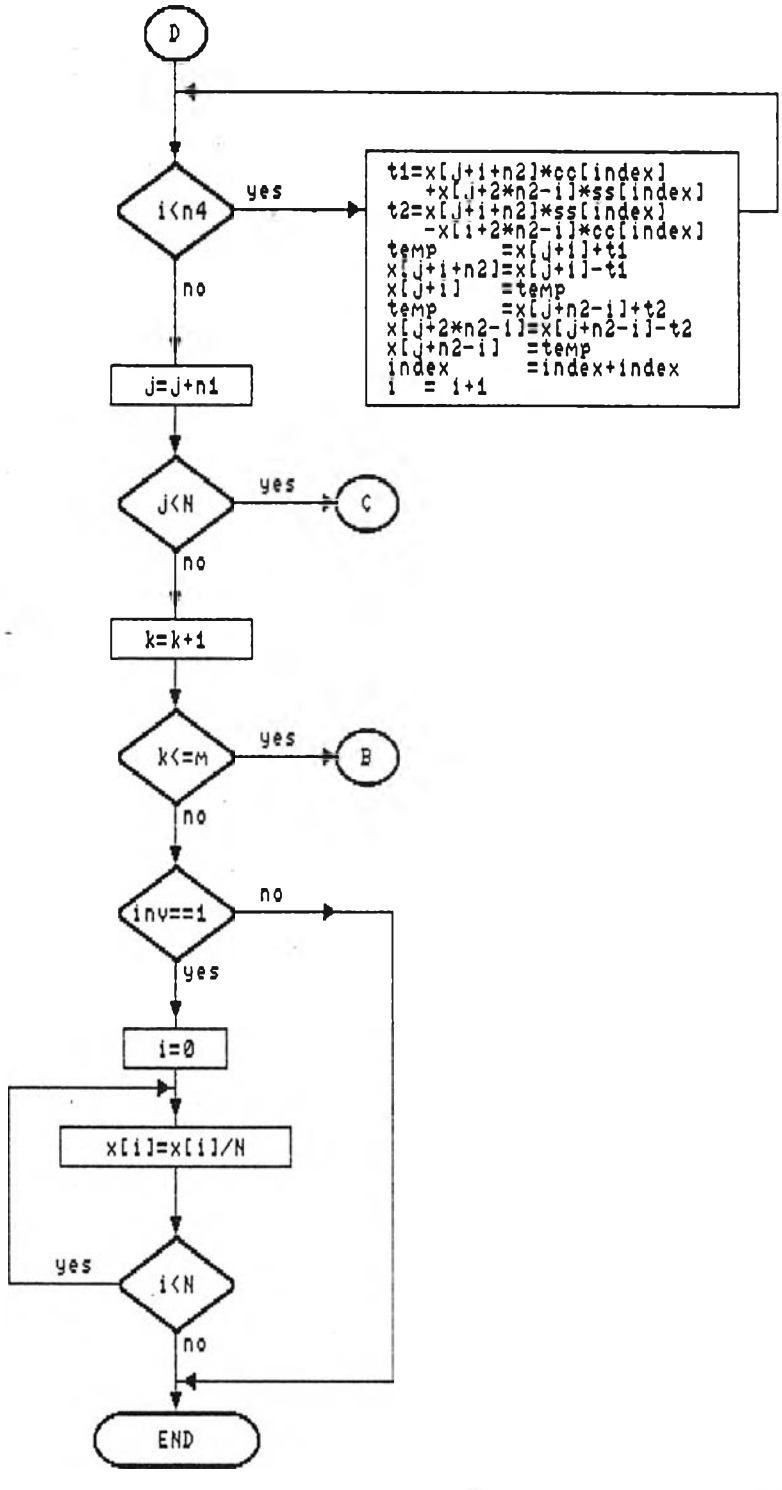


รูปที่ 3.1.2 แสดงการคำนวณในแต่ละสเตทของ ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม[9]

เนื่องจากดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม รูปแบบของการฟอร์เวอร์ดทรานส์ฟอร์มและอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มเหมือนกัน แต่ต่างกันตรงอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มจะมีค่าคงที่ 1/N คูณอยู่ ดังนั้นโปรแกรมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มที่ได้เขียนขึ้นในฟังก์ชัน fht(int m,int



