บทที่ 2

โปรแกรมสปีดอัพ

2.1 บทนำ

การเลียนแบบกระบวนการ เป็นการพยากรณ์ว่าพฤติกรรมของกระบวนการจะเป็นอย่างไรภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดไว้ โดยทั่วไปจะใช้การกำหนดค่าตัวแปรทางด้านอินพุท และข้อมูลเกี่ยวกับขนาดของอุปกรณ์ต่างๆ ในกระบวนการที่กำลังศึกษา แล้วทำการคำนวณหาค่าของตัวแปรทางด้านเอาท์พุท ซึ่งการทำเช่นนี้จะทำให้สามารถคำนวณหรือพยากรณ์ความสามารถของกระบวนการที่กำลังศึกษาอยู่

กระบวนการอุตสาหกรรม อาจจะเป็นกระบวนการในเชิงสถานะคงตัวหรือไม่ก็ได้ กระบวนการในเชิงสถานะคงตัวไม่จำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขของการเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับเวลา สำหรับกระบวนการที่ไม่ได้ทำงานที่สถานะคงตัวหรือเป็นกระบวนการในเชิงพลวัต ซึ่งมักจะเป็นกรณีที่พบในตอนเริ่มทำงาน จึงจำเป็นต้องศึกษาพลวัตของระบบด้วย การเลียนแบบ เพื่อดูพลวัตของกระบวนการก็เป็นสิ่งที่มีความสำคัญมาก เพราะจะเป็นสิ่งที่ชี้ให้เห็นถึงความคงตัว ความเชื่อถือได้ และความปลอดภัยในการปฏิบัติการของกระบวนการนั้นๆ

ในปัจจุบัน ได้มีการพัฒนาซอฟท์แวร์ที่ใช้สำหรับกระบวนการทางวิศวกรรมหรืออุตสาหกรรม ทั้งเพื่อการศึกษาวิจัย หรือใช้งานจริงในภาคอุตสาหกรรมจำนวนมาก ซอฟท์แวร์เหล่านี้สามารถใช้เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการเลียนแบบ โดยทำงานบนคอมพิวเตอร์ ซึ่งสามารถทำงานคำนวณซ้ำแล้วซ้ำอีกได้โดยใช้เวลาไม่มากนัก ดังนั้นจึงสามารถเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของการปฏิบัติการ (ข้อมูลด้านอินพุท) หรือ ขนาดของอุปกรณ์ในกระบวนการแล้วทำการคำนวณเปรียบเทียบผลที่ได้ ข้อมูลเหล่านี้ก็สามารถนำมาใช้พิจารณาในการออกแบบกระบวนการได้เช่นกัน

2.2 โปรแกรมสปีดอัพ (SPEEDUP)

SPEEDUP ย่อมาจาก Simulation Program for the Evaluation and Evolutionary Design of Unsteady Processes เป็นโปรแกรมการเลียนแบบที่สามารถใช้เลียนแบบกระบวนการทางเคมีทั้งในเชิงสถานะคงตัวและในเชิงพลวัต งานวิจัยที่ใช้สปีดอัพได้เริ่มต้นที่Imperial College กรุงลอนดอน ในปีค.ศ. 1958 และได้มีการพัฒนาโปรแกรมสปีดอัพนี้ในเวลาต่อมา (Sargent, Perkins, and Thomas, 1982) และในปัจจุบันได้รับการพัฒนาจาก Aspen Technology (Aspen Technology, Inc., 1993)

Perkins และ Sargent (1982) ได้เสนอถึงรูปแบบในการอินพุท และอธิบายสมการในเชิงตัวเลข (Numerical) ที่ใช้ในการหาคำตอบของสมการพีชคณิตที่เกิดขึ้นจากการเลียนแบบเชิงสถานะคงตัว รวมทั้งใช้ในการแก้ปัญหาการออกแบบ หลังจากปี 1983 วิธีการใหม่ๆ ได้ถูกดัดแปลงขึ้นเพื่อให้สามารถนำไปใช้งานกับระบบสมการพีชคณิตที่ใหญ่ขึ้นได้

