บทที่ 4

การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณ

เนื่องจากสัญญาณแบ่งออกได้เป็น stationary และ non stationary ดังนั้นเพื่อให้ผลการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณเป็นไปตามที่ต้องการ จึงจำเป็นต้องเลือกวิธีการวิเคราะห์และวิธีการแสดงผลให้เหมาะสม ตอนท้ายของบทนี้จะเป็นการแสดงวิธีการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณโดยโปรแกรม PSA ซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้ทั้งสเปกตรัมกำลัง, spectrogram, periodogram

4.1 ลักษณะสัญญาณ

การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณ สามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ดีสครีต-ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม(จากหัวข้อ 2.3) แต่มีข้อจำกัดคือ สัญญาณจะต้องเป็นค่าจริงและเป็น causal signal(สัญญาณที่มีค่าที่ $n \geq 0$) สัญญาณแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดคือ สัญญาณ stationary และ สัญญาณ non stationary

4.1.1 สัญญาณ stationary

เป็นสัญญาณที่คุณสมบัติของสัญญาณเช่น ขนาดของสัญญาณ, ความถี่, เฟส ไม่แปรตามเวลา รวมถึงสัญญาณ stationary random process เช่น สัญญาณ white noise ในระบบสื่อสาร การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณ stationary จะทำการวิเคราะห์โดยใช้สมการ(2.4.3)

$$P[k] = \frac{H^2[k] + H^2[N-k]}{2} \qquad (4.1.1.1)$$

ถ้าเป็นสัญญาณ stationary random process การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังนิยมวิเคราะห์ในรูป periodogram เฉลี่ย โดยสัญญาณค่าจริง $x[n]$, $0 \leq n \leq Q-1$, (Q

เป็นความยาวของสัญญาณที่จะทำการวิเคราะห์) จะถูกแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ที่มีความยาว L ด้วย w[n] ซึ่งเป็นวินโดว์(window)และมีค่าในช่วง $0 \leq n \leq L-1$, โดยที่ L เป็นความยาวของวินโดว์ สัญญาณแต่ละส่วนเขียนได้เป็น[11]

$$x_r[n] = x[rR+n]w[n] \quad , \quad 0 \leq n \leq L-1 \qquad (4.1.1.2)$$

R เป็นระยะที่วินโดว์เลื่อนไปในแต่ละครั้ง ถ้าเลือกให้ $R<L$ สัญญาณแต่ละส่วนจะทับซ้อนกัน(overlap) ถ้า R=L สัญญาณแต่ละส่วนจะติดกันพอดี Q เป็นความยาวทั้งหมดของสัญญาณ ดังนั้นจำนวนส่วนของสัญญาณที่ถูกแบ่งจะขึ้นกับค่าและความสัมพันธ์ระหว่าง R,L,Q โดยทั่วไปในการเลือกจะต้องเลือกให้ $Q \geq L \geq R$ จำนวนส่วนของข้อมูลที่จะทำการคำนวณ (K)จะเป็นจำนวนเต็มบวกที่สูงสุดที่ทำให้อสมการ(4.1.1.3) เป็นจริง

$$(K-1)R + (L-1) \leq Q-1 \qquad (4.1.1.3)$$

$F_r[k]$ เป็นดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของสัญญาณ $x_r[n]$ periodogram ของสัญญาณ $x_r[n]$ จะเท่ากับ

$$I_r[k] = \frac{1}{LU} |F_r[k]|^2 \qquad (4.1.1.4)$$

$|F_r[k]|^2$ คือ สเปกตรัมกำลังของสัญญาณ $x_r[n]$ จากความสัมพันธ์ระหว่างฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม กับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มในสมการ(2.2.8) ค่า $|F_r[k]|^2$ ในสมการ(4.1.1.4) สามารถใช้ค่า P[k] ในสมการ(4.1.1.1) แทนได้ สามารถเขียนรูปเขียนรูปใหม่ได้ดังนี้

$$I_r[k] = \frac{1}{LU} P_r[k] \qquad (4.1.1.5)$$

U เป็นค่าคงที่ขึ้นกับวินโดว์ที่ใช้ มีค่าดังสมการ(4.1.1.6)

$$U = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}(w[n])^2 \qquad (4.1.1.6)$$

สำหรับ ractangular วินโดว์ ค่า U จะเท่ากับหนึ่ง ส่วนวินโดว์แบบอื่นค่า U จะอยู่ในช่วง(0,1) periodogram เฉลี่ย คือการนำ periodogram ของสัญญาณทุกส่วนมาทำการหาค่าเฉลี่ย ดังสมการ(4.1.1.7)

$$\bar{I}[k] = \frac{1}{K}\sum_{r=1}^{K-1} I_r[k] \qquad (4.1.1.7)$$

4.1.2 สัญญาณ non stationary

เป็นสัญญาณที่คุณสมบัติของสัญญาณเช่น ขนาด, เฟส, ความถี่ จะแปรตามเวลา ตัวอย่างของสัญญาณ non stationary ได้แก่ สัญญาณเสียง, สัญญาณเรดาร์ การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังจะประมาณว่าคุณสมบัติของสัญญาณคงที่ในช่วงเวลาสั้น ๆ สำหรับสัญญาณเสียงจะประมาณว่าคุณสมบัติคงที่ในช่วงเวลา 30 ถึง 40 msec การวิเคราะห์จะใช้หลักการของ "time-dependent Fourier Transform,TDFT" [11],[17] โดยสัญญาณ x[n], $0 \leq n \leq Q-1$ ถูกแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ที่มีความยาว L ด้วย w[n] ซึ่งเป็นวินโดว์ที่ที่มีค่าในช่วง $0 \leq n \leq L-1$ สัญญาณแต่ละส่วนเขียนได้เป็น