รูปที่ 3.1.3 แสดงโฟลว์ชาร์ตของโปรแกรม ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม



รูปที่ 3.1.3(ต่อ) แสดงโฟลว์ชาร์ตของโปรแกรม ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

inv) (แสดงในภาคผนวก ก) จะสามารถทำงานได้ทั้งฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มและอินเวอร์สทรานส์ฟอร์ม โดยถ้าตัวแปร inv เท่ากับ 0 จะทำการฟอร์เวอร์ดทรานส์ฟอร์ม แต่ถ้า inv เท่ากับ 1 จะทำการอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มโดยคูณค่าคงที่ 1/N เข้าไป ดังโฟลว์ชาร์ตรูปที่ 3.1.3

3.2 <u>การเปรียบเทียบฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม</u>

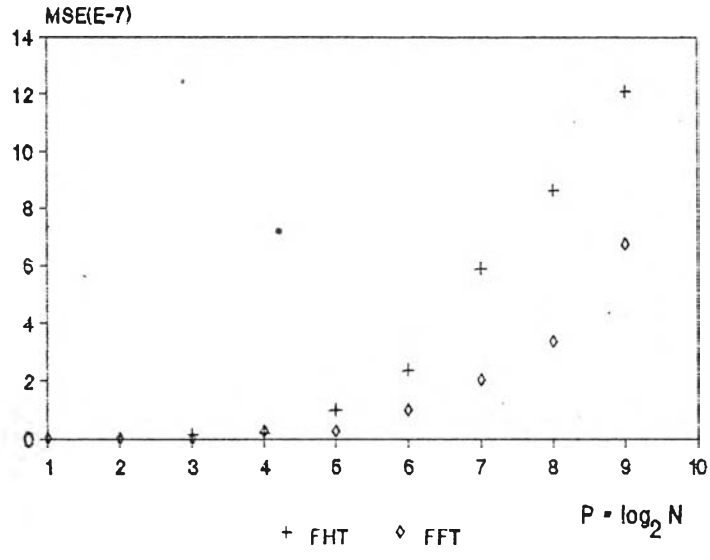
การเปรียบเทียบฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจะทำโดยเขียนโปรแกรมทั้งสองจากอัลกอริทึม DIT radix-2 เพื่อทดสอบบนเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ การทดสอบจะทดสอบทั้งเวลาที่ใช้ในการคำนวณและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error,MSE) แสดงในสมการ(3.2.1) ข้อมูลที่นำมาทดสอบจะเป็นข้อมูลแรนดอม(random data) ที่สร้างจากเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ ความยาวของข้อมูลที่ทำการทดสอบจะมีความยาวตั้งแต่ 2 ถึง 512 (P เท่ากับ 1 ถึง 9) โดยใช้เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ AT 286-16 เพื่อให้สามารถแสดงเวลาที่ใช้ในกรณี P มีค่าต่ำ ๆ

$$MSE = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-x'[n])^2 \qquad (3.2.1)$$

โดย x[n] เป็นข้อมูลก่อนการทรานส์ฟอร์ม ส่วน x'[n] เป็นข้อมูลหลังการอินเวอร์สทรานส์ฟอร์ม

การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะใช้เวลาจากนาฬิกาของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ โดยก่อนการคำนวณฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มหรือฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จะทำการเก็บค่าเวลาขณะนั้นไว้ เมื่อทำการคำนวณเสร็จก็จะทำการเก็บค่าเวลาขณะนั้น เวลาที่ใช้จะเท่ากับผลต่างของเวลาทั้งสอง การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ระหว่างฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ในหน่วย msec ดังรูป 3.2.1

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(MSE) จะแสดงดังรูปที่ 3.2.2 ซึ่งค่า MSE จะแปรตามค่า N หรือความยาวของข้อมูลที่ทำการทรานส์ฟอร์ม