นอกเหนือจากความสามารถแบบเชิงสถานะคงตัวแล้ว สปีดอัพยังมีความสามารถพิเศษในการนำไปใช้แสดงลักษณะการเลียนแบบเชิงพลวัต ยิ่งกว่านั้น ยังสามารถนำไปใช้ในการช่วยและวินิจฉัยลักษณะทางข้อมูล, การแสดงผล, การเก็บค่าและแก้ไขผลที่ได้จากการเลียนแบบ

2.2.1 การเลียนแบบเชิงสถานะคงตัว (Steady-state simulation)

- ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับจากการเลียนแบบเชิงสถานะคงตัวและการออกแบบ คือ การหาคำตอบเซตของสมการพีชคณิตที่มีความสัมพันธ์ในลักษณะที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear algebraic equation) ซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

เมื่อ x คือ เวกเตอร์ที่แท้จริงมีมิติ n

f คือ กลุ่มฟังก์ชันที่มีมิติ m ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n ที่เกิดขึ้นจากรูปแบบจำลองทางกายภาพของโรงงาน

ซึ่งในการที่จะหาคำตอบของสมการที่ (1) ได้ในรูปเซตของสมการพีชคณิต เซตของค่า $n - m$ ซึ่งอยู่ในรูปของ

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{W} \qquad (2)$$

จะต้องสอดคล้องกับสมการที่ (1)

โดยที่ W คือ เวกเตอร์ที่แท้จริงในมิติ $n - m$

M คือ เมตริกซ์ $(n - m) \times n$ ซึ่ง

$$Mij \in \{0, 1\}, \quad \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1 \quad \text{สำหรับ } i = 1,\ldots n-m \tag{3}$$

สปีดอัพได้เพิ่มระบบเพื่อหาค่าของสมการที่ (1), (2) โดยการกำหนดขอบเขตของตัวแปรในระบบดังนี้

$$L \leq X \leq U \tag{4}$$

โดยค่าขอบเขตดังกล่าวถูกนำมาใช้แสดงถึงคุณสมบัติทางกายภาพที่ต้องการ เช่น ลักษณะการไหลที่ไม่เป็นค่าลบ

2.2.2 วิธี เชิงตัวเลข (Numerical method)

วิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในการแก้ปัญหาสมการที่ (1)-(3) คือ วิธีของNewton, วิธีของ Brown, วิธีของ Brent เป็นต้น

ซึ่งการแก้ปัญหาทำได้โดยการทำจากสมการไม่เชิงเส้นสมการที่ (1) ให้เป็นสมการเชิงเส้น (Linearization) หลังจากนั้น ทำการหาคำตอบต่อไป ในการทำให้สมการเป็นสมการเชิงจำเป็นต้องทำการหาค่าหรือค่าประมาณของอนุพันธ์ย่อย ($\partial f_i / \partial x_j$)

ความจำเป็นในการต้องการข้อมูลทางด้านการหาอนุพันธ์ย่อยแสดงให้เห็นถึงปัญหาที่สำคัญของสปีดอัพ ซึ่งถึงแม้ว่าจะมีความสะดวกสบายในด้านภาษาที่ใช้ในการป้อนข้อมูล, การอนุญาตให้ผู้ใช้นิยามรูปแบบของกระบวนการใหม่ โดยการทำงานที่น้อยกว่าการเขียนสมการเพื่ออธิบายกระบวนการ ความต้องการให้ผู้ใช้ป้อนข้อมูลเกี่ยวกับอนุพันธ์ย่อยด้วยตัวเองในบางครั้งอาจจะยอมรับไม่ได้ทั้งในเรื่องของความพยายามในการหาคำตอบและโอกาสที่จะผิดพลาดซึ่งเป็นข้อด้อยในการนิยามรูปแบบอย่างง่ายของโปรแกรม