$$v_r[n] = x[rR+n]w[n] \qquad 0 \leq n \leq L-1 \qquad (4.1.2.1)$$

โดยที่ Q เป็นจำนวนของสัญญาณ, R เป็นระยะที่วินโดว์เลื่อนไปในแต่ละครั้ง ถ้า R<L สัญญาณแต่ละส่วนจะทับซ้อนกัน(overlap) ถ้า R=L สัญญาณแต่ละส่วนจะติดกันพอดี จำนวนส่วนทั้งหมดของสัญญาณ(K)จะขึ้นกับค่าและความสัมพันธ์ระหว่าง R,L,Q โดยจะเป็นจำนวนเต็มบวกที่สูงสุดที่ทำให้อสมการ(4.1.1.3) เป็นจริง

$$(K-1)R + (L-1) \leq Q-1$$

นิยาม time-dependent Fourier Transform

$$F[rR,k] = F[r,k] = F_r[k]$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} v_r[m]\exp(-j2\pi mk/N)$$

$$0 \leq k \leq N-1 \qquad (4.1.2.2)$$

โดยที่ F[r,k] คือดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ $v_r[m]$ (แต่ละส่วนของ x[n]) $v_r[n]$ จะถือว่าคุณสมบัติของสัญญาณคงที่ในช่วงความยาว L ของวินโดว์ ดังนั้นในการเลือกวินโดว์ไม่ควรเลือกให้ L มีความยาวมากเกินไป ส่วน N เป็นความยาวของข้อมูลที่ทำการทรานส์ฟอร์ม

time-dependent Fourier Transform จะเป็นการเปลี่ยนสัญญาณมิติเดียว x[n] ให้กลายเป็นสัญญาณสองมิติ F[r,k] สัญญาณ F[r,k] ที่ค่า k ใด ๆ เป็นสัญญาณที่ความถี่ $f_k = kf_s/N$ Hz และที่เวลา r ใด ๆ เป็นสัญญาณที่เวลา $t = rR/f_s$ sec การแสดงผลของ TDFT จะแสดงในรูปของ spectrogram โดยที่แกนตั้งเป็นแกนความถี่, แกนนอนเป็นแกนเวลา, ขนาดของ F[r,k] จะแสดงโดยใช้ความเข้มของสีแทน[11],[17]

การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณ non stationary จะใช้หลักการ time-dependent Fourier Transform สำหรับการแสดงผลจะแสดงโดยใช้ spectrogram โดยขนาดของ F[r,k] จะเป็นสเปกตรัมกำลังของสัญญาณในแต่ละส่วนแทน

$$\text{สเปกสตรัมกำลัง} = P[r,k] = |F[r,k]|^2 \qquad (4.1.2.3)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์-ฟอร์ม(สมการ(2.2.8)) สามารถแทน $|F[r,k]|^2$ ด้วยดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม, H[r,k], ของสัญญาณ $v_r[m]$

$$\text{สเปกตรัมกำลัง} = P[r,k] = \frac{H^2[r,k] + H^2[r,N-k]}{2} \qquad (4.1.2.4)$$

4.2 <u>วิธีการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลัง</u>

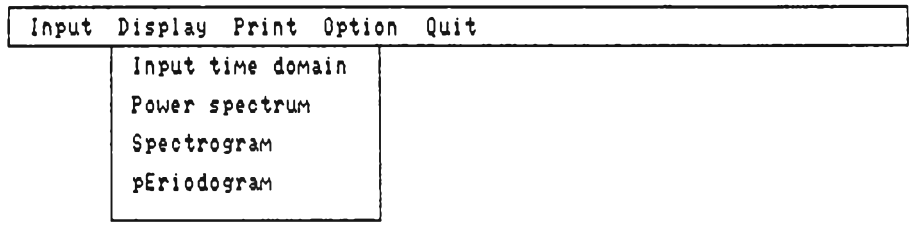
โปรแกรม Power Spectrum Analysis, PSA ได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อใช้สำ-

หรับการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณดิจิตัลบนเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ จะสามารถ LOAD สัญญาณมาวิเคราะห์ หรือเลือกจากสัญญาณมาตรฐานที่สร้างโดยโปรแกรม PSA จากหัวข้อ 4.1 สัญญาณแบ่งออกเป็น stationary หรือ non stationary ซึ่งมีหลักการวิเคราะห์รวมถึงการแสดงผลการวิเคราะห์ต่างกัน โปรแกรม PSA สามารถวิเคราะห์ได้ทั้งในรูปสเปกตรัมกำลัง, spectrogram, periodogram เฉลี่ย การวิเคราะห์จึงต้องเลือกให้เหมาะสมกับลักษณะของสัญญาณ