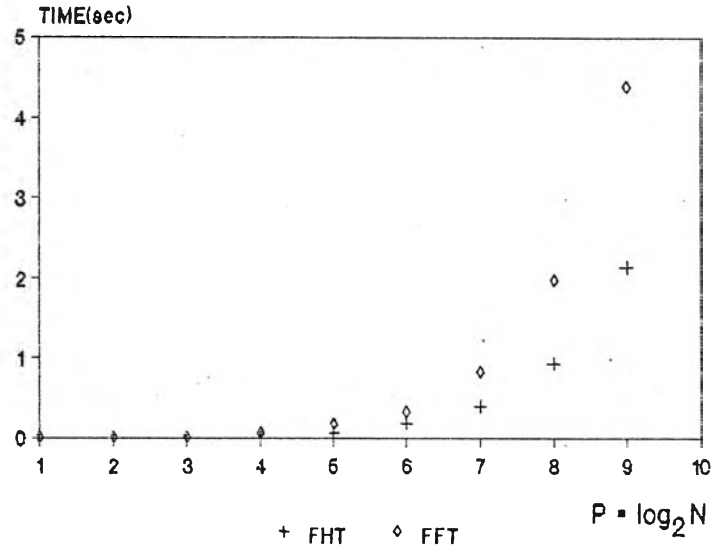


รูปที่ 3.2.1 แสดงผลการเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มในหน่วย msec โดยข้อมูลเป็นค่า random

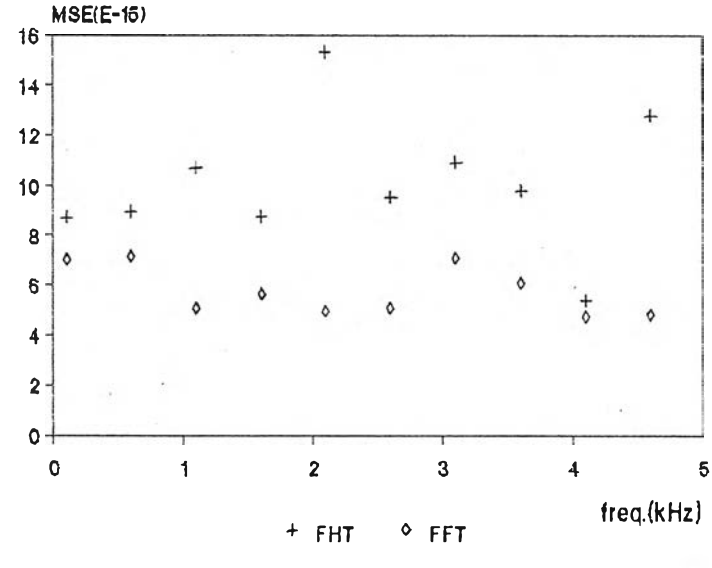
การเปรียบเทียบในรูปที่ 3.2.1 แสดงให้เห็นว่าฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มใช้เวลาการคำนวณน้อยกว่า ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มประมาณร้อยละห้าสิบที่ความยาวของข้อมูล $32 \leq N \leq 512$ สำหรับค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง(MSE) ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์-ฟอร์มจะมีค่าสูงกว่า ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม แต่ก็ยังมีค่าในหน่วย 10^{-7} ที่ความยาวของข้อมูล $N = 512$

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ระหว่างฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มสำหรับสัญญาณมาตรฐาน sinusoidal ที่มีความยาวของข้อมูลเท่ากับ 1024 แอมปลิจูด 1 v. ที่ความถี่ต่าง ๆ กัน จะได้ผลการเปรียบเทียบดังรูปที่ 3.2.3 ซึ่งค่า MSE ของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มสูงกว่าฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มแต่มีค่าไม่เกิน 10^{-15}

ผลการเปรียบเทียบนี้ เมื่อนำฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มไปใช้ในการวิเคราะห์สเปกสตรัมกำลังของสัญญาณแทนฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จะทำให้ใช้เวลาในการคำนวณลดลงประมาณ 50%



รูปที่ 3.2.2 แสดงการเปรียบเทียบค่า MSE ระหว่างฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับ ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม โดยข้อมูลเป็นข้อมูล random



รูปที่ 3.2.3 แสดงการเปรียบเทียบค่า MSE ระหว่างฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับ ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม โดยสัญญาณเป็น sinusoidal มีแอมปลิจูด 1 v. ที่ความถี่ค่าต่าง ๆ