วิธีเชิงตัวเลขในสปีดอัพ แต่เดิมอาศัยวิธี quasi-Newton ที่ไม่จำเป็นต้องใช้ข้อมูลในการวิเคราะห์ทางอนุพันธ์ย่อย ต่อมาจึงได้รับการพัฒนาโดย Palosci (1982) เป็นวิธี least-change secant โดยอาศัยพื้นฐานสมการของ Broyden และต่อมาในปี 1983 Bogle ได้ประยุกต์โดยใช้แนวความคิดที่คล้ายคลึงกันเพื่อใช้งานกับระบบที่ใหญ่ขึ้นโดยสร้างขึ้นจากวิธีของ Schubert (1970) ซึ่งวิธีของ Schubert ดังกล่าวก็ได้เป็นพื้นฐานในการทำงานของ Chen และ Stadtherr ในปี 1984 เช่นเดียวกัน

2.2.3 วิธีการ (Procedure)

นอกเหนือจากสมการทั่วไปแล้ว โปรแกรมสปีดอัพสามารถเขียนสมการของระบบในรูปของวิธีการ เช่น การใช้ภาษาฟอร์แทรน (Fortran) โดยการป้อนตัวแปรของปัญหา คือ อินพุทของวิธีการ (Procedure input) เข้าไป และคำนวนผลลัพธ์ที่ได้ คือ เอาท์พุทของวิธีการ (Procedure output) ออกมา ซึ่งพบว่าการใช้วิธีการ ดังกล่าวมีข้อดีหลายประการคือ

- สามารถนำมาใช้อธิบายที่มาของสมการได้
- สามารถคำนวนเอาท์พุท ที่ประกอบด้วยตัวแปรหลายตัวได้

การใช้วิธีการ ดังกล่าวอาศัยความจริงที่ว่าไม่สามารถคำนวนอนุพันธ์ย่อยโดยวิธีวิเคราะห์ (Analytical) ได้ ดังนั้นจึงต้องทำการประมาณโดยใช้วิธีเชิงตัวเลข

การทำงานในทุกโหมดในสปีดอัพ สมการจะใช้ระบบซิมโบลิกดิฟเฟอเรนทิเอชัน (Symbolic differentiation) ระบบดังกล่าวนี้ จะทำการวิเคราะห์สมการอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งต่อมาจะถูกนำมาใช้ในช่วงการแก้ปัญหา ทำให้การทำการ

เลียนแบบ เกิดได้เร็วและมีประสิทธิภาพสูงกว่าการนำวิธีอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical derivatives) มาใช้

นอกจากนี้ สปีดอัพยังสามารถนำมาเชื่อม ต่อ กับโปรแกรมที่ประกอบไปด้วยซับรูทีน (Subroutines) อื่นๆ ตามที่ต้องการได้ ซึ่งอาจจะรวมถึงซับรูทีนที่ผู้ใช้เขียนขึ้น หรือซับรูทีนที่แสดงสมบัติทางกายภาพ (Physical properties subroutines)

รูปที่ 2.1 แสดงการบรรยายขั้นตอนการทำงานของสปีดอัพ เมื่อผู้ใช้ป้อนข้อมูลหรือรายละเอียดของปัญหาเข้ามาทางอินพุท หรืออาจสร้างรายละเอียดของปัญหาโดยใช้ตัวแก้ไข ซึ่งเป็นไฟล์ข้อมูลที่อยู่นอกสปีดอัพ ส่วนนี้ เรียกว่า อินพุทไฟล์ (Input file) จากนั้นเอ็ดเซทดูทีฟ และตัวแปล จะทำการแปลความหมาย แล้วจึงทำการเก็บรายละเอียดของปัญหาดังกล่าวไว้ในฐานข้อมูล

2.2.4 การเฉียนแบบเชิงพลวัต

- ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในกรณีการเลียนแบบเชิงพลวัต เป็นทำการแก้ปัญหาในลักษณะที่ผสมกันระหว่างสมการอนุพันธ์ กับสมการพีชคณิต (Differential and algebraic equation) ซึ่งอยู่ในรูป