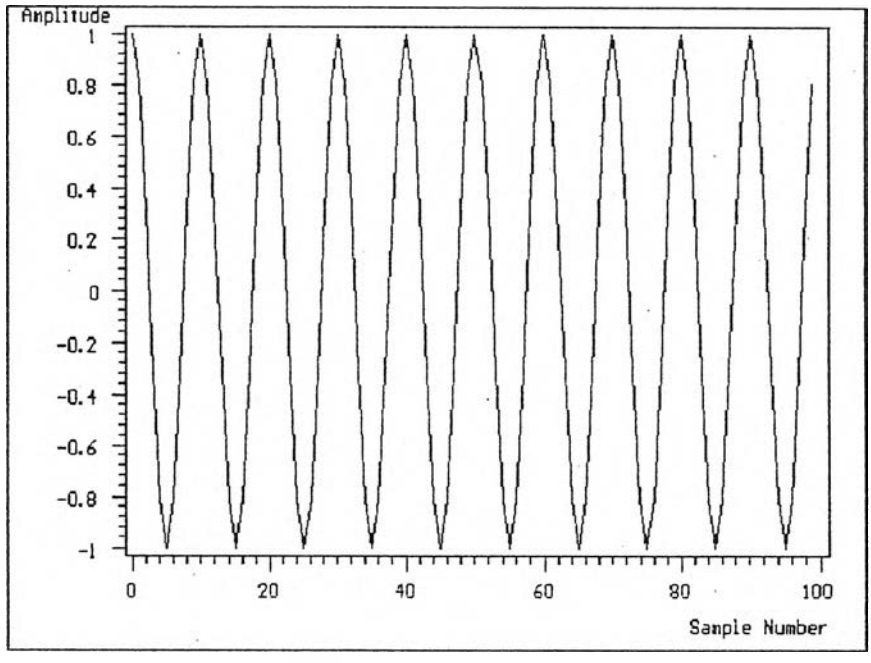
4.2.1 วิธีการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลัง

การวิเคราะห์วิธีนี้ จะใช้วิเคราะห์สัญญาณ stationary โดยไม่มีวินโดว์เข้ามาช่วย ฟังก์ชันที่ใช้ในการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของโปรแกรม PSA ได้เขียนขึ้นจากสมการ(2.4.3) การวิเคราะห์นี้จะเลือกจากรายการ "Power spectrum" จากรายการ "Display" ในรายการหลัก ก่อนเลือกรายการย่อยในรายการ "Display" ต้องเลือกสัญญาณที่จะมาวิเคราะห์จากรายการ "Input" เสียก่อน รายการย่อยของรายการ "Display" แสดงดังรูป 4.2.1.1

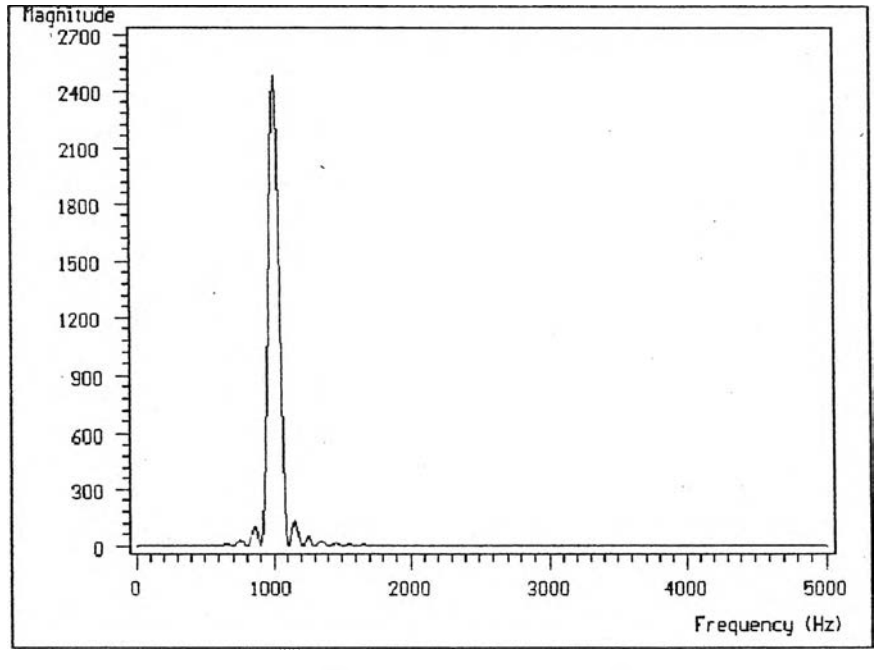
เมื่อเลือกรายการ "Power spectrum" แล้วจะมีข้อความถามว่าจะทรานส์ฟอร์มที่ความยาวของข้อมูลเท่าไร ต้องเลือกให้เป็นค่าความยาว $N = 2^P$ โดย $N \geq Q$ ซึ่ง Q เป็นจำนวนสัญญาณข้อมูลที่จะทำการทรานส์ฟอร์มจริง ข้อมูลช่วง [Q,N-1] จะใส่เป็นค่าศูนย์ หรือที่เรียกว่า "zero padding" ยิ่งถ้าเลือกให้ N>>Q จะทำให้แต่ละองค์ประกอบของสเปกตรัมกำลังของสัญญาณใกล้กันมากขึ้น สามารถแสดงสเปกตรัมกำลังของสัญญาณได้ชัดเจน