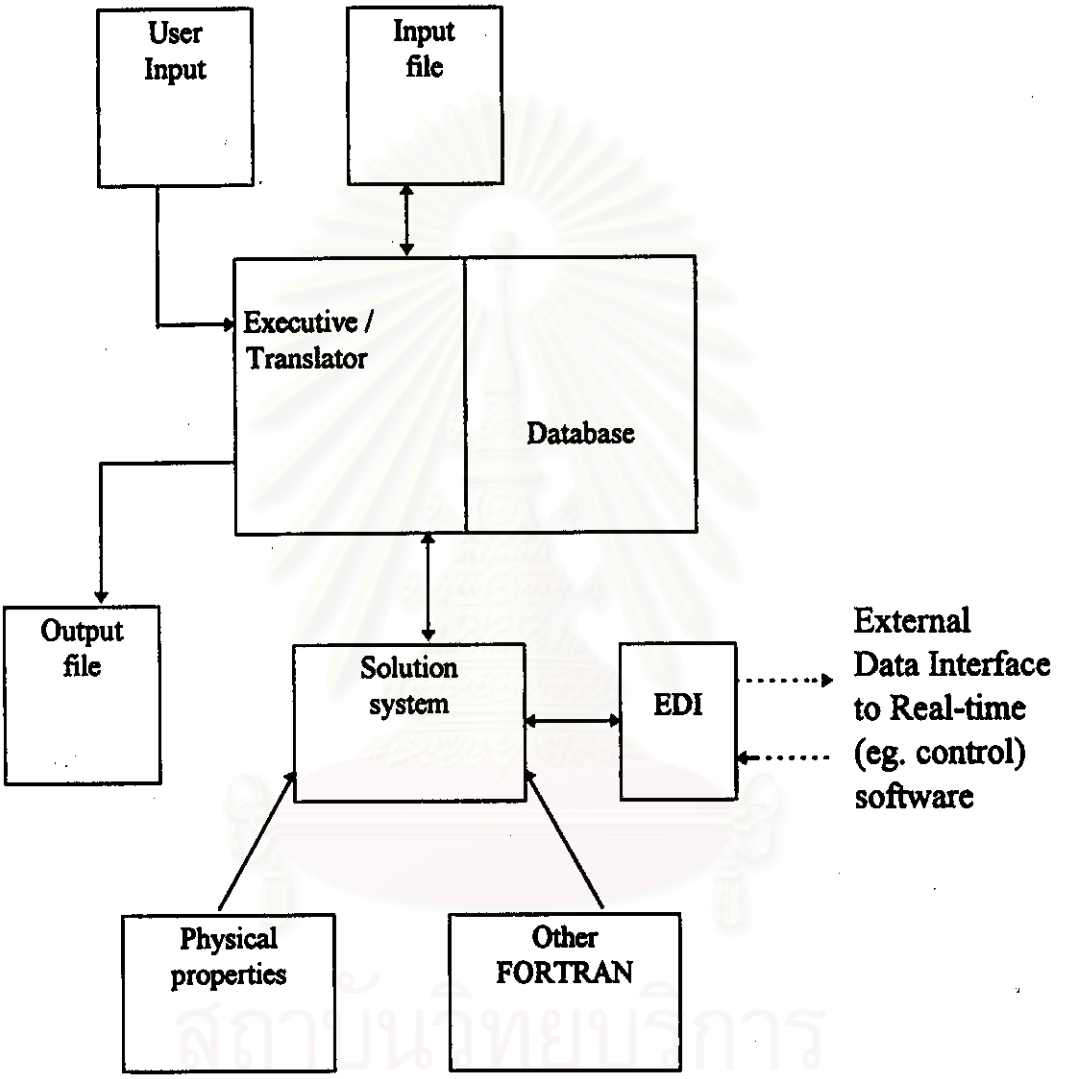
$$f(x, \dot{x}, y, u, t) = 0 \qquad (5)$$

$$g(x, y, u, t) = 0 \qquad (6)$$

โดยสมการที่ (5) คือ สมการอนุพันธ์ สมการที่ (6) คือ สมการพีชคณิต

เมื่อ t คือ เวลา

x, y, u คือ ตัวแปรเชิงอนุพันธ์, เชิงพีชคณิต และตัวแปรที่ใช้ในการควบคุมซึ่งมีมิติ n, m และ p ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 แสดงการบรรยายขั้นตอนการทำงานของสปีดอัพ