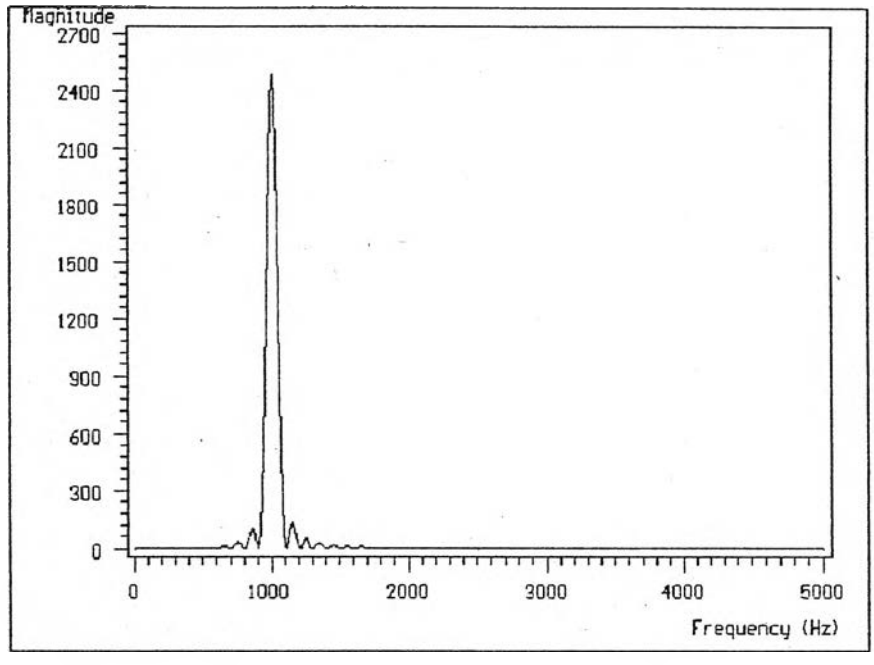
รูปที่ 4.2.1.1 แสดงรายการย่อยของรายการ "Display"



รูปที่ 4.2.1.2 แสดงตัวอย่างของสัญญาณมาตรฐาน sinewave ที่เลือกจากรายการ "Input" โดยมีจำนวนสัญญาณข้อมูล Q = 100 ความถี่ 1,000 Hz



รูปที่ 4.2.1.3 แสดงการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณจากรูป 4.2.1.2 จำนวนข้อมูลที่ทำการทรานส์ฟอร์มเท่ากับ N=1024 วิเคราะห์โดยใช้ FHT



หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

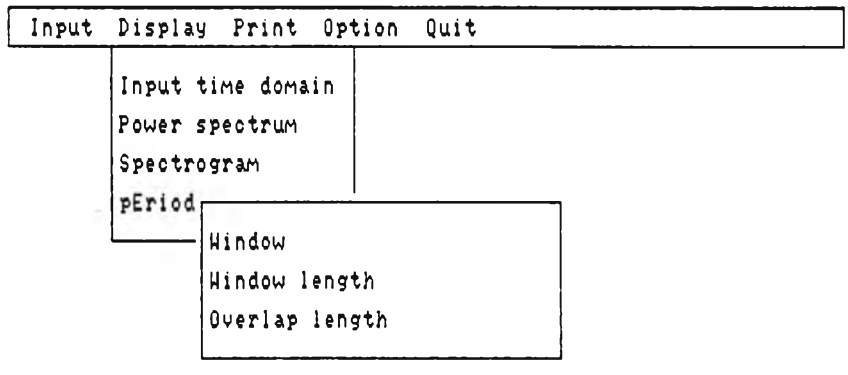
รูปที่ 4.2.1.4 แสดงการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณจากรูป 4.2.1.2 จำนวนข้อมูลที่ทำการทรานส์ฟอร์มเท่ากับ N=1024 วิเคราะห์โดยใช้ FFT

4.2.2 <u>วิธีการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังในรูป spectrogram</u>

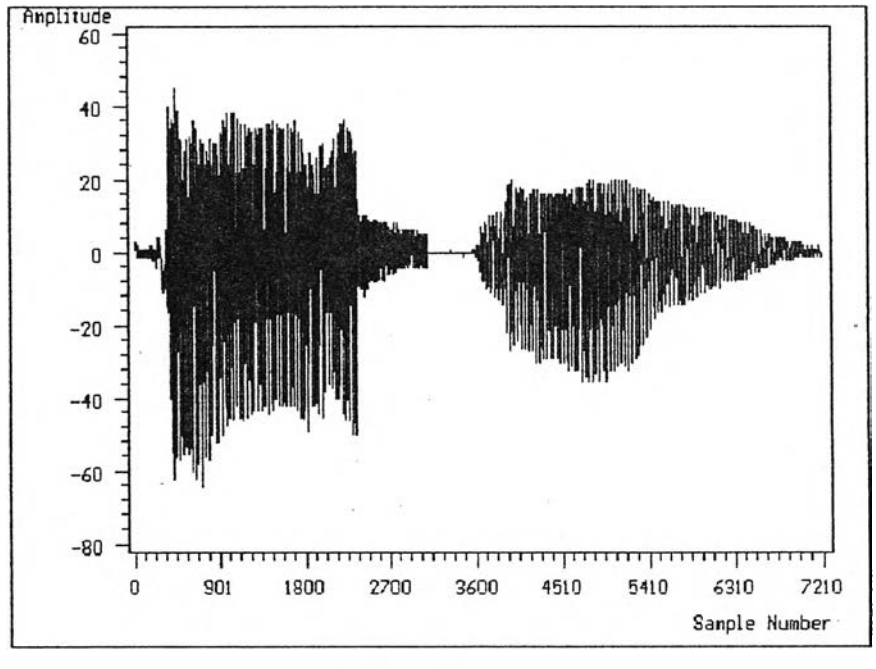
การวิเคราะห์วิธีนี้ ใช้วิเคราะห์สัญญาณ non stationary เช่น สัญญาณเสียง หรือสัญญาณเรดาร์ กรณีนี้สัญญาณที่จะนำมาวิเคราะห์จะต้อง LOAD มาจากภายนอก สัญญาณที่นำมาทดสอบจะเป็นสัญญาณเสียงที่บันทึกโดยใช้ sound blaster แต่สัญญาณเสียงที่บันทึกจากการ์ด sound blaster จะมีแอมปลิจูดเป็นค่าบวกทั้งหมดและมีส่วน header ด้วย ดังนั้นในการนำมาใช้งาน จะทำการเปลี่ยนแอมปลิจูดให้มีทั้งค่าบวกและค่าลบเนื่องจากสัญญาณเสียงจริงจะมีแอมปลิจูดทั้งบวกและลบรวมทั้งตัดส่วน header ทิ้งไป โดยใช้โปรแกรม change.c จึงจะสามารถนำมาวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม PSA ได้ ประมาณว่าสัญญาณเสียงจะมีคุณสมบัติของสัญญาณคงที่ในช่วงเวลาสั้น ๆ 30 หรือ 40 msec การเลือกวินโดว์เพื่อแยกสัญญาณออกเป็นส่วน ๆ แล้วประมาณว่าสัญญาณแต่ละส่วนจะมีคุณสมบัติของสัญญาณคงที่นั้นต้องเลือกความยาวของวินโดว์ให้พอเหมาะไม่ยาวเกินไปซึ่งอาจจะทำให้ผลการวิเคราะห์ผิดพลาดได้

ฟังก์ชันที่ใช้ในการวิเคราะห์ spectrogram ของโปรแกรม PSA ได้เขียนขึ้นจากสมการ(4.1.2.4) การวิเคราะห์วิธีนี้จะเลือกจากรายการ "Spectrogram" เมื่อเลือก

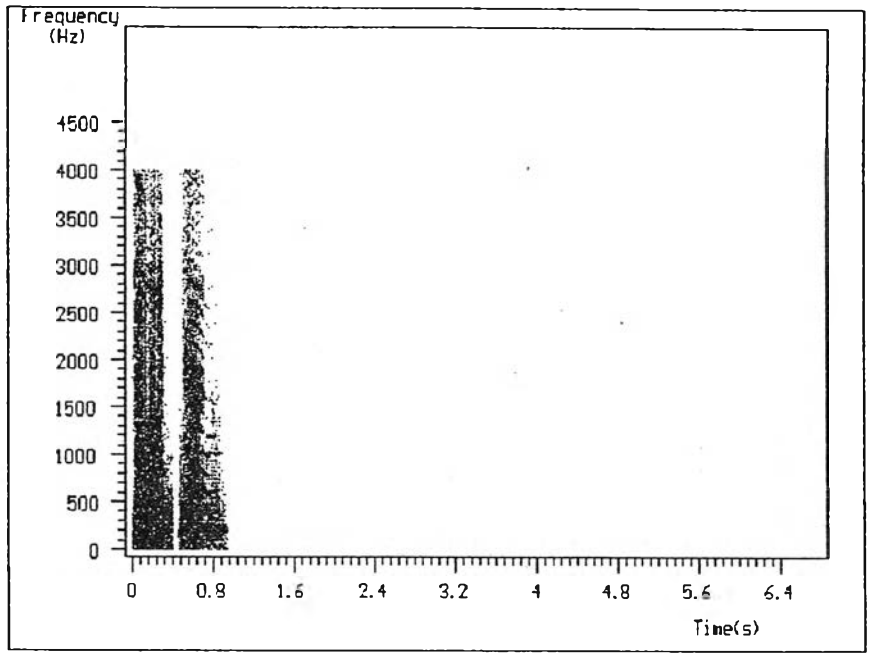
จะมีรายการย่อยขึ้นมาดังรูป 4.2.2.1 เพื่อให้เลือกว่าจะใช้วินโดว์แบบใด,ความยาววินโดว์เท่าไร,และความยาวของข้อมูลที่จะทับซ้อนกัน(overlap) เท่าไร ความยาวของวินโดว์จะเป็นความยาวจริงของสัญญาณข้อมูลแต่ละส่วนที่นำมาทรานส์ฟอร์มแต่ความยาวข้อมูลที่จะทรานส์ฟอร์ม(N) จะเท่ากับ 512 (คงที่ตลอดเนื่องจากข้อจำกัดในการแสดงผล, ความยาวของวินโดว์จึงต้องไม่เกิน 512) และค่า R ซึ่งเป็นระยะที่วินโดว์เลื่อนในแต่ละครั้งจะเท่ากับความยาวของวินโดว์ลบกับความยาวของข้อมูลที่ทับซ้อนกันถ้าเลือกให้ความยาวของข้อมูลที่ทับซ้อนกันเท่ากับศูนย์คือ R=L นั่นเอง ข้อมูลในช่วง [L,N-1] จะใช้หลักการ "zero padding"