สำหรับปัญหาทางการเลียนแบบเชิงพลวัต โดยปกติการเปลี่ยนแปลงค่าของเวลาที่ใช้ในการควบคุม, $u(t)$ จะถูกระบุโดยผู้ใช้ ในขณะที่ตัวแปรเชิงอนุพันธ์, เชิงพีชคณิต $x(t)$ และ $y(t)$ จะถูกคำนวนออกมา สำหรับตัวแก้ปัญหา DAE ในสปีดอัพ อาศัยพื้นฐานวิธีของ Gear ในปี 1971 (Gear's multistep method) ซึ่งมีประโยชน์ในกรณีที่ระบบไม่ยุ่งยากซับซ้อน

2.2.5 การเริ่มต้นแก้โจทย์ปัญหาสำหรับระบบ DAE

ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งสำหรับระบบ DAE คือการระบุสภาวะเริ่มต้น

สำหรับในกรณีปัญหา ODE ซึ่งอยู่ในรูป

$$\dot{x} = f(x) \tag{7}$$

สภาวะเริ่มต้น (Initial condition) มักจะเป็นค่าของตัวแปร x ที่เวลาเท่ากับศูนย์ ซึ่งหลักการดังกล่าวนำมาประยุกต์ใช้กับระบบ DAE ได้เป็นอย่างดี

ในที่นี้ จะแสดงตัวอย่างสปีดอัพของถังผสม โดยตัวแปรเชิงอนุพันธ์ คือ โฮลด์-อัพ แบบโมลาร์ในถัง ซึ่งสามารถระบุสภาวะเริ่มต้นโดยการประยุกต์นำค่าอนุพันธ์เวลา ($\dot{x}$) ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงอนุพันธ์มาใช้ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วในการระบุสภาวะเริ่มต้นที่พบกันมากจะอยู่ในรูปของ

$$\dot{x} = 0 \tag{8}$$

เช่น ในสถานะคงตัว

หรืออาจให้สภาวะเริ่มต้น คือ ค่าเริ่มต้น { x(0), $\dot{x}$ (0), y(0) } ที่สอดคล้องกับสมการที่ (5) และ (6) ที่เวลาเริ่มต้น ซึ่งในระบบ DAE ทั่วไปจัดว่าเป็นสภาวะที่พอเพียงแล้ว

สำหรับในสปีดอัพ จะอนุญาตให้ผู้ใช้ระบุค่าเริ่มต้นสำหรับตัวแปร { x, $\dot{x}$, y } โดยผู้ใช้จะต้องเดาค่าเริ่มต้นสำหรับตัวแปรในขั้นตอนแรก ดังนั้นตัวแปรที่ปรากฏในโฟล์ชีท แบ่งออกเป็น 3 อย่าง คือ

- ตัวแปรที่ไม่เปลี่ยนค่าไปตามเวลา

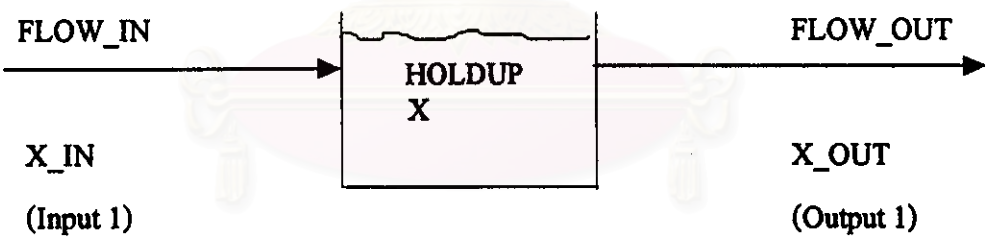
- ตัวแปรที่มีการระบุค่าเริ่มต้น

- ตัวแปรที่มีการระบุค่าโดยการเดาค่าเริ่มต้น

2.2.6 การป้อนข้อมูลสำหรับในกรณีการเลียนแบบเชิงพลวัต

การป้อนข้อมูลในสปีดอัพ จะอนุญาตให้ผู้ใช้นิยามรูปแบบเชิงพลวัต ได้เช่นเดียวกับในสถานะคงตัว โดยในที่นี้ จะยกตัวอย่างการเขียนแบบจำลองและการเลียนแบบเชิงพลวัต ที่เป็นถังผสม 1 ถัง สมมติว่ามีการผสมอย่างสมบูรณ์ดี สารผสมที่ใช้เป็นสารสององค์ประกอบ อินพุทที่เข้าสู่ถังและเอาท์พุทที่ออกจากถังมีอย่างละหนึ่งสาย โดยจะไม่พิจารณาผลของสิ่งอื่นๆ แบบจำลองนี้ พิจารณาเป็นในเชิงพลวัต