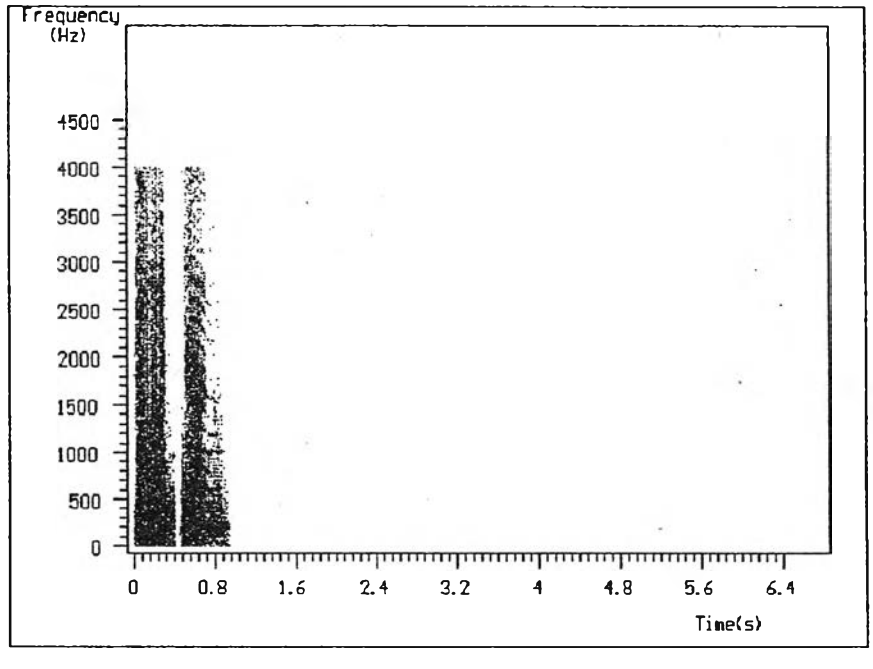
รูปที่ 4.2.2.1 แสดงรายการย่อยเมื่อเลือกรายการ "Spectrogram"



รูปที่ 4.2.2.2 แสดงสัญญาณเสียง "ศูนย์ หนึ่ง" ที่บันทึกโดยใช้การ์ด sound blaster



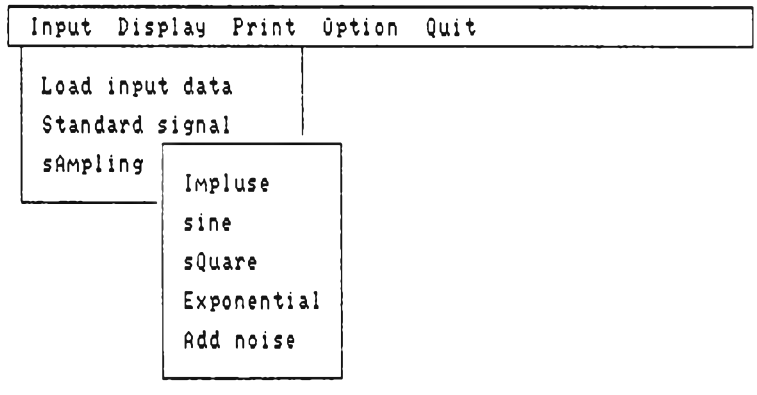
รูปที่ 4.2.2.3 แสดง spectrogram ของสัญญาณเสียงในรูป 4.2.2.2 โดยใช้ rectangular วินโดว์ ความยาว L=200 จำนวนข้อมูลที่ทับซ้อนกันเท่ากับ 120 วิเคราะห์โดยใช้ FHT



รูปที่ 4.2.2.4 แสดง spectrogram ของสัญญาณเสียงในรูป 4.2.2.2 โดยใช้ rectangular วินโดว์ ความยาว L=200 จำนวนข้อมูลที่ทับซ้อนกันเท่ากับ 120 วิเคราะห์โดยใช้ FFT

4.2.3 วิธีการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังในรูป periodogram

การวิเคราะห์วิธีนี้ ใช้วิเคราะห์สัญญาณ stationary โดยเฉพาะสัญญาณ stationary random process โดยที่สัญญาณ stationary random นั้นโปรแกรม PSA สามารถสร้างจากสัญญาณมาตรฐานบวกกับสัญญาณ gaussian noise (pseudo zero mean gaussian white noise จาก [18]) โดยเลือกสัญญาณมาตรฐานก่อนแล้วจึงเลือกรายการ "Add noise" แสดงดังรูป 4.2.3.1



รูปที่ 4.2.3.1 แสดงรายการย่อยของรายการ "Standard signal"

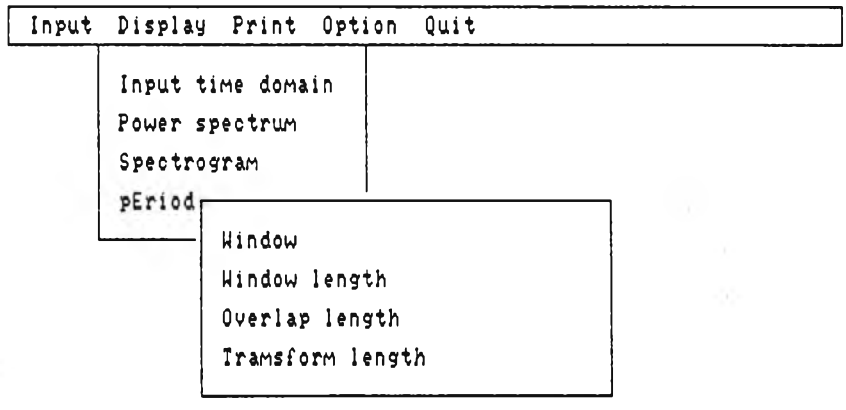
ฟังก์ชันที่ใช้ในการวิเคราะห์ periodogram ในโปรแกรม PSA ได้ทำการเขียนขึ้นจากสมการ(4.1.1.5) และสมการ(4.1.1.7) เมื่อเลือกรายการ "pEriodogram" จะมีรายการย่อยขึ้นมาให้เลือกดังรูปที่ 4.2.3.2 คล้ายกับรายการย่อยของ "Spectrogram" ต่างกันตรงมีความยาวของข้อมูลที่จะทำการทรานส์ฟอร์มให้เลือก เพราะกรณีเช่นนี้ความยาวของข้อมูลที่จะทรานส์ฟอร์ม(N) ไม่จำเป็นต้องคงที่ การเลือกจึงต้องเลือกให้

$$N \geq L \geq \text{จำนวนข้อมูลที่ทับซ้อนกัน}$$

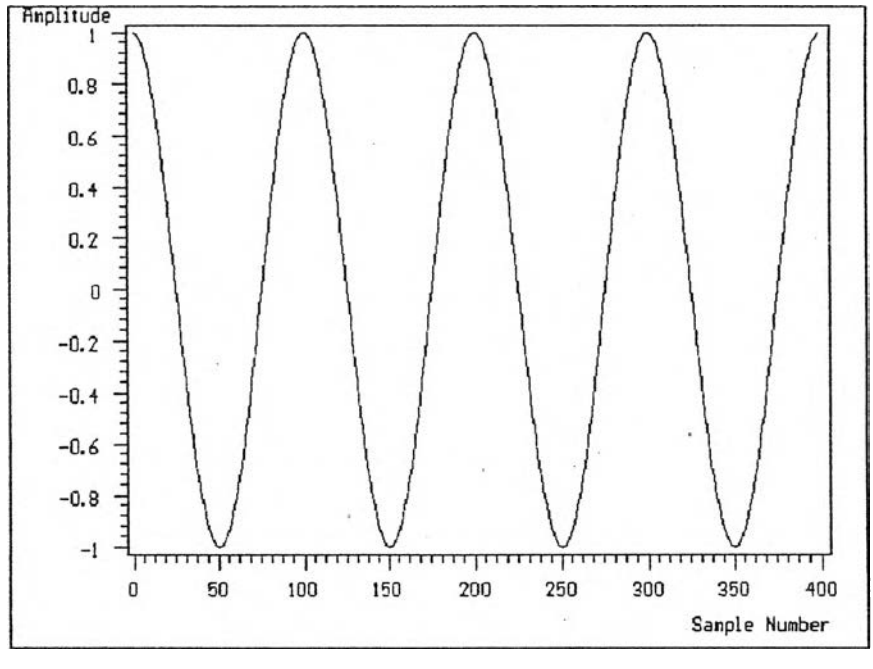
สำหรับสัญญาณ stationary random ที่เป็นสัญญาณมาตรฐานรวมกับสัญญาณ white noise ในเชิงเวลาจะมองไม่เห็นสัญญาณเมื่อนำมาวิเคราะห์โดยใช้ periodogram จะทำให้สามารถ detect สัญญาณได้

สัญญาณรบกวนที่ใช้จะเป็นสัญญาณ zero mean gaussian random process จาก [18] ซึ่งในการใช้งานจะทำการบวกเข้ากับสัญญาณมาตรฐาน โดยจะสามารถกำหนดให้อยู่ในรูปที่ทำให้ค่า SNR แสดงดังสมการ(4.2.3.1) [5],[11] มีค่าต่าง ๆ

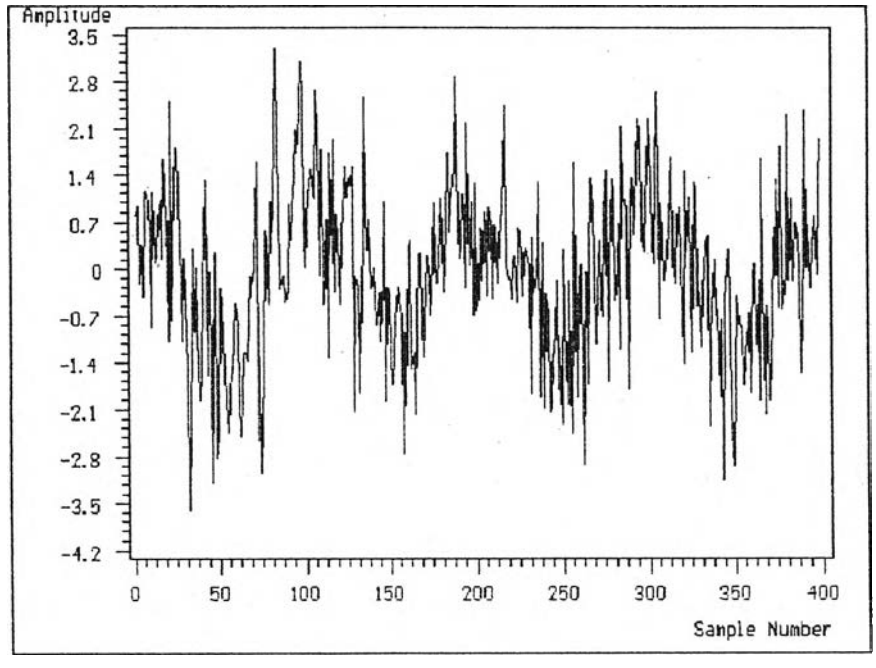
$$SNR = 10\log\left[\frac{\text{variance of input}}{\text{variance of noise}}\right] \qquad \text{(dB)} \qquad (4.2.3.1)$$