จากข้อสมมติที่ตั้งขึ้น จึงนำมาเขียนเป็นแบบจำลอง ได้ดังนี้



รูปที่ 2.2 แสดงอินพุทและเอาท์พุทของถังผสม

สมการสมดุลในเชิงพลวัต เขียนได้ ดังนี้

$$\text{INPUT} - \text{OUTPUT} = \text{ACCUMULATION}$$

สมการสมดุลมวลสารทั้งหมด คือ

$$\text{FLOW_IN} - \text{FLOW_OUT} = \frac{d}{dt}\text{HOLDUP}$$

สมการสมดุลส่วนประกอบ คือ

$$\text{FLOW_IN} * \text{X_IN} - \text{FLOW_OUT} * \text{X_OUT} = \frac{d}{dt}(\text{HOLDUP} * \text{X})$$

เมื่อตัวแปรต่างๆ คือ

FLOW_IN.....อัตราการไหลแบบโมลาร์ที่เข้าถัง

FLOW_OUT.....อัตราการไหลแบบโมลาร์ที่ออกจากถัง

X_IN.....เศษส่วนโมลของส่วนประกอบที่ไหลเข้าถัง

X_OUT .....เศษส่วนโมลของส่วนประกอบที่ไหลออกจากถัง

X.....เศษส่วนโมลของส่วนประกอบบัลค์ในถัง

HOLDUP.....โฮลด์อัพแบบโมลาร์ในถัง

โดยใช้สมมติฐานว่าเป็นการผสมอย่างสมบูรณ์ จะได้สมการ คือ X_OUT = X

จากรายละเอียดทั้งหมด นำมาการเขียนแบบจำลองในโปรแกรมสปีดอัพในส่วนของโมเดล (Model section) ได้ดังนี้

```
MODEL   REACTOR
SET   NOCOMP
TYPE
  FLOW_IN, FLOW_OUT              as  FLOW_MOL
  X_IN, X_OUT, X              as  ARRAY(NOCOMP) OF MOLEFRACTION
  HOLDUP                         as  HOLDUP_MOL
STREAM
  INPUT 1        FLOW_IN, X_IN
  OUTPUT 1       FLOW_OUT, X_OUT
EQUATION
 # OVERALL MATERIAL BALANCE #
  FLOW_IN - FLOW_OUT = $HOLDUP;
 # COMPONENT MATERIAL BALANCE #
  FLOW_IN * X_IN - FLOW_OUT * X_OUT = HOLDUP * $X + X * $HOLDUP;
 # ASSUME THAT THE TANK IS PERFECTLY MIXED #
  X_OUT = X;
```

ค่า อนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลาของตัวแปรจะสังเกตได้โดยการใช้สัญลักษณ์ "$" นำหน้าชื่อตัวแปรนั้น สปีดอัพจะไม่มีข้อจำกัดของรูปแบบสมการที่ใช้อธิบายระบบสมการที่ประกอบไปด้วยค่า อนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลา 1 ตัวหรือมากกว่า ทั้งในกรณีที่เป็นแบบเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้นจะทำงานได้โดยตัวตัวแปลอินพุท (Input translator) และมีการใช้รูทีนเชิงตัวเลข (Numerical routine) เข้าช่วย

สำหรับลักษณะของตัวแปรที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าจะระบุลงในส่วนของโอเปอร์เรชัน (Operation Section) ซึ่งในส่วนของโอเปอร์เรชัน จะประกอบไปด้วย 3 ส่วนย่อย คือ

1 ส่วน SET จะระบุค่าตัวแปรที่ไม่เปลี่ยนค่าตามเวลา

2 ส่วน INITIAL จะระบุสภาวะเริ่มต้นของระบบ

3 ส่วน PRESET จะเป็นการเดาค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่เหลือ