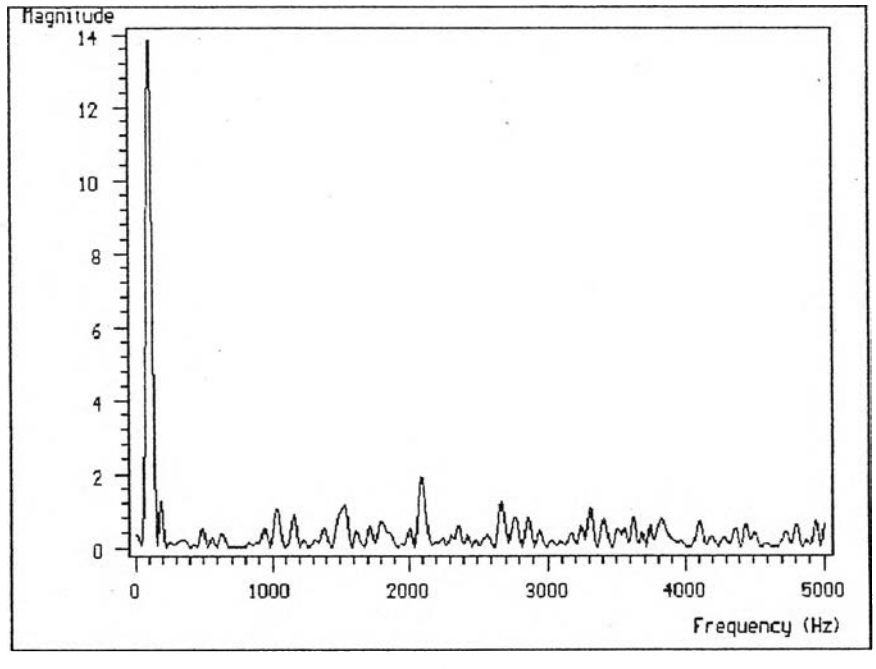
รูปที่ 4.2.3.2 แสดงรายการย่อยเมื่อเลือกรายการ "pEriodogram"



รูปที่ 4.2.3.3 แสดงสัญญาณมาตรฐาน sinewave ที่เลือกจากรายการ "Input"
โดยมีจำนวนข้อมูล Q=400 แอมปลิจูด 1 หน่วย ความถี่ 100Hz

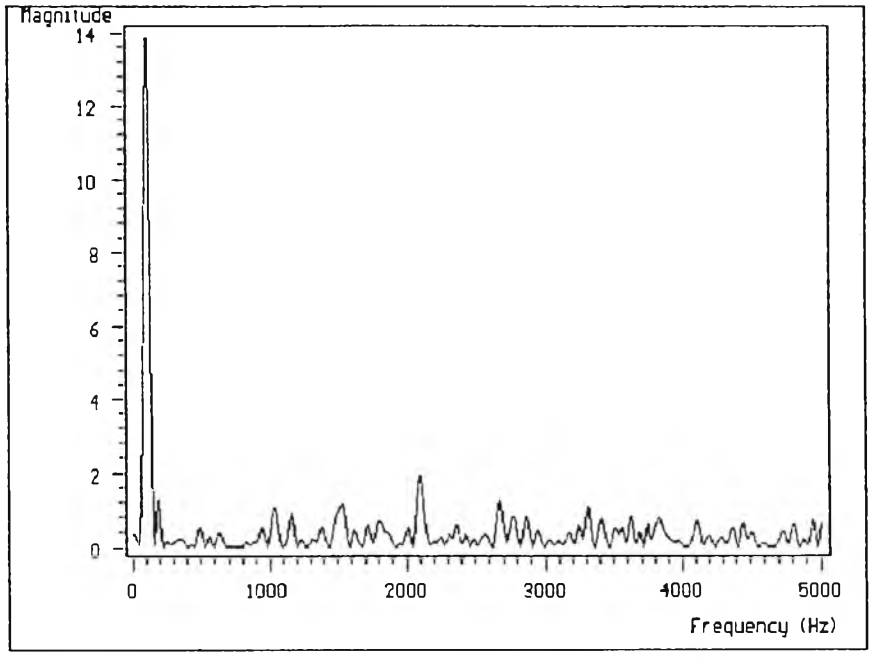


รูปที่ 4.2.3.4 แสดงสัญญาณ sinewave ในรูป 4.2.3.3 บวกสัญญาณ white noise ที่ทำให้ค่า SNR = -3 dB



รูปที่ 4.2.3.5 แสดง periodogram ของสัญญาณรูป 4.2.3.4 เมื่อเลือก rectangular วินโดว์ L=200, N=1024 จำนวนข้อมูลที่ทับซ้อนเท่ากับ 100 วิเคราะห์โดยใช้ FHT

i17138970x



รูปที่ 4.2.3.6 แสดง periodogram ของสัญญาณรูป 4.2.3.4 เมื่อเลือก rectangular วินโดว์ L=200, N=1024 จำนวนข้อมูลที่ทับซ้อนเท่ากับ 100 วิเคราะห์โดยใช้ FFT