จากรายละเอียดทั้งหมด นำมาการเขียนแบบจำลองในโปรแกรมสปีดอัพในส่วนของโอเปอร์เรชัน ได้ดังนี้

```
OPERATION
 SET
   WITHIN REACTOR
    FLOW_IN = 10.0
    X_IN(1) = IF T<10 THEN 0.5 ELSE 0.75 ENDIF
    X_IN(2) = IF T<10 THEN 0.5 ELSE 0.25 ENDIF
    HOLDUP = 100.0
 INITIAL
   WITHIN REACTOR
    $X = 0.0
    $HOLDUP = 0.0
```

2.2.8 ฐานข้อมูลของสปีดอัพ และการทำงานของสปีดอัพ

ในส่วนนี้จะกล่าวสรุปถึงรายละเอียดในการทำงานของสปีดอัพ ซึ่งเป็นลักษณะการทำงานร่วมกัน จัดว่าค่อนข้างแตกต่างจากตัวทำการเลียนแบบอื่นๆ โดยทั่วไปการเก็บข้อมูลในสปีดอัพจะอยู่ในลักษณะไฟล์ฐานข้อมูล การทำงานของสปีดอัพจะอนุญาตให้ผู้ใช้สร้าง เก็บ หรือปรับปรุงส่วนใดๆ ในอินพุท ในความเป็นจริงแล้ว พบว่าฐานข้อมูลของสปีดอัพสามารถเก็บรายละเอียดของปัญหาได้มากกว่า 1 ปัญหา โดยในเวลาใดๆ ปัญหาที่ใช้งานอยู่จะอยู่ในส่วนหน้า (Foreground) ของฐานข้อมูล ในขณะที่ส่วนอื่นๆ จะถูกเก็บอยู่ในส่วนหลัง (Background) การเปลี่ยนแปลงใดๆ จะทำได้ในปัญหาที่อยู่ในส่วนหน้าเท่านั้น ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนปัญหาจากส่วนหน้า มาเป็นส่วนหลังได้ หรือคัดลอกส่วนใดๆ ของปัญหาหนึ่งไปยังปัญหาอื่นๆ ได้ โดยการใช้คำสั่งที่เหมาะสม

ส่วนที่สำคัญของระบบโฟล์ชีทติง คือ ส่วนที่เป็นแหล่งรวมของรูปแบบจำลอง (Library of model) สปีดอัพจะประกอบไปด้วยแหล่งรวมของรูปแบบจำลองทั้งในเชิงสถานะคงตัวและเชิงพลวัต แหล่งรวมทั้งสองจะช่วยแก้ปัญหาที่เก็บอยู่ที่ฐานข้อมูล นอกจากการใช้แหล่งรวมของข้อมูลที่มีอยู่ในการแก้ปัญหาแล้ว ผู้ใช้ยังสามารถทำการดัดแปลงแหล่งรวมของรูปแบบจำลองที่มีอยู่หรือทำการเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง

การจัดการฐานข้อมูลเป็นเพียงหน้าที่หนึ่งของสปีดอัพ นอกจากนี้หน้าที่ ได้แก่

1 ทำการเปลี่ยนรูปแบบของการเลียนแบบไปเป็นอย่างอื่น โดยใช้ปัญหาเดิม (เช่น เปลี่ยนจากในเชิงสถานะคงตัว เป็น เชิงพลวัต หรือ ทำการออบติไมซ์)

2 มีคำสั่งช่วย (Help)ในการอธิบายถึงรูปแบบที่ใช้ในการป้อนอินพุท (Input language)ของสปีดอัพ และคำสั่งที่ช่วยในการทำงานอื่นๆ

3 มีความสะดวกในด้านการแสดงผล โดยอนุญาตให้ผู้ใช้สามารถเลือกรูปแบบการแสดงผลได้ หรืออาจสร้างรูปแบบใหม่ได้ด้วยตนเอง

4 มีการแสดงผลทางด้านกราฟฟิก (Graphic) สำหรับผลทางด้านการเลียนแบบเชิงพลวัต

5. มีตัวช่วยในการวินิจฉัยปัญหา เป็นการช่วยผู้ใช้ ในกรณีที่เกิดปัญหาทางด้านการคำนวณเชิงตัวเลข ระหว่างทำการเลียนแบบ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย